ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

АПРОКСИМАЦИИ С РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНАТА РАВНИНА

Николай Руменов Икономов

ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

Научен ръководител:
проф. дмн Ралица Ковачева

София, 2016

Съдържание

Глава 1

Редове на апроксимации на Паде

В тази глава изследваме зависимостта на равномерното разпределение на точки на интерполация и максималната сходимост на редове на апроксимации на Паде. В първи и втори раздел разглеждаме многоточкови апроксимации на Паде, а в трети — обобщени апроксимации на Паде.

1.1 Многоточкови апроксимации на Паде с фиксирана степен на знаменателя

В този раздел изследваме зависимостта на равномерното разпределение на точки на интерполация и максималната сходимост на редове от многоточкови апроксимации на Паде.

1.1.1 Въведение

Нека E е компакт (ограничено и затворено множество) в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Нека неговото допълнение E^C е свързано и регулярно, в смисъл че E^C притежава класическа функция на Грийн $G(z) := G_E(z, \infty)$, с полюс в безкрайната точка (припомняме, че $G(z)$ е хармонична и положителна в $E^C \setminus \infty$ и е равна на нула по границата на E). Отбелязваме с Γ_σ линиите на ниво $G(z) = \log \sigma$, $\sigma > 1$, и с E_σ – вътрешността на Γ_σ [56].

Нека f е холоморфна функция (еднозначна аналитична функция или еднозначен клон на многозначна аналитична функция) върху E, по-нататък използваме означението $f \in \mathscr{H}(E)$. Въвеждаме понятието радиус на холоморфност $\tau_0 := \tau_0(f)$, т.е.

$$\tau_0 := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{H}(E_\tau)\}.$$

Нека m и κ са естествени числа, нека $\kappa > 1$. Казваме, че $f \in \mathscr{M}_m(E_\kappa)$, ако f може да бъде продължена като мероморфна функция в E_κ с не повече от m полюса (полюсите се броят с тяхната кратност). Аналогично на радиуса на холоморфност, въвеждаме радиус на m-мероморфност $\tau_m := \tau_m(f)$, т.е.

$$\tau_m := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{M}_m(E_\tau)\}.$$

Ако f не е холоморфна върху E, тогава полагаме $\tau_m = 1$.

Нека $\|\cdot\|_E = \max_{z\in E}|\cdot|$ е максималната норма на E.

Нека Π_n е класа на всички полиноми от степен най-много n и нека $\mathscr{R}_{n,m} := \{p/q, p \in \Pi_n, q \in \Pi_m, q \not\equiv 0\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ е класа на рационални функции от степени n и m, съответно на числителя и знаменателя.

Нека $q \in \Pi_m$ и $1 \le m_0 \le m$. Използваме нормализацията

$$q = \begin{cases} \prod_{k=1}^{m_0}(z-\xi_k)\prod_{k=m_0+1}^{m}(1-z/\xi_k^*) = \widetilde{q}q^*, & 1 \le m_0 < m, \\ \prod_{k=1}^{m}(z-\xi_k), & m_0 = m, \end{cases}$$

където $\xi_k \in G \cup E$ и $\xi_k^* \in F$.

Дефиниция 1 (Сходимист по m_1-мярка)**.** Въвеждаме понятието сходимост в m_1-мярка от [21]. Нека A е множество, такова че $A \subset \mathbb{C}$, нека $m_1(A) := \inf\{\sum_i |U_i|\}$, като инфимума е взет от всички покрития $\{U_i\}$ на A с кръгове U_i, където $|U_i|$ е радиуса на всеки кръг. Нека Ω е област в $\mathbb{C}$ и φ е непрекъсната функция, която е дефинирана в Ω и е със стойности в $\overline{\mathbb{C}}$. Казваме, че редицата от функции $\{\varphi_n\}$, мероморфни Ω, клони по m_1-мярка към φ върху компактни подмножества на Ω, ако за всеки компакт $K \subset \Omega$ и всяко $\varepsilon > 0$ имаме че

$$m_1(\{z \in K : |\varphi - \varphi_n| \ge \varepsilon\}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Дефиниция 2 (m_1-почти равномерна сходимост)**.** Ако за всеки компакт $K \subset \Omega$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува множество $K_\varepsilon \subset K$, такова че $m_1(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, както и че редицата $\{\varphi_n\}$ е равномерно сходяща в максималната норма към φ върху K_ε, то тогава редицата $\{\varphi_n\}$ е m_1-почти равномерно сходяща към φ върху компактни подмножества на Ω.

Известно е [21, Lemma 1], че ако редицата $\{\varphi_n\}$ е сходяща по m_1-мярка към φ върху компактни подмножества на Ω, всяко $\varphi_n \in \mathscr{M}_m(\Omega)$, и φ има точно m полюса в Ω, то тогава всички φ_n имат точно m полюса в Ω (при n достатъчно голямо), полюсите на $\{\varphi_n\}$ клонят към полюсите на φ (със съответните кратности), и редицата $\{\varphi_n\}$ е равномерно сходяща към φ върху компактни подмножества на област, която е Ω без полюсите на φ.

Припомняме понятието максимална сходимост на полиноми от [56, §4.7]. Нека S е регулярен компакт, означаваме с $G_S(z,\infty)$ функцията на Грийн с полюс в безкрайната точка, като $G_S(z,\infty)$ е дефинирана за допълнението на S. За число $\sigma > 1$ въвеждаме каноничната област S_σ спрямо $G_S(z,\infty)$, както следва:

$$S_\sigma := \{z,\ G_S(z,\infty) = \ln\sigma\}.$$

Нека $g \in \mathscr{H}(S)$, нека $\sigma_0 := \sigma_0(g)$ е радиусът на холоморфност спрямо $G_S(z, \infty)$, т.е.

$$\sigma_0 := \sup\{\sigma,\ g \in \mathscr{A}(S_\sigma)\}.$$

Казваме, че редицата от полиноми $\{p_n\}$ е максимално сходяща към g върху S, ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_S^{1/n} \le \frac{1}{\sigma_0}.$$

Когато интерполационните точки са екстремални спрямо S, то неравенството става на равенство [56, §4.7], т.е.

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_S^{1/n} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Също така, следното равенство важи за всеки компакт $K \subset S_{\sigma_0}$

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_K^{1/n} = \frac{e^{\|G_S(z,\infty)\|_K}}{\sigma_0}, \tag{1.1}$$

като наричаме това точна максималната сходимост.

Нека m е естествено число, въвеждаме отново радиус на m-мероморфност, $\sigma_m := \sigma_m(g)$ спрямо $G_S(z, \infty)$, като $\sigma_m(g) < \infty$. Казваме, че редицата от функции $\{r_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, m – фиксирано, $r_{n,m} = p_{n,m}/q_{n,m}$ е максимално сходяща към g върху S, ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} g - \widetilde{q}_{n,m} r_{n,m}\|_S^{1/n} \le \frac{1}{\sigma_m}.$$

Отново имаме точна максимална сходимост [21], аналогично на (1.1), т.е. за всеки компакт $K \subset S_{\sigma_m} \setminus S$, който не съдържа полюси на g, важи равенството:

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} g - \widetilde{q}_{n,m} r_{n,m}\|_K^{1/n} = \frac{e^{\|G_S(z,\infty)\|_K}}{\sigma_m}.$$

Обобщеният случай, когато степените на знаменателя на рационалната апроксимация се увеличават, може да се намери в [20].

Нека $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$ е безкрайна триъгълна таблица от точки, която няма точки на сгъстяване, външни за E (като всички точки на сгъстяване са върху E). Полагаме

$$\omega_n(z) := \prod_{k=1}^{n} (z - \beta_{n,k}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Точките $\{\beta_{n,k}\}$ се наричат екстремални спрямо E, ако

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n(z)\|_E^{1/n} = \operatorname{cap}(E),$$

където $\operatorname{cap}(E)$ е логаритмичния капацитет на E. Припомняме, че

$$\operatorname{cap}(E) := \exp\left(-\lim_{n\to\infty}(G(z) - \log|z|)\right).$$

Както е известно $\operatorname{cap}(E) > 0$ тогава и само тогава, когато E е регулярен компакт.

Нека сега $f(z) \in \mathscr{H}(E)$ и (n,m) е фиксирана двойка от естествени числа. Съществуват полиноми $p(z) \in \Pi_n$ и $q(z) \in \Pi_m$, такива че

$$h_{n,m} := \frac{q(z)f(z) - p(z)}{\omega_{n+m+1}(z)} \in \mathscr{H}(E). \tag{1.2}$$

Полагаме $\pi^{\beta}_{n,m}(f) = \pi^{\beta}_{n,m} := p(z)/q(z)$. Казваме, че $\pi^{\beta}_{n,m}(z)$ е β-многоточкова апроксимация на Паде към $f(z)$ от тип (n,m). Полагаме

$$\pi^{\beta}_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)},$$

където полиномите $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ нямат общ множител, и $Q_{n,m}(z)$ е със старши коефициент единица. Нулите на $Q_{n,m}(z)$ се наричат свободни полюси на $\pi^{\beta}_{n,m}(z)$. Известно е, че рационалната функция $\pi^{\beta}_{n,m}(z)$ винаги съществува и е еднозначно определена (виж [21], [32]).

Теорема 1 (Гончар [21])**.** *Нека E е регулярен компакт в $\mathbb{C}$ със свързано допълнение, и нека точките $\{\beta_{n,k}\}$ са екстремални спрямо E. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна върху E. Нека $m \in \mathbb{N}$ е фиксирано число, като $\tau_m < \infty$. Тогава редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е максимално сходяща към $f(z)$ върху E при $n \to \infty$.*

От теоремата следва че, ако $f(z)$ има точно m полюса в E_{τ_m}, то редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е равномерно сходяща към $f(z)$ при $n \to \infty$ в сферичната метрика върху компактни подмножества на E_{τ_m}. Тази теорема е аналог на теоремата на Монтесу Де Балор относно класически апроксимации на Паде [16].

Ще докажем следното твърдение: ако за всяка функция $f(z) \in \mathscr{H}(E)$ при $\tau_m < \infty$ редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е максимално сходяща към $f(z)$ върху E, то точките $\{\beta_{n,k}\}$ са екстремални спрямо E.

Нека фиксираме число $t \notin E$, полагаме $\tau_t := e^{G_E(t,\infty)}$. Нека още $\alpha_i \in E_{\tau_t} \setminus E$, $i = 1, \ldots, \nu$. Въвеждаме функцията $f_t(z)$:

$$f_t(z) := \frac{1}{Q(z)(t-z)}, \quad \text{където} \quad Q(z) := \prod_{i=1}^{\nu}(z - \alpha_i). \tag{1.3}$$

1.1.2 Основни резултати

Основният резултат е:

Теорема 2. *Нека точките* $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ *нямат точки на сгъстяване външни за* E. *Нека* $m \geq \nu$ *е фиксирано число. Ако редицата* $\{\pi_{n,m}^{\beta}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$ *е максимално сходяща към* $f_t(z)$ *върху* E, *т.е.*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_t(z) - \pi_{n,m}^{\beta}(z)\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_t}, \tag{1.4}$$

то $\{\beta_{n,k}\}$ *са екстремални спрямо* E, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n(z)\|_E^{1/n} = \mathrm{cap}\,(E). \tag{1.5}$$

Аналог на Теорема 2 може да се намери в [31].

1.1.3 Помощни твърдения

Преди доказателството на Теорема 2 ще припомним някои известни факти от теория на потенциала. Подробните детайли могат да бъдат намерени в [54], [33].

Нека E е регулярен компакт. Нека μ е Борелева мярка, с носител на E, $\mathrm{supp}\,(\mu) \subseteq E$. Нека $U^{\mu}(z)$ е логаритмичният потенциал на мярката:

$$U^{\mu}(z) := \int_E \log\frac{1}{|z-t|}d\mu(t).$$

Известно е, че $U^{\mu}(z)$ е хармонична функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, суперхармонична в $\mathbb{C}$ и $U^{\mu}(\infty) = -\infty$. Единствената хармонична мярка μ_E, която минимизира интеграла за енергията

$$I[\mu] := \iint_E \log\frac{1}{|z-t|}d\mu(t)d\mu(z).$$

се нарича равновесна мярка на разпределението на E; интеграла на равновесната енергия $I[\mu_E]$ се изразява чрез

$$I[\mu_E] := \inf_{\mu} I[\mu].$$

Равновесната енергия и капацитета $\mathrm{cap}\,(E)$ на E имат следната връзка:

$$\mathrm{cap}\,(E) = e^{-I[\mu_E]}, \qquad I[\mu_E] = \log(1/\mathrm{cap}\,(E)),$$

така че ако $I[\mu_E] < \infty$, то $\mathrm{cap}\,(E) > 0$ и ако $I[\mu_E] = \infty$, то $\mathrm{cap}\,(E) = 0$.

По нататък,

Теорема 3 (Tsuji [54], Теорема III.37). *Нека* E *е компакт с положителен капацитет в комплексната равнина* $\mathbb{C}$ *и нека* $G(z)$ *е функцията на Грийн за* $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ *с полюс в безкрайната точка* $z = \infty$. *Тогава*

$$G(z) = I[\mu_E] - U^{\mu_E}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \tag{1.6}$$

където $I[\mu_E] = \log(1/\mathrm{cap}\,(E))$ *и* $U^{\mu_E}(z)$ *е равновесния потенциал на* E.

Припомняме теоремата на Фростман:

Теорема 4 (Tsuji [54], Теорема III.12)**.** *Нека E е компакт с положителен капацитет, $I[\mu_E] = \log(1/\mathrm{cap}\,(E))$ и $U^{\mu_E}(z)$ е равновесния потенциал. Тогава*

$$\begin{aligned} &U^{\mu_E}(z) \leq I[\mu_E], \quad z \in \mathbb{C}, \\ &U^{\mu_E}(z) = I[\mu_E], \quad \textit{почти навсякъде върху } E, \end{aligned}$$

като почти навсякъде означава освен множество с капацитет нула.

Равновесната мярка μ_E е с носител на ∂E, поради

Теорема 5 (Tsuji, [54], Теорема III.14)**.** *Ако a_0 е вътрешна точка за E, тогава $U^{\mu_E}(a_0) = I[\mu_E]$, следователно*

$$\mu(E^0) = 0,$$

където E^0 е отвореното ядро на E.

Сега припомняме теоремата за избор на мерки на Хели:

Теорема 6 (Tsuji [54], Theorem II.4)**.** *Нека $\mu_n(e) \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ е редица от totally additive set functions,дефинирани за Борелево множество e, такова че за всяко Борелево множество e имаме*

$$0 \leq \mu_n(e) \leq K, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Тогава можем да изберем подредица μ_{n_k} от μ_n, която е сходяща към totally additive set function $\mu(e) \geq 0$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{n_k}(e) = \mu(e).$$

Дефиниция 3 (Слаба сходимост на мерки [35], Теорема 0.4)**.** Казваме, че редицата $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ от Борелеви мерки е слабо сходяща към мярка μ, ако за всяка непрекъсната функция $g(x) \in D$, където $D := \mathrm{supp}\,(\mu_n)$, имаме

$$\lim_{n\to\infty} \int_D g(x) d\mu_n(x) = \int_D g(x) d\mu(x), \quad \mu \in D.$$

Дефиниция 4 (Принцип на понижение [35], Теорема 1.3)**.** Нека $\{\mu_n\}$ е слабо сходяща към μ, тогава:

$$U^{\mu}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Дефиниция 5 (Брояща мярка)**.** Нека $Q_n \in \Pi_n$ е полином, означаваме броящата мярка на Q_n чрез μ_n, т.е.

$$\mu_n(C) := \frac{\text{брой на нулите на } Q_n \text{ върху } C}{\deg Q_n}.$$

(където C е точково множество от комплексната равнина $\mathbb{C}$).

Нека μ' е с носител на E. Понятието балаяж означава намиране на нова мярка μ'_b, с носител на ∂E, и $\|\mu'_b\| = \|\mu'\|$, такава че:

$$\begin{aligned} U^{\mu'_b}(z) &\leq U^{\mu'}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \\ U^{\mu'_b}(z) &= U^{\mu'}(z), \quad \text{почти навсякъде върху } \mathbb{C} \setminus E. \end{aligned}$$

Теорема 7 (Принцип за максимума на хармоничните функции [43], Теорема 1.1.8)**.** *Нека h е хармонична функция върху област $D \subset \mathbb{C}$.*

(а) *Ако h запазва локален максимум в D, то h е константа.*

(б) *Ако h се продължава като непрекъсната функция до $\overline{D}$ и $h \leq 0$ на ∂D, то $h \leq 0$ върху D.*

1.1.4 Доказателство на Теорема 2

Нека $f_t(z)$ има $\nu < m$ полюса в $E_{\tau_t} \setminus E$. Лесно се проверява че при тези ограничения имаме

$$(f_t - \pi^{\beta}_{n,m})(z) = 0.$$

Условията на теоремата не са изпълнени, следователно предполагаме че $Q(z) \in \Pi_m$. Тогава $f_t(z)$ (сравни (1.3)) има точно m полюса в $E_{\tau_t} \setminus E$. Следствие от Теорема 1 е:

$$Q_{n,m}(z) \to Q(z), \quad n \to \infty. \tag{1.7}$$

Първо разглеждаме случая $\{\beta_{n,k}\} \in \partial E$. Нека $n \in \mathbb{N}$ е фиксирано. Аналогично на (1.2), можем да напишем

$$Q_{n,m}(z) f_t(z) - P_{n,m}(z) = \omega_{n+m+1}(z) h_{n,m}(z).$$

Понеже $\alpha_i \notin E$, $i = 1, \ldots, m$, $t \in \Gamma_\tau$ и $z \in E$, то функцията

$$h_{n,m}(z) := \frac{h_0(z)}{Q(z)(t-z)}$$

също е холоморфна върху E; обобщаваме и стигаме до

$$Q_{n,m}(z) - Q(z)(t-z)P_{n,m}(z) = \omega_{n+m+1}(z) h_0(z).$$

От лявата страна имаме полином от степен $\leq n+m+1$, функцията $h_0(z)$ е константа, зависеща само от t, означаваме я с $C_n(t)$. Полагаме $z = t$ и получаваме $Q_{n,m}(t) = \omega_{n+m+1}(t) C_n(t)$, откъдето следва

$$Q_{n,m}(z) - Q(z)(t-z)P_{n,m}(z) = \omega_{n+m+1}(z) Q_{n,m}(t) \omega_{n+m+1}(t)^{-1}. \tag{1.8}$$

Следователно, за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\omega_{n+m+1}(t)} = \frac{Q(z)(t-z)Q_{n,m}(z)}{\omega_{n+m+1}(z)Q_{n,m}(t)} \left(\frac{1}{Q(z)(t-z)} - \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} \right). \tag{1.9}$$

Нека $\theta > 0$ е произволно число, такова че $e^{\theta} < \tau_t \operatorname{cap}(E)$. Полиномите $\omega_{n+m+1}(z)$ са със старши коефициент единица, следователно

$$\|\omega_{n+m+1}(z)\|_E \geq C_1 \left(e^{-\theta} \operatorname{cap}(E)\right)^n, \quad n \geq n_1, \tag{1.10}$$

като C_i, $i = 1, 2, \ldots$ са положителни константи, независещи от n и различни една от друга. Като използваме (1.4), (1.7), (1.9) и (1.10), стигаме до

$$\frac{1}{|\omega_{n+m+1}(t)|} \leq C_2 \left(\frac{e^{\theta}}{\tau_t \operatorname{cap}(E)}\right)^n, \quad n > n_2 \geq n_1.$$

Оставяме $\theta \to 0$ и получаваме

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\omega_{n+m+1}(t)|^{1/n}} \leq \frac{1}{\tau_t \operatorname{cap}(E)}.$$

Нека $\{\mu_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ е редица от броящи мерки μ_n. За логаритмичния потенциал $U^{\mu_n}(t)$ имаме

$$U^{\mu_n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1}{|t - \beta_{n,k}|} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\omega_n(t)|}. \tag{1.11}$$

Прилагаме (1.6) и (1.11) за редицата $\{\mu_{n+m+1}\}$

$$\limsup_{n\to\infty} U^{\mu_{n+m+1}}(t) \leq U^{\mu_E}(t).$$

По теоремата за избор на мерки на Хели (Теорема 6) съществува подредица $\Lambda \subset \mathbb{N}$ на $\{\mu_{n+m+1}\}$, такава че $\{\mu_{n+m+1}\}$ е слабо сходяща при $n \in \Lambda$ към мярка μ (отбелязваме тази подредица отново с $\{\mu_n\}$). От принципа за понижение (Дефиниция 4) следва

$$U^{\mu}(t) \leq \liminf_{n\to\infty, n\in\Lambda} U^{\mu_n}(t) \leq \limsup_{n\to\infty, n\in\Lambda} U^{\mu_n}(t) \leq U^{\mu_E}(t).$$

От друга страна,

$$U^{\mu}(\infty) - U^{\mu_E}(\infty) = 0. \tag{1.12}$$

Прилагаме принципа за максимума на хармонични функции (Теорема 7) и получаваме

$$U^{\mu}(t) = U^{\mu_E}(t), \quad t \in \mathbb{C} \setminus E.$$

По теоремата на Фростман (Теорема 4) имаме, че $U^{\mu}(t) = U^{\mu_E}(t) \leq I[\mu_E]$. Интегрираме и двете страни, резултатът е:

$$I[\mu] \leq I[\mu_E].$$

Понеже $I[\mu_E]$ е минималната енергия, то имаме знак за равенство. Което означава че редицата $\{\mu_n\}$ е слабо сходяща към равновесната мярка μ_E (която е с носител на ∂E). Това е достатъчно за изпълнението на (1.5) при $n \in \Lambda$.

Обобщение: когато всички точки $\{\beta_{n,k}\}$ лежат върху ∂E, тогава те се разпределят равномерно върху ∂E, при $n \in \Lambda$, спрямо равновесната мярка μ_E.

Да предположим че съществува подредица $\Upsilon \subset \mathbb{N}$, такава че

$$\liminf_{n\to\infty} \|\omega_n(z)\|_E^{1/n} > \operatorname{cap}(E). \tag{1.13}$$

Взимаме в предвид максималната сходимост и виждаме че съществува подредица $\Lambda(\Upsilon) \subset \Upsilon$, за която (1.5) е изпълнено. Но това влиза в противоречие с (1.13). Следователно (1.5) е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Нека сега мярката μ е с носител върху E. Нека μ_b означава мярката на балаяж с носител върху ∂E. Тогава от определението на балаяж и (1.12) следва че

$$U^{\mu_b}(t) \le U^{\mu_E}(t), \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E.$$

Като използваме теоремата на Фростман (Теорема 4), стигаме до $U^{\mu_b}(t) \le U^{\mu_E}(t) \le I[\mu_E]$, $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, откъдето следва

$$U^{\mu_b}(t) \le I[\mu_E], \quad t \in \partial E$$

(понеже и двете мерки μ_b и μ_E са с носител върху ∂E). Интегрираме спрямо μ_b и получаваме

$$I[\mu_b] \le I[\mu_E],$$

както и преди, следва че $\mu_b \equiv \mu_E$ за $n \in \Lambda$. По аналогични разсъждения, (1.5) е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Забележка. При условията на Теорема 2, ако точките $\beta_{n,k}$ лежат на ∂E, то те са равномерно разпределени върху ∂E спрямо равновесната мярка, в противен случай техните балаяжи са равномерно разпределени.

1.2 Многоточкови апроксимации на Паде със степен на знаменателя $m_n = o(n/\log n)$

В тази глава разглеждаме m_1-почти равномерна сходимост на редици от многоточкови апроксимации на Паде от ред (n, m_n), където $m_n = o(n/\log n)$. Излагаме достатъчно условие за равномерното разпределение на точките на интерполация спрямо равновесната мярка на носителя.

1.2.1 Основните резултати

Следващата теорема е следствие от резултатите на Гончар [21]:

Теорема 8 (Gonchar [21]). *Нека E е регулярен компакт със свързано допълнение, нека $f \in \mathcal{A}(E)$. Предполагаме, че $\tau_m < \infty$. Нека $\{m_n\}$, $m_n \to \infty$, $m_n = o(n/\ln n)$ е безкрайна редица от естествени числа. Предполагаме още, че $\beta := \{\beta_{n,k}\}$ е триъгълна таблица от точки, екстремални спрямо E. Нека знаменателите на π^{β}_{n,m_n} са нормализирани спрямо E_{τ_m}. Тогава редицата от многоточкови апроксимации на Паде е m_1-почти равномерно сходяща към f върху компактни подмножества на E_{τ_m}. Скоростта на сходимост се характеризира от*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_E^{1/n} \le \frac{1}{\tau_m}$$

и върху всеки компакт $K \subset E_{\tau_m}$, който не съдържа полюси на f и на π^{β}_{n,m_n}, имаме

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_K^{1/n} \le \frac{e^{\|G_E(z,\infty)\|_K}}{\tau_m}$$

(сравни (1.2)).

Излагаме следната теорема от [13]:

Теорема 9 (Blatt, Kovacheva [13]). *При условията на Теорема 8, предполагаме че функцията f притежава многократна съществена особеност върху Γ_{τ_m}. Тогава*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - r_{n,m_n})\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_m}$$

и за всяко δ, $1 < \delta < \tau_m$, важи следното:

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - r_{n,m_n})\|_{\Gamma_\delta}^{1/n} = \frac{\delta}{\tau_m}.$$

Теорема 10. *Нека E е регулярен компакт в $\mathbb{C}$ със свързано допълнение, $f \in \mathcal{A}(E)$, $\tau_m < \infty$. Нека $m_n = o(n/\ln n)$, $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и нека $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$,*

$n \geq 1$ е триъгълна таблица от точки, която няма точки на сгъстяване вън-ни за E. Нека π^{β}_{n,m_n} е многоточковата апроксимация на Паде спрямо β, като знаменателите са нормализирани спрямо $B \supset E_{\tau_m}$. Ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_m}, \tag{1.14}$$

и за всяко $1 < \sigma < \tau_m$

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_{E_\sigma}^{1/n} = \frac{\sigma}{\tau_m}, \tag{1.15}$$

то тогава съществува редица $\Lambda \subset \mathbb{N}$, такава че

$$\widetilde{\mu}_n \xrightarrow{*} \mu_E \quad \textit{при} \quad n \in \Lambda,$$

където $\widetilde{\mu}_n$ са балаяжите на броящата мярка, асоциирана с полиномите ω_n, като балаяжите са върху ∂E (сходимостта е в слабата топология).

От Теорема 8, 9, 10 следва:

Следствие 1. *При същите условия като в Теорема 10, нека да предположим че f притежава многократна съществена особеност върху Γ_{τ_m}; предполагаме още, че (1.14) е в сила. Тогава твърдението на Теорема 10 също е в сила.*

Теорема 10 е доказана в [14]; тук излагаме ново доказателство.

Забележка 1. Нека f е непрекъсната и реалнозначна функция върху $[-1,1]$. Рационалните функции от най-добри Чебишеви приближения могат да бъдат разбирани като многоточкови апроксимации на Паде (теорема на алтернанса). За сравнение, Теорема 10 и основният резултат в [12]. Теорема 10 е само частен случай, в [12] е изложена подобна теорема, като няма условия за непрекъснатостта на апроксимираната функция.

Пример 1. Нека $f \in C[-1,1]$ е реалнозначна функция. Нека (n,m) са двойка естествени числа, полагаме $r_{n,m}$ за функцията на най-добро Чебишево приближение на f върху $[-1,1]$ в класа $\Re_{n,m}$. Съществуват поне $n+m+2-d_{n,m}$ на брой точки на алтернанс, т.е.

$$(f - r_{n,m})(z_{n,i}) = \gamma(-1)^{n+m+2}\|f - r_{n,m}\|_{[-1,1]}, \quad i = 1, ..., n+m+2-d_{n,m},$$

където $d_{n,m}$ е дефекта.

Полагаме $r_{n,m} := p_{n,m}/q_{n,m}$, получаваме

$$(fq_{n,m} - p_{n,m})(z) = w_{n+m+1}(z)\varphi_{n,m}$$

където $\varphi_{n,m}$ е непрекъсната функция върху $[-1,1]$ и $\deg w_{n+m+1} = n+m+1-d$. Ако $d = 0$, то имаме случая на многоточкови апроксимации на Паде. От друга страна, ако $d > 0$, то $r_{n,m} \equiv r_{n-d,m-d}$. Множеството на тези $n \in \mathbb{N}$, за които d_{n,m_n} е равно на нула, е безкрайно. Следователно, можем да разглеждаме функциите r_{n,m_n} като многоточкови апроксимации на Паде.

1.2.2 Помощни твърдения

Дефиниция 6 (Интерполационна Формула на Ермит-Лагранж [56]). Нека $g(z)$ е аналитична върху контура Γ, както и за вътрешността му, нека Γ съдържа точки z_k, $k = 1, \ldots, n+1$, нека $\omega(z) = \prod_{k=1}^{n+1}(z - z_k)$. Полиномът $p(z)$ от степен n интерполира функцията $g(z)$ в точките z_k ($n+1$ на брой):

$$g(z) - p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(z)g(t)dt}{\omega(t)(t-z)}, \ z \in \Gamma.$$

Дефиниция 7 ((Exact) Хармонична мажоранта [43], Дефиниция 4.5.3). Нека u е субхармонична функция в област D. Хармонична мажоранта на u е хармонична функция h в D, такава че $h \geq u$ в D. Ако $h \leq k$, за друга хармонична мажоранта k на u, тогава h се нарича най-малката хармонична мажоранта на u.

Сега припомняме теоремата за единственост на хармоничните функции:

Теорема 11 (Ransford [43], Теорема 1.1.7). *Нека k_1 и k_2 са хармонични функции в област $D \subset \mathbb{C}$. Ако $k_1 = k_2$ в непразно отворено множество на D, то $k_1 = k_2$ в цялата област D.*

1.2.3 Доказателство на Теорема 10

Полагаме

$$\pi^{\beta}_{n,m_n} := P_n/Q_n,$$

където $\deg(P_n, Q_n) = 1$ и Q_n са нормализирани спрямо E_{τ_m}. Припомняме, че $P_n \in \Pi_n$, $Q_n \in \Pi_{m_n}$. Отбелязваме броящата мярка, асоциирана с полиномите ω_n by μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, чрез μ_n.

Първо разглеждаме случая, когато $\beta \subset \partial E$. При тези условия, имаме $\widetilde{\mu}_n = \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Избираме числа R и τ', такива че $1 < R < \tau' < \tau_m$. Предполагаме, че $|f(z)| < \infty$ for $z \in \Gamma_{\tau'} \cup \Gamma_R$. Нека

$$f = \frac{F_{\tau'}}{T_{\tau'}},$$

където $F_{\tau'} \in \mathcal{A}(\overline{E}_{\tau'})$, $T_{\tau'}$ е полином, и $|F_{\tau'}(z)| + |T_{\tau'}(z)| > 0$ за всяко $z \in \overline{E}_{\tau'}$. За улеснение, предполагаме че $T_{\tau'}$ е със старши коефициент единица. Полагаме $\kappa = \deg T_{\tau'}$.

Чрез Теорема 8, 9, 10 както и свойствата на exact harmonic majorant(Дефиниция 7), стигаме до извода че съществувра редица Λ, такава че

$$\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} \|F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n\|^{1/n}_{\Gamma_\tau} = \frac{\tau}{\tau_m}, \quad 1 < \tau < \tau_m. \tag{1.16}$$

Следователно,

$$\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} \frac{1}{n} \ln \|F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n\|_{\Gamma_\tau} - \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} \frac{1}{n} \ln \|F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n\|_{\Gamma_{\tau'}} \\ = \ln\tau - \ln\tau', \quad R \le \tau \le \tau'. \tag{1.17}$$

Нека θ_1 е произволно избрано естествено число. Функциите

$$\psi_n(z) := \frac{1}{n} \ln |F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n| - G_E(z,\infty), \quad n \in \Lambda,$$

са субхармонични в пръстена $\overline{\mathfrak{A}_{R,\tau'}}$, ограничен от кривите Γ_R и $\Gamma_{\tau'}$. Тогава, чрез (1.17)

$$\frac{1}{n} \ln |F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n| \le \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} \frac{1}{n} \ln \|F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n\|_{\Gamma_{\tau'}} + G_E(z,\infty) - \ln\tau' + \theta_1, \\ z \in \overline{\mathfrak{A}_{R,\tau'}},\ n \in \Lambda,\ n \ge n_1.$$

От друга страна, чрез $z \in \Gamma_\tau$, $m_n \ge \kappa$, $n \in \mathbb{N}$ и като използваме интерполационната формула на Ермит-Лагранж (Дефиниция 6), получаваме

$$F_{\tau'}(z)Q_n(z) - T_{\tau'}(z)P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\tau'}} \frac{\omega_{n+m_n+1}(z)}{\omega_{n+m_n+1}(t)} \frac{F_{\tau'}(t)Q_n(t)}{t-z} dt = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\tau'}} \frac{\omega_{n+m_n+1}(z)}{\omega_{n+m_n+1}(t)} \frac{F_{\tau'}(t)Q_n(t) - T_{\tau'}(t)P_n(t)}{t-z} dt.$$

Стигаме до

$$\frac{1}{n} \ln |(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(z)| - \frac{1}{n} \ln \|(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(t)\|_{\Gamma_{\tau'}} \le \\ \le \frac{n+m_n+1}{n} \left(-U^{\mu_n}(z) + \max_{t\in\Gamma_{\tau'}} U^{\mu_n}(t) \right) + \frac{1}{n} \ln C_1.$$

По-нататък означаваме положителни константи, които не зависят от n и различни една от друга, чрез C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Оттук, за $\tau \in (R, \tau')$ получаваме

$$\frac{1}{n} \ln |(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(z)| - \frac{1}{n} \ln \|(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(t)\|_{\Gamma_{\tau'}} \le \\ \le \frac{n+m_n+1}{n} \Big(\min_{z\in\Gamma_\tau} \big(U^{\mu_E}(z) - U^{\mu_n}(z)\big) - \\ - \min_{t\in\Gamma_{\tau'}} \big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu_n}(t)\big) + \ln\tau - \ln\tau' \Big) + \frac{1}{n} \ln C_2, \\ z \in \Gamma_\tau,\ n \in \Lambda,\ n \ge n_2.$$

С други думи,

$$\frac{1}{n}\ln|(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(z)| - \frac{1}{n}\ln\|(F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n)(t)\|_{\Gamma_{\tau'}} - \ln\tau + \ln\tau' \leq$$
$$\leq \min_{z\in\Gamma_\tau}\big(U^{\mu_E}(z) - U^{\mu_n}(z)\big) - \min_{t\in\Gamma_{\tau'}}\big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu_n}(t)\big) + \frac{1}{n}\ln C_3,$$
$$z\in\Gamma_\tau,\ \tau\in(R,\tau'),\ n\in\Lambda,\ n\geq n_2. \tag{1.18}$$

Прилагаме теоремата за избор на мерки на Хели (Теорема 6), т.е. съществува подредица $\Lambda'\subset\Lambda$, която отново означаваме чрез Λ, и мярка μ с носител на ∂E, такива че

$$\mu_n \to \mu, \quad n\in\Lambda.$$

Използваме принципа на понижение (Дефиниция 4) и (1.18), за да стигнем до

$$\limsup_{n\to\infty, n\in\Lambda}\left(\frac{1}{n}\ln||F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n||_{\Gamma_R} - \frac{1}{n}\ln\|F_{\tau'}Q_n - T_{\tau'}P_n\|_{\Gamma_{\tau'}}\right) - \ln\tau + \ln\tau' \leq$$
$$\leq U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z) - \min_{t\in\Gamma_{\tau'}}\big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big), \quad z\in\Gamma_\tau. \tag{1.19}$$

Въвеждаме функцията φ, която е хармонична в $\mathfrak{A}_{R,\tau'}$ и такава че

$$\varphi(z) := \begin{cases} 0, & z\in\Gamma_{\tau'}, \\ \min\left\{0,\ U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z) - \min\limits_{t\in\Gamma_{\tau'}}\big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big)\right\}, & z\in\Gamma_R. \end{cases}$$

Функцията φ е хармонична в пръстена $\mathfrak{A}_{R,\tau'}$ и тя удоволетворява принципа за максимума (Теорема 7), както и принципа за минимума, в тази област. Тази дефиниция води до

$$\varphi(z)\leq 0, \quad z\in\mathfrak{A}_{R,\tau'}$$

Ще покажем, че:

$$\varphi(z)\equiv 0, \quad z\in\mathfrak{A}_{R,\tau'} \tag{1.20}$$

Предполагаме, че (1.20) не е вярно и фиксираме число τ, $R<\tau<\tau'$. По подразбиране, съществува положително число $\theta_2 = \theta_2(\tau)$, такова че за всяко $z\in\Gamma_\tau$ имаме

$$U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z) - \min_{t\in\Gamma_{\tau'}}\big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big) + \theta_2 \leq 0.$$

Това води до противоречие с (1.19) и (1.16). Следователно (1.20) е в сила.

Чрез горното стигаме до следното равенство:

$$U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z) \equiv \min_{t\in\Gamma_{\tau'}}\big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big), \quad z\in\Gamma_\tau.$$

Функцията $U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z)$ е хармонична в $E^{\complement}$, имаме

$$U^{\mu_E}(z) - U^{\mu}(z) \equiv \min_{t \in \Gamma_{\tau'}} \big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big), \quad z \in E^{\complement}.$$

От друга страна, $(U^{\mu_E} - U^{\mu})(\infty) = 0$, което води до

$$\min_{t \in \Gamma_{\tau'}} \big(U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t)\big) = 0.$$

Чрез принципа за минимума, $U^{\mu_E}(t) - U^{\mu}(t) = 0$, $t \in \Gamma_{\tau'}$, и по теоремата за единственост на хармоничните функции (Теорема 11) получаваме, че $U^{\mu_E}(z) \equiv U^{\mu}(z)$, $z \in E^{\complement}$.

Доказателството за частния случай, когато $\beta \in \partial E$ е завършено.

1.3 Обобщени апроксимации на Паде с фиксирана степен на знаменателя

Нека (E, F) е равнинен кондензатор, нека α и β са триъгълни таблици от точки; $\alpha \in E$, $\beta \in F$. В статията е доказан критерий относно екстремалното разпределение на таблиците α и β. Резултатите са постигнати чрез използване на обобщена апроксимация на Паде, която е асоциирана с таблиците α и β.

1.3.1 Равнинен кондензатор

Нека D е област в комплексната равнина $\overline{\mathbb{C}}$, нека $E \subset \mathbb{C}$ е континуум (компакт съдържащ повече от една точка) съдържащ се в D, и $G := D \setminus E$. Предполагаме, че G е регулярна област спрямо проблема на Дирихле. Нека $F := \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Наредената двойка (E, F) се нарича равнинен кондензатор.

Нека h е хармоничната мярка на ∂F спрямо G. Припомняме, че h е хармонична функция в G, $h = 0$ на ∂E и $h = 1$ на ∂F. Нека $c = c(E, F)$ е капацитета на кондензатора; т.е.

$$c = c(E, F) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial \mathrm{n}} ds,$$

където Γ е затворена аналитична крива в G (или краен брой от непресичащи се аналитични криви), която разделя E и F, нормалният вектор n е с посока от E към F. Нека $\operatorname{mod} G$ е модула на кондензатора, т.е.

$$\operatorname{mod} G = \operatorname{mod}(E, F) := 1/c.$$

Нека

$$\rho = \rho(E, F) := \exp(1/c),$$

е Римановият модул на кондензатора. За специалния случай, когато E и F са континууми (затворени свързани множества, които съдържат повече от една точка), параметърът ρ е равен на r_2/r_1, като изобразим G конформно на пръстена $\{r_1 \le |w| \le r_2\}$.

Припомняме дефиницията за радиус на холоморфност. Нека m и κ са естествени числа, нека $1 < \kappa \le \rho$. Казваме, че $f \in \mathscr{M}_m(E_\kappa)$, ако f може да бъде продължена като мероморфна функция в E_κ с не повече от m полюса (полюсите се броят с тяхната кратност). Аналогично на радиуса на холоморфност, въвеждаме радиус на m-мероморфност $\tau_m := \tau_m(f)$, т.е.

$$\tau_m := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{M}_m(E_\tau)\}.$$

Ако f не е холоморфна върху E, тогава полагаме $\tau_m = 1$.

Полагаме $\Gamma_\tau := \{z : h = c \log \tau\}$, $1 < \tau < \rho$, и $E_\tau := E \cup \{z : h < c \log \tau\}$.

Нека $\lambda := \exp(h/c)$.

Аналогично на максимална сходимост на полиноми, и като обобщаваме идеите от [13], въвеждаме понятието максимална сходимост на рационални функции в случай на кондензатори. Нека $f \in \mathscr{H}(E)$, нека m е фиксирано. Предполагаме, че $\tau_m \leq \rho$. Редицата $\{r_{n,m}\}$, $r_{n,m} \in \mathscr{R}_{n,m}$, $r_{n,m} = p/(\widetilde{q}_{n,m} q^*_{n,m})$, $n \in \mathbb{N}$ е максимално сходяща към f върху E спрямо кондензатора (E, F), ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} f - \widetilde{q}_{n,m} r_{n,m}\|_E^{1/n} \leq \frac{1}{\tau_m}$$

и за всеки компакт $K \subset E_{\tau_m} \setminus E$, който не съдържа полюси на f, имаме

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} f - \widetilde{q}_{n,m} r_{n,m}\|_K^{1/n} \leq \frac{\|\lambda\|_K}{\tau_m}.$$

Нека $\alpha := \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n$ и $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ са триъгълни таблици от точки, с точки на сгъстяване принадлежащи съответно на E и F. Полагаме

$$\omega_n^\alpha := \prod_{k=1}^n (z - \alpha_{n,k}) \quad \text{и} \quad \omega_n^\beta := \prod_{k=1}^n (z - \beta_{n,k}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Казваме, че точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), ако равенството

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\omega_n^\alpha}{\omega_n^\beta} \right|^{1/n} = C_0 \exp\left(\frac{h}{c}\right) = C_0 \lambda \tag{1.21}$$

важи равномерно върху всяко затворено множество от G, като C_0 е положителна константа. Относно съществуването на редицата, вижте [21, §3, Remark 2], [56, §8.7, Theorem 9], [8]. Ако някоя точка от $\{\beta_{n,k}\}$ е равна на безкрайност, то разликата $z - \beta_{n,k}$ за тази точка се заменя с единица (в случай, че $\infty \in F$). Когато всички $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, то константата е равна на капацитета на линията на ниво, разположена във външността на S, т.е. $C_0 := \text{cap}\,(S) e^{G_S(z,\infty)}$.

Когато точките $\{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n \in \partial E$ и $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n \in \partial F$, казваме, че те са равномерно разпределени спрямо кондензатора (E, F), като $C_0 = \rho$, иначе $C_0 > 0$. Отново, ако $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, то константата е равна на логаритмичния капацитет на S, т.е. $C_0 := \text{cap}\,(S)$.

Например, нека $G := \{z,\ 1 < |z| < 2\}$ (взимаме единичния кръг за E и $|z| \geq 2$ за F). Виждаме, че хармоничната мярка $h = \ln|z|/\ln 2$, $c = 1/\ln 2$ и $\rho = 2$. Нека ω_n^α, ω_n^β да бъдат съответно $(z^n - 1,\ z^n - 2^n)$, $(z^n,\ z^n - 2^n)$, $(z^n,\ 1)$ и $(z^n - 1,\ 1)$. Редиците $|\omega_n^\alpha/\omega_n^\beta|^{1/n}$ са локално равномерно сходящи върху компактни подмножества на G към $|z|/2$, което е умножено съответно по $1, 1, 2, 2$.

Нека да отбележим, че ако точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), то те са екстремални спрямо всеки кондензатор $(E_{\eta_1}, E_{\eta_2}^C)$ при $1 < \eta_1 < \eta_2 < \rho$ (като $E_{\eta_2}^C$ е допълнението на E_{η_2}).

Сега припомняме дефиницията на обобщена апроксимация на Паде, асоциирана с точките (α, β) (виж [21]).

Нека $f \in \mathscr{H}(E)$, нека (n,m) е фиксирана двойка от естествени числа, $n \geq m$. Съществуват полиноми $p \in \Pi_n$ и $q \in \Pi_m$, такива че

$$z \mapsto h_{n,m}(z) := \frac{q\omega_{n-m}^{\beta} f - p}{\omega_{n+m+1}^{\alpha}} \in \mathscr{H}(E). \tag{1.22}$$

Полагаме $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}(f) = \pi_{n,m}^{\alpha,\beta} := p/(q\omega_{n-m}^{\beta})$. Наричаме $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ обобщена апроксимация на Паде към f от ред (n,m) спрямо (α,β). Полагаме

$$\pi_{n,m}^{\alpha,\beta} = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}\omega_{n-m}^{\beta}},$$

където полиномите $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$ нямат общ множител. Нулите на $Q_{n,m}$ се наричат свободни полюси на $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$. Останалите полюси, ако има такива, са фиксирани в безкрайната точка, $z = \infty$. Както е известно [21], [32], рационалната функция $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ винаги съществува и е единствена. Тази дефиниция обобщава класическата апроксимация на Паде [16] ($\{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} = 0$, $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$), както и многоточковата апроксимация на Паде [44] ($\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$).

Припомняме резултата на Гончар (вече дефинирахме, че τ_m е радиусът на m-мероморфност и ρ е Римановият модул на кондензатора):

Теорема 12 (Гончар [21])**.** *Нека (E,F) е регулярен равнинен кондензатор, нека f е холоморфна върху E, нека m е фиксирано, нека $\tau_m \leq \rho$. Предполагаме, че триъгълноте таблици от точки $\alpha := \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in E$ и $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in F$ имат екстремално разпределение спрямо (E,F), и техните точки на сгъстяване принадлежат съответно на E и F. Тогава редицата $\{\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}\}$ е максимално сходяща към f върху компактни подмножества на E_{τ_m} при $n \to \infty$, и за всеки компакт $K \subset E_{\tau_m} \setminus E$, който не съдържа полюси на f, важи неравенството*

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} f - \widetilde{q}_{n,m}\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}\|_K^{1/n} \leq \frac{\|\lambda\|_K}{\tau_m}.$$

При условията на теоремата, нека f има точно m полюса в $E_{\tau_m} \setminus E$, нека да са в точките a_i, $i = 1,\ldots,m$. Полагаме $q_m := \prod_{i=1}^{m}(z - a_i)$. Тогава, от [21, Lemma 1], всеки полюс на f привлича толкова свободни полюса на $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ при $n \to \infty$, колкото е неговата кратност, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,m} = q_m.$$

Трябва да отбележим, че това не важи, ако функцията f има по-малко от m полюса в $E_{\tau_m} \setminus E$, тогава трябва да умножим по $\widetilde{q}_{n,m}$, както е в дефиницията по-горе.

Теорема 12 обобщава класическата теорема на Монтесу де Балор [16].

1.3.2 Основната теорема за кондензатор

Поставаме въпроса, дали m_1-почти равномерна сходимост на обобщени апроксимации на Паде към дадена функция е необходимо условие за екстремално разпределение на точки (1.21), свързани със самата апроксимация.

Нека (E, F) регулярен равнинен кондензатор, нека $\alpha \in E$, $\beta \in F$ са триъгълни таблици от точки, със точки на сгъстяване извън G. Фиксираме число τ, $1 < \tau < \rho$, фиксираме точки $z_i \in E_\tau \setminus E$, $i = 1, \dots, m$, въвеждаме за всяко $t \in \Gamma_\tau$ функцията $f_t(z)$:

$$f_t(z) := \frac{1}{Q(z)(t-z)}, \quad \text{където} \quad Q(z) := \prod_{i=1}^{m}(z - z_i).$$

Нека $t \in \Gamma_\tau$ е произволно число, полагаме $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}(f_t) := \pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}$,

$$\pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta} = \frac{P_{n,m,t}}{Q_{n,m,t}\,\omega_{n-m}^{\beta}}.$$

Теорема 13. *Нека точките $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in E$ и $\beta = \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in F$, $n \in \mathbb{N}$ са дадени, като имат точки на сгъстяване принадлежащи съответно на E и F. Нека m е фиксирано, нека полиномът $Q(z)$ е както преди. Ако за всяко $t \in \Gamma_\tau$ редицата $\{\pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}\}$ е максимално сходяща към $f_t(z)$ върху компактни подмножества на E_τ при $n \to \infty$, то точките (α, β) са екстремално разпределени спрямо кондензатора (E, F).*

Следствие 2. *Точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), тогава и само тогава, когато за всяка функция $f \in \mathscr{H}(E)$ редицата от рационални функции $\{\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}\}$ е максимално сходяща към f върху компактни подмножества на D.*

При условията на Теорема 13, за всяко $t \in \Gamma_\tau$ важи

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,m,t} = Q(z) \tag{1.23}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_t - \pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}\|_E^{1/n} \le \frac{1}{\tau}. \tag{1.24}$$

Наистина, f_t има точно m полюса и те привличат, по Теорема 12, всички полюси на $\pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}$ (със съответната кратност).

От Уолш [56, §7.2, §7.3] виждаме, че интерполационните точки са равномерно разпределени, тогава и само тогава, когато редицата от полиноми е сходяща към функцията, която е определена от интерполационните точки.

В [27] Гротман доказва, че ако някаква функция $f \in \mathscr{H}(E)$ има точна максимална сходимост към редица от полиноми, то тогава съществува подредица $\Lambda \subset \mathbb{N}$ на броящата мярка (виж дефиницията по-долу), която клони към равновесната мярка (т.е. интерполационните точки, асоциирани с мерките, са равномерно разпределени).

Аналог на Теорема 13 за многоточкови апроксимации на Паде, отново към специфична функция, може да се намери в [28].

В [14] Блат и Ковачева доказват, че ако специфична функция е максимално сходяща към редица от многоточкови апроксимации на Паде, със степен на числителя $\leq n$ и степен на знаменателя $\leq m_n$ като $m_n = o(n/\log n)$ при $n \to \infty$, то интерполационните точки, асоциирани с функцията, са равномерно разпределени за всяко $n \in \mathbb{N}$ спрямо областта на холоморфност на функцията.

Теорема 13 доказва, че ако имаме максимална сходимост на редица от рационални функции към специфична функция, то триъгълните таблици от точки са равномерно разпределени спрямо кондензатора за всяко $n \in \mathbb{N}$.

1.3.3 Помощни твърдения за равнинен кондензатор

Преди доказателството ще припомним някои основни резултати.

Нека кондензаторът (E, F) е даден както преди, и $n \in \mathbb{N}$ е фиксирано число. Следвайки Гончар [19], въвеждаме

$$\sigma_n(E, F) := \sup_{\{r \in \mathscr{R}_{n,n}\}} \frac{\min\{|r(z)|, z \in F\}}{\max\{|r(z)|, z \in E\}}.$$

Това е свързано с третата задача на Е. И. Золотарев в "Приложение на елиптичните функции към функции, разходящи максимално или минимално от нула". Решението на този проблем дава оценка за равномерния растеж на рационалните функции.

Следващият резултат е на Гончар:

Теорема 14 (Гончар [19])**.** *За всеки регулярен кондензатор* (E, F)*,* $\rho = \rho(E, F)$ *и всяко* $n \in \mathbb{N}$*, имаме*

$$\sigma_n(E, F) \leq \rho^n, \quad \forall\, n \geq 0,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sigma_n(E, F)} = \rho.$$

Дефиниция 8 (Потенциална функция [8])**.** Нека (E, F) е регулярен кондензатор, следвайки [8], въвеждаме потенциалната функция $u(z, \zeta)$ за $G := \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$.

Нека $\zeta \in G$ е фиксирано число. Тогава функцията $z \mapsto u(z, \zeta)$, $z \in G$, е хармонична функция (като функция на z), има постоянни стойности по границите на E и на F, и $u(\zeta, \zeta) = 0$. Също така u изпълнява следното условие:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} ds = 1,$$

където γ разделя E и F, и нормалния вектор n е с посока от F към E. За граничната стойност на $u(z,\zeta)$ при $z \to E$ и $\zeta \to F$, имаме:

$$\lim_{z\to\partial E, \zeta\to\partial F} u(z,\zeta) = \operatorname{mod} G.$$

Понеже $h(\zeta) = 1$ при $z \in \partial F$, $h(z) = 0$ при $z \in \partial E$, както и $\operatorname{mod} G = 1/c$, очевидно имаме

$$u(z,\zeta) := \frac{h(\zeta) - h(z)}{c}, \tag{1.25}$$

където $c = c(E,F)$ е капацитета на кондензатора (E,F).

Нека са дадени таблиците от точки $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in E$ и $\beta = \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in F$, полагаме $r_n(z) := \omega_n^{\alpha}(z)/\omega_n^{\beta}(z)$ и въвеждаме асоциирания потенциал $U_n(z,\zeta)$

$$U_n(z,\zeta) := -\frac{1}{n}\log\left|\frac{r_n(z)}{r_n(\zeta)}\right|.$$

Теорема 15 (Bagby [8]). *Нека (E,F) е регулярен кондензатор, нека α и β са триъгълни таблици от точки както са дадени по-горе, $z \in E$, $\zeta \in F$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{z\in E,\zeta\in F} U_n(z,\zeta)\right) = \operatorname{mod} G.$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z,\zeta) = u(z,\zeta)$ *равномерно върху компактни подмножества на G.*

(в) *Ако f^* е аналитична функция върху E, и r^* е рационална функция от степен $(n-1)$, която има полюси $\beta_{n,k}$ и се интерполира към f^* в точките $\alpha_{n,k}$, тогава $r^* \to f^*$ равномерно върху E.*

1.3.4 Доказателство на Теорема 13

Без загуба на общността, предполагаме че $\infty \in G$. В противен случай, правим конформно изображение на G в област, съдържаща ∞; както е известно, капацитета, модула на кондензатора и Римановият модул на кондензатора са инвариантни при конформно изображение и остават същите (не се променят).

Както е дадени, за всяко $t \in \Gamma_\tau$ функцията $f_t(z)$ има точно m полюса в $E_\tau \backslash E$. При условията на Теорема 13, редицата от апроксимации на Паде $\{\pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}\}$ е равномерно сходяща към $f_t(z)$ в сферичната метрика в E_τ при $n \to \infty$; напомняме че (1.23) и (1.24) са в сила за всяко $t \in \Gamma_\tau$.

Фиксираме произволно число $t \in \Gamma_\tau$. Нека $n \in \mathbb{N}$ е фиксирано число, $n > m$. Поради (1.22), имаме:

$$Q_{n,m,t}\omega_{n-m}^{\beta} f_t - P_{n,m,t} = \omega_{n+m+1}^{\alpha} h_{n,m,t}$$

където $h_{n,m,t}$ е холоморфна функция върху E. Записваме $h_{n,m,t}$ като:

$$z \mapsto h_{n,m,t}(z) := \frac{\widetilde{h}_{n,m,t}}{Q(z)(t-z)} \in \mathscr{H}(E).$$

Стигаме до равенството

$$Q_{n,m,t}\omega_{n-m}^{\beta} - Q(z)(t-z)P_{n,m,t} = \omega_{n+m+1}^{\alpha}\widetilde{h}_{n,m,t}.$$

Понеже отляво имаме полином от степен $\leq n+m+1$ (спрямо променливата z), тогава и дясната страна е полином от степен $\leq n+m+1$. Следователно функцията $\widetilde{h}_{n,m,t}$ не зависи z. Полагаме $\widetilde{h}_{n,m,t} =: C_n(t)$. Заместваме със $z := t$, стигаме до:

$$Q_{n,m,t}(t)\omega_{n-m}^{\beta}(t) = \omega_{n+m+1}^{\alpha}(t)C_n(t),$$

което незабавно води до:

$$Q_{n,m,t}(z)\omega_{n-m}^{\beta}(z) - Q(z)(t-z)P_{n,m,t}(z) = \omega_{n+m+1}^{\alpha}(z)\frac{Q_{n,m,t}(t)\omega_{n-m}^{\beta}(t)}{\omega_{n+m+1}^{\alpha}(t)}.$$

Тогава:

$$\frac{\omega_{n-m}^{\beta}(t)}{\omega_{n+m+1}^{\alpha}(t)} = \frac{Q(z)(t-z)Q_{n,m,t}(z)\omega_{n-m}^{\beta}(z)}{\omega_{n+m+1}^{\alpha}(z)Q_{n,m,t}(t)} \times \\ \times \left(\frac{1}{Q(z)(t-z)} - \frac{P_{n,m,t}(z)}{Q_{n,m,t}(z)\omega_{n-m}^{\beta}(z)}\right).$$

Последното равенство е в сила за всяко $n \in \mathbb{N}$ при $n > m$.

Полагаме $\widetilde{r}_n(z) = \omega_{n+m+1}^{\alpha}(z)/\omega_{n-m}^{\beta}(z)$ и

$$\widetilde{U}_n(z,t) := -\frac{1}{n}\log\left|\frac{\widetilde{r}_n(z)}{\widetilde{r}_n(t)}\right|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Припомняме, че m е фиксирано число, за $n \gg m$ можем да предположим че $n+m+1 \to n$, като $n \to \infty$. Записваме последното равенство като:

$$\frac{\widetilde{r}_n(z)}{\widetilde{r}_n(t)} = \frac{Q(z)(t-z)Q_{n,m,t}(z)}{Q_{n,m,t}(t)}\left(\frac{1}{Q(z)(t-z)} - \frac{P_{n,m,t}(z)}{Q_{n,m,t}(z)\omega_{n-m}^{\beta}(z)}\right).$$

Равенството важи за всяко $t \in \Gamma_\tau$ и $z \in E$. Избираме произволно число $\theta > 0$, такова че $e^\theta < \tau$. Прилагаме (1.23) и (1.24), получаваме

$$\frac{\max\{|\widetilde{r}_n(z)|, z \in E\}}{\min\{|\widetilde{r}_n(t)|, t \in \Gamma_\tau\}} < C_1\left(\frac{e^\theta}{\tau}\right)^n, \quad n \geq n_1. \tag{1.26}$$

По-нататък, означаваме чрез C_i, $i = 1, 2, \ldots$ положителни константи, независещи от n и различни една от друга. От друга страна,

$$\inf_{\{r \in \mathscr{R}_{n+m+1,n+m+1}\}} \frac{\max_{z\in E}|r(z)|}{\min_{t\in\Gamma_\tau}|r(t)|} \leq \inf_{\{r\in\mathscr{R}_{n,n}\}} \frac{\max_{z\in E}|r(z)|}{\min_{t\in\Gamma_\tau}|r(t)|} \leq \frac{\max_{z\in E}|\widetilde{r}_n(z)|}{\min_{t\in\Gamma_\tau}|\widetilde{r}_n(t)|}.$$

Като вземем под внимание (1.26) и Теорема 14, както и факта че $m \in \mathbb{N}$ е фиксирано число, получаваме:

$$\left(\frac{1}{\rho_\tau}\right)^n < \frac{\max\{|\widetilde{r}_n(z)|, z\in E\}}{\min\{|\widetilde{r}_n(t)|, t\in\Gamma_\tau\}} < C_1\left(\frac{e^\theta}{\tau}\right)^n, \tag{1.27}$$

където ρ_τ е Римановият модул на кондензатора (E, E_τ^C).

Означаваме с h_τ хармоничната мярка на (E, E_τ^C) и $c(E, E_\tau^C)$ — капацитета. Лесно се проверява, че:

$$h_\tau = \frac{h}{c\log\tau}$$

и

$$c(E, E_\tau^C) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\partial h_\tau}{\partial \mathrm{n}}ds = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{c\log\tau}\int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial \mathrm{n}}ds = \frac{c}{c\log\tau} = \frac{1}{\log\tau},$$

където Γ_0 е затворена аналитична крива в $E_\tau \setminus E$. За Римановия модул получаваме:

$$\rho_\tau = \rho_\tau(E, E_\tau^C) = \exp(1/c(E, E_\tau^C)) = \tau.$$

Като вземем под внимание (1.27) и при $\theta \to 0$, тогава

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\max\{|\widetilde{r}_n(z)|, z\in E\}}{\min\{|\widetilde{r}_n(t)|, t\in\Gamma_\tau\}}\right|^{1/n} = \frac{1}{\tau};$$

следователно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{z\in E, t\in\Gamma_\tau}\widetilde{U}_n(z,t)\right) = \log\tau.$$

Последното равенство важи за кондензатора (E, E_τ^C). Имаме:

$$\log\tau = \frac{1}{c(E, E_\tau^C)} = \operatorname{mod}(E_\tau \setminus E),$$

което е еквивалентно на Теорема 15(а). Тогава, поради Теорема 15(б), получаваме следното за кондензатора (E, E_τ^C):

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{U}_n(z,t) = u_\tau(z,t)$$

равномерно върху компактни подмножества на $E_\tau \setminus E$; където $u_\tau(z,t)$ е потенциалната функция за (E, E_τ^C).

Както дефинирахме по-рано в (1.25), потенциалната функция $u_\tau(z,t)$ има вида:

$$u_\tau(z,t) := \frac{h_\tau(t) - h_\tau(z)}{c(E, E_\tau^C)} = \frac{(h(t) - h(z))\log\tau}{c\log\tau} = \frac{h(t) - h(z)}{c}.$$

Тогава

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{U}_n(z,t) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\left|\frac{\widetilde{r}_n(z)}{\widetilde{r}_n(t)}\right|\right) = \frac{h(t) - h(z)}{c}.$$

Заместваме с $t = \infty$ (предположихме че $\infty \in G$), получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \log|\widetilde{r}_n(z)|^{1/n} = \frac{h(z)}{c} - \frac{h(\infty)}{c}.$$

По теоремата за единственост на хармоничните функции (Теорема 11), следва че горното равенство важи за целия кондензатор (E,F).

Полагаме $C_2 := h(\infty)/c$,

$$\lim_{n\to\infty} \log|\widetilde{r}_n(z)|^{1/n} = \frac{h(z)}{c} - C_2. \tag{1.28}$$

Взимаме експонентата,

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{r}_n(z)|^{1/n} = C_3 \exp\left(\frac{h(z)}{c}\right),$$

което е точно (1.21). Това завършва доказателството на Теорема 13.

1.3.5 Допълнение

Нека сега да разгледаме потенциали.

Нека μ_1 и μ_2 са две Борелеви единични мерки, с носители съответно на E и F. Нека да разгледаме интеграла на енергията за заряда (разликата на две мерки) $\nu = \mu_1 - \mu_2$:

$$I[\nu] = \iint \log\frac{1}{|z-\zeta|}d\nu(z)d\nu(\zeta).$$

Отбелязваме минималната енергия за кондензатора чрез:

$$V = V(E,F) := \inf_\nu I[\nu].$$

Нека да отбележим следната

Теорема 16 (Bagby [7]). *Ако (E,F) е кондензатор в $\overline{\mathbb{C}}$, то $V = \operatorname{mod} G = 1/c$, като $c = c(E,F)$.*

Минималната енергия за компактите E и F се дава чрез:

$$V_E := \inf_{\mu_1} I[\mu_1], \quad V_F := \inf_{\mu_2} I[\mu_2].$$

Нека ν^* е единствената единична мярка, за която $I[\nu^*] = V$; тогава $I[\nu^*]$ е *равновесната енергия* и ν^* — *равновесната мярка* за кондензатора. Съответният равновесен потенциал се дава чрез:

$$U^{\nu^*} = \int \log \frac{1}{|z-\zeta|} d\nu^*(\zeta).$$

Припомняме следната теорема на Bagby:

Теорема 17 (Bagby [7])**.** *Нека (E, F) е кондензатор в $\overline{\mathbb{C}}$, за който $I[\nu^*] < \infty$. Нека U^{ν^*} е равновесният потенциал за кондензатора. Тогава U^{ν^*} съществува и е крайно за всички $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Също така съществуват крайни константи $V_E \geq 0$ и $V_F \leq 0$, такива че*

i) $V_E - V_F = I[\nu^*]$,

ii) $V_F \leq U^{\nu^*} \leq V_E$ *за всички* $z \in \overline{\mathbb{C}}$,

iii) $U^{\nu^*} = V_E$ *в* E*, освен множество с нулев капацитет,*

iv) $U^{\nu^*} = V_F$ *в* F*, освен множество с нулев капацитет.*

Още имаме, че U^{ν^*} е хармонична функция навсякъде в $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$.

Свойства (i) и (iv) показват, че μ_1 е балаяжа (balayage) на μ_2 върху E,

$$V_E = I[\nu^*] - U^{\nu^*};$$

Това е аналог на (5) от първата статия, т.е.

$$G(z) = I[\mu_E] - U^{\mu_E}, \ z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E.$$

Аналогично, свойства (i) и (iii) показват, че μ_2 е балаяжа на μ_1 върху F. Балаяжите са необходими, когато точките (α, β) не са по границата на компактите, понеже Теорема 18 (по-долу) важи само когато точките са върху границата.

Въвеждаме броящата мярка μ_n, асоциирана с полиномите q_n; т.е.

$$\mu_n(B) := \frac{\text{броят на нулите на } q_n \text{ върху } B}{\deg q_n}.$$

Редицата от мерки $\{\mu_n\}$ е слабо сходяща към мярка μ, ако за всяка непрекъснатата функция $g(x) \in \mathbb{C}$ с компактен носител, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \int g(x) d\mu_n(x) = \int g(x) d\mu(x), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Ще докажем

Теорема 18. *Нека са дадени $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in \partial E$ и $\beta = \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in \partial F$, $n \in \mathbb{N}$. Нека m е фиксирано число и полинома $Q(z)$ е както преди. Нека $\{\mu_{1,n}\}$ е редицата от мерки $\mu_{1,n}$, асоциирани с точките α и $\{\mu_{2,n}\}$ — с точките β; нека още $\{\mu_n\}$ е редицата от заряди $\mu_n = \mu_{1,n} - \mu_{2,n}$. Ако за всяко $t \in \Gamma_\tau$ редицата от апроксимации на Паде $\{\pi_{n,m,t}^{\alpha,\beta}\}$ клони максимално към $f_t(z)$ върху компактни подмножества на E_τ при $n \to \infty$, то тогава μ_n е слабо сходяща към ν^* (с други думи, точките (α, β) са равномерно разпределени спрямо кондензатора (E, F)).*

Доказателство на Теорема 18. Продължаваме от (1.28),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log|\omega_n^\alpha| - \log|\omega_n^\beta|\right) = \frac{h}{c} - C_2.$$

С други думи,

$$-\widetilde{U}^{\mu_{1,n}} + \widetilde{U}^{\mu_{2,n}} = \frac{h}{c} - C_2.$$

За заряда $\mu_n = \mu_{1,n} - \mu_{2,n}$ имаме

$$\widetilde{U}^{\mu_n} = C_2 - \frac{h}{c}.$$

Когато $z \in E$, имаме $\widetilde{U}^{\mu_n} = C_2 > 0$; за $z \in F$,

$$\widetilde{U}^{\mu_n} = C_2 - \frac{1}{c} < 0.$$

Чрез Теорема 17, виждаме че $\widetilde{U}^{\mu_n}$ е равновесният потенциал, което означава че редицата μ_n е слабо сходяща към ν^*. $\square$

Глава 2

Диагонали на апроксимации на Паде

В тази глава е изведено интегралното уравнение на Натол, в случай че комплексната функция $\sigma(x)$ не се обръща в нула и изпълнява условията на Дини–Липшиц. С помощта на това уравнение е получен комплексния аналог на класически асимптотически формули на Бернщайн. за полиноми, ортогонални на единичната отсечка $\Delta = [-1, 1]$ спрямо комплексната функция на тегло $h(x) = \sigma(x)/\sqrt{1 - x^2}$.

2.1 Въведение

Интегралното уравнение на Натол е получено при по-слаби ограничения на изходната комплексната функция на тегло σ отколкото това е направено в оригиналната работа на Дж. Натол [41]. В [41] Натол е разгледал клас от функция на тегло, които удоволетворяват условията на Дини–Липшиц (вж Теорема 20, формула (2.27)). Чрез това, с помощта на уравнението на Натол (2.27), е направен пълен аналог на асимптотическата формула на Бернщайн, която важи на Δ и извън Δ, но вече за комплексна функция на тегло σ.

Получен е комплексния аналог на класическата асимптотическа формула на Бернщайн при тези условия за теглото, при които и оригиналните резултати. А именно, предполагаме че функцията на тегло h е комплексната на единичната отсечка $\Delta = [-1, 1]$ и такава, че съответстващата (в терминологията на Бернщайн) функция на тегло $\sigma(x) := h(x)\sqrt{1 - x^2}$ е различна от нула на Δ, $\sigma \colon \Delta \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и удоволетворява условието на Дини–Липшиц на Δ – $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$, което е дефинирано в параграф 2.2. Резултатът е получен чрез метода на Натол, основан на сингулярното интегрално уравнение, доказателството не използва апроксимационния метод на Бернщайн–Сегьо (можем да отбележим, че интегралното уравнение на Натол няма никакво отношение към интегралното уравнение, използвано в метода на Бернщайн–Сегьо). Подчертаваме, че метода на Натол е доста перспективен, понеже в последно време е бил обобщен за полиноми, неермитово ортогонални на няколко реални интервала, за дъги, съставляващи компакта на Штал (вж [49], [5], [55]), за полиноми на Ермит–Паде (вж [40], [4]), както и за променливи (variable) функции на тегло (вж [3], [60]). С помощта на този метод е получена формула за следите в някои класове на оператора на Якоби с краен спектър [62], методът се е оказал полезен и при извеждането на формули за силната асомптотика на апроксимации на Паде, както и съответните им ортогонални полиноми в достатъчно широк клас от аналитически функции [49], [24], [6], [5].

Възможностите на метода на Натол не се изчерпват с горе споменатите.

Да напомним, че този метод е разработен от Дж. Натол [41] в 1990 г. за случая на един интервал. В [41] Натол е изследвал силната асимптотика на полиномите на Паде във връзка със задачата за силната асимптотика на съответстващата апроксимация на Паде.

В [41] Натол е разгледал случай, когато зададената на единичния интервал комплексна тригонометрична функция на тегло удоволетворява условието на Хьолдер. Сега разглеждаме по-общ случай, а именно, предполагаме че функцията на тегло удоволетворява условието на Дини–Липшиц (вж дефиниция 9). За случая на реална функция на тегло, при тези условия, С.Н. Бернщайн [59] е получил своите асимптотически формули за ортогонални полиноми. Сега ние разширяваме класическите формули на Бернщайн за случая на комплексна тригонометрична функция на тегло σ, която удоволетворява условието на Дини–Липшиц (вж [50], [36]). Подчертаваме, че доказателството е основано на сингулярното интегрално уравнение на Натол и не използва стандартната апроксимационна техника на Бернщайн–Сегьо (вж [1], [39]).

В настоящия раздел ние разглеждаме само случая за един интервал. Това е частен случай на метода на Натол, ние се ограничаваме поради следните причини. Добре известно е [51], [58], че понятието общи ортогонални полиноми е възникнало през 1885 г. в работата на П.Л. Чебишев [52], във връзка с свойствата на верижните J-дроби[1] за някои класове от аналитични функции. Тези полиноми са възникнали естествено като знаменатели Q_n на n-тата подходяща верижна дроб $J_n = P_n/Q_n$, която съответства на верижната J-дроб.В монографията на Г. Сегьо [51, глава II, параграф 2.2] този факт е отбелязан чрез: "Ние наричаме $p_n(x)$ ортогонални полиноми ... Понякога ги наричат полиноми на Чебишев. Ние ще запазим това означение за специалния случай (1.12.3)."[2] По-нататък теорията за ортогоналните полиноми е започнала да се развива като напълно самостоятелно направление е анализа, практически не свързани с верижните дроби. В основата на тази теория е залегнало самото свойство за

[1] В някои източници (вж [58]) тези верижни дроби се наричат чебишевски верижни дроби.

[2] Традицията общите ортогонални полиноми да се наричат полиноми на Чебишев е останала дълго време. Чак през 1920-те години В.А. Стеклов [48] е назовал полиномите на Чебишев като полиноми, ортогонални спрямо обобщената функция на тегло на Якоби $(1+x)^\alpha(1-x)^\beta q(x)$, $\alpha, \beta > -1$.

ортогоналност:[3]

$$\int Q_n(x)x^k h(x)\,dx = 0, \qquad k = 0,\dots,n-1. \tag{2.1}$$

Най-общите асимптотически формули за такива полиноми са били получени през 1930-те години от С.Н. Бернщайн и Г. Сегьо (вж [51, глава XII]) именно чрез това свойство. Друг подход се състои в това, че в основата на разсъжденията лежи еквивалентно свойство на ортогоналността, а именно, максимално пресичане на подходяща верижна дроб J_n в точката $z=\infty$ и изходната функция, зададена чрез ред на Лоран. Най-естествено този подход се дефинира чрез апроксимации на Паде, по начина по-който е направено това от Натол [41] (ср. [46]).

Идейно този метод е по-близо към един от трите подхода за изучаване на асимптотиката на ортогоналните полиноми (както и на асимптотиката на диагоналните апроксимации на Паде), като тезе подходи са предложени от Шталю [46]. Основната идея е да не се използва свойството на ортогоналност (2.1), а свойствата на функцията на остатъка (2.5), като се използва нейното доближаване на степенния ред в безкрайната точка към порядъка $O(z^{-n-1})$. Като продължаваме функцията на остатъка на втория лист на Римановата повърхнина $\mathfrak{R}_2: w^2 = z^2-1$ от род $g=0$ чрез интервала $[-1,1]$ (в частност, вж (2.44), (2.54), също [49], [62]), ние получаваме частично мероморфна функция на тази Риманова повърхност, с дивизор от нулева степен:

$$(n+1)\infty^{(1)} - (n+1-\ell)\infty^{(2)} + \text{фиксирани полюси.}$$

Ако функцията на тегло $\sigma = 1/p_\ell$, где p_ℓ е полином с фиксирана степен ℓ, $p_\ell(x)\neq 0$ на Δ, то ние получаваме мероморфна функция на $\mathfrak{R}_2$. Добре известно е [45], [63], че такава функция се определя по зададен дивизор и е единствена, и може да се представи в явен вид чрез Абелеви интеграли на $\mathfrak{R}_2$. От тази явна формула за функцията на остатъка веднага следва явна формула[4] за всички полиноми от степен $n \geq \ell+1$, които са ортогонални спрямо комплексната функция на тегло $\sigma = 1/p_\ell$, и като следствие се явява асимптотиката на тези полиноми. Извеждането на асимптотическата формула за ортогонални полиноми $Q_n(z;\sigma)$ от степен n за произволна функция $\sigma \in \mathrm{DL}$ става с помощта на подходяща апроксимация на теглото σ чрез функция от вида $1/p_{n-1}$, където p_{n-1} е полином от степен $\leq n-1$, и с помощта на интегралното уравнение на Бернщайн–Сегьо (вж [51, раздел 12.4]). В това и се състои апроксимационния метод на Бернщайн–Сегьо. Трябва да отбележим, че интегралното уравнение а

[3] По-точно, еквивалентното условие на (2.1) е свойството на минималност на L^2_h-нормата на ортогоналния полином със старши коефициент единица $Q_n(x) = x^n + \cdots$ сред всички полиноми $q(x) = x^n + \cdots \in \mathbb{R}_n[x]$.

[4] Този подход е бил използван първо от Дюма [18] (също така [1]), но за доста по-частен случай.

Натол не има никакво отношение към интегралното уравнение на Бернщайн–Сегьо. Метода на Натол позволява да се избегнат апроксимационните техники на Бернщайн–Сегьо и директно да се изведе асимптотическата формула.

Нека да обърнем внимание и на следното изказване на Сегьо (вж [51, глава III, параграф 3.5]): "Ортогоналните полиноми $\{p_n(x)\}$ първо са били разглеждани в теорията на верижните дроби. Тази връзка е важна и се явява една от възможните отправни точки при изследване на ортогоналните полиноми (вж П.Л. Чебишев [1]–[8], ..." В това се състои метода на сингулярното интегрално уравнение – да забравим за свойството за ортогоналност (2.1).

В [51, глава II, раздел 2.6] Сегьо е отделил класовете от ортогонални полиноми, разгледани от С.Н. Бернщайн, които могат да бъдат явно изразени. Тези класове съответстват на функцията на тегло $h(x)$ от вида:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sigma(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\sigma(x), \qquad \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1\pm x}{1\mp x}}\sigma(x), \tag{2.2}$$

където $\sigma = 1/p_\ell$, $p_\ell \in \mathbb{R}[x]$ е полином от фиксирана степен ℓ, който е положителен на интервала Δ (явното изразяване е получено за всички ортогонални полиноми от степен $n \geq \ell + 1$). Аналозите на този полином, доказани в Теорема 21, важат и за полиноми, ортогонални спрямо всички функции на тегло от вида (2.2), където σ е комплексната холоморфна функция на Δ, $\sigma(x) \neq 0$ за $x \in \Delta$ (за метода на Натол е достатъчно да имаме $1/\sigma \in \mathscr{H}(\Delta)$ в (2.2); вж забележка 5).

2.2 Основни дефиниции

Нека на единичната отсечка $\Delta = [-1, 1]$ е зададено тегло h, т.е. $h \in L^1(\Delta)$, $h > 0$ почти навсякъде на Δ. При това условие са еднозначно (с точност до нормировка) определени полиноми Q_n, $n \in \mathbb{N}$, $\deg Q_n = n$, ортогонални спрямо теглото h:

$$\int_\Delta Q_n(x)x^k h(x)\,dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{2.3}$$

Полиномите P_n, $\deg P_n = n - 1$,

$$P_n(z) := \int_\Delta \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} h(x)\,dx \tag{2.4}$$

се наричат полиноми от втори род, функцията

$$R_n(z) := \int_\Delta \frac{Q_n(x)}{z - x} h(x)\,dx \tag{2.5}$$

се нарича функция от втори род. От (2.3)–(2.5) веднага следва, че функциите Q_n, P_n, R_n са свързани чрез

$$R_n(z) = Q_n(z)\widehat{h}(z) - P_n(z), \tag{2.6}$$

където

$$\widehat{h}(z) := \int_{\Delta} \frac{h(x)\,dx}{z-x} \tag{2.7}$$

е функция на Марков (вж [52], [22], [61], [23], [24]). Поради това че отношението

$$\frac{Q_n(z)-Q_n(x)}{z-x}$$

е полином от степен $n-1$ по променливата x (т.е., ортогонални полиноми $Q_n(x)$), от (2.5) получаваме:

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)}{z-x} h(x)\,dx = \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)Q_n(z)}{z-x} h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)(Q_n(z)-Q_n(x)+Q_n(x))}{z-x} h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Следователно, за функцията от втори род е изпълнено съотношението:

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2.9}$$

От (2.9) следва, че рационалната функция P_n/Q_n е диагонална апроксимация на Паде $[n/n]_{\widehat{h}}$ на функцията на Марков $\widehat{h}$, т.е. за $[n/n]_{\widehat{h}} = P_n/Q_n$ е изпълнени характеристичното (в класа на всички рационални функции $\mathscr{R}_n := \mathbb{C}_n(z)$ от ред $\leq n$) съотношение:

$$\left(\widehat{h} - [n/n]_{\widehat{h}}\right)(z) = \frac{1}{Q_n^2(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x)\,dx = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2.10}$$

Класическите резултати на С.Н. Бернщайн [59] (вж още [51, гл. XII]) за асимптотиката на ортогоналните полиноми е формулирана и доказана за случая на интервала $\Delta = [-1, 1]$ и реална функция на тегло от вида:

$$h(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.11}$$

където σ – реална непрекъсната и положителна на Δ функция, която удоволетворява условието на Дини–Липшиц. Прието е функцията σ да се нарича тригонометрична функция на тегло; по-нататък ще наричаме функцията σ просто тегло, като допускаме че σ може да е комплексна функция.

Дефиниция 9 (Условие на Дини–Липшиц)**.** Казваме, че зададената на интервала Δ функция σ удоволетворява условието на Дини–Липшиц (и пишем $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$) с някакви константи $C > 0$ и $\gamma > 1$, ако за всички $x, y \in \Delta$ е изпълнено неравенството

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C\big|\log|x-y|\big|^{-\gamma}. \tag{2.12}$$

Следната теорема е в сила:

Теорема 19 (Теорема на Бернщайн (см. [59], [51]))**.** *Нека σ е положителна функция на Δ, нека да удовлетворява условието на Дини–Липшиц на Δ. Тогава, за полиномите Q_n, ортогонални на Δ с тегло (2.11) и нормирани чрез условието*[5] $\|Q_n^2\|_{L_h^2} = 2$ *при $n \to \infty$, важат следните асимптотически формули на Бернщайн:*

$$Q_n(z) = D(z;\sigma)\Phi(z)^n(1+o(1)), \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \tag{2.13}$$

$$Q_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\sigma(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x;\sigma)) + o(1), \qquad x \in \Delta. \tag{2.14}$$

В (2.13)–(2.14) $o(1) = O((\log n)^{1-\gamma})$,

$$D(z;\sigma) := \exp\left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_\Delta \frac{\log\sigma(x)}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \tag{2.15}$$

е функцията[6] *на Сегьо,*

$$\theta(x;\sigma) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_\Delta \frac{\log\sigma(x) - \log\sigma(y)}{x-y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

е фазова функция, $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ е обратната функция на Жуковски, $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\zeta = \Phi(z)$.

Съотношение (2.13) важи в (т.е. върху компактни подмножества на) областта $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, съотношение (2.14) важи равномерно на Δ. Случаят $\sigma \equiv 1$ в (2.11) съответства на функцията $D(z;\sigma) \equiv 1$ и класическите полиноми на Чебишев от първи род $T_n(z) = \zeta^n + \zeta^{-n}$.

Нека да отбележим добре известните свойства на функцията на Сегьо (2.15):

(1) решаване на задачата за факторизация на теглото[7]: $D^+(x;\sigma)D^-(x;\sigma) = \sigma(x)$, $x \in (-1,1)$;

(2) свойство мултипликативност спрямо теглото:

$$D(z;\sigma_1 \cdot \sigma_2) = D(z;\sigma_1) \cdot D(z;\sigma_1); \tag{2.16}$$

(3) за (тригонометричното) тегло $\sigma(x) = (1+x)^{\alpha+1/2}(1-x)^{\beta+1/2}$, което съответства на теглото на Якоби $h(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$, $x \in (-1,1)$, $\alpha, \beta > -1$,

---

[5] Такава нормировка е удобна за прилагане на метода на Натол, и е свързана със съотношението (2.27), което се явява ключово при използването на този метод.

[6] Класическата функция на Сегьо за тегло σ е равна на $1/D(z;\sigma)$, но тук е по-удачно да използваме именно $D(z;\sigma)$.

[7] Под $(\cdot)^+(x)$, $x \in \Delta$ се има в предвид граничната стойност на съответната функция $(\cdot)$, холоморфна в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, взета от горната полуравнина, т.е. $(\cdot)^+(x) = (\cdot)(x + i \cdot 0)$; аналогичен смисъл се придава и на $(\cdot)^-(x)$.

имаме

$$
\begin{aligned}
D(z;\sigma) &= \left(\frac{\Phi(z)^{\alpha+\beta+1}}{(z+1)^{\alpha+1/2}(z-1)^{\beta+1/2}}\right)^{1/2} \\
&= \frac{(z+(z^2-1)^{1/2})^{1/2}}{(z^2-1)^{1/4}}\left(\frac{\Phi(z)^{\alpha+\beta}}{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\beta}}\right)^{1/2}. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Във връзка с изучаването на сходимостта на диагоналните апроксимации на Паде за функция от тип на Марков (2.7) (вж също (2.23)) възниква и задачата за асимптотичните свойства на полиномите, ортогонални на интервала Δ спрямо комплексната тригонометрична функция на тегло $\sigma\colon \Delta \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$; вж формула (2.10). До такава задача се свежда и разлагането в верижната J-дроб на прости алгебрични функции от вида

$$
f(z) = r_1(z) + \frac{r_2(z)}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad f \in \mathscr{H}(\infty), \qquad (2.18)
$$

където r_1, r_2 са комплексни рационални функции, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$ (вж [23], [61], [36], [24]). Отбелязваме, че разлагането в верижната J-дроб на хипереллиптични функции води до полиноми, ортогонални на няколко интервала, и, по-общо казано, на компакта на Штал в комплексната равнина (вж [18], [39], [38], [23], [2]).

Дж. Натол [39], [41] е показал, че резултатите на С.Н. Бернщайн остават в сила и за комплексно тегло от вида $\sigma\colon \Delta \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, ако $\sigma \in \mathscr{H}(\Delta)$. Поточно, формулата (2.13) не се променя, но имаме $o(1) = o(\delta^n)$, където $\delta \in (0,1)$, а вместо (2.14) имаме

$$
Q_n(x) = \Psi_n^+(x) + \Psi_n^-(x) + O(\delta^n), \qquad x \in \Delta, \quad n \to \infty, \qquad (2.19)
$$

$\delta \in (0,1)$, $\Psi_n(z) := D(z;\sigma)\Phi(z)^n$, $\Psi^{\pm}(x) = \Psi_n(x \pm i0)$. За комплексното тегло σ от (2.13) следва, че $\deg Q_n = n$ при $n \geq n_0$, всички нули Q_n се натрупват на интервала Δ и

$$
\frac{1}{n}\mu(Q_n) \to \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},
$$

където $\mu(Q_n) = \sum\limits_{\zeta: Q_n(\zeta)=0} \delta_\zeta$ е броящата мярка за полинома Q_n; сходимостта "$\to$" се разбира като слаба сходимост в пространството на мерките. Подчертаваме, че получените от Натол асимптотически формули са точно формулите на Бернщайн, но за комплексна функция на тегло $\sigma \neq 0$, която е холоморфна на Δ, и със смяната на $O((\log n)^{1-\gamma})$ в $o(\delta^n)$ при условие, че $\sigma \in \mathscr{H}(\Delta)$. Съответната асимптотическа формула е била получена от Натол [41] и за случая, когато функцията σ принадлежи на класа на Хьолдер със стойности $\mu \in (0,1)$. При този случай, в съответната формула (2.19) имаме $o(1) = O(n^{-\mu})$.

Тези резултати са били получени от Натол с помощта на разработения от него нов метод в [41], който е основан на извеждането на някакво сингулярно интегрално уравнение за функцията на остатъка R_n (вж по-долу (2.27); в теорията за ортогонални полиноми R_n е функция от втори род (2.5)). Отбелязваме, че при метода на Натол свойството за ортогоналност

$$\int_{\Delta} Q_n(x)x^k h(x)dx = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{2.20}$$

не се използва в явен вид, всички разсъждения на [41] са основани на следното характеристично свойство на функцията на остатъка (вж (2.9)):

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty \tag{2.21}$$

(очевидно, че (2.20) и (2.21) са еквивалентни).

Нека да отбележим, че в [24] чрез метода на Натол (т.е. на основата на сингулярното интегрално уравнение, вж (2.27)) е била изцяло доказана асимптотиката на полиномите $Q_n = Q_n(z; f)$, които са знаменателите на диагоналната апроксимация на Паде за функции от тип на Марков (ср. (2.18)):

$$f(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z), \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \tag{2.22}$$

където

$$\widehat{\mu}(z) := \int_{\Delta} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \qquad d\mu(x) := \frac{1}{\pi}\frac{\sigma(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.23}$$

$r \in \mathbb{C}(z)$ е рационална функция, $r(x) \neq 0$ на Δ, $r(\infty) = 0$. По-точно, при условие, че $\sigma \in \mathscr{H}(\Delta)$ и функцията f е от вида (2.22), в [24] е било доказано, че при подходяща нормировка на полиномите $Q_n(z; f)$ имаме (вж [24, Теореми 2 и 3, формули (22_1)–(22_2)]:

$$1^\circ. \quad Q_n(z; f) = \Psi_n(z)\bigl(1 + o(1)\bigr) \text{ при } n \to \infty \text{ в } D', \tag{2.24}$$
$$2^\circ. \quad Q_n(x; f) = \Psi_n^+(x) + \Psi_n^-(x) + o(1) \text{ при } n \to \infty \text{ равномерно на } \Delta, \tag{2.25}$$

където $D' = D \setminus \{\text{полюсите на } r\}$, величината $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Функцията Ψ_n се явява (единствена, с точност до нормировка) решение на някаква гранична задача на Риман. Отбелязваме, че (2.24) е така наречената "външна" асимптотика на Q_n, а (2.25) – "вътрешна" асимптотика на Q_n.

От точка 1° и свойствата на Ψ-функцията, която е решение на граничната задача на Риман, веднага следва, че $\deg Q_n(z; f) = n$ за достатъчно големи n, т.е. за функцията f всички достатъчно големи индекси n са нормални.

А.А. Гончар [22] е доказал сходимостта на диагоналните аппроксимации на Паде за функции от вида (2.22) в сферичната метрика, при условие, че $\sigma' > 0$ почти навсякъде на Δ. От този резултат следва, че всеки полюс на f в областта

$D = \overline{\mathbb{C}} \backslash \Delta$ привлича толкова полюса на $[n/n]_f$ колкото е неговата кратност. В [24] е било получено следното твърдение за асимптотическото поведение на полюсите на $[n/n]_f$ извън интервала Δ с помощта на формулата за силна асимптотика (2.25) на полиномите $Q_n(x; f)$ на интервала Δ (т.е. вътрешна асимптотика):

3°. *Ако точката $a \in D$ е полюс на функцията f от кратност $m \geq 3$, то съответстващите полюси $a_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$, на рационалната функция $[n/n]_f$ се разполагат асимптотически при $n \to \infty$ във върховете на правилен m-ъгълник с център точка $z = a$ (точната формулировка е в [24, Теорема 3]).*

Основната ни цел е да получим уравнението на Натол и да докажем твърдение 1° и 2° при по-слаби ограничения за комплексната функция на тегло $\sigma(x) \neq 0$, а именно при условие $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$ (вместо $\sigma \in \mathscr{H}(\Delta)$). Също така, за комплексната функция на тегло $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$, $\sigma(x) \neq 0$, са доказани класическите формули на Бернщайн (2.13), (2.14). Нека да подчертаем, че доказателството е основано на сингулярното интегрално уравнение на Натол, и не се използва стандартната апроксимационна техника на Бернщайн–Сегьо (вж. [1]). Можем да отбележим, че в [39] са изследвани асимптотичните свойства на полиноми, ортогонални относително комплексната функция на тегло, която удоволетворява условието на Дини–Липшиц, но с помощта на апроксимационните техники на Бернщайн–Сегьо.

Получените тук теореми 20 и 21 позволят да се докаже аналог на [24, Теорема 3] (също и 3°) за функции от вида (2.22)–(2.23), в класа на комплексните функции σ, които удоволетворяват условието на Дини–Липшиц.

2.3 Формулировка и доказателство на основните резултати

В този параграф са доказани асимптотическите формули на Бернщайн (2.13), (2.14) чрез метода на Натол за комплексна тригонометрична функция на тегло σ, която не се обръща в нула и удоволетворява условието на Дини–Липшиц (2.12).

Основните резултати са теореми 20 и 21.

Нека функцията g е зададена на единичната окръжност $\Gamma : |t| = 1$, g не се обръща в нула, $g(t) \neq 0$, и удоволетворява условието на Дини–Липшиц ($g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$) с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$:

$$|g(t) - g(t')| \leq C \left(\log \frac{1}{|t - t'|} \right)^{-\lambda}, \qquad \lambda > 1, \quad t, t' \in \Gamma. \tag{2.26}$$

Нататък, чрез C и λ се обозначават константите от (2.26), чрез M, M' – константи, зависещи само от функцията f (вж. формулировката на Лема 1 и 2), чрез $c_1, c_2, \ldots, c_1', c_2', \ldots$ – някакви абсолютни константи, чиято стойност не е от значение.

Въвеждаме следните означения:

$$\Gamma_r : |z| = r, \quad U_r : |z| < r, \quad r > 0, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad U = U_1,$$

$$K_R : 1 < |z| < R, \quad \overline{K}_R : 1 \leq |z| \leq R, \quad R > 1.$$

Важат следните твърдения:

Лема 1. *Нека функцията* $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $C > 0$ *и* $\lambda > 1$*, нека функцията* f *е холоморфна в пръстена* $1 < |z| < R$ *и непрекъсната в* $1 \leq |z| \leq R$ *с някакво* $R > 1$*. Полагаме*

$$F(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t)}{t - z}\, dt, \qquad |z| < 1.$$

Тогава имаме:

1) функцията $F(z)$ *е равномерно ограничена при* $|z| < 1$*, за всяка точка* $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ *съществува границата по лъча:*

$$\lim_{r \to 1-0} F(re^{i\theta}) =: F(e^{i\theta});$$

2) важи оценката:

$$\max_{|t|=1} |F(t)| \leq c_1 CM,$$

където $M = \max\limits_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$*;*

3) функцията F *е непрекъсната на* Γ *и удоволетворява условието на Дини–Липшиц с константи* $c_2 CM$ *и* $\mu = \lambda - 1$*.*

Лема 2. *Нека* $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $C > 0$ *и* $\lambda > 1$*, нека функцията* f *е холоморфна в пръстена* $1 < |z| < R$*, непрекъсната в* $1 \leq |z| \leq R$*,* $R > 1$*, и* $f \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* M' *и* $\mu = \lambda - 1 > 0$*. Тогава за функцията*

$$F_n(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t)\, dt}{t^{2n}(t - z)}, \quad |z| < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

имаме:

1) за всички $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ *съществува*

$$\lim_{r \to 1-0} F_n(r\zeta) =: F_n(\zeta);$$

2) функцията $F_n \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $c_3 CM$ *и* $\mu = \lambda - 1$*, где* $M = \max\limits_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$*;*

3) важи неравенството:

$$\max_{|z| \leq 1} |F_n(z)| \leq c_3 C(M + M')(\log n)^{-\mu}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказателството на леми 1 и 2 е приведено в §2.4.

Теорема 20. *Нека функцията* $F_n \not\equiv 0$*,* $n \in \mathbb{N}$*, е холоморфна в кръга* $|z| < 1$*, непрекъсната в затворения кръг* $|z| \le 1$ *и удовлетворява:*

$$F_n(z) = \int_{|t|=1} \frac{F_n(1/t)g(t)}{t^{2n}(t-z)} dt + C_n, \qquad |z| < 1, \tag{2.27}$$

където функцията $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $C > 0$ *и* $\lambda > 1$*,* C_n *е някаква константа. Тогава равномерно по* $|z| \le 1$ *имаме*

$$F_n(z) = C_n(1 + o(1)), \qquad n \to \infty, \tag{2.28}$$

където $o(1) = O\big((\log n)^{-\mu}\big)$*,* $\mu = \lambda - 1$*.*

Доказателство на Теорема 20. От Лема 1 следва, че функцията $F_n \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ с константи $c_1' C M_n$ и $\mu = \lambda - 1$. Тогава от Лема 2 получаваме:

$$|F_n(\zeta_n) - C_n| = (C+1)^2 M_n \cdot o(1) = M_n \cdot o(1), \quad n \to \infty,$$

където $|F_n(\zeta_n)| = M_n \neq 0$, $\zeta_n \in \Gamma$, $o(1) = O\big((\log n)^{-\mu}\big)$. Оттук лесно следва твърдението на Теорема 20. □

Забележка 2. От Теорема 20 следва, че за величината $M_n = \max\limits_{|z|\le 1} |F_n(z)| \neq 0$ при $n \to \infty$ важи съотношението:

$$M_n = |C_n|(1 + o(1)), \qquad n \to \infty, \tag{2.29}$$

където $o(1) = O\big((\log n)^{-\mu}\big)$, $\mu = \lambda - 1$.

Забележка 3. Както самата Теорема 20, така и нейното доказателство, са идейно съвсем близо до следното добре известно твърдение: (вж. А. Зигмунд [57, глава II, раздел 4]. Нека функцията $f(\theta) \in \mathrm{DL}(\Gamma)$. Тогава за коефициентите на Фурие c_n на функцията f

$$c_n = c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta n}\, d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.30}$$

имаме

$$c_n = O\big((\log|n|)^{-\lambda}\big), \quad |n| \to \infty.$$

Доказателство. Полагаме $\theta = \eta + i\pi/n$. Понеже $e^{i\pi} = -1$, имаме

$$c_n = -\int_0^{2\pi} f(\eta + i\pi/n) e^{i\eta n}\, d\eta = -\int_0^{2\pi} f(\theta + i\pi/n) e^{i\theta n}\, d\theta. \tag{2.31}$$

Сумираме (2.30) и (2.31), получаваме

$$2c_n = \int_0^{2\pi} \big(f(\theta) - f(\theta + i\pi/n)\big) e^{i\theta n}\, d\theta.$$

Непосредствено следва съотношението $c_n = O\big((\log|n|)^{-\lambda}\big)$ при $|n| \to \infty$. □

Забележка 4. Именно наличието на $F_n(1/t)$ в дясната част на (2.27), а не на $F_n(t)$, е свързано с полученото от Натол [41] интегрално уравнение за функцията на остатъка R_n (вж (2.54)).

Забележка 5. Нека да подчертаем, че (2.27) се явява ключова част в метода на Натол (ср. [41, формула (3.10)]). Лесно се вижда, че ако в (2.28) функцията g е холоморфна в някакъв кръг $1 < |z| < \rho$, $\rho > 1$, и непрекъсната в затворения кръг $1 \le |z| \le \rho$, то (2.28) важи с $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta = 1/\rho \in (0,1)$. Също така, асимптотическото представяне на (2.28) важи и за всеки компакт $K \subset \mathbb{D}$ и показателя на геометричната прогресия не зависи от компакта K.

Забележка 6. По-нататък използваме следните съотношения:

$$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x, \qquad x \in [0, \pi/2],$$
$$\int_0^\delta \left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\lambda}\frac{dx}{x} = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{1-\lambda}, \qquad \int_\delta^{1/2} \left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\lambda}\frac{dx}{x^2} \le \frac{(\log 2)^{1-\lambda}}{\delta},$$

като $\lambda > 1$, $\delta > 0$. Освен това, при $\delta \in (0, 1/4)$, $\zeta, \zeta' \in \Gamma$ имаме: $1/2 \le |t - \zeta'|/|t - \zeta| \le 3/2$ для $|\zeta - \zeta'| = \delta$, $|t - \zeta| \ge \sqrt{\delta}$, $t \in \Gamma$.

Нека $w = w(z) = (z^2-1)^{1/2}$, като сме избрали такъв клон на многозначната функция $(\cdot)^{1/2}$ при $z \in D := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$, че

$$w(z) = (z^2-1)^{1/2} \sim z \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2.32}$$

От (2.32) следва, че $w(z) > 0$ при $z > 0$ и $w^+(x) = i\sqrt{1-x^2}$ при $x \in (-1,1)$, като под $w^+(x)$, $x \in (-1,1)$, се разбира граничната стойност на функцията $w(z)$, $z \in D$, от горната полуравнина:

$$w^+(x) := w(x + i \cdot 0) := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} w(x + i\varepsilon), \quad x \in (-1,1), \tag{2.33}$$

и $\sqrt{1-x^2} > 0$, $x \in (-1,1)$ (под функциията $\sqrt{a^2} = a$, $a > 0$, ние разбираме положителната аритметична стойност на квадратния корен).

Нека функцията f е зададена чрез:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma(x)}{w^+(x)}\frac{dx}{x-z}, \quad z \notin \Delta := [-1,1], \tag{2.34}$$

където комплексната тригонометрична функция на тегло $\sigma(x) \ne 0$ не се обръща в нула и удоволетворява условието на Дини–Липшиц $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$, с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, т.е. $\sigma\colon \Delta \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Нека $\mathfrak{R}_2$ е Риманова повърхнина с род нула, зададена чрез $w^2 = z^2 - 1$. Предполагаме, че Римановата повърхнина $\mathfrak{R}_2$ е на вид като двулистно покритие на

Римановата сфера $\overline{\mathbb{C}}$ с точки на разклонение $z = \pm 1$ от втори род. Римановата повърхност $\mathfrak{R}_2$ може да бъде параметризирана по следния начин:

$$z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right), \quad t \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{2.35}$$

Първият лист $\mathfrak{R}^{(1)}$ на $\mathfrak{R}_2$ се задава чрез (2.35) за $|t| < 1$, при това $z^{(1)} = \infty^{(1)}$ при $t = \infty$. Вторият лист $\mathfrak{R}^{(2)}$ се задава чрез (2.35) за $|t| > 1$ и съответно $z^{(2)} = \infty^{(2)}$ при $t = 0$.

Въвеждаме функцията $F(t) := wf(z)$ при $|t| < 1$. Функцията $F(t)$, $|t| < 1$, има гранична стойност $F^{+}(\tau)$ на единичния кръг $\Gamma := \{\tau : |\tau| = 1\}$, когато t клони към $\tau \in \Gamma$ от вътрешната страна на единичния кръг $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. Също така, дефинираме функцията:

$$\Sigma(\tau) := F^{+}(\tau) + F^{+}(1/\tau) = F(\tau) + F(1/\tau), \quad |\tau| = 1. \tag{2.36}$$

Прилагаме формулата на Сохоцки–Племелкъм функцията f, която е зададена чрез (2.34), получаваме:

$$f^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\frac{\sigma(x)}{w^{+}(x)} + \frac{i}{2}H_f(x), \quad x \in (-1, 1), \tag{2.37}$$

където

$$H_f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma(x')}{w^{+}(x')}\frac{dx'}{x - x'}, \quad x \in \Delta,$$

е преобразованието на Хилбертза функцията σ/w^{+}. От (2.37) чрез граничен преход при $\mathbb{D} \ni t \to t_0 \in \Gamma$ от вътрешната страна на единичния кръг $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ следва:

$$\begin{aligned} F(t) = wf(z) \to F^{\pm}(t_0) : &= w^{\pm}(x_0)\left\{\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma(x_0)}{w^{+}(x_0)} + \frac{i}{2}H_f(x_0)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sigma(x_0) \pm \frac{iw^{+}(x_0)}{2}H_f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{2.38}$$

От (2.38) за функцията $\Sigma(t)$, $t \in \Gamma$, която е определена чрез (2.36), получаваме равенството:

$$\Sigma(t) := F^{+}(t) + F^{+}(1/t) = \sigma\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \sigma(x) = \sigma(\cos\theta), \quad t = e^{i\theta} \in \Gamma. \tag{2.39}$$

От равенство (2.39) следва, че функцията Σ удоволетворява условието на Дини–Липшиц на окръжността Γ, $\Sigma \in \mathrm{DL}(\Gamma)$, със същите константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, с които и изходната функция σ.

Въвеждаме полиноми на Паде на функция f за произволно фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $j = 1, 2$ по следния начин. Полиномите на Паде $P_{n,j} = P_{n,j}(z; f) \in \mathbb{C}_n[z]$, $P_{n,2} \not\equiv 0$, на функцията f се определят от следното съотношение:

$$R_n(z) := (P_{n,1} + P_{n,2}f)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{2.40}$$

Функцията R_n се нарича функция на остатъка; двойката полиноми $P_{n,1}$ и $P_{n,2}$, $P_{n,j} \in \mathbb{C}_n[z]$ се определят нееднозначно, но рационалната функция $[n/n]_f := -P_{n,1}/P_{n,2}$ е еднозначно определена и се нарича диагонална апроксимация на Паде от ред n.

Въвеждаме две нови функции:

$$\begin{aligned} \Pi_2(t) &:= \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1} \frac{\log \Sigma(u)\, du}{u - t}\right\}, \quad |t| > 1, \\ \Pi_1(t) &:= -f(z)\Pi_2(t), \quad |t| > 1. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Един от основните резултати в този раздел се явява следната теорема (която е комплексния вариант на класическата теорема на Бернщайн ср. [50]):

Теорема 21. *Нека функцията на тегло $\sigma(x)$ удоволетворява условията на Дини–Липшиц на интервала Δ с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$. Тогава полиномите на Паде $P_{n,j}(z; f)$, $j = 1, 2$ на функцията f, зададена чрез (2.34), са еднозначно определени (с точност до нормировка) за всички достатъчно големи n. При подходяща нормировка на полиномите $P_{n,j}$, $j = 1, 2$ за произволно $\delta > 0$ важат следните формули за равномерна асимптотика:*

$$P_{n,j}(z) = t^n \Pi_j(t)(1 + o(1)), \quad |t| > 1 + \delta, \quad n \to \infty, \tag{2.42}$$
$$P_{n,j}(z) = t^n \Pi_j(t) + t^{-n}\Pi_j(t^{-1})1 + o(1), \quad |t| = 1, \quad n \to \infty, \tag{2.43}$$

където $o(1) = O((\log n)^{1-\lambda})$ при $n \to \infty$.

Доказателство на Теорема 21. В доказателството се придържаме към означенията на Натол [41], където това е възможно.

Полагаме:

$$\begin{aligned} \Pi_{n,j}(t) &:= P_{n,j}(z)t^{-n} \quad \text{при} \quad |t| > 1, \quad j = 1, 2, \\ r_n(t) &: = wt^{-n}R_n(z) \quad \text{при} \quad |t| < 1. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Разглеждаме съотношение (2.40) при $|t| = 1$. Умножаваме го по wt^{-n}, при $|t| = 1$ получаваме (като отчитаме, че $w(1/t) = -w(t)$, вж (2.35)):

$$\begin{aligned} r_n(t) &= w\Pi_{n,1}(t) + F(t)\Pi_{n,2}(t), \\ r_n(1/t) &= -w\Pi_{n,1}(1/t) + F(1/t)\Pi_{n,2}(1/t). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Понеже $\Pi_{n,j}(1/t) = t^{2n}\Pi_{n,j}(t)$, умножаваме второто уравнение от (2.45) с t^{-2n} и получаваме следното съотношение при $|t| = 1$:

$$\begin{aligned} w\Pi_{n,1}(t) + F(t)\Pi_{n,2}(t) &= r_n(t), \\ -w\Pi_{n,1}(t) + F(1/t)\Pi_{n,2}(t) &= t^{-2n}r_n(1/t). \end{aligned} \tag{2.46}$$

От (2.36) и (2.46) следва, че при $|t| = 1$ имаме:

$$\Sigma(t)\Pi_{n,2}(t) = r_n(t) + t^{-2n}r_n(t), \quad |t| = 1. \tag{2.47}$$

Разглеждаме (2.47) като уравнение с две неизвестни на функцията $\Pi_{n,2}$, и r_n с известна функция $\Sigma(t) = \sigma((t + 1/t)/2) \neq 0$. Понеже в (2.47) зависимостта от n се вижда само в $t^{-2n}r_n(t)$, разглеждаме ново уравнение с две неизвестни на функцията $\Pi_2(t) \neq 0$, $|t| > 1$, и $r(t) \neq 0$, $|t| < 1$, не зависещи от n, и такива ,че $r \in \mathscr{H}(|t| < 1)$, $\Pi_2 \in \mathscr{H}(|t| > 1)$:

$$\Sigma(t)\Pi_2(t) = r(t), \quad |t| = 1. \tag{2.48}$$

Понеже функцията $\Sigma(t) \neq 0$ при $|t| = 1$, ние можем да приложим логаритъм и към двете страни на (2.48), тогава получаваме съотношение, което е еквивалентно на (2.48):

$$\log r(t) - \log \Pi_2(t) = \log \Sigma(t), \quad |t| = 1, \quad \Sigma(t) \neq 0, \tag{2.49}$$

Разглеждаме (2.49) като гранична задача при $|t| = 1$ двойката функции $\log \Pi_2(t)$, $|t| > 1$, и $\log r(t)$, $|t| < 1$. Решението на тази гранична задача се дава в явен вид с помощта на преобразование на Коши на функцията $\log \Sigma(t)$, която е зададена на единичния кръг Γ:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & |t| < 1 & r(t) \\ \text{при} & |t| > 1 & \Pi_2(t) \end{array}\right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{\log \Sigma(u)\, du}{u - t} \right\}. \tag{2.50}$$

Сега с помощта на явното представяне на (2.50) привеждаме уравнение (2.48) в следния вид, при $|t| = 1$:

$$\frac{\Pi_{n,2}(t)}{\Pi_2(t)} = \frac{r_n(t)}{r(t)} + \frac{t^{-2n}r_n(1/t)}{r(t)}, \quad |t| = 1. \tag{2.51}$$

Преписваме (2.51) като:

$$\frac{r_n(t)}{r(t)} - \frac{\Pi_{n,2}(t)}{\Pi_2(t)} = -\frac{t^{-2n}r_n(1/t)}{r(t)}, \quad |t| = 1. \tag{2.52}$$

От (2.52) получаваме:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & |t| < 1 & r_n(t)/r(t) \\ \text{при} & |t| > 1 & \Pi_{n,2}(t)/\Pi_2(t) \end{array}\right\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{u^{-2n}r_n(1/u)}{r(u)} \frac{du}{u - t} + C_n, \tag{2.53}$$

където C_n е някаква константа. Сега от (2.53) получаваме следното интегрално представяне за функцията на остатъка $r_n(t) := wt^{-n}R_n(z)$, $|t| < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(t)}{r(t)} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{u^{-2n}r_n(1/u)}{r(u)}\frac{du}{u-t} + C_n \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{u^{-2n}}{u-t}\frac{r(1/u)}{r(u)}\frac{r_n(1/u)}{r(1/u)}\,du + C_n, \qquad |t| < 1.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Лесно виждаме, че функцията $r(1/u)/r(u)$, $|u| = 1$ удовлетворява условията на Дини–Липшиц на окръжността Γ с константи $C' > 0$ и $\lambda > 1$, понеже функцията $r(u)$ при $|u| = 1$ удовлетворява условията на Дини–Липшиц на Γ с константи $C > 0$ и $\lambda > 1$.

Сега полагаме $F_n(t) := r_n(t)/r(t)$ в уравнение (2.54) и прилагаме Теорема 20 към тази функция F_n. С това Теорема 21 е доказана. □

Забележка 7. От (2.35) следва, че $t = z + w = z + (z^2 - 1)^{1/2} = \Phi(z)$ е обратната функция на Жуковски. Лесно виждаме, че $\Pi_2(t)$ съвпада с $D(z;\sigma)$, където $1/D(z;\sigma) = \Delta(z;\sigma)$ е класическата функция на Сегьо, която съответства на функцията на тегло σ. Следователно, непосредствено от (2.42) следва, че за случая $\sigma\colon \Delta \to \mathbb{R}_{>0}$ при подходяща нормировка на полиномите на Паде $P_{n,2}$ важат следните формули за силна асимптотика извън интервала Δ и на Δ:

$$P_{n,2}(z) = \Phi(z)^n D(z;\sigma)(1 + o(1)), \quad |\Phi(z)| > 1, \quad n \to \infty, \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,2}(x) &= \Phi^+(x)^n D^+(x;\sigma) + \Phi^-(x)^n D^-(x;\sigma) + o(1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\sigma(x)}}\cos\bigl(n\arccos x + \theta(x)\bigr) + o(1), \quad x \in \Delta, \quad n \to \infty,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

където $o(1) = O((\log n)^{1-\lambda})$ при $n \to \infty$ и

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int_\Delta \frac{\sigma(x) - \sigma(t)}{t - x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Асимптотическите формули (2.55)–(2.56) всъщност представляват класическите асимптотически формули на Бернщайн (ср. (2.13), (2.14)).

2.4 Доказателство на Лема 1 и 2

В този параграф доказваме помощните твърдения Лема 1 и 2 (ср. [41, Лема 5.1 и 5.2]).

Нека $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, $z = r\zeta$, $r < 1$. За функцията $F(z)$ имаме:

$$F(r\zeta) = \int_{|t|=1} f(t)\frac{g(t) - g(\zeta)}{t - r\zeta}dt + g(\zeta)\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{t - r\zeta}dt = F_1(r\zeta) + F_2(r\zeta). \tag{2.57}$$

За функцията F_2 имаме:

$$F_2(r\zeta) = g(\zeta)\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{t-r\zeta}dt = g(\zeta)\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{t-r\zeta}dt.$$

Виждаме, че всички твърдения от точки 1–3 за F_2 са в сила.

Нека да разгледаме функцията

$$F_1(r\zeta) = \int_{|t|=1} f(t)\frac{g(t)-g(\zeta)}{t-r\zeta}dt.$$

Полагаме:

$$G_r(t;\zeta) := \frac{g(t)-g(\zeta)}{t-r\zeta}.$$

Понеже за някакво $r_0 \in (0,1)$ при $r \in (r_0, 1)$ и равномерно по $t, \zeta \in \Gamma$

$$\frac{1}{|t-r\zeta|} \le \frac{c_1'}{|t-\zeta|},$$

то

$$|G_r(t;\zeta)| \le \frac{c_2' C}{|t-\zeta|}\big|\log|t-\zeta|\big|^{-\lambda}$$

равномерно по $t, \zeta \in \Gamma$ и при всички $r_0 < r < 1$. Освен това,

$$G_r(t;\zeta) \to G(t;\zeta) = \frac{g(t)-g(\zeta)}{t-\zeta} \quad \text{при} \quad r \to 1-0, \quad t \neq \zeta.$$

Следователно, $|F_1(z)| \le c_2' CM$, $|z| \le 1$, $M = \max\limits_{\zeta \in \overline{K}_R} |f(\zeta)|$. Тъй като $G(t;\zeta) \in L_1(\Gamma)$ по $t \in \Gamma$ при фиксирано $\zeta \in \Gamma$, то по Теоремата на Лебег за мажоритарна сходимост

$$F_1(z) = F_1(r\zeta) = \int_{|t|=1} f(t)\frac{g(t)-g(\zeta)}{t-r\zeta}dt \to \int_{|t|=1} f(t)\frac{g(t)-g(\zeta)}{t-\zeta}dt =: F_1(\zeta) \tag{2.58}$$

при $r \to 1-0$. Точки 1 и 2 са доказани.

Нека да докажем твърдението от точка 3.

Нека $\zeta \in \Gamma$ е фиксирано, $\zeta' = \zeta e^{i\theta'}$, $|\zeta' - \zeta| = \delta$, $\delta > 0$ – достатъчно малко, $\delta \in (0, 1/4)$. Полагаме $\gamma = \{t \in \Gamma : |t-\zeta| \le \sqrt{\delta}\}$. Имаме (вж (2.58)):

$$F_1(\zeta') - F_1(\zeta) = \int_{|t|=1}\big\{G(t;\zeta') - G(t;\zeta)\big\} f(t)\,dt = \int_\gamma \{\cdot\} f(t)\,dt + \int_{\Gamma\setminus\gamma}\{\cdot\} f(t)\,dt.$$

Нека

$$I_1 = \int_\gamma \{\cdot\} f(t)\,dt, \qquad I_2 = \int_{\Gamma\setminus\gamma}\{\cdot\} f(t)\,dt.$$

Оценяваме първия интеграл I_1. Нека $\zeta = e^{i\theta_0}$, $t = e^{i\theta_1}$, $\theta = \theta_1 - \theta_0$,

$$I_1(\zeta) = \int_\gamma \frac{g(t) - g(\zeta')}{t - \zeta'} f(t)\, dt - \int_\gamma \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} f(t)\, dt.$$

Тогава $\zeta - t = \zeta(1 - e^{i\theta})$, следователно, $|\zeta - t| = 2 \sin|\theta/2|$ и

$$|I_1(\zeta)| \le c_4' CM \int_0^{c_5'\sqrt{\delta}} |\log\theta|^{-\lambda} \frac{d\theta}{\theta} = c_6' CM |\log\sqrt{\delta}|^{-\lambda+1} \le c_7' CM |\log\delta|^{-\mu}, \quad (2.59)$$

$M = \max\limits_{1 \le |z| \le R} |f(z)|$. Използваме тъждеството $g(t) - g(\zeta) = g(t) - g(\zeta') + g(\zeta') - g(\zeta)$ за втория интеграл I_2 и получаваме $I_2 = I_2' + I_2''$, където

$$I_2' = \int_{\gamma'} \frac{g(\zeta) - g(\zeta')}{t - \zeta} f(t)\, dt = (g(\zeta) - g(\zeta')) \int_{\gamma'} \frac{f(t)}{t - \zeta}\, dt,$$
$$I_2'' = \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta')\} \left\{ \frac{1}{t - \zeta'} - \frac{1}{t - \zeta} \right\} f(t)\, dt = (\zeta' - \zeta) \int_{\gamma'} \frac{g(t) - g(\zeta')}{(t - \zeta')(t - \zeta)} f(t)\, dt,$$

където $\gamma' = \Gamma \setminus \gamma$. Лесно виждаме, че

$$|I_2'| \le c_8' CM \big|\log\delta\big|^{-\mu}.$$

При $\delta \in (0, 1/4)$ имаме $1/2 \le |t - \zeta'|/|t - \zeta| \le 3/2$ за $|\zeta - \zeta'| = \delta$, $|t - \zeta| \ge \sqrt{\delta}$. Следователно,

$$\begin{aligned} |I_2''| &\le c_9' CM |\zeta - \zeta'| \int_{\gamma'} \frac{|g(t) - g(\zeta')|}{|t - \zeta'|^2} |dt| \\ &\le c_{10}' CM |\zeta - \zeta'| \left\{ \int_{\sqrt{\delta}}^{1/2} \left(\log\frac{1}{x} \right)^{-\lambda} \frac{dx}{x^2} + c_{11}' \right\} \\ &\le c_{12}' CM \frac{|\zeta - \zeta'|}{\sqrt{\delta}} \le c_{13}' CM \sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Виждаме, че $|I_2| \le c_{14}' CM |\log\delta|^{-\mu}$. Оттук и от (2.59) следва точка 3 от Лема 1.

За $\zeta \in \Gamma$ и $r \in (1, R)$ имаме:

$$F_n(\zeta) = \int_\Gamma \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(t)\, dt}{t^{2n}} + g(\zeta) \int_{|t| = r} \frac{f(t)\, dt}{(t - \zeta) t^{2n}} = F_{n,1}(\zeta) + F_{n,2}(\zeta). \quad (2.60)$$

За функцията

$$F_{n,2}(\zeta) = g(\zeta) \int_{|t| = r} \frac{f(t)\, dt}{(t - \zeta) t^{2n}}$$

всички твърдения от Лема 2 са изпълнени.

Нека да разгледаме функцията

$$F_{n,1}(\zeta) = \int_\Gamma \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(t)\,dt}{t^{2n}}. \tag{2.61}$$

Нека $\beta = \beta_n = e^{i\pi/2n} = 1 + \delta$, $\delta = \delta_n = \frac{i\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) \to 0$, $n \to \infty$. Сменяме променливата $t \mapsto \beta t = t + \delta t$ в (2.61) и получаваме (като вземем в предвид ,че $\beta^{2n} = -1$):

$$F_{n,1}(\zeta) = -\beta \int_\Gamma \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \frac{f(\beta t)\,dt}{t^{2n}}. \tag{2.62}$$

Използваме тъждеството $f(t) = f(\beta t) - (f(\beta t) - f(t))$, от (2.61) и от (2.62) получаваме:

$$\begin{aligned} F_{n,1}(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_\Gamma \left\{ \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} - \beta \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t)\,dt}{t^{2n}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(\beta t) - f(t)}{t^{2n}} dt \qquad (2.63) \\ &= J_1 + J_2. \qquad (2.64) \end{aligned}$$

За втория интеграл

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(\beta t) - f(t)}{t^{2n}} dt \tag{2.65}$$

получаваме оценката

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq C \int_\Gamma \frac{|\log|t - \zeta||^{-\lambda}}{|t - \zeta|} |f(t + \delta t) - f(t)|\,|dt| \\ &\leq CM' \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \int_\Gamma |\log|t - \zeta||^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t - \zeta|} \\ &\leq c'_{17} CM' \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \leq c'_{18} CM' (\log n)^{-\mu}. \qquad (2.66) \end{aligned}$$

Оценяме първия интеграл

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_\Gamma \left\{ \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} - \beta \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t)\,dt}{t^{2n}}.$$

Нека $\gamma = \{t \in \Gamma : |t - \zeta| \leq \sqrt{|\delta|}\}$, $\gamma' = \Gamma \setminus \gamma$. Тогава

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_\gamma \{\cdot\} \frac{f(\beta t)\,dt}{t^{2n}} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus \gamma} \{\cdot\} \frac{f(\beta t)\,dt}{t^{2n}} = J'_1 + J''_1.$$

За J_1' имаме

$$|J_1'| \le c_{21}' CM \left\{ \int_\gamma \left(\log \frac{1}{|t-\zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t-\zeta|} + \int_\gamma \left(\log \frac{1}{|\beta t-\zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|\beta t-\zeta|} \right\}$$
$$\le c_{22}' CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \le c_{23}' CM (\log n)^{-\mu}. \tag{2.67}$$

За оценката на J_1'' използваме тъждеството $g(\beta t) - g(\zeta) = g(\beta t) - g(t) + g(t) - g(\zeta)$, получим

$$\begin{aligned} J_1'' &= -\beta \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \frac{g(\beta t) - g(t)}{\beta t - \zeta} \frac{f(\beta t)\, dt}{t^{2n}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} - \frac{\beta}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t)\, dt}{t^{2n}} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.68}$$

За I_1 имаме:

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \frac{c_{24}' CM}{2} \int_{\gamma'} \left(\log \frac{1}{|\beta t - t|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|\beta t-\zeta|} \\ &\le c_{25}' CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\lambda} \int_{\gamma'} \frac{|dt|}{|t - \zeta/\beta|} \\ &\le c_{26}' CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\lambda} \log \frac{1}{|\delta|} = c_{27}' CM \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{-\mu} \le c_{28}' CM \left(\log n \right)^{-\mu}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

За I_2, като отчетем равенството $\beta = 1 + \delta$, и от (2.68) получаваме следното представяне:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \frac{\beta\zeta - \zeta}{(t-\zeta)(\beta t - \zeta)} \frac{f(\beta t)\, dt}{t^{2n}} \\ &= \frac{\delta\zeta}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \frac{1}{(t-\zeta)(\beta t - \zeta)} \frac{f(\beta t)\, dt}{t^{2n}}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Оттук при $\gamma'' = \{t \in \gamma' : \sqrt{|\delta|} \le |\zeta - t| \le 1/2\}$ следва оценката

$$\begin{aligned} |I_2| &\le c_{29}' M |\delta| C \int_{\gamma''} \left(\log \frac{1}{|t-\zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t-\zeta|^2} \le c_{30}' CM |\delta| \int_{\sqrt{|\delta|}}^{1/2} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\lambda} \frac{dx}{x^2} \\ &\le c_{31}' CM |\delta| \frac{1}{\sqrt{|\delta|}} \le c_{32}' CM \sqrt{|\delta|} \le c_{33}' CM \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Виждаме, че $|J_1| \le c_{34}' CM (\log n)^{-\mu}$. Оттук и от (2.66) следва потвърждението на Лема 2.

Глава 3

Алгоритми за изчисление на апроксимации на Паде

В тази глава излагаме алгоритмите за изчисление на класическа апроксимация на Паде на $f(z)$, класическа апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, двуточкова апроксимация на Паде на функция $f(z)$ или на две функции $f(z)$ и $g(z)$, многоточкова апроксимация на Паде на $f(z)$.

След това даваме изходният код на алгоритмите, който е написан за програмата `PARI/GP`.

3.1 Апроксимация на Паде на $f(z)$

Нека имаме дадена функция $f(z)$ и нейното разлагане в ред на Тейлор е:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j.$$

Нека двата полинома $P_{n,m} \in \Pi_n$, $Q_{n,m} \in \Pi_m$ нямат общ множител, $Q_{n,m} \neq 0$, и изпълняват условието:

$$Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+1}\right).$$

Полагаме

$$\pi_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} = \frac{p_n z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \ldots + p_0}{q_m z^m + q_{m-1}z^{m-1} + \ldots + q_0}$$

за апроксимацията на Паде на $f(z)$. Следователно, имаме че:

$$(q_m z^m + q_{m-1}z^{m-1} + \ldots + q_0)(c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n+m}z^{n+m}) - \\ -(p_n z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \ldots + p_0) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+1}\right).$$

Нека да дадем пример за диагонална апроксимация на Паде чрез $n = m = 3$. Тогава:

$$(q_3z^3 + q_2z^2 + q_1z + q_0)(c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + c_5z^5 + c_6z^6) - \\ -(p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z + p_0) = \mathcal{O}\left(z^7\right).$$

Сравняваме степените от двете страни, получаваме:

$$\begin{aligned}
&z^0 : q_0c_0 - p_0 = 0\\
&z^1 : q_1c_0 + q_0c_1 - p_1 = 0\\
&z^2 : q_2c_0 + q_1c_1 + q_0c_2 - p_2 = 0\\
&z^3 : q_3c_0 + q_2c_1 + q_1c_2 + q_0c_3 - p_3 = 0\\
&z^4 : q_3c_1 + q_2c_2 + q_1c_3 + q_0c_4 = 0\\
&z^5 : q_3c_2 + q_2c_3 + q_1c_4 + q_0c_5 = 0\\
&z^6 : q_3c_3 + q_2c_4 + q_1c_5 + q_0c_6 = 0
\end{aligned}$$

Първите четири уравнения са достатъчни за изчисляване коефициентите на полинома $P_{n,m}$. Последните три уравнения имат четири неизвестни променливи. Полагаме $q_0 = 1$, и записваме коефициентите на уравненията в матрица:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_4 \\ -c_5 \\ -c_6 \end{pmatrix}.$$

Решаваме матричното уравнение и получаваме коефициентите на полинома $Q_{n,m}$. Сега изчисляваме коефициентите на $P_{n,m}$ чрез следната формула:

$$p_n = c_n + \sum_{j=1}^{\min(n,m)} q_j\, c_{n-j}$$

или чрез тази формула, понеже имаме $q_0 = 1$,

$$p_n = \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j\, c_{n-j}.$$

Нека сега да дадем пример за не-диагонална апроксимация на Паде, като $n = 5$ и $m = 3$. Имаме:

$$(q_3z^3 + q_2z^2 + q_1z + q_0)(c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + c_5z^5 + c_6z^6 + c_7z^7 + c_8z^8) - \\ -(p_5z^5 + p_4z^4 + p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z + p_0) = \mathcal{O}\left(z^9\right).$$

Отново сравняваме степените от двете страни:

$$\begin{aligned}
&z^0 : q_0c_0 - p_0 = 0\\
&z^1 : q_1c_0 + q_0c_1 - p_1 = 0\\
&z^2 : q_2c_0 + q_1c_1 + q_0c_2 - p_2 = 0\\
&z^3 : q_3c_0 + q_2c_1 + q_1c_2 + q_0c_3 - p_3 = 0\\
&z^4 : q_3c_1 + q_2c_2 + q_1c_3 + q_0c_4 - p_4 = 0\\
&z^5 : q_3c_2 + q_2c_3 + q_1c_4 + q_0c_5 - p_5 = 0\\
&z^6 : q_3c_3 + q_2c_4 + q_1c_5 + q_0c_6 = 0\\
&z^7 : q_3c_4 + q_2c_5 + q_1c_6 + q_0c_7 = 0\\
&z^8 : q_3c_5 + q_2c_6 + q_1c_7 + q_0c_8 = 0
\end{aligned}$$

Както и преди, първите пет уравнения дават коефициентите на $P_{n,m}$. Отново полагаме $q_0 = 1$, и записваме коефициентите на последните три уравнения в матрица:

$$\begin{pmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_5 & c_6 & c_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_6 \\ -c_7 \\ -c_8 \end{pmatrix}.$$

Забелязваме, че коефициентите на матрицата са променени, спрямо диагоналния случай. Решаваме матричното уравнения и получаваме коефициентите на $Q_{n,m}$. Формулата за изчисляване коефициентите на $P_{n,m}$ сега е следната:

$$p_n = \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j\, c_{n-j}.$$

Нека да отбележим, че първите четири коефициента, p_0, p_1, p_2, p_3, се изчисляват по същия начин като при диагоналния случай. За последните два коефициента прилагаме формулата $\min(n, m)$ – сумата за тези два коефициента е от 0 до 3.

Този алгоритъм може да се прилага за всички $n >= m$, като $m >= 20$. Изчисление на по-ниска степен на знаменателя изисква по-висока степен на числителя, $n \gg m$, например $n = 90$, $m = 10$; в противен случай може да получим неточни резултати.

Извод: Входните данни за апроксимация на Паде е функция с развитие в ред на Тейлор в нулата (холоморфна в нулата); изходните данни са два полинома от степени съответно n и m.

3.2 Апроксимация на Ермит–Паде за набора от функции $[1, f, g]$

Нека имаме дадени функциите $f(z)$ и $g(z)$, като те имат развития в ред на Тейлор в нулата:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j.$$

Нека полиномите $P \in \Pi_n$, $Q \in \Pi_m$, $R \in \Pi_l$ нямат общ множител и изпълняват условието:

$$P(z) + Q(z)f(z) + R(z)g(z) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+l+2}\right).$$

Дефинираме $[a_1, a_2, a_3]$ като "набор" от три обекта. Полагаме $[P, Q, R]$ за полиномите на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$. Следователно, имаме че:

$$\begin{aligned}
&p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_0 + \\
&\quad + (q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \ldots + q_0)(c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n+m+l+1} z^{n+m+l+1}) + \\
&\quad + (r_l z^l + r_{l-1} z^{l-1} + \ldots + r_0)(d_0 + d_1 z + \ldots + d_{n+m+l+1} z^{n+m+l+1}) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+l+2}\right).
\end{aligned}$$

Нека да дадем пример за апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$ при $n = m = l = 3$. Можем да разглеждаме това като аналог на диагонална апроксимация на Паде. Имаме:

$$\begin{aligned}
&p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0 + \\
&\quad + (q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{10} z^{10}) + \\
&\quad + (r_3 z^3 + r_2 z^2 + r_1 z + r_0)(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_{10} z^{10}) = \mathcal{O}\left(z^{11}\right).
\end{aligned}$$

Сравняваме степените от двете страни, получаваме:

$$\begin{aligned}
z^0 &: p_0 + q_0 c_0 + r_0 d_0 = 0 \\
z^1 &: p_1 + q_1 c_0 + q_0 c_1 + r_1 d_0 + r_0 d_1 = 0 \\
z^2 &: p_2 + q_2 c_0 + q_1 c_1 + q_0 c_2 + r_2 d_0 + r_1 d_1 + r_0 d_2 = 0 \\
z^3 &: p_3 + q_3 c_0 + q_2 c_1 + q_1 c_2 + q_0 c_3 + r_3 d_0 + r_2 d_1 + r_1 d_2 + r_0 d_3 = 0 \\
z^4 &: q_3 c_1 + q_2 c_2 + q_1 c_3 + q_0 c_4 + r_3 d_1 + r_2 d_2 + r_1 d_3 + r_0 d_4 = 0 \\
z^5 &: q_3 c_2 + q_2 c_3 + q_1 c_4 + q_0 c_5 + r_3 d_2 + r_2 d_3 + r_1 d_4 + r_0 d_5 = 0 \\
z^6 &: q_3 c_3 + q_2 c_4 + q_1 c_5 + q_0 c_6 + r_3 d_3 + r_2 d_4 + r_1 d_5 + r_0 d_6 = 0 \\
z^7 &: q_3 c_4 + q_2 c_5 + q_1 c_6 + q_0 c_7 + r_3 d_4 + r_2 d_5 + r_1 d_6 + r_0 d_7 = 0 \\
z^8 &: q_3 c_5 + q_2 c_6 + q_1 c_7 + q_0 c_8 + r_3 d_5 + r_2 d_6 + r_1 d_7 + r_0 d_8 = 0 \\
z^9 &: q_3 c_6 + q_2 c_7 + q_1 c_8 + q_0 c_9 + r_3 d_6 + r_2 d_7 + r_1 d_8 + r_0 d_9 = 0 \\
z^{10} &: q_3 c_7 + q_2 c_8 + q_1 c_9 + q_0 c_{10} + r_3 d_7 + r_2 d_8 + r_1 d_9 + r_0 d_{10} = 0
\end{aligned}$$

Първите четири уравнения са достатъчни за изчисляване на коефициентите на полинома P. Последните седем уравнения имат осем неизвестни променливи. Полагаме $r_0 = 1$, и записваме коефициентите на уравненията в матрица:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & d_1 & d_2 & d_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & d_3 & d_4 & d_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & d_4 & d_5 & d_6 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & d_5 & d_6 & d_7 \\ c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & d_6 & d_7 & d_8 \\ c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & d_7 & d_8 & d_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_4 \\ -d_5 \\ -d_6 \\ -d_7 \\ -d_8 \\ -d_9 \\ -d_{10} \end{pmatrix}.$$

Решаваме матричното уравнение и получаваме коефициентите на полинимите Q и R. Изчисляваме коефициентите на P чрез следната формула (имаме $r_0 = 1$):

$$p_n = -\left(\sum_{j=0}^{\min(n,l)} r_j \, d_{n-j} + \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j \, c_{n-j} \right).$$

Нека да дадем още един пример за апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, този път при $n = 7$, $m = 5$, $l = 3$. Можем да направим аналог с не-диагонална апроксимация на Паде. Имаме:

$$\begin{aligned} & p_7 z^7 + p_6 z^6 + p_5 z^5 + p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0 + \\ & \quad + (q_5 z^5 + q_4 z^4 + q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{16} z^{16}) + \\ & \quad + (r_3 z^3 + r_2 z^2 + r_1 z + r_0)(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_{16} z^{16}) = \mathcal{O}\left(z^{17}\right). \end{aligned}$$

Сравняваме степените от двете страни, получаваме:

$$
\begin{aligned}
z^0 &: p_0 + q_0c_0 + r_0d_0 = 0\\
z^1 &: p_1 + q_1c_0 + q_0c_1 + r_1d_0 + r_0d_1 = 0\\
z^2 &: p_2 + q_2c_0 + q_1c_1 + q_0c_2 + r_2d_0 + r_1d_1 + r_0d_2 = 0\\
z^3 &: p_3 + q_3c_0 + q_2c_1 + q_1c_2 + q_0c_3 + r_3d_0 + r_2d_1 + r_1d_2 + r_0d_3 = 0\\
z^4 &: p_4 + q_4c_0 + q_3c_1 + q_2c_2 + q_1c_3 + q_0c_4 + r_3d_1 + r_2d_2 + r_1d_3 + r_0d_4 = 0\\
z^5 &: p_5 + q_5c_0 + q_4c_1 + q_3c_2 + q_2c_3 + q_1c_4 + q_0c_5 + r_3d_2 + r_2d_3 + r_1d_4 + r_0d_5 = 0\\
z^6 &: p_6 + q_5c_1 + q_4c_2 + q_3c_3 + q_2c_4 + q_1c_5 + q_0c_6 + r_3d_3 + r_2d_4 + r_1d_5 + r_0d_6 = 0\\
z^7 &: p_7 + q_5c_2 + q_4c_3 + q_3c_4 + q_2c_5 + q_1c_6 + q_0c_7 + r_3d_4 + r_2d_5 + r_1d_6 + r_0d_7 = 0\\
z^8 &: q_5c_3 + q_4c_4 + q_3c_5 + q_2c_6 + q_1c_7 + q_0c_8 + r_3d_5 + r_2d_6 + r_1d_7 + r_0d_8 = 0\\
z^9 &: q_5c_4 + q_4c_5 + q_3c_6 + q_2c_7 + q_1c_8 + q_0c_9 + r_3d_6 + r_2d_7 + r_1d_8 + r_0d_9 = 0\\
z^{10} &: q_5c_5 + q_4c_6 + q_3c_7 + q_2c_8 + q_1c_9 + q_0c_{10} + r_3d_7 + r_2d_8 + r_1d_9 + r_0d_{10} = 0\\
z^{11} &: q_5c_6 + q_4c_7 + q_3c_8 + q_2c_9 + q_1c_{10} + q_0c_{11} + r_3d_8 + r_2d_9 + r_1d_{10} + r_0d_{11} = 0\\
z^{12} &: q_5c_7 + q_4c_8 + q_3c_9 + q_2c_{10} + q_1c_{11} + q_0c_{12} + r_3d_9 + r_2d_{10} + r_1d_{11} + r_0d_{12} = 0\\
z^{13} &: q_5c_8 + q_4c_9 + q_3c_{10} + q_2c_{11} + q_1c_{12} + q_0c_{13} + r_3d_{10} + r_2d_{11} + r_1d_{12} + r_0d_{13} = 0\\
z^{14} &: q_5c_9 + q_4c_{10} + q_3c_{11} + q_2c_{12} + q_1c_{13} + q_0c_{14} + r_3d_{11} + r_2d_{12} + r_1d_{13} + r_0d_{14} = 0\\
z^{15} &: q_5c_{10} + q_4c_{11} + q_3c_{12} + q_2c_{13} + q_1c_{14} + q_0c_{15} + r_3d_{12} + r_2d_{13} + r_1d_{14} + r_0d_{15} = 0\\
z^{16} &: q_5c_{11} + q_4c_{12} + q_3c_{13} + q_2c_{14} + q_1c_{15} + q_0c_{16} + r_3d_{13} + r_2d_{14} + r_1d_{15} + r_0d_{16} = 0
\end{aligned}
$$

Първите осем уравнения дават коефициентите на P. Последните девет уравнения имат десет неизвестни променливи. Отново полагаме $r_0 = 1$, и записваме коефициентите на уравненията в матрица:

$$
\begin{pmatrix}
c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & d_5 & d_6 & d_7\\
c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & d_6 & d_7 & d_8\\
c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & d_7 & d_8 & d_9\\
c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & d_8 & d_9 & d_{10}\\
c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & d_9 & d_{10} & d_{11}\\
c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_{10} & d_{11} & d_{12}\\
c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & d_{11} & d_{12} & d_{13}\\
c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & d_{12} & d_{13} & d_{14}\\
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & d_{13} & d_{14} & d_{15}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_5\\ q_4\\ q_3\\ q_2\\ q_1\\ q_0\\ r_3\\ r_2\\ r_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -d_8\\ -d_9\\ -d_{10}\\ -d_{11}\\ -d_{12}\\ -d_{13}\\ -d_{14}\\ -d_{15}\\ -d_{16} \end{pmatrix}.
$$

Решаваме матричното уравнение и получаваме коефициентите на Q и R. Формулата за изчисление на коефициентите на P е същата както преди:

$$
p_n = -\left(\sum_{j=0}^{\min(n,l)} r_j\, d_{n-j} + \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j\, c_{n-j} \right).
$$

Този алгоритъм може да се приложи за всички $n >= m$, $n >= l$, като $m, l >= 20$. Изчислението на ниска степен на Q или R изисква висока степен на P, т.е. $n \gg m$ и $n \gg l$, например $n = 90$, $m = 10$, $l = 15$; в противен случай може да получим грешни резултати.

Извод: Входните данни на апроксимация на Ермит-Паде за набора от три функции $[1, f, g]$ са развитието на тези две функции в ред на Тейлор в нулата (холоморфни в нулата); изходните данни са три полинома, от степени съответно n, m и l.

3.3 Апроксимация на Ермит–Паде за набора от функции $[1, f, g, h]$

Нека имаме дадени функциите $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ и техните разлагания в ред на Тейлор в нулата са:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j, \quad h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j z^j.$$

Нека полиномите $P \in \Pi_n$, $Q \in \Pi_m$, $R \in \Pi_l$, $S \in \Pi_k$ нямат общ множител и изпълняват условието:

$$P(z) + Q(z)f(z) + R(z)g(z) + S(z)h(z) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+l+k+3}\right).$$

Дефинираме $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ като "набор" от четири обекта. Полагаме $[P, Q, R, S]$ за апроксимацията на Ермит–Паде за набора от четири функции $[1, f, g, h]$. Следователно, имаме:

$$\begin{aligned} p_n z^n &+ p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_0 + \\ &+ (q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \ldots + q_0)(c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n+m+l+k+2} z^{n+m+l+k+2}) + \\ &+ (r_l z^l + r_{l-1} z^{l-1} + \ldots + r_0)(d_0 + d_1 z + \ldots + d_{n+m+l+k+2} z^{n+m+l+k+2}) + \\ &+ (s_k z^k + s_{k-1} z^{k-1} + \ldots + s_0)(e_0 + e_1 z + \ldots + e_{n+m+l+k+2} z^{n+m+l+k+2}) = \\ &= \mathcal{O}\left(z^{n+m+l+k+3}\right). \end{aligned}$$

Това е аналогично на предишния случай за набор от три функции, сега още един полином е добавен. Този път полагаме $s_0 = 1$. Коефициентите на полинома P се изчисляват чрез:

$$p_n = -\left(\sum_{j=0}^{\min(n,k)} s_j \, e_{n-j} + \sum_{j=0}^{\min(n,l)} r_j \, d_{n-j} + \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j \, c_{n-j} \right).$$

Извод: Входните данни на апроксимация на Ермит-Паде за набора от четири функции $[1, f, g, h]$ са развитието на тези три функции в ред на Тейлор в нулата (холоморфни в нулата); изходните данни са четири полинома, от степени съответно n, m, l и k.

3.4 Двуточкова апроксимация на Паде на две функции $f(z)$ и $g(z)$

Пълната дефиниция за двуточкова апроксимация на Паде може да бъде намерена в [10, §1.1], [15, §1.2.3], [17, §1], [26, §2]. Ние се спираме само на случая, който може да бъде изчислен чрез компютърен софтуер.

Нека имаме дадена функция $f(z)$, като нейното разлагане в ред на Тейлор в нулата е:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j,$$

и нека имаме функция $g(z)$, която има разлагане в безкрайната точка:

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j}{z^j}.$$

Тези две функции може да съвпадат, стига да съществуват разлагания в ред на Тейлор в нулата и в безкрайната точка.

Нека двата полинома $P_n, Q_n \in \Pi_n$ нямат общ множител, $Q_n \neq 0$, и изпълняват условията:

$$Q_n(z)f(z) - P_n(z) = \mathcal{O}(z^{n+1}),$$
$$Q_n^{\infty}(z)g(z) - P_n^{\infty}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^n}\right),$$

където $P_n^{\infty}(z) = P_n(1/z)$, $Q_n^{\infty}(z) = Q_n(1/z)$. Отбелязваме този случай като "случай $/n+1, n/$". Алтернативно,

$$Q_n(z)f(z) - P_n(z) = \mathcal{O}(z^{n}),$$
$$Q_n^{\infty}(z)g(z) - P_n^{\infty}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

и отбелязваме със "случай $/n, n+1/$". Полагаме:

$$\pi_{[n,n]}(z) := \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{p_n z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \ldots + p_0}{q_n z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + q_0}$$

за двуточкова апроксимация на Паде в крайна точка (включително и нулата), и полагаме:

$$\pi_{[n,n]}^{\infty}(z) := \frac{P_n^{\infty}(z)}{Q_n^{\infty}(z)} = \frac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{p_0}{z^n}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{q_0}{z^n}}$$

за двуточковата апроксимация на Паде в безкрайната точка.

Следните два раздела описват алгоритъма за изчисление на двуточковата апроксимация на Паде, в другите два са изложени примерите, чрез които са направени алгоритмите.

3.4.1 Алгоритъм за случай $/n+1, n/$

Този алгоритъм за изчисление на двуточкова апроксимация на Паде работи за всички $n > 1$. Описваме го за $n = 3$. Нека имаме дадено развитие на функция в нулата:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

и развитие на функция в безкрайната точка:

$$g(z) = d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Тогава за двуточковата апроксимация на Паде имаме следното представяне в нулата:

$$\pi_{[3,3]}(z) = \frac{P_3(z)}{Q_3(z)} = \frac{p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0}{q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0}$$

и това представяне в безкрайната точка:

$$\pi^{\infty}_{[3,3]}(z) = \frac{P_3^{\infty}(z)}{Q_3^{\infty}(z)} = \frac{p_3 + \frac{p_2}{z} + \frac{p_1}{z^2} + \frac{p_0}{z^3}}{q_3 + \frac{q_2}{z} + \frac{q_1}{z^2} + \frac{q_0}{z^3}}.$$

От дефиницията имаме:

$$\begin{aligned} Q_3(z) f(z) - P_3(z) &= \mathcal{O}(z^4), \\ Q_3^{\infty}(z) g(z) - P_3^{\infty}(z) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right). \end{aligned}$$

Използваме първото уравнение,

$$(q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3) - (p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0) = \mathcal{O}(z^4),$$

откъдето получаваме системата:

$$\begin{aligned} z^0 : &\quad q_0 c_0 - p_0 = 0, \\ z^1 : &\quad q_1 c_0 + q_0 c_1 - p_1 = 0, \\ z^2 : &\quad q_2 c_0 + q_1 c_1 + q_0 c_2 - p_2 = 0, \\ z^3 : &\quad q_3 c_0 + q_2 c_1 + q_1 c_2 + q_0 c_3 - p_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

От второто уравнение,

$$\left(q_3 + \frac{q_2}{z} + \frac{q_1}{z^2} + \frac{q_0}{z^3}\right)\left(d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2}\right) - \left(p_3 + \frac{p_2}{z} + \frac{p_1}{z^2} + \frac{p_0}{z^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

получаваме системата:

$$\begin{aligned} z^0 : &\quad q_3 d_0 - p_3 = 0, \\ z^{-1} : &\quad q_3 d_1 + q_2 d_0 - p_2 = 0, \\ z^{-2} : &\quad q_3 d_2 + q_2 d_1 + q_1 d_0 - p_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Виждаме, че общо от двете системи имаме седем уравнения и осем неизвестни променливи. Полагаме $q_0 = 1$, тогава $p_0 = c_0$. Заместваме $p_{1,2,3}$ от втората система в първата система. Записваме трите уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} q_3(c_0 - d_0) + q_2 c_1 + q_1 c_2 + c_3 = 0, \\ -q_3 d_1 + q_2(c_0 - d_0) + q_1 c_1 + c_2 = 0, \\ -q_3 d_2 - q_2 d_1 + q_1(c_0 - d_0) + c_1 = 0. \end{array} \right.$$

Нека да представим коефициентите като матрица:

$$\begin{pmatrix} c_0 - d_0 & c_1 & c_2 \\ -d_1 & c_0 - d_0 & c_1 \\ -d_2 & -d_1 & c_0 - d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ -c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}.$$

Решаваме матричното уравнение и получаваме коефициентите на полинома Q_3. Формулата за коефициентите на полинома P_n е следната:

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} q_j \, c_{n-j}.$$

Тази формула е изведена от първата система от уравнения (3.1) и е аналог на формулата за намиране на коефициентите на числителя за класическа апроксимация на Паде. Можем да използваме и втората система от уравнения (3.2) за да намерим коефициентите на P_n, тогава:

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-n} q_{n+j} \, d_j,$$

където $N = n$ е максималната степен и не се променя при изчисленията. Например p_1 се изчислява чрез:

$$p_1 = \sum_{j=0}^{3-1} q_{1+j} \, d_j = q_1 d_0 + q_2 d_1 + q_3 d_2.$$

Извод: Входните данни за двуточкова апроксимация на Паде са две разлагания (на една функция или на две отделни функции) в ред на Тейлор в нулата и в безкрайната точка; изходните данни са два полинома от степени съответно n and m.

3.4.2 Алгоритъм за случай $/n, n+1/$

Нека сега да разгледаме случая $/n, n+1/$ за изчисление на двуточкова апроксимация на Паде. Нека $n = 3$, нека имаме следното развитие в нулата

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

и това развитие в безкрайната точка:

$$g(z) = d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_3}{z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

От дефиницията имаме:

$$\begin{aligned} Q_3(z)f(z) - P_3(z) &= \mathcal{O}(z^3) \\ Q_3^\infty(z)g(z) - P_3^\infty(z) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right). \end{aligned}$$

Отново, взимаме първото уравнение,

$$(q_3z^3 + q_2z^2 + q_1z + q_0)(c_0 + c_1z + c_2z^2) - (p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z + p_0) = \mathcal{O}(z^3),$$

и получаваме системата:

$$\begin{aligned} z^0 :&\quad q_0c_0 - p_0 = 0, \\ z^1 :&\quad q_1c_0 + q_0c_1 - p_1 = 0, \\ z^2 :&\quad q_2c_0 + q_1c_1 + q_0c_2 - p_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

От второто уравнение,

$$\left(q_3 + \frac{q_2}{z} + \frac{q_1}{z^2} + \frac{q_0}{z^3}\right)\left(d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_3}{z^3}\right) - \left(p_3 + \frac{p_2}{z} + \frac{p_1}{z^2} + \frac{p_0}{z^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

получаваме системата:

$$\begin{aligned} z^0 :&\quad q_3d_0 - p_3 = 0, \\ z^{-1} :&\quad q_3d_1 + q_2d_0 - p_2 = 0, \\ z^{-2} :&\quad q_3d_2 + q_2d_1 + q_1d_0 - p_1 = 0, \\ z^{-3} :&\quad q_3d_3 + q_2d_2 + q_1d_1 + q_0d_0 - p_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Отново, общо от двете системи имаме седем уравнения и осем неизвестни променливи. Този път полагаме $q_3 = 1$, тогава $p_3 = d_0$. (Ако отново положим $q_0 = 1$ ще получим същите изчисления като от предишния алгоритъм.) Заместваме $p_{0,1,2}$ от втората система в първата система, по този начин получаваме същата матрица като преди (това е за удобство, можем да заместим в другата посока и да получим различна матрица; ако заместим в другата посока в предишния алгоритъм, то двете матрици ще съвпаднат):

$$\left| \begin{aligned} & q_2(c_0 - d_0) + q_1c_1 + q_0c_2 - d_1 = 0, \\ & - q_2d_1 + q_1(c_0 - d_0) + q_0c_1 - d_2 = 0, \\ & - q_2d_2 - q_1d_1 + q_0(c_0 - d_0) - d_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Представяме коефициентите като матрица:

$$\begin{pmatrix} c_0 - d_0 & c_1 & c_2 \\ -d_1 & c_0 - d_0 & c_1 \\ -d_2 & -d_1 & c_0 - d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Матрицата вляво е същата като от предишния алгоритъм, но не и двата вектора. Следователно, ще има известна разлика в крайния резултат.

Решаваме матричното уравнения и получаваме коефициентите на полинома Q_3. Формулата за коефициентите на полинома P_n е следната:

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} q_j \, c_{n-j}.$$

Тази формула е изведена от първата система от уравнения (3.3) и е аналог на формулата за намиране на коефициентите на числителя за класическа апроксимация на Паде. Можем да използваме и втората система от уравнения (3.4) за да намерим коефициентите на P_n, тогава:

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-n} q_{n+j} \, d_j,$$

където $N = n$ е максималната степен и не се променя при изчисленията. Например p_2 се изчислява чрез:

$$p_2 = \sum_{j=0}^{3-2} q_{2+j} \, d_j = q_2 d_0 + q_3 d_1.$$

Извод: Входните данни за двуточкова апроксимация на Паде са две разлгания (на една функция или на две отделни функции) в ред на Тейлор в нулата и в безкрайната точка; изходните данни са два полинома от степени съответно n and m.

3.4.3 Пример 1

Този пример е взет от [10, §1.1], излагаме го за пълнота на алгоритъма на двуточкова апроксимация на Паде. Нека имаме дадена следната функция:

$$f(z) = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 + 2z} \right)^{1/2},$$

която има развитие в ред на Тейлор в нулата:

$$f(z) = 1 - \frac{3}{4}z + \frac{39}{32}z^2 - \frac{267}{128}z^3 + \frac{7563}{2048}z^4 + \mathcal{O}(z^5).$$

Правим изображението $z = 1/t$ и получаваме функцията:

$$f(t) = \left(\frac{2t+1}{2t+4}\right)^{1/2},$$

която има следното развитие в ред на Тейлор в нулата (развитието на $f(z)$ в безкрайната точка):

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{21}{64}t^2 + \frac{87}{256}t^3 - \frac{1677}{4096}t^4 + \mathcal{O}(z^5).$$

Нека $n = 1$ и взимаме развитието в нулата с максимална степен $n + 1$

$$f(z) = 1 - \frac{3}{4}z + \mathcal{O}(z^2)$$

и взимаме развитието в безкрайната точка с максимална степен n

$$f(z) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Следователно, имаме:

$$\pi_{[1,1]}(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{p_1 z + p_0}{q_1 z + q_0}, \quad \pi^{\infty}_{[1,1]}(z) = \frac{P^{\infty}_1(z)}{Q^{\infty}_1(z)} = \frac{p_1 + \frac{p_0}{z}}{q_1 + \frac{q_0}{z}}.$$

Тогава от развитието в нулата

$$(q_1 z + q_0)\left(1 - \frac{3}{4}z\right) - (p_1 z + p_0) = \mathcal{O}(z^2),$$

получаваме системата:

$$\begin{aligned} z^0 : &\quad q_0 - p_0 = 0, \\ z^1 : &\quad q_1 - \frac{3}{4}q_0 - p_1 = 0. \end{aligned}$$

От развитието в безкрайната точка

$$\left(q_1 + \frac{q_0}{z}\right)\frac{1}{2} - \left(p_1 + \frac{p_0}{z}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right),$$

получаваме уравнението:

$$z^0 : \quad \frac{1}{2}q_1 - p_1 = 0.$$

Имаме три уравнения и четири променливи. Полагаме $q_0 = 1$, тогава $p_0 = 1$, $q_1 = 3/2$ и $p_1 = 3/4$. Двуточковата апроксимация на Паде е:

$$\pi_{[1,1]}(z) = \frac{1 + 3z/4}{1 + 3z/2}.$$

3.4.4 Пример 2

Този пример е от [53], това е основата на алгоритъма за изчисление на двуточкова апроксимация на Паде. Нека $n = 4$ и нека да отблежим чрез t_0 развитие на някаква функция в ред на Тейлор в нулата с максимална степен $n + 1$

$$t_0 = 1 - \frac{2}{3}z + \frac{4}{15}z^2 - \frac{8}{105}z^3 + \frac{16}{945}z^4 + \mathcal{O}(z^5),$$

и нека имаме развитие в безкрайната точка с максимална степен n

$$t_\infty = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{3}{8z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Имаме следното:

$$\pi_{[4,4]}(z) = \frac{P_4(z)}{Q_4(z)} = \frac{p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0}{q_4 z^4 + q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0},$$

$$\pi^\infty_{[4,4]}(z) = \frac{P^\infty_4(z)}{Q^\infty_4(z)} = \frac{p_4 + \frac{p_3}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \frac{p_1}{z^3} + \frac{p_0}{z^4}}{q_4 + \frac{q_3}{z} + \frac{q_2}{z^2} + \frac{q_1}{z^3} + \frac{q_0}{z^4}}.$$

От дефиницията, представяме развитието в нулата $Q_4(z)t_0 - P_4(z) = \mathcal{O}(z^5)$ като:

$$(q_4 z^4 + q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)\left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{4}{15}z^2 - \frac{8}{105}z^3 + \frac{16}{945}z^4\right) -$$
$$-(p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0) = \mathcal{O}(z^5),$$

което ни дава системата:

$$\begin{aligned}
z^0 &: \quad q_0 - p_0 = 0, \\
z^1 &: \quad q_1 - \frac{2}{3}q_0 - p_1 = 0, \\
z^2 &: \quad q_2 - \frac{2}{3}q_1 + \frac{4}{15}q_0 - p_2 = 0, \\
z^3 &: \quad q_3 - \frac{2}{3}q_2 + \frac{4}{15}q_1 - \frac{8}{105}q_0 - p_3 = 0, \\
z^4 &: \quad q_4 - \frac{2}{3}q_3 + \frac{4}{15}q_2 - \frac{8}{105}q_1 + \frac{16}{945}q_0 - p_4 = 0.
\end{aligned}$$

Отново от дефиницията, от развитието в безкрайната точка $Q^\infty_4(z)t_\infty - P^\infty_4(z) = \mathcal{O}(1/z^4)$

$$\left(q_4 + \frac{q_3}{z} + \frac{q_2}{z^2} + \frac{q_1}{z^3} + \frac{q_0}{z^4}\right)\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{3}{8z^3}\right) -$$
$$-\left(p_4 + \frac{p_3}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \frac{p_1}{z^3} + \frac{p_0}{z^4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

получаваме системата (развитието няма нулева степен):

$$\begin{aligned}
z^{-1}: &\quad \frac{1}{2}q_4 - p_3 = 0,\\
z^{-2}: &\quad \frac{1}{4}q_4 + \frac{1}{2}q_3 - p_2 = 0,\\
z^{-3}: &\quad \frac{3}{8}q_4 + \frac{1}{4}q_3 + \frac{1}{2}q_2 - p_1 = 0.
\end{aligned}$$

Общо имаме осем уравнения и десет неизвестни променливи. Полагаме $q_0 = 1$, тогава $p_0 = 1$. Записваме останалите уравнения:

$$\begin{aligned}
z^{1}: &\quad q_1 - \frac{2}{3} - p_1 = 0,\\
z^{2}: &\quad q_2 - \frac{2}{3}q_1 + \frac{4}{15} - p_2 = 0,\\
z^{3}: &\quad q_3 - \frac{2}{3}q_2 + \frac{4}{15}q_1 - \frac{8}{105} - p_3 = 0,\\
z^{4}: &\quad q_4 - \frac{2}{3}q_3 + \frac{4}{15}q_2 - \frac{8}{105}q_1 + \frac{16}{945} - p_4 = 0,\\
z^{-1}: &\quad \frac{1}{2}q_4 - p_3 = 0,\\
z^{-2}: &\quad \frac{1}{4}q_4 + \frac{1}{2}q_3 - p_2 = 0,\\
z^{-3}: &\quad \frac{3}{8}q_4 + \frac{1}{4}q_3 + \frac{1}{2}q_2 - p_1 = 0.
\end{aligned}$$

Сега вече имаме седем уравения и осем неизвестни променлниви. Полагаме $p_4 = 0$ (или друга промелнива, понеже нямаме достатъчно уравнения). Заместваме $p_{1,2,3}$ от последните три уравнения в първите три уравнения:

$$\left|\begin{aligned}
&q_4 - \frac{2}{3}q_3 + \frac{4}{15}q_2 - \frac{8}{105}q_1 + \frac{16}{945} = 0,\\
&-\frac{1}{2}q_4 + q_3 - \frac{2}{3}q_2 + \frac{4}{15}q_1 - \frac{8}{105} = 0,\\
&-\frac{1}{4}q_4 - \frac{1}{2}q_3 + q_2 - \frac{2}{3}q_1 + \frac{4}{15} = 0,\\
&-\frac{3}{8}q_4 - \frac{1}{4}q_3 - \frac{1}{2}q_2 + q_1 - \frac{2}{3} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Решението на системата е: $q_1 = \frac{8}{9}$, $q_2 = \frac{8}{21}$, $q_3 = \frac{32}{315}$, $q_4 = \frac{16}{945}$. Изчисляваме останалите коефициенти: $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{52}{945}$, $p_3 = \frac{8}{945}$. Записваме друточковата апроксимация на Паде:

$$\pi_{[4,4]}(z) = \frac{1 + \frac{2}{9}z + \frac{52}{945}z^2 + \frac{8}{945}z^3}{1 + \frac{8}{9}z + \frac{8}{21}z^2 + \frac{32}{315}z^3 + \frac{16}{945}z^4}.$$

3.5 Многоточкова апроксимация на Паде $f(z)$

Нека функцията $f(z)$ е холоморфна върху компакта $E \subset \mathbb{C}$, отбелязваме чрез $f(z) \in \mathscr{H}(E)$. Нека полиномите $P_{n,m} \in \Pi_n$, $Q_{n,m} \in \Pi_m$ нямат общ множител, $Q_{n,m} \neq 0$, и изпълняват условието:

$$\frac{Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z)}{\omega_{n+m+1}(z)} \in \mathscr{H}(E),$$

където z_i са интерполационни точки,

$$\omega_{n+m+1}(z) = \prod_{i=0}^{n+m}(z - z_i).$$

Полагаме:

$$R_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} = \frac{p_n z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \ldots + p_0}{q_m z^m + q_{m-1}z^{m-1} + \ldots + q_0}$$

за многоточковата апроксимация на Паде на $f(z)$, имаме че $R_{n,m}$ интерполира към функцията $f(z)$ в точките z_i [10, §1.1],

$$R_{n,m}(z_i) = f(z_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+m.$$

Можем да запишем това уравнение като:

$$p_n z_i^n + p_{n-1}z_i^{n-1} + \ldots + p_0 = f(z_i)(q_m z_i^m + q_{m-1}z_i^{m-1} + \ldots + q_0).$$

Нека да дадем пример за диагонална многоточкова апроксимация на Паде при $n = m = 3$. Тогава имаме:

$$\omega_7(z) = \prod_{i=0}^{6}(z - z_i)$$

и следните седем уравнения:

$$p_3 z_i^3 + p_2 z_i^2 + p_1 z_i + p_0 = f(z_i)(q_3 z_i^3 + q_2 z_i^2 + q_1 z_i + q_0).$$

Отбелязваме чрез $c_i = f(z_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Пренареждаме променливите:

$$p_0 + p_1 z_i + p_2 z_i^2 + p_3 z_i^3 - q_1 c_i z_i - q_2 c_i z_i^2 - q_3 c_i z_i^3 = q_0 c_i.$$

Имаме седем уравнения и осем неизвестни променливи. Полагаме $q_0 = 1$ и записваме коефициентите в матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & z_0^3 & -c_0 z_0 & -c_0 z_0^2 & -c_0 z_0^3 \\ 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & -c_1 z_1 & -c_1 z_1^2 & -c_1 z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & -c_2 z_2 & -c_2 z_2^2 & -c_2 z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 & -c_3 z_3 & -c_3 z_3^2 & -c_3 z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 & -c_4 z_4 & -c_4 z_4^2 & -c_4 z_4^3 \\ 1 & z_5 & z_5^2 & z_5^3 & -c_5 z_5 & -c_5 z_5^2 & -c_5 z_5^3 \\ 1 & z_6 & z_6^2 & z_6^3 & -c_6 z_6 & -c_6 z_6^2 & -c_6 z_6^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

Решаваме това матрично уравнения и получаваме коефициентите на полиномите $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$.

Нека да разгледаме и един пример за не-диагонална многоточкова апроксимация на Паде при $n = 5$, $m = 3$. Тогава имаме:

$$\omega_9(z) = \prod_{i=0}^{8}(z - z_i)$$

и следните девет уравнения:

$$p_5 z_i^5 + p_4 z_i^4 + p_3 z_i^3 + p_2 z_i^2 + p_1 z_i + p_0 = f(z_i)(q_3 z_i^3 + q_2 z_i^2 + q_1 z_i + q_0).$$

Отново, отбелязваме чрез $c_i = f(z_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$ и пренареждаме променливите:

$$p_0 + p_1 z_i + p_2 z_i^2 + p_3 z_i^3 + p_4 z_i^4 + p_5 z_i^5 - q_1 c_i z_i - q_2 c_i z_i^2 - q_3 c_i z_i^3 = q_0 c_i.$$

Имаме девет уравнения и десет неизвестни променливи. Отново, полагаме $q_0 = 1$ и записваме коефициентите на уравненията в матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & z_0^3 & z_0^4 & z_0^5 & -c_0 z_0 & -c_0 z_0^2 & -c_0 z_0^3 \\ 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & z_1^4 & z_1^5 & -c_1 z_1 & -c_1 z_1^2 & -c_1 z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & z_2^4 & z_2^5 & -c_2 z_2 & -c_2 z_2^2 & -c_2 z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 & z_3^4 & z_3^5 & -c_3 z_3 & -c_3 z_3^2 & -c_3 z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 & z_4^4 & z_4^5 & -c_4 z_4 & -c_4 z_4^2 & -c_4 z_4^3 \\ 1 & z_5 & z_5^2 & z_5^3 & z_5^4 & z_5^5 & -c_5 z_5 & -c_5 z_5^2 & -c_5 z_5^3 \\ 1 & z_6 & z_6^2 & z_6^3 & z_6^4 & z_6^5 & -c_6 z_6 & -c_6 z_6^2 & -c_6 z_6^3 \\ 1 & z_7 & z_7^2 & z_7^3 & z_7^4 & z_7^5 & -c_7 z_7 & -c_7 z_7^2 & -c_7 z_7^3 \\ 1 & z_8 & z_8^2 & z_8^3 & z_8^4 & z_8^5 & -c_8 z_8 & -c_8 z_8^2 & -c_8 z_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}.$$

Както и преди, решаваме това матрично уравнение и получаваме коефициентите на $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$.

Извод: Входните данни за многоточкова апроксимация на Паде са интерполационни точки, които са $n+m+1$ на брой, и функция, която не се обръща в нула в интерполационните точки (холоморфна в интерполационните точки; изходните данни са два полинома от степени съответно n и m.

Основното условие е, че функцията не се обръща в нула в интерполационните точки. Следователно, можем да запишем: нека функцията $f(z)$ е m-мероморфна (има не повече от m полюса) върху компакта $E \subset \mathbb{C}$, отбелязваме чрез $f(z) \in \mathscr{M}_m(E)$; тогава условието е:

$$\frac{Q_{n,m}(z) f(z) - P_{n,m}(z)}{\omega_{n+m+1}(z)} \in \mathscr{M}_m(E).$$

Например, нека $E = C_0(1)$ е единичният кръг, нека да вземем интерполационни точки по границата ∂E чрез $\omega_{n+m+1} = z^{n+m+1} - 1$, и нека функцията е:

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{2 - z^2}} + \frac{1}{(1 - 2.45z)^{10}}.$$

Функцията има полюс от кратност 10 в $(0.408, 0)$ и $f(z) \in \mathscr{M}_{10}(E)$. Най-много 10 полюса от многоточковата апроксимация на Паде клонят към този полюс, останалите са в $\mathbb{C} \setminus C_0(\sqrt{2})$, следователно $R_{n,m} \in \mathscr{M}_{10}(E)$, където $R_{n,m} = P_{n,m}/Q_{n,m}$.

3.6 Изходен код на алгоритмите

В този раздел излагаме изходният код на алгоритмите на компютърната алгебра `PARI/GP`. Този текст се копира, слага се в нов текстов файл `pade.gp`, подава се на `PARI/GP` чрез `\read("pade.gp")`.

Апроксимация на Паде на $F(z)$

```
\\** Pade approximant of F(z)
\p 1000
\ps 61
order = 61;
valN = 30;
valM = 30;
funF = 1.0*z/sqrt(1.0-z^2);
flagInf = 1;
strFile = "pade30";

\\** Let P(z) and Q(z) be polynomials, deg P = N, deg Q = M
\\** Pade approximant of F(z): Q F - P = O(z^{N + M + 1})
\\** This function computes the [N,M] Pade approximant (N>=M>1)
pariPADE(pN, pM) = {

    print("PADE[" pN "," pM "] matsolve");

    \\** Taylor expansion
    serT = taylor(funF, z);

    \\** Array for Taylor coeff.
    arrC = vector(order);

    \\** Fill the array
    for ( k = 1, order, arrC[k] = polcoeff(serT, k - 1) );
```

```
\\** Create matrix for the linear equations
matX = matrix(pM, pM);
vecX = vectorv(pM);

\\** Fill matrix from arrC
\\** Last element is negative and always depends on pN
for (pRow = 1, pM,
    for (pCol = 1, pM,
        matX[pRow, pCol] = arrC[(pN - pM) + pRow + pCol]);
    vecX[pRow] = -arrC[pRow + pN + 1];
);

\\** Solve matX * vecB = vecX
vecB = matsolve(matX, vecX);

\\** Array for denominator coeff.
arrB = vector(pM + 1);

\\** First element is set to one
arrB[1] = 1;
for (i = 1, pM,
    arrB[i + 1] = vecB[pM - i + 1];
);

\\** Array for numerator coeff.
arrA = vector(pN + 1);

\\** a0 = c0
arrA[1] = arrC[1];

\\** a1 = c1 + c0*b1
arrA[2] = arrC[2] + arrC[1] * arrB[2];

\\** Compute numerator coeff.
for (i = 2, pN,
    elemC = 0;
    if (i < pM,
        elemC = sum (j = 1, i, arrC[i-j+1] * arrB[j + 1]);
        ,
        elemC = sum (j = 1, pM, arrC[i-j+1] * arrB[j + 1]);
    );
    arrA[i + 1] = arrC[i + 1] + elemC;
```

```
    );

    print("PADE[" pN "," pM "] polroots");

    \\** Finding the zeros and poles
    ppol = 0;
    qpol = 0;

    for (i = 0, pN, ppol += arrA[i + 1]*z^i);
    for (i = 0, pM, qpol += arrB[i + 1]*z^i);

    res = ppol/qpol;
    res2 = 0;
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "q.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    zrs = numerator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "p.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    print("PADE[" pN "," pM "] finished\n");
}

pariPADE(valN, valM);
quit();
```

Апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, F, G]$

```
\\** Hermite-Pade approximant of [1, F(z), G(z)]
\p 1000
\ps 92
order = 92;
valN = 30;
valM = 30;
valL = 30;
funF = 1.0*z/sqrt(1.0-z^2);
funG = 1.0*z/sqrt((1.0-(2+I*2)*z)*(1.0-(2-I*2)*z));
flagInf = 1;
strFile = "hepa30";

\\** Let P(z), Q(z) and R(z) be polynomials,
\\**     deg P(z) = N, deg Q(z) = M, deg R(z) = L
\\** Hermite-Pade approximant of [1, F(z), G(z)]:
\\**     P(z) + Q(z)F(z) + R(z)G(z) = O(z^{N + M + L + 2})
\\** This function computes the [N,M,L] Hermite-Pade approximant
\\**    (N >= M, N >= L, N,M,L > 1)
pariHEPA(pN, pM, pL) = {

    print("HEPA[" pN "," pM "," pL "] matsolve");

    \\** Arrays for Taylor coeff.
    arrC = vector(order);
    arrD = vector(order);

    \\** Taylor expansion
    serC = taylor(funF, z);
    serD = taylor(funG, z);

    \\** Fill the arrays
    for ( k = 1, order, arrC[k] = polcoeff(serC, k - 1) );
    for ( k = 1, order, arrD[k] = polcoeff(serD, k - 1) );

    \\** Create matrix for the linear equations
    pC = pM + pL + 1;
    matX = matrix(pC, pC);
    vecX = vectorv(pC);

    \\** Fill matrix from arrays
    \\** Last element is negative and always depends on pN
```

```
for (pRow = 1, pC,
    for (pCol = 1, pM + 1,
        matX[pRow, pCol] = arrC[(pN - pM) + pRow + pCol]);
    for (pCol = 1, pL,
        matX[pRow, pCol + pM + 1] = arrD[(pN - pL) + pRow + pCol]);
    vecX[pRow] = -arrD[pRow + pN + 1];
);

\\** Solve matX * vecB = vecX
vecB = matsolve(matX, vecX);

\\** Array for denominator coeff. (two polynomials)
arrB = vector(pM + pL + 2);

\\** First element is set to one
arrB[1] = 1;
for (i = 1, pC,
    arrB[i + 1] = vecB[pC - i + 1];
);

\\** Array for numerator coeff.
arrA = vector(pN + 1);

\\** deg P(z) = pN, deg Q(z) = pM, deg R(z) = pL
\\** arrB contains r0,r1,...rL, q0,q1,...qM
\\** q0 has index pL + 2

\\** a0 = d0*r0 + c0*q0  (r0 = 1 = arrB[1])
arrA[1] = -(arrD[1] + arrC[1]*arrB[pL + 2]);

\\** a1 = d1*r0 + d0*r1 + c1*q0 + c0*q1
arrA[2] = -(arrD[2] + arrD[1]*arrB[2] + arrC[2]*arrB[pL + 2] +
    arrC[1]*arrB[pL + 3]);

\\** Compute numerator coeff.
for (i = 2, pN,
    elemD = 0;
    if (i < pL,
        elemD = sum (j = 0, i, arrD[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
        ,
        elemD = sum (j = 0, pL, arrD[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
    );
```

```
    elemC = 0;
    if (i < pM,
        elemC = sum (j = 0, i, arrC[i - j + 1] * arrB[pL + 2 + j]);
        ,
        elemC = sum (j = 0, pM, arrC[i - j + 1] * arrB[pL + 2 + j]);
    );
    arrA[i + 1] = -(elemD + elemC);
);

print("HEPA[" pN "," pM "," pL "] polroots");

\\** Finding the zeros and poles
ppol = 0;
for (i = 0, pN, ppol += arrA[i + 1]*z^i);

\\** arrB contains R(z) first and then Q(z)
\\** deg R(z) = pL, deg Q(z) = pM
rpol = 0;
qpol = 0;
for (i = 0, pL, rpol += arrB[i + 1]*z^i);
for (i = 0, pM, qpol += arrB[pL + 2 + i]*z^i);

\\** P/Q
res = ppol/qpol;
res2 = 0;
if (flagInf,
    res2 = subst(res, z, 1/z);
    ,
    res2 = res;
);

zrs = denominator(res2);
pts = polroots(zrs);
for (i = 1, length(pts),
    write(strFile "q.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

zrs = numerator(res2);
pts = polroots(zrs);
for (i = 1, length(pts),
    write(strFile "p.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

\\** Q/R
```

```
    res = qpol/rpol;
    res2 = 0;
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "r.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    print("HEPA[" pN "," pM "," pL "] finished\n");
}

pariHEPA(valN, valM, valL);
quit();
```

Апроксимация на Ермит–Паде за набора от четири функции $[1, F, G, H]$

```
\\** Hermite-Pade approximant of [1, F(z), G(z), H(z)]
\p 1000
\ps 123
order = 123;
valN = 30;
valM = 30;
valL = 30;
valK = 30;
funF = 1.0*z/sqrt(1.0-z^2);
funG = 1.0*z/sqrt((1.0-(2+I*2)*z)*(1.0-(2-I*2)*z));
funH = 1.0*z/sqrt((1.0-(-2+I*2)*z)*(1.0-(-2-I*2)*z));
flagInf = 1;
strFile = "mhepa30";

\\** Let P(z), Q(z), R(z) and S(z) be polynomials,
\\**    deg P(z) = N, deg Q(z) = M, deg R(z) = L, deg S(z) = K
\\** Hermite-Pade approximant of [1, F(z), G(z), H(z)]:
\\**    P(z) + Q(z)F(z) + R(z)G(z) + S(z)H(z) = O(z^{N+M+L+K+3})
\\** This function computes the [N,M,L,K] Hermite-Pade approximant
\\**    (N >= M, N >= L, N >= K, N,M,L,K > 1)
pariMHEPA(pN, pM, pL, pK) = {

    print("MHEPA[" pN "," pM "," pL "," pK "] matsolve");

    \\** Arrays for Taylor coeff.
    arrC = vector(order);
    arrD = vector(order);
    arrE = vector(order);

    \\** Taylor expansion
    serC = taylor(funF, z);
    serD = taylor(funG, z);
    serE = taylor(funH, z);

    \\** Fill the arrays
    for ( k = 1, order, arrC[k] = polcoeff(serC, k - 1) );
    for ( k = 1, order, arrD[k] = polcoeff(serD, k - 1) );
    for ( k = 1, order, arrE[k] = polcoeff(serE, k - 1) );

    \\** Create matrix for the linear equations
    \\** matrix( number of equations = rows = M, columns = M + 1 )
```

```
pC = pM + pL + pK + 2;
matX = matrix(pC, pC);
vecX = vectorv(pC);

\\** Fill matrix from arrays
\\** Last element is negative and always depends on pN
for (pRow = 1, pC,
    for (pCol = 1, pM + 1,
        matX[pRow, pCol] = arrC[(pN - pM) + pRow + pCol]);
    for (pCol = 1, pL + 1,
        matX[pRow, pCol + pM + 1] = arrD[(pN - pL) + pRow + pCol]);
    for (pCol = 1, pK,
        matX[pRow, pCol + pM + pL + 2] = arrE[(pN - pK) + pRow + pCol]);
    vecX[pRow] = -arrE[pRow + pN + 1];
);

\\** Solve matX * vecB = vecX
vecB = matsolve(matX, vecX);

\\** Array for denominator coeff. (three polynomials)
arrB = vector(pM + pL + pK + 3);

\\** First element is set to one
arrB[1] = 1;
for (i = 1, pC,
    arrB[i + 1] = vecB[pC - i + 1];
);

\\** Array for numerator coeff.
arrA = vector(pN + 1);

\\** deg P(z) = pN, deg Q(z) = pM, deg R(z) = pL, deg S(z) = pK
\\** arrB contains s0,s1,...sK, r0,r1,...rL, q0,q1,...qM
\\** r0 has index pK + 2, q0 has index pK + pL + 3

\\** a0 = e0*s0 + d0*r0 + c0*q0  (s0 = 1 = arrB[1])
arrA[1] = -(arrE[1] + arrD[1]*arrB[pK + 2] + arrC[1]*arrB[pK + pL + 3]);

\\** a1 = e1*s0 + e0*s1 + d1*r0 + d0*r1 + c1*q0 + c0*q1
arrA[2] = -(arrE[2] + arrE[1]*arrB[2] +
    arrD[2]*arrB[pK + 2] + arrD[1]*arrB[pK + 3] +
    arrC[2]*arrB[pK + pL + 3] + arrC[1]*arrB[pK + pL + 4]);
```

```
\\** Compute numerator coeff.
for (i = 2, pN,
    elemE = 0;
    if (i < pK,
        elemE = sum (j = 0, i, arrE[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
        ,
        elemE = sum (j = 0, pK, arrE[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
    );
    elemD = 0;
    if (i < pL,
        elemD = sum (j = 0, i, arrD[i - j + 1] * arrB[pK + 2 + j]);
        ,
        elemD = sum (j = 0, pL, arrD[i - j + 1] * arrB[pK + 2 + j]);
    );
    elemC = 0;
    if (i < pM,
        elemC = sum (j = 0, i, arrC[i - j + 1] * arrB[pK + pL + 3 + j]);
        ,
        elemC = sum (j = 0, pM, arrC[i - j + 1] * arrB[pK + pL + 3 + j]);
    );
    arrA[i + 1] = -(elemE + elemD + elemC);
);

print("MHEPA[" pN "," pM "," pL "," pK "] polroots");

\\** Finding the zeros and poles
ppol = 0;
for (i = 0, pN, ppol += arrA[i + 1]*z^i);

\\** arrB contains S(z) first, then R(z) and Q(z)
\\** deg S(z) = pK, deg R(z) = pL, deg Q(z) = pM
spol = 0;
rpol = 0;
qpol = 0;
for (i = 0, pK, spol += arrB[i + 1]*z^i);
for (i = 0, pL, rpol += arrB[pK + 2 + i]*z^i);
for (i = 0, pM, qpol += arrB[pK + pL + 3 + i]*z^i);

\\** P/Q
res = ppol/qpol;
res2 = 0;
```

```
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "q.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    zrs = numerator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "p.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    \\** R/S
    res = rpol/spol;
    res2 = 0;
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "s.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    zrs = numerator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "r.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    print("MHEPA[" pN "," pM "," pL "," pK "] finished\n");
}

pariMHEPA(valN, valM, valL, valK);
quit();
```

Двуточкова апроксимация на Паде на две функции $F(z)$ и $G(z)$

```
\\** Two-point Pade approximant of F(z) and G(z) for /N+1, N/
\p 1000
\ps 61
order = 61;
valN = 30;
funF = 1.0*sqrt((z-0.5)/(z-2.0));
funG = 1.0*sqrt((1-0.5*z)/(1-2.0*z));
flagInf = 0;
strFile = "tppa30";

\\** Let P(z) and Q(z) be polynomials, deg P(z) = deg Q(z) = N > 1
\\** Two-point Pade approximant of F(z) and G(z):
\\**   Q(z)F(z) - P(z) = O(z^{N+1})
\\**   Q(z)G(z) - P(z) = O(1/z^N)
\\** This function computes the two-point Pade approximant /N+1, N/
pariTPPA(pN) = {

    print("TPPA/" pN + 1 "," pN "/ matsolve");

    \\** Arrays for Taylor coeff.
    arrC = vector(order);
    arrD = vector(order);

    \\** Taylor expansion
    serC = taylor(funF, z);
    serD = taylor(funG, z);

    \\** Fill the arrays
    for ( k = 1, order, arrC[k] = polcoeff(serC, k - 1) );
    for ( k = 1, order, arrD[k] = polcoeff(serD, k - 1) );

    \\** Create matrix for the linear equations
    \\** matrix( number of equations = rows = M, columns = M + 1 )
    matX = matrix(pN, pN);
    vecX = vectorv(pN);

    \\** Fill matrix from arrays
    \\** Last element is negative
    for (pRow = 1, pN,
        cOne = 2;
        cTwo = pRow;
```

```
    for (pCol = 1, pN,
        if (pRow == pCol, matX[pRow, pCol] = arrC[1] - arrD[1]);
        if (pRow < pCol, matX[pRow, pCol] = arrC[cOne]; cOne++);
        if (pRow > pCol, matX[pRow, pCol] = -arrD[cTwo]; cTwo--);
    );
    vecX[pRow] = -arrC[pN - pRow + 2];
);

\\** Solve matX * vecB = vecX
vecB = matsolve(matX, vecX);

\\** Array for denominator coeff.
arrB = vector(pN + 1);

\\** First element is set to one
arrB[1] = 1;
for (i = 1, pN,
    arrB[i + 1] = vecB[pN - i + 1];
);

\\** Array for numerator coeff.
arrA = vector(pN + 1);

\\** a0 = c0
arrA[1] = arrC[1];

\\** a1 = c1*q0 + c0*q1
arrA[2] = arrC[2] + arrC[1]*arrB[2];

\\** Compute numerator coeff.
for (i = 2, pN,
    arrA[i + 1] = sum(j = 0, i, arrC[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
);

/*
\\** Array for numerator coeff. with arrD
arrAD = vector(pN + 1);

\\** a0 = c0
arrAD[1] = arrC[1];

\\** Comment the above and set i = 0, pN below for checking a0
```

```
    \\** Then arrAD[1] must be almost equal to arrC[1]
    for (i = 1, pN,
        arrAD[i + 1] = sum(j = 0, pN - i,
            arrD[j + 1] * arrB[i + j + 1]);
    );
    for (k = 1, pN + 1, print(k " " arrAD[k]));
    */

    print("TPPA/" pN + 1 "," pN "/ polroots");

    \\** Finding the zeros and poles
    ppol = 0;
    qpol = 0;

    for (i = 0, pN, ppol += arrA[i + 1]*z^i);
    for (i = 0, pN, qpol += arrB[i + 1]*z^i);

    res = ppol/qpol;
    res2 = 0;
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "q.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    zrs = numerator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "p.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    print("TPPA/" pN + 1 "," pN "/ finished\n");
}

pariTPPA(valN);
quit();
```

Двуточкова апроксимация на Паде на две функции $F(z)$ и $G(z)$

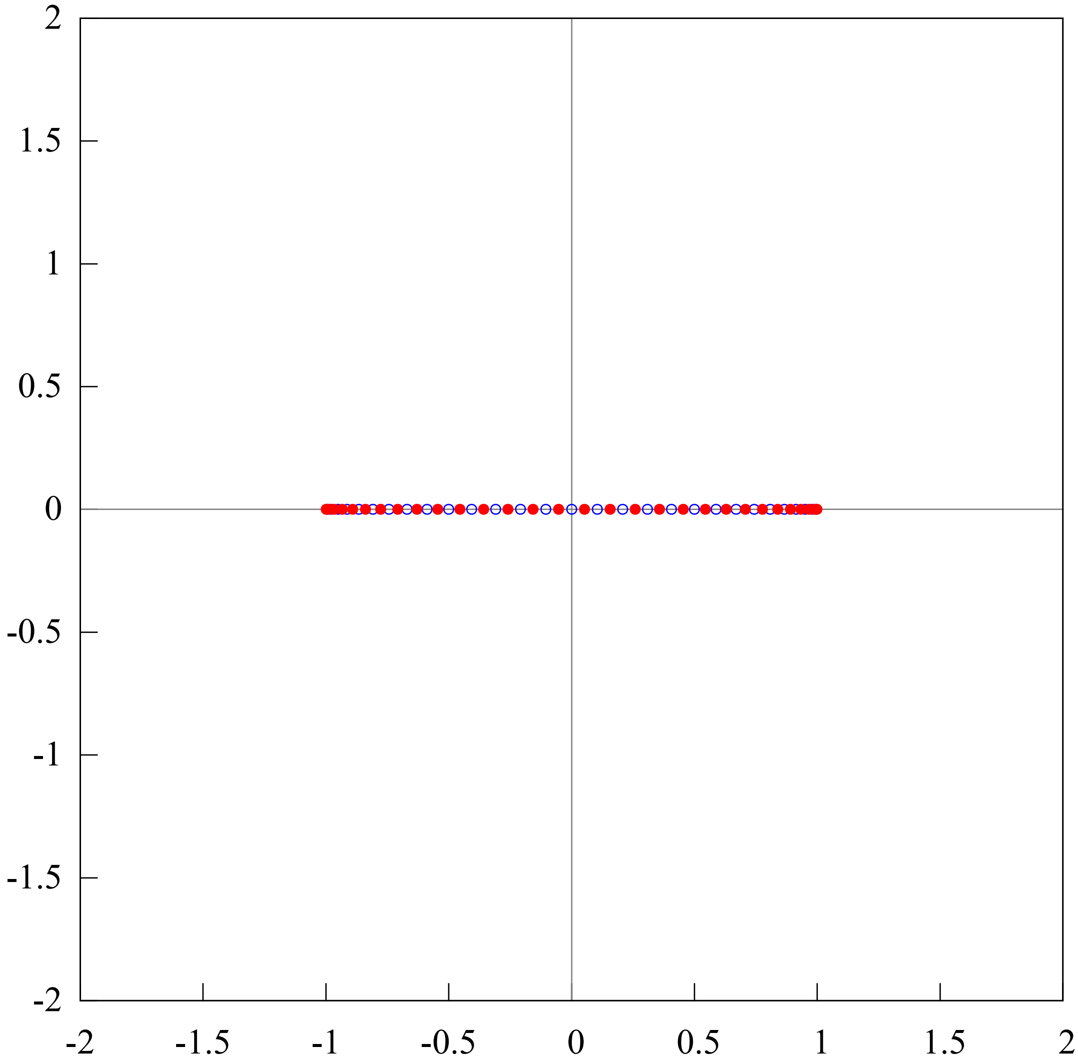
```
\\** Two-point Pade approximant of F(z) and G(z) for /N, N+1/
\p 1000
\ps 61
order = 61;
valN = 30;
funF = 1.0*sqrt((z-0.5)/(z-2.0));
funG = 1.0*sqrt((1-0.5*z)/(1-2.0*z));
flagInf = 0;
strFile = "tppb30";

\\** Let P(z) and Q(z) be polynomials, deg P(z) = deg Q(z) = N > 1
\\** Two-point Pade approximant of F(z) and G(z):
\\**   Q(z)F(z) - P(z) = O(z^N)
\\**   Q(z)G(z) - P(z) = O(1/z^{N+1})
\\** This function computes the two-point Pade approximant /N, N+1/
pariTPPB(pN) = {

    print("TPPB/" pN "," pN + 1 "/ matsolve");

    \\** Arrays for Taylor coeff.
    arrC = vector(order);
    arrD = vector(order);

    \\** Taylor expansion
    serC = taylor(funF, z);
    serD = taylor(funG, z);

    \\** Fill the arrays
    for ( k = 1, order, arrC[k] = polcoeff(serC, k - 1) );
    for ( k = 1, order, arrD[k] = polcoeff(serD, k - 1) );

    \\** Create matrix for the linear equations
    \\** matrix( number of equations = rows = M, columns = M + 1 )
    matX = matrix(pN, pN);
    vecX = vectorv(pN);

    \\** Fill matrix from arrays
    \\** Last element is negative
    for (pRow = 1, pN,
        cOne = 2;
        cTwo = pRow;
```

```
    for (pCol = 1, pN,
        if (pRow == pCol, matX[pRow, pCol] = arrC[1] - arrD[1]);
        if (pRow < pCol, matX[pRow, pCol] = arrC[cOne]; cOne++);
        if (pRow > pCol, matX[pRow, pCol] = -arrD[cTwo]; cTwo--);
    );
    vecX[pRow] = arrD[pRow + 1];
);

\\** Solve matX * vecB = vecX
vecB = matsolve(matX, vecX);

\\** Arrays for denominator coeff.
arrB = vector(pN + 1);

\\** Last element is set to one
arrB[pN + 1] = 1;
for (i = 1, pN,
    arrB[i] = vecB[pN - i + 1];
);

\\** Array for numerator coeff.
arrA = vector(pN + 1);

\\** aN = d0
arrA[pN + 1] = arrD[1];

\\** Comment the above and set i = 0, pN below for checking aN
\\** Then arrA[pN + 1] must be almost equal to arrD[1]
for (i = 0, pN - 1,
    arrA[i + 1] = sum(j = 0, i, arrC[i - j + 1] * arrB[j + 1]);
);

/*
\\** Array for numerator coeff. with arrD
arrAD = vector(pN + 1);

\\** aN = d0 (calculated below)
\\arrAD[pN + 1] = arrD[1];

for (i = 0, pN,
    arrAD[i + 1] = sum(j = 0, pN - i,
        arrD[j + 1] * arrB[i + j + 1]);
```

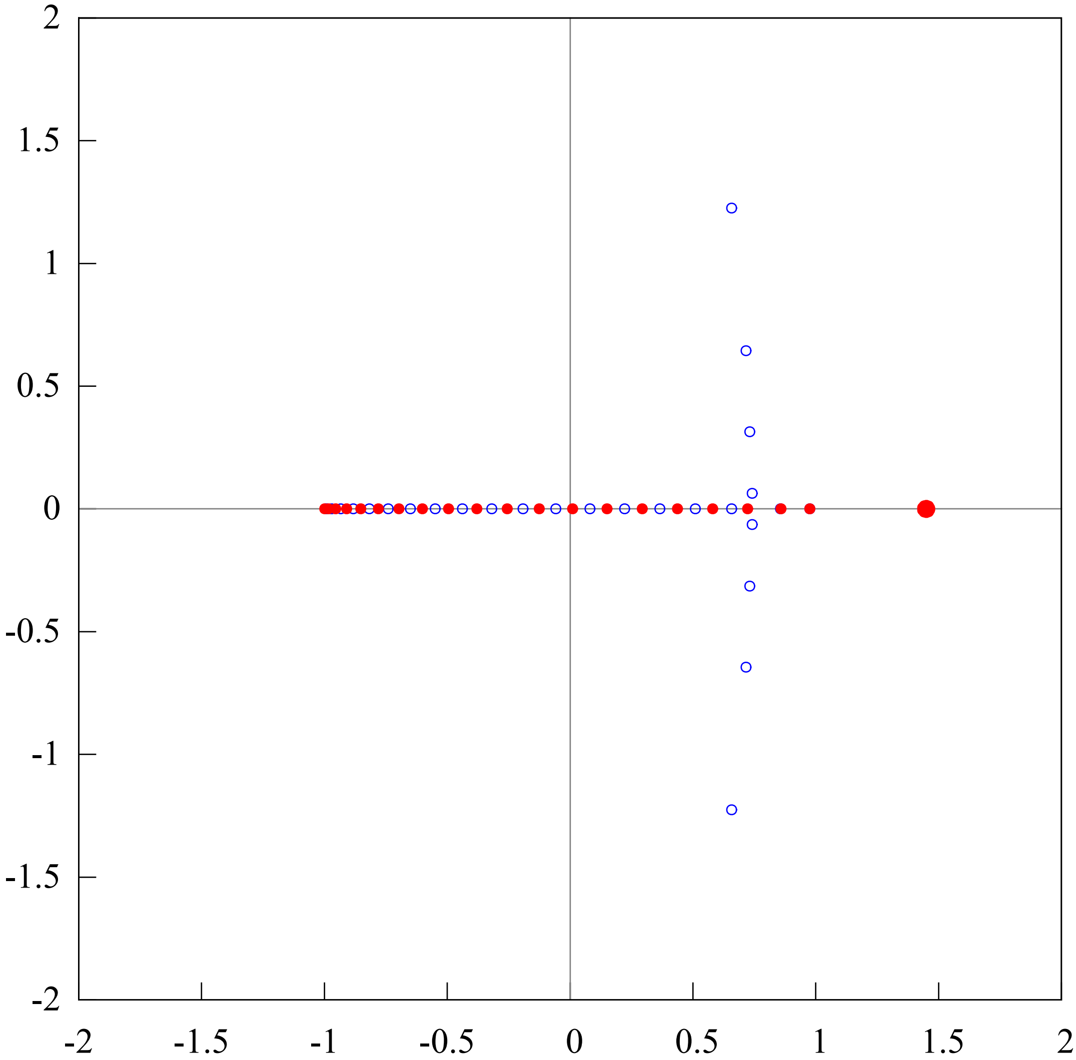
```
    );
    for (k = 1, pN + 1, print(k " " arrAD[k]));
    */

    print("TPPB/" pN "," pN + 1 "/ polroots");

    \\** Finding the zeros and poles
    ppol = 0;
    qpol = 0;

    for (i = 0, pN, ppol += arrA[i + 1]*z^i);
    for (i = 0, pN, qpol += arrB[i + 1]*z^i);

    res = ppol/qpol;
    res2 = 0;
    if (flagInf,
        res2 = subst(res, z, 1/z);
        ,
        res2 = res;
    );

    zrs = denominator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "q.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    zrs = numerator(res2);
    pts = polroots(zrs);
    for (i = 1, length(pts),
        write(strFile "p.gpd", real(pts[i]) " " imag(pts[i])));

    print("TPPB/" pN "," pN + 1 "/ finished\n");
}

pariTPPB(valN);
quit();
```

3.7 Графики на апроксимации на Паде

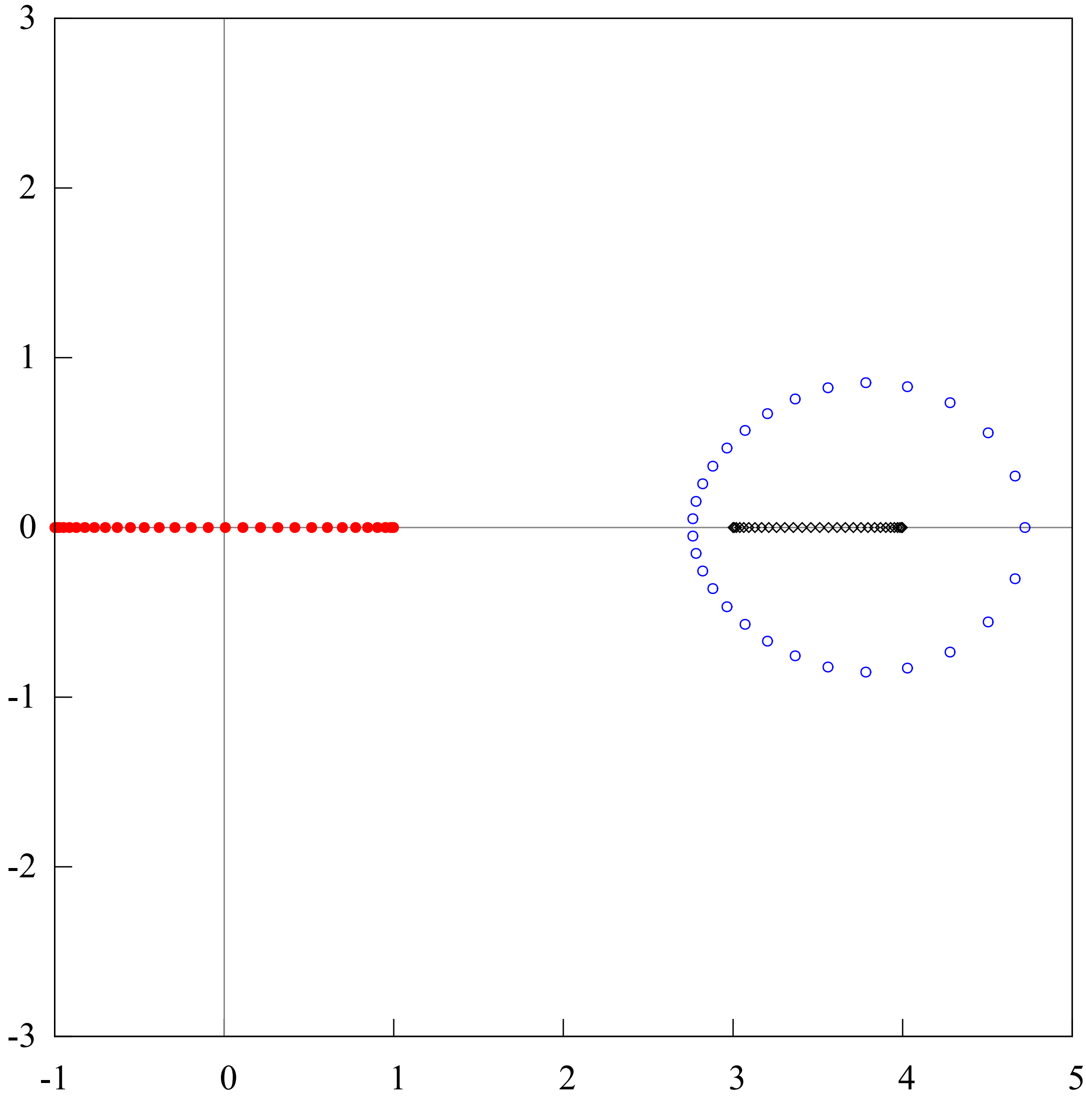
Някои графики за апроксимации на Паде.



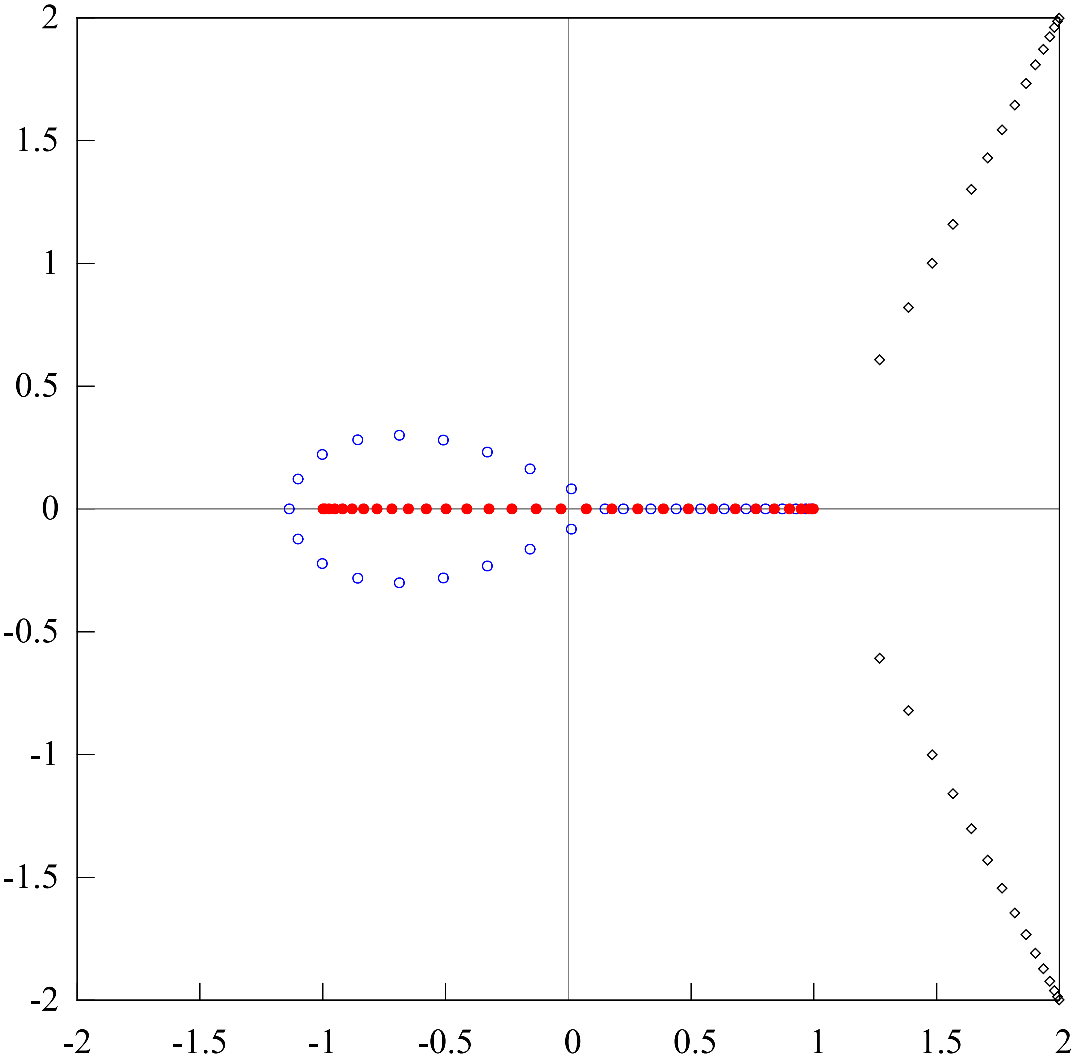
Фигура 3.1: Нули (сини точки) и полюси (червени точки) на диагоналната апроксимация на Паде на функция на Марков $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1}$.



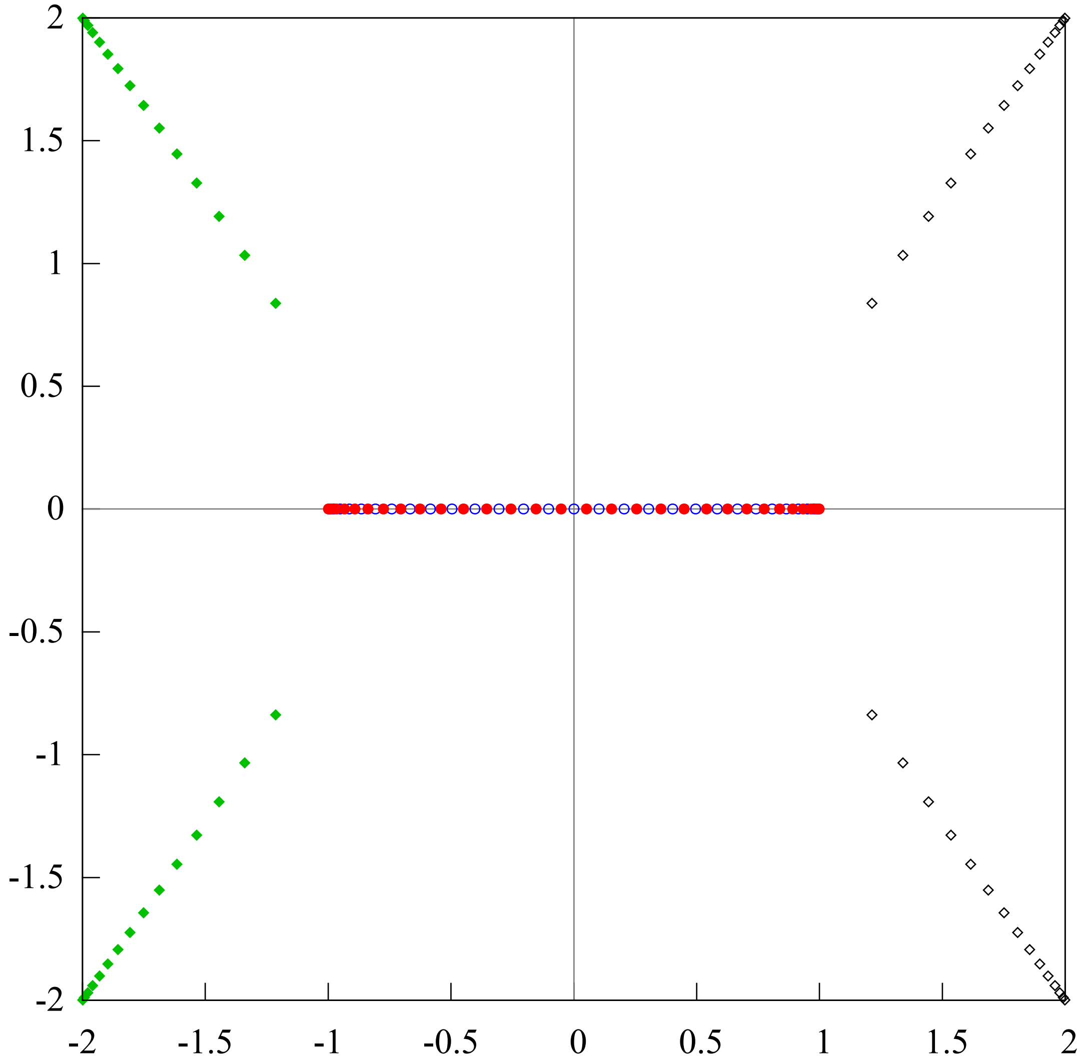
Фигура 3.2: Нули (сини точки) и полюси (червени точки) на диагоналната апроксимация на Паде на функция от тип на Марков $f(z) = 1/\sqrt{z^2-1} + z^9/(z-1.45)^{10}$.



Фигура 3.3: Нули на полиномите на апроксимацията на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, където $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1}$ и $g(z) = 1/\sqrt{(z-3)(z-4)}$.



Фигура 3.4: Нули на полиномите на апроксимацията на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, където $f(z) = 1/\sqrt{z^2-1}$, $g(z) = 1/\sqrt{(z-a)(z-\overline{a})}$, $a = 2+2i$.



Фигура 3.5: Нули на полиномите на апроксимацията на Ермит–Паде за набора от четири функции $[1, f, g, h]$, където $f(z) = 1/\sqrt{z^2-1}$, $g(z) = 1/\sqrt{(z-a)(z-\overline{a})}$, $h(z) = 1/\sqrt{(z-b)(z-\overline{b})}$, $a = 2+2i$, $b = -2+2i$.

Заключение

Решени са следните основни задачи:

1) Да се изследва равномерното разпределение на точки чрез теория на потенциала.

2) Да се направи програма, която изчислява класически апроксимации на Ермит-Паде от първи тип (включва и класически апроксимации на Паде).

Приноси

I. Научни приноси

Изследване на равномерното разпределенени на точките на интерполация, свързани с многоточкова апроксимация на Паде. Разглеждане на аналогичен случай за равнинен кондензатор, тогава имаме два набора от точки, които са свързани с обобщена апроксимация на Паде.

Изследване на класическата теорема на Бернщайн с реална функция на тегло, и разширяването на теоремата при разглеждане на комплексна функция на тегло.

II. Научно-приложни приноси

Реалнизиране на алгоритми за изчисление на класически апроксимации на Паде, апроксимации на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, като се използва компютърната алгебра `PARI/GP`.

Алгоритъмът за класическа апроксимация на Паде беше отправната точка, понеже същата може да се представи като апроксимация на Ермит–Паде за набора от две функции $[-1, f]$, и тогава лесно се разширява до набора от три функции $[1, f, g]$.

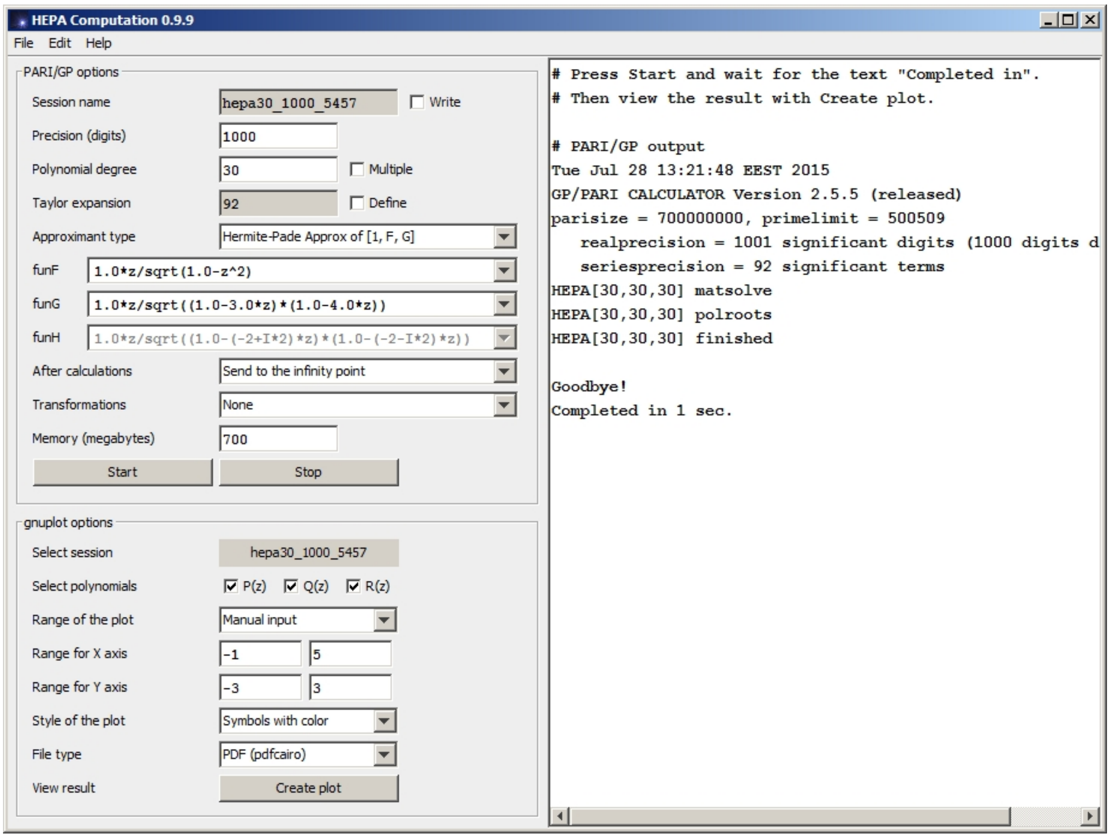
III. Приложни приноси

Съществуваше софтуер за изчисление на класически апроксимации на Паде, като Maple, Mathematica, и др., но не намерихме работещ софтуер за изчисление на класически апроксимации на Ермит–Паде.

През септември 2012 започнахме да работим по тази задача, и през декември 2013 вече имахме собствен софтуер за изчисление на нулите на Ермит–Паде полиноми от първи тип за набора от три функции $[1, f, g]$, като полиномите имат степен n (еквивалента на диагонална апроксимация на Паде).

Като използвахме този софтуер, представихме нашите хипотези относно асимптотиката на апроксимациите на Ермит–Паде в две статии, публикувани в arXiv през 2015 година, [29], [30].

Реализирахме алгоритмите чрез компютърната алгебра `PARI/GP`, за изчислението на нулите на полиномите на апроксимациите, и `gnuplot` за плотиране на тези точки върху комплексната равнина. Тези програми се използват и от Maple, SageMath, и др.



Фигура: Изглед на програмата за изчисление на апроксимациите.

Насоки за бъдеща работа

Задълбочено изследване на апроксимации на Ермит-Паде. Реализиране на алгоритми за изчисление на апроксимации на Паде от тип на Гончар, обобщени апроксимации на Паде.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията. Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис: ....

(Н. Икономов)

Библиография

[1] Akhiezer, N. I., “Orthogonal polynomials on several intervals”, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 989–992.

[2] Aptekarev, A.I., “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, Mat. Sb., 193:1 (2002), 3–72; Sb. Math., 193:1 (2002), 1–72.

[3] Aptekarev, A.I., W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, J. Approx. Theory, 129:2 (2004), 129–166.

[4] Aptekarev, Alexander I.; Kuijlaars, Arno B. J.; Van Assche, Walter, “Asymptotics of Hermite-Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, Art. ID rpm007, Int. Math. Res. Pap. IMRP, 2007, №4, 128 pp.

[5] Aptekarev, Alexander I., Maxim L. Yattselev, Padé approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials, http://arxiv.org/abs/1109.0332, 2011, 45 pp.

[6] Aptekarev, A. I., V. I. Buslaev, A. Martinez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, Uspekhi Mat. Nauk, 66:6(402) (2011), 37–122; Russian Math. Surveys, 66:6 (2011), 1049–1131.

[7] Bagby, T. *The Modulus of a Plane Condenser*, J. Math. Mech. **17**:4 (1967), 315–329.

[8] Bagby, T. *On interpolation by rational functions*, Duke Math. J. **36**:1 (1969), 95–104.

[9] Baker, Jr., George A., Graves-Morris, Peter *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Co. Massachusetts, Volume **I**, 1981.

[10] Baker, Jr., George A., Graves-Morris, Peter *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Co. Massachusetts, Volume **II**, 1981.

[11] Bernstein, S. N., *On polynomials, orthogonal on a finite interval*, Kharkov, Ukraine, 1937.

[12] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K., Grothmann, R. Poles and alternation points in real rational Chebyshev approximation, *Comput. Methods Funct. Theory* **3**, No. 1–2, 165–177 (2003).

[13] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K. *Growth Behavior and Zero Distribution of Rational Approximants*, Constr. Approx. **34** (2011), 393–420.

[14] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K. *Distribution of Interpolation Points of Maximally Convergent Multipoint Padé Approximants*, J. Approx. Theory **191** (2015), 46–57.

[15] Buslaev, V. I., Martínez-Finkelshtein, A., Suetin, S. P. Method of Interior Variations and Existence of S-Compact Sets, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **279**, 2012, pp. 25–51.

[16] De Montessus De Ballore, M. R. *Sur les fractions continues algébriques*, Bull. Soc. Math. France **20** (1902), 28–36.

[17] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., Jiménez Paiz, M., Orive, R. On certain symmetric strong distributions, two-point Padé approximation and related quadratures, *Applied Numerical Mathematics* **59**, 2009.

[18] Dumas, S., Sur le d'eveloppement des fonctions elliptiques en fractions continues, These, Zürich, 1908, 59.

[19] Gonchar, A. A. *Zolotarev problems connected with rational functions*, Math. USSR Sbornik **7**:4 (1969), 623–635.

[20] Gonchar, A. A. *On a theorem of Saff*, Math. USSR Sbornik **23**:1 (1974), 149–154.

[21] Gonchar, A. A. *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik **27**:4 (1975), 503–514.

[22] Goncar, A. A., "On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions", Math. USSR-Sb., 26:4 (1975), 555–575.

[23] Gonchar, A. A., "Rational approximation of analytic functions", Proc. Steklov Inst. Math., 272, suppl. 2 (2011), 44–57.

[24] Gonchar, A.A., Suetin, S.P., "On Padé approximants of Markov-type meromorphic functions", Proc. Steklov Inst. Math., 272, suppl. 2 (2011), 58–95.

[25] Gonchar, A. A., Suetin, S. P. *On Padé Approximants of Meromorphic Functions of Markov Type*, Sovrem. Probl. Mat. **5**, Steklov Math. Inst., RAS, Moscow, 2004, 68 pp.

[26] Gonzalez, A. N electrons in a quantum dot: Two-point Padé approximants, *Journal of Phys.: Cond. Matter* **9**:22, 1997, 4643–4657, http://arxiv.org/abs/cond-mat/9611141v1

[27] Grothmann, R. *Distribution of interpolation points*, Ark. Mat. **34** (1996), 103–117.

[28] Ikonomov, N.: "Multipoint Padé approximants and uniform distribution of points of interpolation", *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **66**:8 (2013), 1097–1104.

[29] Ikonomov, N. R., Kovacheva, R. K., Suetin, S. P. *Some numerical results on the behavior of zeros of the Hermite-Padé polynomials*, 2015, 95 pp, arXiv:1501.07090.

[30] Ikonomov, N. R., Kovacheva, R. K., Suetin, S. P. *On the limit zero distribution of type I Hermite–Padé polynomials*, 2015, 67 pp, arXiv:1506.08031.

[31] Ivanova, L. I. Interpolation by rational functions and uniform distribution of points, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **57**:7 (2004), 17–22.

[32] Kovacheva, R. K. *Generalized Padé approximants and meromorphic continuation of functions*, Math. USSR Sbornik **37**:3 (1980), 337–348.

[33] Kovacheva, R. K. On the behavior of Chebyshev rational approximants with a fixed number of poles, *Mathematica Balkanika*, **3**, 1989, 244–256.

[34] R. K. Kovacheva, Generalized Padé approximants of Kakehashi's type and meromorphic continuation of functions, *Deformation of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, 151–159 (1989).

[35] Landkof, N. S. *Foundations of modern potential theory*, Nauka, Moscow, 1966, English translation in Springer, Verlag, 1972.

[36] Magnus, A.P., "Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants", J. of Comput. and Appl. Math., 19:1 (1987), 23–38.

[37] Markov, A. A. "Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues", *Acta Math.* **19** (1895), 93–104.

[38] Nuttall, J. "Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials", *J. Approx. Theory*, **42** (1984), 299–386.

[39] Nuttall, J., R. S. Singh, "Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs", J. Approx. Theory, 21 (1977), 1–42.

[40] Nuttall, J., G. M. Trojan, "Asymptotics of Hermite–Padé polynomials for a set of functions with different branch points", Constr. Approx., 3:1 (1987), 13–29.

[41] Nuttall, J., "Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation", Constr. Approx., 6:2 (1990), 157–166.

[42] Perron, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Bd. II, Teubner, Stuttgart, 1957.

[43] Ransford, T. *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[44] Saff, E. B. *An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolation rational functions*, J. Approx. Theory **6** (1972), 63–67.

[45] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957, viii+307.

[46] Stahl, H., "Three different approaches to a proof of convergence for Pade approximants", Rational approximation and applications in mathematics and physics, Lancut, 1985, Lecture Notes in Math., 1237, Springer, Berlin, 1987, 79–124.

[47] Stahl, H., "Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions", Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 1996, Special Issue, 121–193.

[48] Stekloff, W.(V. Steklov), "Sur le d'eveloppement des fonctions continues en series de polynomes de Tchebychef", Извѣстія Россійской Академіи Наукъ. VI серія, 15 (1921), 249–266.

[49] Suetin, S.P., "Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions", Sb. Math., 191:9 (2000), 1339–1373.

[50] Suetin, S.P., "Strong asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a complex weight", Sb. Math., 200:1 (2009), 77–93.

[51] Szegö, G., Orthogonal polynomials, xiii+432 pp, Colloquium Publications, XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[52] Tchebycheff, P., "Sur les fractions continues", Journ. de Math. Pures et Appl. Ser. 2, 3 (1858), 289–323.

[53] Tricks of the Trade – Generalized Padé Approximation, by Paul Abbott, *The Mathematica Journal* **9**:4, 2005, http://www.mathematica-journal.com/issue/v9i4/contents/Tricks9-4/Tricks9-4_5.html

[54] Tsuji, M. *Potential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, Second Edition, 1975.

[55] Yattselev, M.L., “Nuttall’s theorem with analytic weights on algebraic S-contours”, J. Approximation Theory, 190 (2015), 73–90.

[56] Walsh, J. L. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **20**, Third Edition, 1960.

[57] Zygmund, A., Trigonometric series, 2nd ed., Vols. I, II, Cambridge University Press, New York, 1959, Vol. I. xii+383 pp.; Vol. II. vii+354 pp..

[58] Ахиезер, Н. И., “Чебышёвское направление в теории аппроксимаций”, Математика XIX века, Вып. 3, ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79.

[59] Бернштейн, С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале, ОНТИ, Харьков, 1937.

[60] Комлов, А. В., С. П. Суетин, “Асимптотическая формула для полиномов, орто- нормированных относительно переменного веса. II”, Матем. сб., 205:9 (2014), 121–144.

[61] Никишин, Е. М., В. Н. Сорокин, Рациональные аппроксимации и ортогональ- ность, Наука, М., 1988, 256 стр.

[62] Суетин, С. П., “Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для неко- торого класса разностных уравнений”, Совр. пробл. матем., 6, МИАН, М., 2006, 3–74.

[63] Чирка, Е. М., “Римановы поверхности”, Лекц. курсы НОЦ, 1, МИАН, М., 2006, 3–105.

Списък на авторските публикации

[1] Nikolay Ikonomov, "Multipoint Padé approximants and uniform distribution of points of interpolation", *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **66**:8 (2013), 1097–1104.

[2] N. R. Ikonomov and R. K. Kovacheva, "Distribution of points of interpolation of multipoint Padé approximants", *AIP Conf. Proc.* **1631** (2014), 292–296.

[3] Nikolay Ikonomov, "Generalized Padé approximants for plane condenser and distribution of points", *Math. Slovaka*, in publication.

[4] Н. Р. Икономов, Р. К. Ковачева, С. П. Суетин, "Метод Наттола и асимптотическая формула Бернштайна для многочленов, ортогональных относительно комплексного веса", *Изв. РАН Сер. Матем.* **79**:6 (2015), 125–144.