БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Юлиан Цанков Цанков

ОПЕРАЦИОННИ СМЯТАНИЯ ЗА ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ

АВТОРЕФЕРАТ

на

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен

“Доктор”

в професионално направление 4.5 ”Математика”

по научна специалност 01.01.04 ”Математически анализ”

Научен консултант: чл.-кор. проф. дмн Иван Димовски

София, 2014 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за започване на процедура по защита на разширено заседание към секция "Анализ, геометрия и топология" при Института по математика и информатика - БАН, назначено със заповед 55/28.03.2014 г., състояло се на 08.04.2014 г.

Изследванията по дисертацията са проведени в секция "Анализ, геометрия и топология" на Института по математика и информатика на БАН.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на Института по математика и информатика при БАН, ул. "Акад. Г. Бончев", бл. 8, София.

Дисертантът работи като главен асистент в катедра "Геометрия" на Факултета по математика и информатика при СУ "Св. Климент Охридски".

Дисертационният труд е с общ обем от 189 страници. Литературата съдържа 100 заглавия.

Автор: Юлиан Цанков Цанков

Заглавие: Операционни смятания за гранични задачи

Научен консултант: чл.-кор. проф. дмн Иван Димовски

1 Увод

Класическото операционно смятане се оформя като математическа дисциплина в средата на 20 век след изследванията на полския математик Ян Микусински. Проблемът за строгото обосноваване на операционното смятане на Хевисайд е стоял открит от края на 19 век. Важността на операционното смятане на Хевисайд е подчертана от английският математик Уиттекер, който го нарежда между най-важните математически дисциплини наследени от 19 век, наред с автоморфните функции и тензорното смятане. Проблемът за обосноваването на смятането на Хевисайд не е включен в знаменитите 23 проблема на Хилберт, но в трактата на Хилберт и Курант "Методи на математическата физика" от 1930 г. този проблем е отчетливо формулиран.

Ян Микусински решава проблема с обосноваването на операционното смятане на Хевисайд на базата на съвременната алгебра в книгата си [15], която е публикувана първоначално на полски език през 1952 г.

Минималната цел на класическото операционно смятане е намирането на решенията на начални задачи за обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти в експлицитен вид. Най-простата задача от такъв вид е

$$\begin{gathered} P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f(t), \\ y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., \deg P - 1, \end{gathered} \tag{1.1}$$

където P е полином.

Много математици от 19 век решават формално тази задача, като пишат

$$y = \frac{1}{P(D)} f,$$

след това разлагат $\frac{1}{P(D)}$ на елементарни дроби и тълкуват израза $\frac{1}{(D-\alpha)^k} f$ по подходящ начин.

Такъв е и подходът на Хевисайд. Характерно за Хевисайд са многото приложения към задачи на електротехниката.

Основна роля в теорията на Микусински играе операцията

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

в пространството $C = C[0, \infty)$ на непрекъснатите функции в $[0, \infty)$. Тази операция носи името конволюция на Дюамел. Ако C се разглежда като алгебрична структура с операции обикновено събиране и конволюцията на Дюамел като умножение, C е комутативен пръстен. Не е тривиален фактът, че този пръстен няма делители на нулата, т.е. той е област на цялост (Теорема на Титчмарш [17]).

От общата алгебра е добре известно как се разширява област на цялост до поле от частни, което в нашия случай може да се нарече поле на Микусински. Основният оператор в теорията на Микусински е операторът на интегрирането

$$lf(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

В пръстена $(C, +, *)$ той може да бъде отъждествен с функцията константа $l(t) \equiv 1$, т.е. $l = \{1\}$. Алгебрично обратният елемент $s = \frac{1}{l}$ може да се разглежда като алгебричен аналог на оператора на диференцирането $Df(t) = f'(t)$, но ако $f(0) \neq 0$, то $sf \neq Df$, и по-точно

$$sf = f' - f(0)$$

ако $f \in C^1[0, \infty)$, където под $f(0)$ се разбира не функцията константа, а "числов" оператор. Тази връзка позволява началната задача (1.1) да се сведе до уравнение в полето на Микусински

$$P(s)y = f$$

и да се напише решението

$$y = \frac{1}{P(s)} f.$$

Елементарно се установява, че например

$$\frac{1}{s - \alpha} = \{e^{\alpha t}\},$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \right\}, \quad n = 1, 2, ...$$

и тогава

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} f = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

По този начин се получава строга обосновка на смятането на Хевисайд и то се превръща в математическа дисциплина.

Стремежът към разширяване и обобщаване на операционното смятане на Микусински се натъква на редица трудности, за преодоляването на част от които е направен опит в тази дисертация.

Операционното смятане на Микусински е тясно свързано с оператора на интегрирането $lf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, който е един от десните обратни оператори на оператора на диференцирането $D = \frac{d}{dt}$. Но l не е единственият десен обратен оператор на D.

За целите на операционното смятане е по-удобно да се разглежда линеен десен обратен оператор l на $D = \frac{d}{dt}$ в пространството $C(\Delta)$, където Δ е интервал съдържащ точката $t = 0$ и определен като решение $y = lf$ на граничната задача

$$\frac{d}{dt} y = f(t), \quad \chi\{y\} = 0,$$

където χ е линеен функционал в $C(\Delta)$. Тоава l има вида

$$lf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau f(\sigma) d\sigma \right\},$$

когато χ е нормиран с условието $\chi\{1\} = 1$. (По-нататък с l ще означаваме най-общия линеен десен обратен оператор на D.)

За да се приложи схемата на Микусински за оператора за интегриране l е необходимо да се знае конволюция на l в $C(\Delta)$. Такава не беше известна до 1974 г. когато Димовски [7] установи, че операцията

$$(f \overset{t}{*} g)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\}$$

има свойствата, аналогични на дюамеловата конволюция (билинейност, комутативност и асоциативност) и l се представя като конволюционнен оператор

$$lf = \{1\} \overset{t}{*} f.$$

За разлика от дюамеловата конволюция, тази конволюция изобщо има делители на нулата. Това обаче не е пречка да се развие операционно смятане по схемата на Микусински за оператора l, като се разглеждат конволюционни дроби $\frac{f}{g}$ със знаменатели, които не са делители на нулата. Това е осъществено от Димовски през 1991 г., виж [3].

2 Операционни смятания за нелокални гранични задачи за оператора на диференцирането

В Глава 2 до известна степен се възпроизвежда операционното смятане на Димовски от 1991 г. Нов момент е разглеждането на резонансните случаи при решаване на нелокална задача на Коши, т.е. задача от вида

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{d}{dt}\right) y = f(t), \\ &\chi\{y^{(k)}\} = 0, \quad k = 0, 1, ..., \deg P - 1, \end{aligned}$$

където P е полином.

С въвеждането на алгебричен обратен на l от вида $s = \frac{1}{l}$, задачата се свежда до едно алгебрично уравнение

$$P(s)y = f + Q(s),$$

с даден полином $Q(s)$, в пръстена на конволюционните частни.

Ако $P(s)$ не е делител на нулата, формалното решение на задачата е

$$y = \frac{1}{P(s)} f + \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Резонансен се нарича случаят, когато $P(s)$ е делител на нулата.

За да опишем по-добре резонансния случай, ще въведем пръстен на мултипликаторните частни. За тази цел първо ще въведем пръстена на мултипликаторите на конволюционната алгебра $(C(\Delta), \overset{t}{*})$. Ще дадем дефиниция на мултипликатор на конволюционната алгебра $(C(\Delta), \overset{t}{*})$.

Дефиниция 2.1 (Ларсен [14]). Линейният оператор $M : C(\Delta) \to C(\Delta)$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C(\Delta), \overset{t}{*})$ ако за всички $f, g \in C(\Delta)$ е изпълнено

$$M(f \overset{t}{*} g) = (Mf) \overset{t}{*} g. \tag{2.1}$$

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C(\Delta), \overset{t}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [14]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. По правило в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи които не са делители на нулата. Например такъв елемент е мултипликаторът $\{1\} \overset{t}{*}$, т.е. l.

С $\mathfrak{N}$ означаваме множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин както от пръстена на целите числа се получава пръстенът на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим мултипликаторните частни. Но в "знаменател" може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\dfrac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация" (вж. Ленг [13], стр. 53). Ще скицираме накратко тази процедура. В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност "$\sim$" такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички мултипликаторни дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

По-нататък ще разглеждаме различните обекти: числата, функциите от $C(\Delta)$, мултипликаторите и мултипликаторните дроби като елементи на единната алгебрична система $\mathcal{M}$.

Резонансният случай се характеризира с

Теорема 2.1 *$P(s)$ е делител на нулата, тогава и само тогава, когато някой корен λ_0 на $P(\lambda)$ е собствена стойност на задачата*

$$\frac{d}{dt}y - \lambda y = 0, \quad \chi\{y\} = 0,$$

т.е. λ_0 е корен на експоненциалната индикатриса $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\}$ на функционала χ.

За да се опише адекватно резонансният случай, се разглежда рестрикция $\widetilde{l}$ на l до съответно подпространство $\widetilde{C}_k$ на $\mathcal{M}$, в което $\widetilde{s} - \lambda_k$ не е делител на нулата, където

$\widetilde{s} = \dfrac{1}{\widetilde{l}}$, а λ_k е корен на индикатрисата $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\}$. В $\widetilde{C}_k$ дробта $\dfrac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k} f$, където λ_k е корен на индикатрисата $E(\lambda)$ с кратност κ_k се представя като мултипликатор

$$\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k} = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} .$$

Трябва специално да посочим, че функцията $\dfrac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}$, представяща мултипликаторното частно $\dfrac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}$ не е единствена. Тя е определена с точност до квазиполином от вида $Q(t)e^{\lambda_k t}$, където $Q(t)$ е произволен полином от степен $\deg Q(t) \leq \kappa_k - 1$.

Аналогично, дробта $\dfrac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m}$ се представя като мултипликатор

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{ A_m(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*},$$

където $A_m(t)$ е полином на t от степен $m + \kappa_k$. И тук функцята $A_m(t)e^{\lambda_k t}$ представяща мултипликаторното частно $\dfrac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m}$ не е единствена. Тя е определена с точност до квазиполином от вида $Q(t)e^{\lambda_k t}$, където $Q(t)$ е произволен полином от степен $\deg Q(t) \leq \kappa_k - 1$.

Ако знаем, че

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{ A_m(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*},$$

то може да намерим функция която представя оператора $\dfrac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m+1}}$. Имаме

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m+1}} = \left\{ A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*},$$

където

$$A_{m+1}(t) = \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \chi_\tau \left\{ e^{\lambda_k \tau} \int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} A_m(\sigma) d\sigma \right\}. \tag{2.2}$$

Лема 2.1 Ако $A_1(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C}_k$ и полиномите $A_m(t)$ за $m = 2, 3, ...$ са получени рекурентно от $A_1(t)$ чрез (2.2), тогава $A_m(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C}_k$ за $m = 2, 3, ...$.

В случая, когато $A_m(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C}_k$, $m = 1, 2, 3, ...$, полиномите $A_m(t)$, $m = 1, 2, 3, ...$ имат свойствата описани в следващата теорема:

Теорема 2.2 *Ако $A_m(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C}_k$, $m = 1, 2, 3, ...$, тогава полиномите $A_m(t)$ имат свойствата:*

$$A'_{m+1}(t) = A_m(t), \tag{2.3}$$

$$\chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_1(\tau)\} = 1, \qquad \chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_{m+1}(\tau)\} = 0. \tag{2.4}$$

Тази теорема показва, че полиномите $A_m(t)$ за $m = 1, 2, 3, ...$, образуват Апелова редица от полиноми.

В края на Глава втора са разгледани няколко примера на нелокални задачи. За всеки от примерите са разгледани случаи при които възникват делители на нулата.

3 Операционно смятане за нелокални гранични задачи от първи род за квадрата на диференцирането

Разработените теми в тази глава са до известна степен подготовка за следващите три глави.

Като основен оператор се разглежда квадрата $\frac{d^2}{dx^2}$ на оператора на диференцирането $\frac{d}{dt}$ свързан с локално гранично условие $y(0) = 0$ и нелокално гранично условие от вида $\Phi\{y\} = 0$, където Φ е линеен функционал в пространството $C^1[0, a]$ или $C^1[0, \infty)$.

Основната гранична задача, която се разглежда е

$$y'' + \lambda^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad \Phi\{y\} = 0.$$

Нейното решение е резолвентният оператор

$$R_{-\lambda^2}(f) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi - \frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\Phi_\xi\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^\xi f(\eta)\sin\lambda(\xi-\eta)d\eta\right\}, \tag{3.1}$$

където функцията $E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}$ е синусовата индикатриса на функционала Φ.

Ще предполагаме, че $E(0) \neq 0$ и тогава без ограничение на общността ще считаме, че $E(0) = 1$. В този случай решението на задачата

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x), \quad x \in (0, a), \quad y(0) = 0, \quad \Phi_\xi\{y(\xi)\} = 0$$

е

$$y = Lf(x) = \int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi - x\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi (\xi-\eta)f(\eta)d\eta\right\}.$$

Т.е. L е десният обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\frac{d^2}{dx^2}$ определен с условията $(Lf)(0) = 0$ и $\Phi_\xi\{L_x f(\xi)\} = 0$. Ще намерим пръстен в който да дефинираме алгебричен обратен на L.

Димовски в [7] намира конволюция на оператора $R_{-\lambda^2}$:

Теорема 3.1 *(Димовски [7] стр. 119) Нека $f, g \in C^1([0, a])$. Тогава операцията $\overset{x}{*}$:*

$$(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}, \tag{3.2}$$

където

$$h(x,\zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta + x - \eta)g(\eta)d\eta - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta - x - \eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta - x - \eta))d\eta,$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C^1([0,a])$*, за която резолвентният оператор* $R_{-\lambda^2}f$ *има представяне от вида*

$$R_{-\lambda^2}f = \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f \tag{3.3}$$

и по-специално, $Lf(x) = \{x\} \overset{x}{*} f$.

Конволюцията (3.2) играе съществена роля в останалите четири глави. Тук я използваме за построяване на операционни смятания свързани с квадрата на диференцирането. Операционните смятания свързани с квадрата на диференцирането целят ефективно решаване на гранични задачи от вида

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)y = f, \tag{3.4}$$

$$y(0) = \alpha_0,\quad y''(0) = \alpha_1,\ \ldots,\ y^{(2n-2)}(0) = \alpha_{n-1},$$
$$\Phi\{y\} = \beta_0,\quad \Phi\{y''\} = \beta_1,\ \ldots,\ \Phi\{y^{(2n-2)}\} = \beta_{n-1},$$

където Φ е ненулев линеен функционал в пространството $C^1([0,a])$ или $C^1[0,\infty)$ на гладките функции, за удобство нормиран с условието $\Phi_\xi\{\xi\} = 1$, а P е полином с постоянни коефициенти и $\deg P = n$.

Аналогично на разглежданията във Втора глава, тук се развива операционно смятане за квадрата на диференцирането на основата на конволюцията, дефинирана с (3.2).

Операторът S е свързан с оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{d^2}{dx^2}$, но не винаги съвпада с него. Връзката между S и $\dfrac{d^2}{dx^2}$ се дава от

$$\frac{d^2}{dx^2}f = Sf + S\{x\Phi\{1\} - 1\}f(0) - \Phi_\xi\{f(\xi)\},$$

където $f \in C^2[0,a]$. Полезно е и представянето

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f = S^n f + \sum_{j=1}^n S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\},$$

където $f \in C^{2n}[0,a]$.

С въвеждането на алгебричен обратен на L от вида $S = \dfrac{1}{L}$, граничната задача (3.4) се свежда до едно алгебрично уравнение

$$P(S)y = f + Q(S),$$

с даден елемент $Q(S)$, в пръстена на мултипикаторните частни на алгебрата $(C[0,a], \overset{x}{*})$.

Ако $P(S)$ не е делител на нулата, формалното решение на задачата е

$$y = \frac{1}{P(S)} f + \frac{Q(S)}{P(S)}.$$

Необходимо и достатъчно условие за това елемента $P(S)$ на пръстена на мултипликаторните частни да не е делител на нулата се дава от следващата теорема.

Теорема 3.2 *Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ са различните нули на полинома $P(\lambda)$. Изразът $P(S)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато $E(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$.*

Теорема 3.3 *Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) \neq 0$. Тогава за $m = 2, 3, ...$ е изпълнено*

$$\frac{1}{(S+\lambda^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)\lambda} \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{(S+\lambda^2)^{m-1}} \tag{3.5}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!\lambda} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda} \cdots \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda}}_{n} \frac{\sin\lambda x}{E(\lambda)}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!\lambda} D_\lambda^n \frac{\sin\lambda x}{E(\lambda)}.$$

Само тук за удобство с D_λ сме означили оператора $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\dfrac{1}{\lambda}$.

Резонансен случай възниква когато $P(S)$ е делител на нулата. Аналогично на разглежданията за резонансния случай в Глава 2, и тук за да се опише адекватно резонансният случай, се разглежда рестрикция $\widetilde{L}$ на L до съответно подпространство $\widetilde{C}_k$ в което $\widetilde{S} - \lambda_k$ не е делител на нулата, където $\widetilde{S} = \dfrac{1}{\widetilde{L}}$ и λ_k е общ корен на $P(\lambda)$ и $E(\lambda)$. В $\widetilde{C}_k$ дробта $\dfrac{1}{\widetilde{S} - \lambda_k} f$, където λ_k е корен на индикатрисата $E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda} \right\}$ с кратност κ_k се представя като мултипликатор.

Теорема 3.4 *Нека $\lambda_n \in \mathbb{C}$ е κ_n - кратна нула на $E(\lambda)$, т.е. за λ_n е изпълнено $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n - 1)}(\lambda_n) = 0$ и $E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{\widetilde{S} + \lambda_n^2} = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n - 1}{2}} x^{\kappa_n} \cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*}, & \kappa_n \text{ нечетно} \\ \\ \left\{ \dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n}{2}} x^{\kappa_n} \sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*}, & \kappa_n \text{ четно} \end{cases}, \tag{3.6}$$

където в дясната част с $\{\}$ са означени съответните конволюционни мултипликатори.

В края на Глава 3 са разгледани няколко примера на задачи включващи нелокални условия от типа на условието на Самарски-Ионкин (вж. [4]), условието на Бицадзе-Самарски (вж. [2], [1], [16]) и обобщение на условието на Бицадзе-Самарски (вж. [19]).

4 Двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

В тази глава ще изградим операционни смятания за частните диференциални оператори $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ в съответно функционално пространство на функции на двете независими променливи t и x. Целта на тези операционни смятания е изучаването на нелокални еволюционни гранични задачи за уравнения от вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - Q\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = F(x,t) \tag{4.1}$$

в ивица D от вида $D = [0,a] \times [0,\infty)$ и с полиноми P и Q.

За да формулираме точния клас задачи, задаваме два линейни функционала $\chi \in (C[0,\infty))^*$ и $\Phi \in (C^1[0,a])^*$.

Граничните условия на разглежданите задачи са следните:

1) ”Начални” условия

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x,\tau)\right\} = f_k(x), \quad k = 0,1,...,\deg P - 1, \tag{4.2}$$

с дадени $f_k(x)$ за $0 \le x \le a$. Изобщо, тези условия са нелокални.

2) Граничните условия са от вида

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,t) = \varphi_k(t), \quad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}}u(\xi,t)\right\} = \psi_k(t), \tag{4.3}$$

където $k = 0,1,...,\deg Q - 1$ а $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ са дадени за $0 \le t < \infty$. Първото от тези гранични условия е локално, а второто - изобщо нелокално.

Като използваме едномерните конволюции разгледани в Глави 2 и 3, ще въведем двумерна конволюция.

Теорема 4.1 (Димовски [8]) *Нека $u, v \in C([0,a] \times [0,\infty))$. Тогава операцията*

$$(u \overset{(x,t)}{*} v)(x,t) = \chi_\tau\left\{\int_0^\tau u(x, t+\tau-\sigma) \overset{x}{*} v(x,\sigma)d\sigma\right\}$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0,a] \times [0,\infty))$, за която

$$l_t L_x u = \{x\} \overset{(x,t)}{*} u. \tag{4.4}$$

Тук на функцията $\{x\}$ се гледа като на функция от $C([0,a]\times[0,\infty))$, а не от $C[0,a]$. С l_t означаваме десния обратен оператор на оператора $\frac{\partial}{\partial t}$, определен с функционала χ, а с L_x означаваме десния обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, определен с условията $(L_x u)(0,t)=0$ и $\Phi_\xi\{L_x u(\xi,t)\}=0$.

Тази двумерна конволюция има следното важно свойство:

Теорема 4.2 *Нека $u_1(x), v_1(x)\in C[0,a]$ и $u_2(t), v_2(t)\in C[0,\infty)$. Тогава*

$$\{u_1(x)u_2(t)\}\overset{(x,t)}{*}\{v_1(x)v_2(t)\}=\left(u_1(x)\overset{x}{*}v_1(x)\right)\left(u_2(t)\overset{t}{*}v_2(t)\right). \tag{4.5}$$

И тук аналогично на разглежданията в Глави 2 и 3 въвеждаме пръстен на мултипликаторните частни $\mathcal{M}$, в който мултипликаторите l_t и L_x не са делители на нулата. Означаваме техните алгебрични обратни с $s_t=\frac{1}{l_t}$ и $S_x=\frac{1}{L_x}$.

Операторите s_t и S_x са алгебрични аналози на операторите $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Връзката между s_t, S_x и $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ съответно се дава от следващата теорема.

Теорема 4.3 *Нека $u\in C$ притежава непрекъснати частни производни u_t и u_{xx} в $[0,a]\times[0,\infty)$. Тогава*

$$u_{xx}=S_x u+S_x\{x\Phi\{1\}-1\}u(0,t)-[\Phi_\xi\{u(\xi,t)\}]_x, \tag{4.6}$$

$$u_t=s_t u-[\chi_\tau\{u(x,\tau)\}]_t. \tag{4.7}$$

Изведени са и формули за $\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)$ и $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(x,t)$, изразени съответно чрез s_t^k, $k=1,2,...,n$ и S_x^k, $k=1,2,...,m$.

Връзките (4.6) и (4.7) ни позволяват да алгебризираме граничната задача (4.1) - (4.3). Получаваме:

$$\begin{aligned} P(s_t)u-Q(S_x)u &= F(x,t) \\ &+ \sum_{k=1}^{n}b_{n-k}\sum_{j=1}^{k}s_t^{k-j}f_{j-1}(x)+\sum_{k=1}^{m}c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t)-S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t)\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Дефиниция 4.1 Функция $u\in C^1([0,a]\times[0,\infty))$ се нарича слабо решение на граничната задача (4.1) - (4.3) ако удовлетворява уравнението (4.8).

В сила е:

Лема 4.1 Нека $u=u(x,t)\in C^1([0,a]\times[0,\infty))$, е решение на уравнението (4.8) с непрекъснати частни производни $\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)\in C(D)$ и $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(x,t)\in C(D)$. Тогава u е класическо решение на граничната задача (4.1) - (4.3).

Сега ще търсим достатъчни условия кога елементът $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. Понеже от това, че $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (4.8) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$, ще наричаме съответната теорема, теорема за единственост на решението на граничната задача (4.1) - (4.3).

За формулировката на теоремата да припомним, че $G(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\}$ е експоненциалната индикатриса на функционала χ, а $E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}$ е синусовата индикатриса на функционала Φ.

Теорема 4.4 *Нека $a \in \operatorname{supp}\Phi$, $\deg P \geq 1$, $G(\mu_k) = 0$ и $E(\lambda_n) = 0$ за $k, n = 1, 2, \ldots$. Ако $P(\mu_k) - Q(-\lambda_n^2) \neq 0$, тогава елементът $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.*

Възлова роля за доказателството на тази теорема има теоремата на Божинов [6].

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (4.1) - (4.3). Ще я наричаме разширен принцип на Дюамел.

Теорема 4.5 *Допускаме, че съществува слабо решение $\Omega(x,t)$ на граничната задача* (4.1) - (4.3)*, при специален избор на граничните функции $f_j(x) = 0$, за $j = 0, 1, ..., \deg P - 1$, $\varphi_k(t) = 0$, $\psi_k(t) = 0$ за $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ и на дясната част $F(x,t) = x$ на уравнението* (4.1)*. Тогава функцията*

$$u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x,t) \overset{(x,t)}{*} F(x,t)\right)$$

е решение на граничната задача (4.1) - (4.3) *при достатъчна гладкост на функцията $F(x,t)$ и хомогенни гранични условия.*

В края на параграфа са разгледани три примера за уравнението на топлопроводността включващи съответно функционалите: $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = g(a)$, $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = g(a) - g(c)$ за $0 < c < a$ (обобщение на условието на Бицадзе-Самарски (вж. [19])) и $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = \int_0^a g(\xi)d\xi$ (условие на Самарски-Ионкин (вж. [4])) (За краткост на записа сме дали функционалите ненормирани).

5 Двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Следващата стъпка в разглежданията ни са операционните смятания за частните диференциални оператори $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Целта на тези операционни смятания е изучаването на нелокални гранични задачи за уравнения от вида

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = F(x,y) \tag{5.1}$$

в правоъгълна област D от вида $D = [0, a] \times [0, b]$ и с полиноми P и Q.

За да формулираме точния клас задачи, задаваме два линейни функционала $\Phi \in (C^1[0, a])^*$ и $\Psi \in (C^1[0, b])^*$.

Граничните условия са следните:

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(0, y) = \psi_j(y), \quad \Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2j}}{\partial \xi^{2j}} u(\xi, y) \right\} = g_j(y), \quad 0 \leq y \leq b, \tag{5.2}$$

където $j = 0, 1, ..., \deg P - 1$ и $\psi_j(y)$ и $g_j(y)$ са дадени,

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} u(x, 0) = \varphi_k(x), \quad \Psi_\eta \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \eta^{2k}} u(x, \eta) \right\} = f_k(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{5.3}$$

където $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ и $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ са дадени.

Ще дефинираме двумерна конволюция в пространството $C([0, a] \times [0, b])$.

Дефиниция 5.1 (Димовски [8]) Нека $u, v \in C([0, a] \times [0, b])$. Тогава

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x, y) = \frac{1}{4} \Phi_\xi \Psi_\eta \left\{ \int_0^\xi \int_0^\eta h(x, y, \zeta, \gamma) d\zeta d\gamma \right\}, \tag{5.4}$$

където

$$\begin{aligned}
h(x, y, \zeta, \gamma) &= \int_x^\zeta \int_y^\gamma u(\zeta + x - \sigma, \gamma + y - \tau) v(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
&- \int_{-x}^\zeta \int_y^\gamma u(|\zeta - x - \sigma|, \gamma + y - \tau) v(|\sigma|, \tau) \operatorname{sgn}\big((\zeta - x - \sigma)\sigma\big) d\sigma d\tau \\
&- \int_x^\zeta \int_{-y}^\gamma u(\zeta + x - \sigma, |\gamma - y - \tau|) v(\sigma, |\tau|) \operatorname{sgn}\big((\gamma - y - \tau)\tau\big) d\sigma d\tau \\
&+ \int_{-x}^\zeta \int_{-y}^\gamma u(|\zeta - x - \sigma|, |\gamma - y - \tau|) v(|\sigma|, |\tau|) \operatorname{sgn}\big((\zeta - x - \sigma)(\gamma - y - \tau)\sigma\tau\big) d\sigma d\tau.
\end{aligned}$$

Забележка. Директно от тази дефиниция следва, че двумерната конволюция по x и y (5.4) може да бъде представена и по следните начини

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x, y) = -\frac{1}{2} \Phi_\xi \left\{ \int_0^\xi h(x, y, \zeta) d\zeta \right\}, \tag{5.5}$$

или

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x, y) = -\frac{1}{2} \Psi_\eta \left\{ \int_0^\eta k(x, y, \gamma) d\gamma \right\}, \tag{5.6}$$

където

$$h(x, y, \zeta) = \int_x^\zeta u(\zeta + x - \sigma, y) \overset{y}{*} v(\sigma, y) d\sigma - \int_{-x}^\zeta u(|\zeta - x - \sigma|, y) \overset{y}{*} v(|\sigma|, y) \operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta - x - \sigma)\big) d\sigma,$$

$$k(x,y,\gamma) = \int_y^\gamma u(x,\gamma+y-\tau) \overset{x}{*} v(x,\tau)d\tau - \int_{-y}^\zeta u(x,|\gamma-y-\tau|) \overset{x}{*} v(x,|\tau|)\mathrm{sgn}\big(\tau(\gamma-y-\tau)\big)d\tau.$$

Ще опишем основните свойства на двумерната конволюция $\overset{(x,y)}{*}$ дефинирана с (5.4), важни за изграждане на двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Теорема 5.1 *Нека $u, v \in C([0,a]\times[0,b])$. Тогава операцията* (5.4) *е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0,a]\times[0,b])$, за която*

$$L_x L_y u = \{xy\} \overset{(x,y)}{*} u. \tag{5.7}$$

С L_x означаваме десния обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, определен с условията $(L_x u)(0,y) = 0$ и $\Phi_\xi\{L_x u(\xi,y)\} = 0$. Аналогично, с L_y ще означаваме десния обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ определен с условията $(L_y u)(x,0) = 0$ и $\Psi_\eta\{L_y u(x,\eta)\} = 0$.

Важно свойство на тази конволюция е:

Теорема 5.2 *Нека $u_1(x), v_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(y), v_2(y) \in C[0,b]$. Тогава*

$$\{u_1(x)u_2(y)\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1(x)v_2(y)\} = \left(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\right)\left(u_2(y) \overset{y}{*} v_2(y)\right). \tag{5.8}$$

И тук аналогично на разглежданията в предните глави, въвеждаме пръстен на мултипликаторните частни $\mathcal{M}$ в който мултипликаторите L_x и L_y не са делители на нулата. Означаваме техните алгебрични обратни с $S_x = \dfrac{1}{L_x}$ и $S_y = \dfrac{1}{L_y}$.

Операторите S_x и S_y са алгебрически аналози на операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Връзката между S_x, S_y и съответно $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ се дава от следващата теорема.

Теорема 5.3 *Нека $u \in C$ притежава непрекъснати частни производни u_{xx} и u_{yy} в $[0,a]\times[0,b]$. Тогава*

$$u_{xx} = S_x u + S_x\{x\Phi\{1\} - 1\}u(0,y) - [\Phi_\xi\{u(\xi,y)\}]_x, \tag{5.9}$$

$$u_{yy} = S_y u + S_y\{y\Psi\{1\} - 1\}u(x,0) - [\Psi_\eta\{u(x,\eta)\}]_y. \tag{5.10}$$

От тази теорема по индукция са изведени формули за $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(x,t)$ и $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u(x,t)$ $\in C(D)$, изразени съответно чрез S_x^k, $k = 1,2,...$ и S_y^k, $k = 1,2,....$

Връзките (5.9) и (5.10) ни позволяват да алгебризираме граничната задача (5.1) - (5.3), така:

$$
\begin{aligned}
(5.11) \qquad & P(S_x)u + Q(S_y)u = F(x,y) \\
& - \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j \{x\Phi\{1\} - 1\} \psi_{k-j}(y) - S_x^{j-1} g_{k-j}(y) \right) \\
& - \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j \{x\Psi\{1\} - 1\} \varphi_{k-j}(x) - S_y^{j-1} f_{k-j}(x) \right).
\end{aligned}
$$

Дефиниция 5.2 Функция $u \in C^1([0,a]\times[0,b])$ се нарича слабо решение на граничната задача (5.1) - (5.3) ако удовлетворява уравнението (5.11).

Доказано е, че ако една функция със съответната гладкост удовлетворява уравнение (5.11), то тя удовлетворява граничните условия (5.2) - (5.3).

Ако една функция удовлетворява уравнение (5.11) и е достатъчно гладка то тя е решение и на граничната задача (5.1) - (5.3), т.е. е класическо решение на (5.1) - (5.3).

Лема 5.1 Нека $u = u(x,y) \in C^1([0,a]\times[0,b])$, е решение на уравнението (5.11) с непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(x,y) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}} u(x,y) \in C(D)$. Тогава u е класическо решение на граничната задача (5.1) - (5.3).

В сила е теорема, която разглежда въпроса кога елементът $P(S_x)+Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. От факта, че $P(S_x)+Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (5.11) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$. Съответната теорема ще наричаме, теорема за единственост на решението на граничната задача (5.1)- (5.3). Преди да формулираме теоремата да припомним, че $E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \dfrac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \right\}$ е синусовата индикатриса на функционала Φ, а $G(\mu) = \Psi_\eta \left\{ \dfrac{\sin \mu\eta}{\mu} \right\}$ е синусовата индикатриса на функционала Ψ.

Теорема 5.4 *Нека $a \in \operatorname{supp} \Phi$ и $\deg Q \geq 1$. Ако $E(\lambda_m) = 0$, $G(\mu_n) = 0$ и $P(-\lambda_m^2) + Q(-\mu_n^2) \neq 0$, за всички $m,n = 1,2,...$ тогава елементът $P(S_x)+Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.*

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (5.1) - (5.3). Тази теорема ще наричаме разширен принцип на Дюамел.

Теорема 5.5 *Допускаме, че съществува слабо решение $\Omega(x,y)$ на граничната задача (5.1) - (5.3), при специален избор на граничните функции $\psi_j(y) = 0$, $g_j(y) = 0$ за*

$j = 0, 1, ..., \deg P - 1$, $\varphi_k(x) = 0$, $f_k(x) = 0$ за $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ и на дясната част $F(x, y) = xy$ на уравнението (5.1). Тогава функцията

$$u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Omega(x, y) \overset{(x,y)}{*} F(x, y)\right)$$

е решение на граничната задача (5.1) - (5.3) *при достатъчна гладкост на функцията $F(x, y)$ и хомогенни гранични условия.*

Накрая са разгледани няколко примера за уравнението на Лаплас с условие на Дирихле и с условие на Бицадзе - Самарски.

6 Многомерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, ..., \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

В тази глава се разглеждат многомерни конволюции. В по-абстрактна форма многомерни конволюции са разглеждани от Божинов в [5]. На базата на тези конволюции се изгражда операционно смятане, чрез което се изучават нелокални гранични задачи за уравнения от вида:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u = F(x_1, ..., x_n, t), \tag{6.1}$$

в правоъгълна област D от вида $D = [0, a_1] \times ... \times [0, a_n] \times [0, \infty)$ и с полиноми P, Q_j на една променлива и $\deg P \geq 1$, $\deg Q_j \geq 1$ за $j = 1, ..., n$.

За да формулираме точния клас задачи, задаваме $n + 1$ линейни функционала $\chi \in (C[0, \infty))^*$, $\Phi_j \in (C^1[0, a_j])^*$ за $j = 1, ..., n$.

Граничните условия на разглежданите задачи са следните:

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x_1, ..., x_n, \tau)\right\} = f_k(x_1, ..., x_n), \quad k = 0, 1, ..., \deg P - 1, \tag{6.2}$$

$0 \leq x_j \leq a_j$, $j = 1, ..., n$,

$$\frac{\partial^{2p_j}}{\partial x_j^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = g_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t), \tag{6.3}$$

$$\Phi_{j,\xi}\left\{\frac{\partial^{2p_j}}{\partial \xi^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = h_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t), \tag{6.4}$$

$j = 1, ..., n$, $p_j = 0, 1, ..., \deg Q_j - 1$, $0 \leq x_i \leq a_i$, $i = 1, ..., n$ и $i \neq j$, $0 \leq t < \infty$.

Ще дефинираме k-мерна конволюция по променливите $x_1, ..., x_k$.

Дефиниция 6.1 За $u = u(x_1), v = v(x_1) \in C[0, a_1]$ дефинираме конволюционното произведение $u \overset{x_1}{*} v$ чрез (вж. Глава 3)

$$(u \overset{x_1}{*} u)(x_1) = -\frac{1}{2}\Phi_{1,\xi}\left\{\int_0^{\xi} h(x_1, \zeta)d\zeta\right\}, \tag{6.5}$$

където

$$h(x_1, \zeta) = \int_{x_1}^{\zeta} u(\zeta + x_1 - \eta)v(\eta)d\eta - \int_{-x_1}^{\zeta} u(|\zeta - x_1 - \eta|)v(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta - x_1 - \eta))d\eta.$$

Нека $u, v \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$, $k = 2, ..., n$. Тогава

$$u(x_1, ..., x_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} v(x_1, ..., x_k) = -\frac{1}{2}\Phi_{k,\xi}\left\{\int_0^{\xi} h_{k-1}(x_1, ..., x_k, \zeta)d\zeta\right\} \tag{6.6}$$

с

$$h_{k-1}(x_1, ..., x_k, \zeta) = \int_{x_k}^{\zeta} u(x_1, ..., x_{k-1}, \xi + x_k - \eta) \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} v(x_1, ..., x_{k-1}, \eta)d\eta$$

$$-\int_{-x_k}^{\xi} u(x_1, ..., x_{k-1}, |\xi - x_k - \eta|) \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} v(x_1, ..., x_{k-1}, |\eta|)\mathrm{sgn}\eta(\xi - x_k - \eta)d\eta.$$

Тази дефиниция на k-мерна конволюция е аналог на дефиницията на двумерната конволюция $\overset{x,y}{*}$, разгледана в Глава 5.

Дефиниция 6.2 Нека $u, v \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k] \times [0, \infty))$. Тогава

$$\begin{aligned}(u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} v)(x_1, ..., x_k, t)\\ = \chi_\tau\left\{\int_\tau^t u(x_1, ..., x_k, t + \tau - \sigma) \overset{x_1,...,x_k}{*} v(x_1, ..., x_k, \sigma)d\sigma\right\},\end{aligned} \tag{6.7}$$

$k = 1, 2, ..., n$.

Тази дефиниция е k-мерен аналог на дефиницията на двумерната конволюция $\overset{x,t}{*}$ разгледана в Глава 4.

Теорема 6.1 *Нека* $f_1(x_1), g_1(x_1) \in C[0, a_1]$, $\dots$, $f_k(x_k), g_k(x_k) \in C[0, a_k]$ *и* $\varphi(t), \psi(t) \in C[0, \infty)$. *Тогава*

$$(f_1...f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} (g_1...g_k) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k) \tag{6.8}$$

и

$$(f_1...f_k\varphi) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} (g_1...g_k\psi) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k)(\varphi \overset{t}{*} \psi). \tag{6.9}$$

Теорема 6.2 *Нека* $u, v \in C([0,a_1] \times ... \times [0,a_k])$, $k = 1,...,n$. *Тогава операцията*

$$u(x_1,...,x_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} v(x_1,...,x_k),$$

дефинирана с (6.6) *е билинейна, комутативна и асоциативна операция в* $C_k = C([0,a_1] \times ... \times [0,a_k])$, *за която*

$$L_{x_1}...L_{x_k} u(x_1,...,x_k) = \{x_1...x_k\} \overset{x_1,...,x_k}{*} u(x_1,...,x_k). \tag{6.10}$$

Изведен е алгебричен аналог на задача (6.1) - (6.4):

$$[P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})]u = \widetilde{F}, \tag{6.11}$$

където $S_{x_j} = \dfrac{1}{L_{x_j}}$, $s_t = \dfrac{1}{l_t}$ са алгебричните обратни на L_{x_j} и l_t в пръстена на мултипликаторните частни $\mathcal{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$, а $\widetilde{F}$ е известен елемент на пръстена, включващ в себе си граничните функции.

Аналогично на разглежданията в Глави 4 и 5 е разгледан въпросът за единственост на решението на задача (6.1). В сила е теорема която разглежда въпроса кога елементът $P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. От факта, че $P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (6.11) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$. Съответната теорема ще наричаме теорема за единственост на решението на граничната задача (6.1) - (6.4). Да припомним, че с $G(\mu) = \chi_\tau\{e^{\tau\mu}\}$ означаваме експоненциалната индикатриса на функционала χ, а с $E_j(\lambda_j) = \Phi_{j,\xi}\left\{\dfrac{\sin \lambda_j \xi}{\lambda_j}\right\}$, $j = 1,2,...,n$, синусовата индикатриса на функционала Φ_j.

Теорема 6.3 *Нека* $a_j \in \operatorname{supp} \Phi_j$, $j = 1,...,n$, $\deg P \geq 1$, $E(\lambda_j^{(k_j)}) = 0$, $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$ *и* $G(\mu_m) = 0$, $j = 1,2,...,$ $m = 1,2,....$ *Ако* $P(\mu_m) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(-(\lambda_j^{(k_j)})^2\right) \neq 0$, *тогава елементът*

$$P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$$

не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (6.1) - (6.4). Тази теорема ще наричаме разширен принцип на Дюамел.

Теорема 6.4 *Допускаме, че съществува слабо решение* $\Omega(x_1,...,x_n,t)$ *на граничната задача* (6.1) - (6.4), *при специален избор на граничните функции*

$$f_k(x_1,...,x_n) = 0, \quad \text{за} \;\; k = 0,1,...,\deg P - 1,$$

$$g_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)=0, \quad h_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)=0$$

за $p_j = 0,1,...,\deg Q_j - 1,\ j=1,2,...,n$ *и на дясната част* $F(x_1,...,x_n,t)=x_1...x_n$ *на уравнението* (6.1). *Тогава функцията*

$$u(x_1,...,x_n,t)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}...\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x_1,...,x_n,t)\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}F(x_1,...,x_n,t)\right)$$

е решение на граничната задача (6.1) - (6.4) *при достатъчна гладкост на функцията* $F(x_1,...,x_n,t)$ *и хомогенни гранични условия.*

7 Многомерно уравнение на топлопроводността

Получените в общия случай резултати в Глава 6 са приложени към многомерното уравнение на топлопроводността:

$$\begin{aligned}(7.1)\qquad &\frac{\partial}{\partial t}u-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u-...-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u=F(x_1,...,x_n,t),\\ &u(x_1,...,x_n,0)=f(x_1,...,x_n),\\ &u(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},...,x_n,t)=0,\\ &\Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1,...,x_{j-1},\xi,x_{j+1},...,x_n,t)\right\}=h_j(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t),\\ &\quad j=1,2,...,n.\end{aligned}$$

Доказано е, че слабото решение на многомерното уравнение на топлопроводността може да се представи чрез слабите решения на n на брой едномерни уравнения на топлопроводността

$$\begin{aligned}&v_t=v_{x_kx_k}, \quad v(x_k,0)=x_k,\\ &v(0,t)=0, \quad \Phi_{j,\xi}\{v(\xi,t)\}=0, \quad k=1,...,n,\end{aligned}$$

с решения $\Omega_k(x_k,t)$.

Изведено е дюамелово представяне на обобщеното решение на (7.1):

$$u=\frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^2...\partial x_n^2}\left((\Omega_1...\Omega_n)\overset{x_1,...,x_n,t}{*}F+(\Omega_1...\Omega_n)\overset{x_1,...,x_n}{*}f-\sum_{j=1}^{n}\left((\Omega_1...\Omega_n)\overset{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}{*}h_j\right)\right).$$

Получените резултати са приложени към няколко примера за намиране на точно решение на конкретни, нелокални задачи за многомерното уравнение на топлопроводността.

Структура на дисертационния труд

Дисертационният труд включва 7 глави и литература съдържаща 99 заглавия. Текстът е разположен на 185 страници.

Изследванията по дисертацията са проведение в секция "Анализ, геометрия и топология" на Института по математика и информатика при БАН.

В **Първа глава** е направен исторически преглед на развитието на операционното смятане. В отделни подточки са разгледани изследванията на Хевисайд и Микусински. Посочени са основните задачи които са решавани и нерешените проблеми за съответния период.

Във **Втора глава** се разглежда операционното смятане на Димовски от 1991 г. Изследван е резонансният случай, възникващ при нелокални задачи на Коши.

В **Трета глава** аналогично на разглежданията във Втора глава се развива операционно смятане на базата на конволюция, въведена от Димовски през 1976 [9] свързана с квадрата на диференцирането. Частично е разгледан резонансният случай, възникващ при нелокални гранични задачи.

Като се използват конволюциите и техните свойства разгледани във Втора и Трета глава, в **Четвърта глава** се изгражда операционно смятане чиято основа е двумерна конволюция свързана с операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Накрая са разгледани няколко примера. Намерени са точни решения на няколко гранични задачи с локални и нелокални условия за уравнението на топлопроводността.

В **Пета глава** се разглежда двумерна конволюция свързана с операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Изграденото операционно смятане се прилага за намиране на точни решения на няколко гранични задачи, свързани с уравнението на Лаплас.

Шеста глава е обобщение на разглежданията в Четвърта и Пета глава. За основа на изграденото в тази глава операционно смятане служат въведените многомерни конволюции свързани с операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$, ..., $\dfrac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$.

В **Седма глава** е направено приложение на резултатите от Шеста глава към многомерното уравнение на топлопроводността. Показано е, че при локално условие при времевата променлива t, решението на n-мерната задача може да се изрази чрез решението на n едномерни задачи. Накрая са приведени два примера. Единият е с n променливи и налокално условие на Йонкин по всяка от пространствените променливи $x_1, ..., x_2$, а другият е с три пространствени променливи и три различни условия по всяка от променливите, съответно на Дирихле, на Йонкин и на Бицадзе-Самарски.

Благодарности

Авторът изказва сърдечна благодарност и дълбока признателност на научния си консултант **чл. кор. проф. дмн Иван Димовски** за плодотворните обсъждания, всестранната помощ и търпението при подготовката на дисертацията.

Сърдечно благодаря на **проф. дмн Николай Божинов** за консултациите и препоръчаната литература по дисертацията.

Изказвам благодарност на колегите от секция “Анализ, геометрия и топология” към Института по математика и информатика при БАН за подкрепата, отзивчивостта и вниманието което проявиха при работата ми над дисертационния труд.

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

По мнение на автора, основните приноси в дисертационния труд могат да се формулират така:

– Изследван е резонансният случай възникващ при нелокални задачи на Коши при най-общ функионал.

– Изградено е операционно смятане за оператора за квадрата на диференцирането $\dfrac{d^2}{dx^2}$. Частично е изследван резонансният случай при нелокални гранични задачи свързани с оператора за квадрата на диференцирането определен с едно локално условие и едно нелокално.

– Разгледано е обобщение на задачата на Бицадзе - Самарски.

– Въведени са и са изследвани многомерни конволюции свъразани с оператора за диференциране и с оператора за квадрата на диференцирането. Изградено е операционно смятане за частните диференциални оператори $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, ..., \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

– Изразено е решението на n-мерното уравнение на топлопроводността чрез решенията на n едномерни уравнения на топлопроводността.

Апробация на резултатите от дисертацията

Резултатите по темата на дисертацията са докладвани на:

1. MASSEE, International Congress on Mathematics, MICOM 2009, 16 - 20 September, 2009, Ohrid, Republic of Macedonia.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Exact solutions of the Bitsadze - Samarski problem.

2. Пролетната научна сесия на ФМИ "СУ. Св. Кл. Охридски", март 2009 г.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Точно решение на задачата на Битцадзе - Самарски.

3. International Conference "GFTA' 2010" (Geometric Function Theory and Applications), Sofia, 27-31 August 2010, IMI-BAS.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii condition.

4. Конференция на СМБ, Албена - 2010.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem.

5. Конференция на СМБ, Албена - 2010.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Nonlocal boundary value problems for two-dimensional potential equation on a rectangle.

6. Конференция на СМБ, Боровец - 2011.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Three-dimensional operational calculi for nonlocal evolution boundary value problems.

7. International Conference "Transform Methods & Special Functions '2011", 20 - 23 October 2011, Sofia - Bulgaria.

I. Dimovski, Yu. Tsankov, Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equation.

8. Отчетна научна сесия на ИМИ-БАН, Секция Анализ, Геометрия и Топология (2011).

Ю. Цанков, Резонансни трептения на правоъгълна мембрана при нелокално гранично условие.

9. Конференция на СМБ, Боровец - 2012.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Exact solutions of nonlocal boundary value problems for one- and two-dimensional heat equation.

10. 18th International Conference on Applications of Computer Algebra-ACA 2012, June 25 - 28, Sofia, Bulgaria.

Yulian Tsankov, Exact Solution of Local and Nonlocal BVPs for the Laplace Equation in a Rectangle.

11. MechAM2012-Contemporary Problems of Mechanics and Applied Mathematics, September 3-6, 2012, Novi Sad, Serbia.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Operational calculi for multivariate evolution boundary value problems.

12. "Complex Analysis and Applications '13", International Memorial Conference for the 100th Anniversary of Acad. Ljubomir Iliev, 31 Oct.-2 Nov. 2013.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Resonance Cases for Nonlocal Cauchy Problems.

Следващите съвместни доклади са изнесени от проф. Иван Димовски:

1. Семинар "Алгебра и логика" съвместно заседание с Общия семинар по анализ, ИМИ - БАН, 17 юни 2011 г.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Пръстени от мултипликаторни частни, свързани с многомерни гранични задачи.

2. AMEE '11, 37th International Conference, 8-13 June 2011, Sozopol - Bulgaria.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Multi-dimensional Operational Calculi for Linear Nonlocal Boundary Value Problems.

Публикации по темата на дисертацията

Номерацията на статиите съответства на номерацията им в литературата към този автореферата.

[10] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equations. *Mathematica Balkanica (New Ser.)*, Vol. 26, Fasc. 1-2, 2012, pp. 89-102.

[11] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Operational calculi for multidimensional nonlocal evolution boundary value problems. *Proc. of the 37th Internat. Conf. "Applications of*

Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11)", In: *AIP Conference Proceedings*, Volume 1410, 2011, pp. 167-180.

[12] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 39 Spring Conf. UBM, 2010, pp. 114-122.

[18] Tsankov Y. T. Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii constraints. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* Volume 13, No 4, 2010, pp. 435-446.

[19] Tsankov Y. T. Exact solution of local and nonlocal BVPs for the Laplace equation in a rectangle, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Vol. 8372, Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 190-200.

[20] Tsankov Y. T. Explicit solution of a nonlocal boundary value problem for heat equation, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences.* Vol. 66, No 7, 2013, pp. 941-950.

От тези 6 публикации: 3 са в рецензирани периодични списания, индексирани в световната мрежа, едно от които е с импакт-фактор (ДБАН, ИФ = 0.211 за 2012); 2 са в рецензирани сборници на международни конференции (индексирани в Scopus и имащи SJR-рангове, съответно в сериите: American Institute of Physics, SJR = 0.161 (2012); Lecture Notes in Computer Sciences, SJR = 0.33 (2012)); 1 - в сборник (рецензиран) с трудове на СМБ.

Всичките публикации са на английски език, две от тях са самостоятелни.

Редица от резултатите по дисертцаионния труд и от изброените публикации са залегнали в работните програми на няколко научно-изследователски проекта, в които докторантът е участвал в периода на докторантурата: един проект по линия на ФНИ - МОМН (ДИД 02-25/ 2009-2013), един - по двустранно сътрудничество между БАН и Сръбската академия на науките и изкуствата (2012-2014), и няколко НИП към ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски" : договор "Геометрични структури на инцидентност" № 192 от 2010; № 174 от 2011; № 109 от 2012; № 100 от 2013; 2014 (още няма номер).

Литература

[1] Бицадзе А. В., *Некоторые классы уравнений в частных производных.* Москва, "Наука", 1981. 11

[2] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *ДАН СССР* , **185**, 4, 1969, с. 739-741. 11

[3] Димовски И. Х. Нелокальные операционные исчисления, *Труды Математического института РАН*, (1994), 203, 58 - 73. 5

[4] Йонкин Н. И. Численное решение неклассических краевых задач для уравнения теплопроводности, *Дифференциальные уравнения* т. 13, 2, 1977, с. 294-304. 11, 13

[5] Bozhinov N. S. *Convolutional representations of commutants and multipliers*, Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1988. 17

[6] Bozhinov N. S. On theorems of uniqueness and completeness of expansion on eigen and associated eigenfunctions of the nonlocal Sturm-Liouville operator on a finite interval. *Diferenzialnye Uravnenya*, **26**, 5, 1990, pp. 741-453 (Russian). 13

[7] Dimovski I. H. *Convolutional Calculus.* Kluwer, Dordrecht. 1990. 5, 8

[8] Dimovski I. H., Nonlocal boundary value problems. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 38 Spring Conf. UBM, 2009, pp. 31-40. 11, 14

[9] Dimovski I. H. Two new convolutions for linear right inverse operators of $\frac{d^2}{dx^2}$. *Compt. rend. Acad bulg. Sci.* **29**, No 1, 1976, pp. 25-28. 21

[10] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equations. *Mathematica Balkanica (New Ser.)*, Vol. 26, Fasc. 1-2, 2012, pp. 89-102. 23

[11] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Operational calculi for multidimensional nonlocal evolution boundary value problems. *Proc. of the 37th Internat. Conf. "Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11)"*, In: *AIP Conference Proceedings*, Volume 1410, 2011, pp. 167-180. 23

[12] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 39 Spring Conf. UBM, 2010, pp. 114-122. 24

[13] Lang S. *Algebra.* Addison Wesley, 1969. 6

[14] Larsen R. *An Iintroduction to the Theory of Multipliers.* Springer, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1971. 6

[15] Микусинский Я. *Операционное исчисление*, Москва, Иностранная литература, 1956. 3

[16] Skubachevskii, A. L., The elliptic problems of A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, *Soviet Math. Dokl.* **30**, 2, 1984. 11

[17] Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions, *Proc. of London Math. Soc.*, 25, 1926, pp. 283-302. 3

[18] Tsankov Y. T. Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii constraints. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. Volume 13, No 4, 2010, pp. 435-446. 24

[19] Tsankov Y. T. Exact solution of local and nonlocal BVPs for the Laplace equation in a rectangle, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Vol. 8372, Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 190-200. 11, 13, 24

[20] Tsankov Y. T. Explicit solution of a nonlocal boundary value problem for heat equation, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, Vol. 66, No 7, 2013, pp. 941-950. 24