БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Юлиан Цанков Цанков

ОПЕРАЦИОННИ СМЯТАНИЯ ЗА ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен

"Доктор"

в професионално направление 4.5 "Математика"

по научна специалност 01.01.04 "Математически анализ"

Научен консултант: чл.-кор. проф. д.м.н. Иван Димовски

София, 2014 г.

Съдържание

1 Увод. Основни моменти в историческото развитие 4

1.1 Операционното смятане до Хевисайд . . . 4
1.2 Изследвания на Хевисайд . . . 6
1.3 Операционното смятане след Хевисайд до Микусински . . . 8
1.4 Поле на Микусински . . . 10
1.5 Развитие на операционното смятане след Микусински . . . 11

2 Операционни смятания за нелокални гранични задачи за оператора на диференцирането 15

2.1 Увод . . . 15
2.2 Конволюция на произволен десен обратен на оператора за диференцирането . . . 17
2.2.1 Проекционни свойства на конволюцията $\overset{t}{*}$ . . . 19
2.3 Директнен алгебричен подход . . . 22
2.3.1 Пръстен на конволюционните частни . . . 22
2.3.2 Пръстен на мултипликаторните частни . . . 28
2.4 Периодични и средно-периодични решения . . . 30
2.5 Резонансен случай . . . 33
2.5.1 Примери . . . 42
2.6 Конволюция при заглаждащ функционал . . . 51
2.6.1 Резонансен случай при заглаждащ функционал . . . 54

3 Операционно смятане за нелокални гранични задачи от първи род за квадрата на диференцирането 60

3.1 Конволюция на десния обратен оператор . . . 62
3.1.1 Проекционни свойства на конволюцията $\overset{x}{*}$ . . . 67
3.2 Директен алгебричен подход . . . 70
3.2.1 Пръстен на мултипликаторните частни . . . 70
3.3 Резонансен случай . . . 79
3.4 Примери . . . 85

4 Двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 91

4.1 Увод . . . 91
4.2 Двумерна конволюция . . . 92
4.3 Мултипликатори на $(C([0,a]\times[0,\infty)), \overset{(x,t)}{*})$ . . . 95
4.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x,t)}{*})$ . . . 97
4.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (4.1) - (4.3) . . . 99
4.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (4.1) - (4.3). 110
4.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (4.1) - (4.3). Разширен принцип на Дюамел. . . . 113
4.8 Примери . . . 115

5 Двумерни операционни смятания за операторите $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 119
5.1 Увод 119
5.2 Двумерна конволюция 120
5.3 Мултипликатори на $(C([0,a]\times[0,b]), \overset{(x,y)}{*})$ 124
5.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x,y)}{*})$ 126
5.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (5.1) - (5.3) 128
5.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (5.1) - (5.3). 137
5.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (5.1) - (5.3). Разширен принцип на Дюамел. 140
5.8 Примери 141

6 Многомерни операционни смятания 146
6.1 Увод 146
6.2 Многомерни конволюции 147
6.3 Мултипликатори на $(C([0,a_1]\times ... \times[0,a_n]\times[0,\infty)), \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ 154
6.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ 156
6.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (6.1) - (6.4) 159
6.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (6.1) - (6.4) 163
6.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (6.1) - (6.4). Разширен принцип на Дюамел. 168

7 Многомерно уравнение на топлопроводността 170
7.1 Примери 177

8 Авторска справка и апробация на резултатите от дисертацията 180

Литература 184

1 Увод. Основни моменти в историческото развитие

Операционното смятане традиционно се свързва с имената на Оливър Хевисайд и Ян Микусински. Разбира се принос в развитието му имат и много други учени. Въпреки това, условно може да разделим периодите на развитие на операционното смятане: до Хевисайд, след Хевисайд и до Микусински и след Микусински.

1.1 Операционното смятане до Хевисайд

Елементи на операционно смятане могат да се намерят още в работите на класиците на математическия анализ Лайбниц, Лагранж и Коши. Лайбниц е разбирал n-кратното диференциране като n-та степен на оператора на диференцирането. Той е знаел [73], че формулата за диференциране на произведение на функции (известна днес като формула на Лайбниц)

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

за n-кратно диференциране на произведението на две функции е аналогична на формулата за Нютоновия бином

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k}.$$

Лагранж развил тази аналогия в стройна система за алгоритмично смятане (1774) [70]. Забелязал, че ако във формулата на Тейлър се замени k-кратното диференциране с повдигане на степен k ще се получи формално реда на експонентата $e^{h\frac{d}{dx}}$

$$u(x+h) - u(x) = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) u.$$

Но Лагранж не отделя символите (означенията) на операторите от обектите върху които действат. Това неудобство било отстранено от Л. Арбогаст (1759-1803). Той разглежда символа за диференциране като фиктивна величина към която може да се прилагат формалните правила на алгебрата [30]. Символните формули на Лагранж придобили форма на операторни равенства. Арбогаст разбирал тези операторни равенства като равенства между резултата от действието на операторите върху произволни числови функции.

През 1827 г. Коши в [41] разглежда степенни редове от оператори в това число и по отрицателни степени на оператора на диференцирането.

Законността на операционното смятане (наричано тогава символно смятане) разглеждал Сервоа (1768 - 1847) в [87] през 1814-1815. Той се опитва да отговори на въпроса защо с класическите оператори може да се действа като с числа. Сервоа виждал причината за тази връзка в обстоятелството, че в множеството на операторите и множеството на числата се изпълняват едни и същи закони: дистрибутивност, комутативност (тези термини са въведени от Сервоа) и асоциативност (терминът е въведен по-късно от Хамилтън). Тази идея за общи правила на операциите в различни множества от обекти, числа или оператори, била развита в трудовете на много английски математици от XIX век.

Най-обширен и разработен раздел на операционното смятане през XIX е свързан с опитите за символно решаване на диференциални уравнения. Стремежът за намиране на символни методи за интегриране на обикновени линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти определя развитието на операционното смятане през XIX век.

Коши посочва [41], че първите символни методи за решаване на линейни диференциални уравнения са предложени от Брисон в непубликуван мемоар от 1808 г. ([1], стр. 120 и [28] стр. 12). Коши усъвършенства означенията на Брисон и записва линейното диференциално уравнение с постоянни коефициенти

$$a_0 y^{(n)} + a_1 a^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n = f(x) \tag{1.1}$$

в символна (операторна) форма

$$F(D)y = f(x),$$

където D е операторът за диференциране по x, а $F(D)$ е полином на D [41]. Това означение се е запазило в до днес. В случая когато $F(\lambda)$ има прости корени r_k, $k = 1, ..., n$, Коши дава решението във вида:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x)}{(D - r_k)F'(r_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{F'(r_k)}.$$

Изразът $\dfrac{f(x)}{(D - r_k)} = y_k$, Коши определя като решение на уравнението $f(x) = (D - r_k)y_k$. Той разглежда и случая на кратни корени на $F(\lambda)$.

Голям принос за развитието на символните методи за решаването на диференциални уравнения има английският математик Грегъри (1813 -1844) ([62], [63], [64]). На Грегъри е била известна работата на Коши [41] от 1827 г., но по негови думи той избрал друг път, по негово предположение, близък до незапазената работа на Брисон. Грегъри намерил решението на (1.1) във вида

$$y = \{F(D)\}^{-1} f(x) + \{F(D)\}^{-1} 0,$$

където първото събираемо означава частно решение на нехомогенното уравнение а второто - общо решение на хомогенното уравнение. Тези решения той намира като разложения на функциите от оператора в редове по степените на оператора за диференциране.

В 1841 г. излязла работата на Бул [32], в която се разглежда решението на (1.1) и се посочва начин за разлагането на $\{F(D)\}^{-1}$ на прости дроби при кратни корени на $F(x)$. Изглежда, както се отбелязва в ([1], стр. 125), Бул не е знаел за работата на Коши [41]. Той обърнал особено внимание на случаите когато може да се намери решение без да се интегрира. Бул разглежда и диференциални уравнения с променливи коефициенти.

През 1862 г. Вашченко-Захарченко във [5] разглежда последователно линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти, системи диференциални уравнения с постоянни коефициенти и линейни диференциални уравнения с променливи коефициенти. Разглежда задача (1.1) при кратни корени на $F(\lambda)$. Цитира Грегъри, Бул и др. Посочва, че основите на символното смятане са положени от Грегъри.

В този период Летников [20] се опитва да намери общ метод за интегриране на диференциални уравнения. Както се посочва в ([28], стр. 16) Летников е разбирал, че за онова време задачата е неизпълнима и е насочил усилията си към усъвършенстване на съществуващите частни методи. Да отбележим че Летников свързва символните методи пряко с теорията на диференцирането от дробен ред.

По-различен подход за символно намиране на решения на диференциални уравнения предлага последният жив ученик на Коши Габриел Олтрамаре (1816-1906) в книгата си [81] от 1899 г. и в статията си [82] също от 1899 г. Той разглежда функциите като зададени в ред по експоненти и използва това представяне за търсене на символни решения на линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Въпреки получените резултати към края на XIX век пред операционното смятане стоели много неразрешени проблеми свързани с обосноваването му и областта на приложимост. Нямало съществени резултати при прилагането на операционното смятане към линейни диференциални уравнения с променливи коефициенти и към частни диференциални уравнения.

Преди да разгледаме приноса на Хевисайд към операционното смятане ще отбележим, че именно работите на Хевисайд са дали основание на Е. Уиттекър да каже: ”... трябва да считаме операционното смятане наред с откритието от Поанкаре на автоморфните функции и откритието на Ричи на тензорното смятане за един от трите най-важни успехи на математиката през последната четвъртина на деветнадесети век” [80].

1.2 Изследвания на Хевисайд

Оливър Хевисайд (1850 - 1925), разработва символно смятане носещо сега неговото име. За разлика от своите предшественици Хевисайд разглежда диференциални уравнения със зададени начални и гранични условия, а не търси общи решения. Въвежда понятието алгебризация на диференциално уравнение. Популярността на смятането на Хевисайд се дължи и на факта, че Хевисайд го прилага към задачи от практиката - бурно развиващата се електротехника и трансокеански кабели и намира експлицитни решения на много актуални за времето задачи.

Смятането на Хевисайд е подобно на операционните методи на пионерите Коши, Брисон, Грегъри, Бул, Вашченко-Захарченко. Но в литературата се посочва ([1], стр. 127), че е трудно да се каже доколко Хевисайд е бил запознат с техните резултати. Знае се, че той е изучавал работите на Фурие и е бил запознат с работата на Бул [33].

Смятането си Хевисайд развива последователно и описва в [67] и [68]. Той въвежда формално диференциалния оператор $p = \dfrac{d}{dt}$ и работи с него като с множител в изрази от вида $pf(t) = \dfrac{d}{dt}f(t)$. Едно от най-важните достижения на Хевисайд е въвеждането на оператора за интегриране p^{-1}, определен по следният начин

$$p^{-1}f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Хевисайд записва диференциалните уравнения в операторна форма $Z(p)C = E(t)$ и решението му във вида:

$$C = \frac{E(t)}{Z(p)}, \tag{1.2}$$

където $Z(p)$ е функция на оператора на диференцирането $p = \frac{d}{dt}$. Той забелязал, че може да се премине от операторно решение към обикновена функция на t без диференциране или интегриране. Например в случая $C(0) = 0$, $E = const$ (1.2) се представя с готовата формула

$$C(t) = \frac{E}{Z(0)} + E\sum_k \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k Z'(\lambda_k)},$$

където сумата се взима по всички корени на уравнението $Z(\lambda) = 0$. Разбира се, за верността на формулата трябва всички корени на многочлена да са прости и различни от 0. Ако операторното решение има вида $C = \frac{Y(p)}{Z(p)}$, където $Y(p)$ и $Z(p)$ са полиноми, решението като функция на t, се представя като:

$$C(t) = \frac{Y(0)}{Z(0)} + \sum_k \frac{Y(\lambda_k)e^{\lambda_k t}}{\lambda_k Z'(\lambda_k)}.$$

Хевисайд прилагал тези методи и за системи линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти както и за частни диференциални уравнения.

Част от смятането си Хевисайд използвал без каквато и да е обосновка и понякога получава неверни резултати например [28] с операторите p и p^{-1} не може да се работи като с числа понеже в общия случай те не комутират:

$$pp^{-1}f(t) = \frac{d}{dt}p^{-1}f(t) = f(t),$$

$$p^{-1}pf(t) = p^{-1}\frac{d}{dt}f(t) = \int_0^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(0).$$

Фактически p и p^{-1} комутират, само когато $f(0) = 0$.

Нарушавайки хронологичната последователност на изложението ще отбележим, че обосноваване на смятането на Хевисайд е постигнато през 1926 г. от Карсон чрез използване трансформацията на Лаплас. В том 3 на Електромагнитна теория (1912 г.) ([68], т. 3, стр. 236) Хевисайд използва трансформацията на Лаплас. Щокало ([28], стр. 23) отбелязва, че Хевисайд е можел да обоснове операционното смятане чрез трансформацията на Лаплас.

Въпреки липсата на обосноваване и яснота на областта на приложимост смятането на Хевисайд било приемано от инженерите по това време защото давало експлицитни решения на използваните диференциални уравнения.

1.3 Операционното смятане след Хевисайд до Микусински

От теоретичен интерес, а и поради голямото разпространение на смятането на Хевисайд в началото на XX век, много математици полагат усилия да обосноват строго операционното смятане и да посочат по-точно областта му на приложимост. Както се посочва в ([43], стр. 36) в началото на XX има четири метода за обосноваване на операционното смятане. Три от тях използват съответно интегралната трансформацията на Фурие, интегриране в комплексната област и лапласовата трансформация. Четвъртият метод се основава на директното използване на формални оператори.

Един от първите опити за обосноваване на операционното смятане (смятането на Хевисайд) е на Джовани Джорджи (1871-1950) [60], [61] в две статии от 1904 и 1905 година. Основна цел в тези работи е намирането на връзка между операционното смятане и интегралната трансформацията на Фурие. Но както се отбелязва в ([28], стр. 24) не били постигнати съществени резултати и статиите на Джорджи не били забелязани. Бромуич (1875 - 1929) [39] използва трансформацията

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)e^{pt}dt,$$

където C е окръжност в комплексната равнина, за да получи резултати в операционното смятане.

Пълно обосноваване на операционното смятане постига Карсон (1886 - 1940) през 1926 г. в [40], като използва трансформацията на Лаплас

$$\int_0^\infty f(t)e^{\alpha t}dt.$$

Използването на трансформацията на Лаплас налага ограничение върху растежа на функциите:

$$|f(t)| < Ce^{\alpha t}, \quad t \to \infty.$$

Това допълнително ограничение не е свързано с конкретните задачи или с техниката на операционното смятане. За приложенията в инженерната практика това ограничение изглежда не е съществено но намалява математическата обоснованост на операционното смятане.

Марч (1878 - 1953) в [75] разглежда операционното смятане с контурни интеграли. В работата си [75] той цитира статии на Бромуич и Карсон.

По-нататък в много трудове се разглежда прилагането, разширяване използването и обосноваването на операционното смятане, предимно с лапласовата трансформация. Например Ван дер Пол и Бремер в [95] разглеждат двустранната трансформация на Лаплас във връзка с операционното смятане. В книгата на Стефънс [90] е описан подробно методът на Хевисайд. Разглежда се разлагането като елементарни дроби на рационални функции от оператора на диференциране. Има много примери на задачи за диференциални уравнение решени чрез операционното смятане. Не се разглежда трансформацията на Лаплас.

Джефри в [69] разглежда използването на операционното смятане за намиране на решения на задачи свързани с основните уравнения на математическата физика.

Използва контурни интеграли за обосноваване на операционното смятане. Подробно обосноваване на операционното изчисление с контурни интеграли е разгледано и от Ефрос и Данилевски в [29]. В книгата на Карлслоу и Егер [15] е описано смятането на Хевисайд и неговите приложения чрез трансформацията на Лаплас. Разгледан е широк кръг диференциални уравнения. Има подробен исторически обзор за развитието и обосноваването на смятането на Хевисайд. Много ясно и кратко е описанието на Шостак [27] на използването на лапласовата трансформация за решаване на диференциални уравнения.

На български език описание на операционното смятане от този период правят Брадистилов и Бояджиев. В [4] се разглежда операционното смятане в светлината на лапласовата трансформация.

Преди да разгледаме приноса на Микусински за развитието на операционното смятане и нарушавайки хронологията на събитията ще направим едно отклонение. Методи и идеи позволяващи да се обоснове смятането на Хевисайд, без да се използва Лапласовата трансформация по чисто алгебричен начин, еквивалентен на начина на Микусински описан през 1952 г., са възникнали още през 1924 г.

Накратко методът е следния: През 1924 Волтера за да решава уравнения наречени сега Волтерови, разглежда в [98] обобщение на действието умножаване на матрици (ред по стълб) като вместо матрици разглежда функции на две променливи. Съответната операция е

$$h(x, y) = km = \int_x^y k(x, \xi)m(\xi, y)d\xi.$$

Ако за две функции е изпълнено $km = mk$, тогава k и m се наричат пермутиращи. Волтера доказва, че ако две функции $k = k(x, y)$ и $m = m(x, y)$ са пермутиращи с единицата те са от вида $k(x, y) = k(x - y)$ и $m(x, y) = m(x - y)$ и са пермутиращи и помежду си и е изпълнено

$$km = \int_x^y k(\xi - x)m(y - \xi)d\xi = \int_0^x k(x - t)m(t)dt.$$

По нататък се разглежда пръстена на пермутиращите функции с единицата с операциите събиране на функции и вместо "стандартното" умножение композиция. Волтера въвежда и композиционни частни, т.е. разширява пръстена на пермутиращите функции до поле от частни. Не разглежда съществуването или не на делители на нулата. В публикацията [98] Волтера не коментира, че с тази конструкция напълно може да се обоснове смятането на Хевисайд. Това е направено едва през 1943. В публикацията от 1943 г. Пере посочва в [83], че разгледаният метод може да служи за обосноваване на смятането на Хевисайд. Пълно описание на този метод може да се намери в [6] (цитираната книга е превод на руски, оригналът е от 1924 г.).

Още веднъж изпреварвайки хронологията ще отбележим, че чрез смяна на променливите се вижда, че композицията

$$km = \int_x^y k(\xi - x)m(y - \xi)d\xi$$

на две пермутиращи функции с единицата е равна на тяхната Дюамелов конволюция т.е. пръстенът на Микусински въведен през 1952 г. в [22] е изоморфен на пръстена на пермутиращите функции с единицата разглеждан от Волтера през 1924 г.

1.4 Поле на Микусински

Директно алгебрично обосноваване на смятането на Хевисайд постига Микусински. Той прави чисто алгебрично описание и обосноваване на операционното смятане. Микусински, в известен смисъл, прави радикално връщане към идеите на Хевисайд, но на нова математическа основа с ясно дефинирана област на приложимост без да използва трансформацията на Лаплас и произтичащите от нея ограничения.

За първи път описание на метода е направено през 1952 г. на полски език (вж. [22] на Руски език и [77] на Англиски език).

Методът използван от Микусински [77] се основава върху идеите на съвременната абстрактна алгебра. Разглежда пространството C на непрекъснатите функции в интервала $[0, \infty)$ като алгебра с операциите събиране "+" : $f(t) + g(t)$ и вместо "класическото" умножение операцията конволюция

$$\{f\}\{g\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Операцията $*$ е комутативна, асоциативна и дистрибутивна относно събирането. Според Микусински изключително важно е свойството, че $*$ няма делители на нулата. Това е доказано от Титчмарш през 1926 г. (вж. [91] и [25]). С тези операции пространството на непрекъснатите функции в $[0, \infty)$ е комутативен пръстен без делители на нулата т.е. е област на цялостност. По същия начин както от целите числа се получава полето на рационалните числа, така и от пространството C на непрекъснатите функции в интервала $[0, \infty)$ се получава поле на частни M. Това поле на частни M се нарича поле на Микусински. Оказва се, че "операторите" p и p^{-1} на Хевисайд може да се изтълкуват като елементи на M.

Както посочва Ердей в [13] елементите на полето на Микусински M са абстрактни обекти. Но на някои от тях съответстват числа, на други непрекъснати или прекъснати функции, докато на трети съответстват операторите на диференциране и интегриране.

Ако с h с означим единичната функция на Хевисайд ограничена за $t \in [0, \infty)$, на h съответства оператора за интегриране т.е.

$$\{h\}\{f\} = (1 * f)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

В M може да се дефинира h^n и h^{-n}. Означаваме $s = h^{-1}$. Микусински доказва, че

$$sf = f' + f(0), \tag{1.3}$$

$$s^n f = f^{(n)} + f^{(n-1)}(0)s + f^{(n-2)}(0)s^2 + ... + f(0)s^{n-1}. \tag{1.4}$$

На всяко обикновено диференциално уравнение (1.1) с постоянни коефициенти се съпоставя операторно уравнение

$$P(s)y = Q(s) + f,$$

където $P(s)$ и $Q(s)$ са полиноми на s. Следователно

$$y = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{f}{P(s)}.$$

Микусински дава тълкуване на последния израз като функция.

Ще разгледаме един пример ([22], стр. 46). Чрез трансформацията на Лаплас не може да се реши задачата

$$x' - x = (2t-1)e^{t^2}, \qquad x(0) = 2. \tag{1.5}$$

По метода на Микусински от (1.3) и началното условие $x(0) = 2$ се получава:

$$x' = sx - 2$$

и следователно обикновеното диференциално уравнение (1.5) заедно с началното условие се преобразува в едно алгебрично уравнение

$$sx - x = 2 + f,$$

където $f = \{(2t-1)e^{t^2}\}$, в полето на Микусунски. Решението е:

$$x = \frac{2+f}{s-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1}f = \{2e^t\} + \{e^t\}\{(2t-1)e^{t^2}\} =$$

$$= \left\{2e^t + \int_0^t e^{t-\tau}(2\tau - 1)e^{\tau^2}d\tau\right\} = \left\{e^t + e^{t^2}\right\}.$$

Тук с $\{g(t)\}$ се означава функцията $g(t)$ като елемент от полето на Микусински, а само с $g(t)$ стойността на функцията $g(t)$ в t.

Микусински разширява методите си и за функции на много променливи. Той и Рил-Нарджевски доказват обобщението на теоремата на Титчмарш [91] за много променливи през 1953 в [79], [78]. Тази теорема е разгледана и в [76].

За да се разшири метода за частни диференциални уравнения Микусински въвежда в полето M два вида сходимости. Както отбелязва Прудников и двата вида сходимост са полезни но нито една от тях не е съгласувана с естествената топология в поето на Микусински ([85], стр. 244) и това създава проблеми. Има проблеми, нерешени и до сега с доказване на основната теорема на диференциалното и интегрално смятане, а именно, че ако производната на една функция на числов аргумент със стойности в полето на Микусински е нула то функцията е константа.

Подробно описание на смятането на Микусински освен в книгата на Микусински [22] може да се намери в книгите на Йосида [100], Ердей [13] (преведена на български) и Мур [80].

В статията си Белерт [31] описва смятането на Хевисайд с алгебрични операции върху оператори. Не използва Лаплас и не използва пряко методите на Микусински.

1.5 Развитие на операционното смятане след Микусински

След Микусински развитието на операционното смятане се насочва към обикновени диференциални уравнения с променливи коефициенти в краен, полубезкраен и безкраен интервал, по-специално към оператори от Беселов тип, към частни диференциални уравнения с гранични и начални условия като някои от условията биха могли да са нелокални, към задачи с обобщени функции (разпределения).

Първата статия за разпространение на операционното изчисление за гранични задачи е на Рашевский [23] в 1953 г. Може би най-съществено развитие в този период на операционното смятане за частни диференциални уравнения прави Гутерман в [66] 1969 г. Позовавайки се на методите на Микусински, Гутерман разработва метод за решаване на линейни частни диференциални уравнения с постоянни коефициенти с начални условия. Вместо Дюамеловата конволюция за функции на една променлива използва нейния аналог за функции на n променливи:

$$
\begin{aligned}
(1.6) \qquad w(x_1, ..., x_n) &= u(x_1, ..., x_n) \overset{x_1}{*} ... \overset{x_n}{*} v(x_1, ..., x_n) = \\
&= \int_0^{x_1} ... \int_0^{x_n} u(x_1 - \xi_1, ..., x_n - \xi_n) v(\xi_1, ..., \xi_n) d\xi_1 ... d\xi_n.
\end{aligned}
$$

Подобно на Микусински, Гутерман въвежда конволюционни частни но за функции на много променливи. Конволюционните частни нарича оператори.

Посочва, че за прилагането на операционните методи към частни диференциални уравнения с гранични условия трябва качествено нов подход.

Многобройни изследвания в областта на операционното смятане правят Диткин и Прудников. В [12] те построяват операционното смятане следвайки Микусински но вместо Дюамеловата конволюция

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

използват

$$f(t) * g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

При така определено произведение няма нужда да се прави разлика между числата и функциите константи. Разширява се областта на действие на трансформацията на Лаплас върху някои оператори на Микусински т.е. върху някои частни в полето на Микусински. Въвеждат се понятията оператор преобразуем по Лаплас и обобщено преобразование на Лаплас (вж. Диткин и Прудников [12] , стр. 103).

Аналогично на операционното смятане на Микусунски за оператора на диференцирането $\frac{d}{dt}$ в [12] се изгражда операционно смятане за операторът $\frac{d}{dt} t \frac{d}{dt}$ като се въвежда нова конволюция ([12], стр. 137).

В [42] Чърчил разглежда операционното смятане като използва различни интегрални трансформации. Освен Лапласовата трансформация подробно разглежда и крайни интегрални трансформации, например крайните синус и косинус трансформации. Разглежда основните им свойства и приложението им за решаване на гранични задачи за частни диференциални уравнения. Решенията получава във вид на ред. Не цитира и не използва методите на Микусински.

Метод за решаване на задачи за частни диференциални уравнения използващ операционното смятане разглежда Василаш. Операционно смятане за функции на две променливи описва в [96]. Изграждане на операционно смятане за разпределения и обобщени функции описва в [97].

Развитие на операционното смятане за обобщени функции на една и много променливи прави Малаховская в [21]. Но изследванията са много абстрактни. Много примери свързани с основните диференциални уравнения на математическата физика (уравнението на топлопроводността, вълновото уравнение) има в част 2 на [21]. В литературата на част 1 има цитирани много работи на Василаш.

Да споменем, че обосноваването на операционното смятане или смятането на Хевисайд не е сред 23-те проблема на Хилберт. Но в книгата на Курант и Хилберт [18] се разглежда подробно и се обосновава операционното смятане с контурни интеграли.

В България има много изследвания в областа на операционното смятане.

Както споменахме по-горе през 1964 г. Брадистилов и Бояджиев издават книга [4] в която се разглежда операционното смятане развито от Микусински чрез лапласовата трансформация.

Както е посочено в [9] въпреки многото изследвания областта на приложимост на класическите операционни методи на излиза съществено извън кръга на началните задачи за линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Опитите за разработване на операционно изчисление приложимо и към гранични задачи или задачи с променливи коефициенти са несистематични и малко на брой.

Димовски систематизира и обобщава съществуващите операционни смятания в единна алгебрична схема и реализира тази схема в нови ситуации. Това е направено в [45]. Ключова роля в тези изследвания играе понятието *конволюциа на линеен оператор* въведено от Димовски през 1968 г. [44].

Една билинейна, комутативна и асоциативна операция $*: X \times X \to X$ се нарича конволюция на линейния оператор $L : X \to X$, изобразяващ линейното пространство X в себе си, ако $L(f * g) = (Lf) * g$ за всички $f, g \in X$.

Намирането на конволюция за даден линеен оператор в явна форма е нетривиална задача. Димовски въвежда метод за решаване на тази задача. Това е методът на подобието.

Обобщение на конволюцията на Дюамел, за първи път е намерена от Димовски през 1974 в [48]. Тази операция е преоткрита през 1976 г. от Л. Берг [74]. Това е операцията

$$(f \overset{t}{*} g)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t + \tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma \right\}, \tag{1.7}$$

където χ е произволен линеен функционал. Доказано е, че операцията е конволюция на произволен десен обратен оператор

$$lf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + \chi_\tau\{f(\tau)\}$$

на оператора на диференциране $\dfrac{d}{dt}$.

Димовски и Гроздев в [8] разглеждат разширения на операционното смятане и за периодични решения на обикновени диференциални уравнения. Гроздев в кандидатската си дисертация [7] прави специално приложение на разработеното операционно смятане.

Компютърна реализация на аналог на смятането на Хевисайд - Микусински и негови разширения е реализирана от Спиридонова. Тя е реализирала пакети на система Mathematica които използват операционното смятане. Пакетите са описани подробно в докторската дисертация на Спиридонова [24], а резултатите от използването им например в [89]. Тези реализации показват и ползата от точните решения за числени пресмятания. Разглежда резонансен случай.

Димовски изгражда операционно смятане за квадрата на диференцирането $\dfrac{d^2}{dx^2}$ в [49] аналогично на смятането на Микусински за оператора $\dfrac{d}{dt}$. Основа на това смятане е намерената от Димовски конволюция за произволен десен обратен оператор на квадрата на диференцирането определен с едно локално и едно нелокално условие от вида $\Phi_\xi\{f(\xi)\} = 0$, където Φ е произволен линеен функционал.

При локално условие от вид $f(0) = 0$, конволюцията има вида:

$$(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}, \tag{1.8}$$

$$h(x,\zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta + x - \eta)g(\eta)d\eta - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta - x - \eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta - x - \eta))d\eta.$$

С тези конволюции могат да се обхванат огромен брой задачи за частни диференциални уравнения с локални и нелокални условия. Тук попадат и основните уравнения на математическата физика: уравнението на топлопреноса, вълновото уравнение и уравнението на Лаплас при това разглеждани и с нелокални условия.

С помощта на конволюциите (1.7) - (1.8) се намират дюамелови представяния на решенията които са подходящи и за числено пресмятане. За голяма част от задачите за които се прилага този метод решенията досега са били намирани или във вид на ред (в повечето случай бавно сходящ особено при нелокани условия) или е търсено числено решение чрез диференчни схеми. Но и при диференчните схеми възникват проблеми. Налага се да се работи с огромен брой точки за да се получи задоволителна точност. Примери на конкретни задачи решени чрез дюамелови (точни) решения може да се намерят в [52].

Подробен обзор на развитието на операционното смятане може да се намери в някои от цитираните по горе книги като: [1], [15], [28], [43], ([21], част 1) и в статиите: [10], [11], [85].

2 Операционни смятания за нелокални гранични задачи за оператора на диференцирането

2.1 Увод

Теорията на нелокалните линейни гранични задачи все още е на ниво примери. Всеки опит за обхващането им в единна схема опира до липсата на общ метод. Тук предлагаме единен алгебричен подход към един клас линейни нелокални гранични задачи, които наричаме нелокални задачи на Коши. Той се основава на идеята за конволюция на линеен оператор и операционно смятане на нейната основа. Разглежданият оператор е десен обратен на оператора за диференцирането $\dfrac{d}{dt}$. Този десен обратен оператор е определен от граничните условия на разглежданата задача. Идеята за алгебричен подход се състои в алгебризация на задачата чрез свеждането и до линейно алгебрично уравнение от първа степен в съответен комутативен пръстен. Най-простото приложение на разглеждания метод е към нелокалните задачи на Коши. Следваики този алгебричен подход, ние намираме за всяка от горните задачи явно представяне на решенията им. Тези представяния може да се разглеждат като разширение на принципа на Дюамел.

В тази глава е разгледано обобщение на операционното смятане на Хевисайд-Микусински направено от Димовски [45] разглеждано и от Гроздев [65] и Спиридонова [54], [55].

Целта на разглежданото операционно смятане за оператора на диференцирането $\dfrac{d}{dt}$ е ефективно решаване на гранични задачи от вида

$$(2.1) \qquad P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f(t), \quad \chi_\tau\{y(\tau)\} = \alpha_0, ..., \ \chi_\tau\{y^{n-1}(\tau)\} = \alpha_{n-1},$$

където P е полином, $n = \deg P$, а χ е произволен линеен функционал.

Най-простата нелокална гранична задача, върху която се основава разгледаното операционно смятане се получава, когато полиномът P е от първа степен.

Нека Δ е интервал, а $C(\Delta)$ е пространството на непрекъснатите функции в Δ. Разглеждаме следната елементарна гранична задача за оператора на диференцирането $D_t = \dfrac{d}{dt}$ в пространството $C(\Delta)$ (най-често Δ ще бъде $[0, \infty)$, но може да е и произволен интервал в $\mathbb{R}$):

$$(2.2) \qquad \frac{dy}{dt} - \lambda y = f(t), \quad \chi_\tau\{y(\tau)\} = 0$$

с даден ненулев линен функционал χ. За функционала χ ще предполагаме, че е непрекъснат върху $C(\Delta)$ и следователно има представяне чрез стилтйесов интеграл във вида (вж. [59]):

$$(2.3) \qquad \chi_\tau\{f(\tau)\} = \int_\alpha^\beta f(\tau)d\gamma(\tau),$$

където $\alpha, \beta \in \Delta$, а $\gamma(\tau)$ е функция с ограничена вариация върху $[\alpha, \beta]$.

Цялата функция $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$ се нарича индикатриса на функционала χ.

Първо разглеждаме задача (2.2) за такива λ, при които $E(\lambda) \neq 0$. В този случай решението на (2.2) е резолвентният оператор $r_\lambda f$ на (2.2):

$$y = r_\lambda f = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\}. \tag{2.4}$$

Решението (2.4) може да се представи и във вида:

$$y = r_\lambda f = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau - \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\}. \tag{2.5}$$

За изграждане на операционно смятане за граничната задача (2.2) е удобно да предположим, че $E(0) \neq 0$. Тогава, без ограничение на общността, може да приемем, че $E(0) = 1$. При $\lambda = 0$ и $E(0) = 1$ решението $y = lf(t) = r_0 f$ е

$$lf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau f(\sigma) d\sigma \right\}. \tag{2.6}$$

l е десният обратен оператор на оператора за диференцирането $\dfrac{d}{dt}$, определен с функционала χ.

Функцията $E(\lambda)$ е цяла функция от експоненциален тип. Възможни са два случая. Ако носителят на функционала χ се състои от една точка $t = a$, където a е константа, тогава $E(\lambda)$ няма нули. Ако носителят на χ съдържа поне две различни точки $E(\lambda)$ има безброй много нули [19].

Нека нулите на $E(\lambda)$ са $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ съответно с кратности $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n, ...$ т. е.

$$E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n-1)}(\lambda_n) = 0, \quad E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

На всяка собствена стойност λ_n с кратност κ_n съответства собствена функция $e^{\lambda_n t}$ и $\kappa_n - 1$ на брой присъединени функции $te^{\lambda_n t}$, $t^2 e^{\lambda_n t}$, ..., $t^{\kappa_n-1} e^{\lambda_n t}$.

2.2 Конволюция на произволен десен обратен на оператора за диференцирането

В Димовски [46] е развито операционно смятане за оператора l в пространството на непрекъснатите функции $C(\Delta)$ в интервала Δ. Следван е методът на Микусински но вместо Дюамеловата конволюция е използвана конволюцията (2.7) (Димовски [45], стр. 52).

Теорема 2.1 *Нека $f, g \in C(\Delta)$. Тогава операцията $\overset{t}{*}$, зададена с*

$$(f \overset{t}{*} g)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\} \tag{2.7}$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в C за която $r_\lambda f = \left\{ \dfrac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f$ и $lf = \{1\} \overset{t}{*} f$.

Доказателство. (За пълнота привеждаме, с малки различия, доказателството описано в Димовски [45], стр. 72)

Очевидно е, че ако $f, g \in C(\Delta)$ то $f \overset{t}{*} g \in C(\Delta)$, т. е. $\overset{t}{*}: \ C(\Delta) \times C(\Delta) \to C(\Delta)$.

Билинейност на (2.7). От линейността на интеграла и функционала χ, директно следва билинейността на $\overset{t}{*}$.

Комутативност на (2.7). Комутативността на $\overset{t}{*}$ следва веднага, като направим смяната $\sigma = \ t+\tau-q$ на интеграционната променлива σ в интеграла $\displaystyle\int_\tau^t$. Получаваме

$$(f \overset{t}{*} g)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\} = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(q) g(t+\tau-q) dq \right\} = (g \overset{t}{*} f)(t).$$

Асоциативност на (2.7). Първо ще докажем асоциативността на (2.7) за функции от вида $e^{\lambda t}$. Нека числата $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ са произволни но $\lambda \neq \mu$. Имаме:

$$\begin{aligned} \{e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \{e^{\mu t}\} = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t e^{\lambda(\tau+t-\sigma)} e^{\mu\sigma} d\sigma \right\} = \chi_\tau \left\{ e^{\lambda(\tau+t)} \int_\tau^t e^{(\mu-\lambda)\sigma} d\sigma \right\} = \\ = \frac{E(\lambda) e^{\mu t} - E(\mu) e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тук сме използвали означението $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\}$ за индикатрисата на функционала χ. Нека $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{C}$ са произволни, но $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. От билинейността на $\overset{t}{*}$ и (2.8) намираме

$$\begin{gathered} \left(\{e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \{e^{\mu t}\} \right) \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\} = \\ = \frac{E(\mu)E(\nu)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)} e^{\lambda t} + \frac{E(\nu)E(\lambda)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)} e^{\mu t} + \frac{E(\lambda)E(\mu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} e^{\nu t}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Това представяне е инвариантно при цикличната смяна $\lambda \to \mu$, $\mu \to \nu$, $\nu \to \lambda$. Получаваме

$$\left(\{e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \{e^{\mu t}\} \right) \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\} = \left(\{e^{\mu t}\} \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\} \right) \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\}.$$

Оттук и от комутативността на $\overset{t}{*}$ намираме

$$\left(\{e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \{e^{\mu t}\}\right) \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\} = \{e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \left(\{e^{\mu t}\} \overset{t}{*} \{e^{\nu t}\}\right). \tag{2.10}$$

Ще докажем асоциативността на $\overset{t}{*}$ за полиноми на t. Да диференцираме (2.10) k пъти по λ, m пъти по μ и n пъти по ν. От представянето (2.7) е ясна законността на тези диференцирания под знака на функционала и интеграла. Получаваме

$$\left(\{t^k e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \{t^m e^{\mu t}\}\right) \overset{t}{*} \{t^n e^{\nu t}\} = \{t^k e^{\lambda t}\} \overset{t}{*} \left(t^m \{e^{\mu t}\} \overset{t}{*} \{t^n e^{\nu t}\}\right)$$

за всички $k, m, n = 0, 1, 2, ...$ При граничен преход $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$ и $\nu \to 0$ в случай, че $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$, намираме

$$\left(\{t^k\} \overset{t}{*} \{t^m\}\right) \overset{t}{*} \{t^n\} = \{t^k\} \overset{t}{*} \left(\{t^m\} \overset{t}{*} \{t^n\}\right). \tag{2.11}$$

От билинейноста на $\overset{t}{*}$ следва

$$\left(\{f\} \overset{t}{*} \{g\}\right) \overset{t}{*} \{h\} = \{f\} \overset{t}{*} \left(\{g\} \overset{t}{*} \{h\}\right), \tag{2.12}$$

за произволни полиноми f, g и h. От непрекъснатостта на (2.7) в C и гъстотата на полиномите в C следва, че (2.12) е изпълнено за произволни функции $f, g, h \in C$. Следователно (2.7) е асоциативна операция в C.

Равенството $r_\lambda f = \left\{\dfrac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} f$ се доказва с директна проверка. Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е такова, че $E(\lambda) \neq 0$. Имаме

$$\left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} f(t) = \chi_\tau \left\{\int_\tau^t \frac{e^{\lambda(t+\tau-\sigma)}}{E(\lambda)} f(\sigma)d\sigma\right\} = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \chi_\tau \left\{\int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma)d\sigma\right\} = r_\lambda f(t).$$

□

Лема 2.1 Операцията $\overset{t}{*}$ дефинирана с (2.7) няма анихилатори в $C(\Delta)$.

Доказателство. Първо, ще докажем, че съществува $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такова, че $E(\lambda_0) \neq 0$. Ако допуснем противното т. е., че $E(\lambda) = 0$, за всяко $\lambda \in \mathbb{C}$, тогава $\chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = 0$, за всяко $\lambda \in \mathbb{C}$. Като диференцираме k пъти последното равенство намираме $\chi_\tau\{\tau^k e^{\lambda\tau}\} = 0$, за всяко $\lambda \in \mathbb{C}$ и за всяко $k = 0, 1, 2, ...$ Тогава ако $\lambda \to 0$ получаваме $\chi_\tau\{\tau^k\} = 0$ и следователно $\chi_\tau\{p(\tau)\} = 0$ за всеки полином p. Ако $f \in C(\Delta)$ е произволна непрекъсната функция, тогава съществува редица от полиноми p_n клонящи към f спрямо топологията в $C(\Delta)$. Получаваме $\chi_\tau\{f(\tau)\} = 0$ за всяка $f \in C(\Delta)$. Това е противоречие с предположението, че χ е ненулев функционал в $C(\Delta)$.

Ако допуснем, че $f \in C(\Delta)$ е анихилатор в $(C(\Delta), \overset{t}{*})$ то $\left\{\dfrac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} f = 0$ т. е. $r_\lambda f = 0$. Като приложим оператора $\dfrac{d}{dt} - \lambda$ към последното равенство, получаваме $f(t) \equiv 0$. Доказахме, че в $(C(\Delta), \overset{t}{*})$ не само, няма анихилатори но съществуват неделители на

нулата, като например $e^{\lambda t}$.
□

Важно свойство на конволюционното произведение $(f \overset{t}{*} g)(t)$ е, че то винаги удовлетворява граничното условие $\chi_t\{f \overset{t}{*} g\} = 0$.

Лема 2.2 Ако $f, g \in C$, то $\chi_t\{f \overset{t}{*} g\} = 0$.

Доказателство. От дефиницията на конволюцията $\overset{t}{*}$ получаваме:

$$\chi_t\{(f \overset{t}{*} g)(t)\} = \chi_t \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\}.$$

От теоремата на Фубини (вж. [26], стр. 292) приложена за Стилтйесовия интеграл (2.3) имаме $\chi_t\chi_\tau\{p(t,\tau)\} = \chi_\tau\chi_t\{p(t,\tau)\}$. Тогава

$$\chi_t\chi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\} = \chi_\tau\chi_t \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\} =$$

$$= -\chi_\tau\chi_t \left\{ \int_t^\tau f(t+\tau-\sigma) g(\sigma) d\sigma \right\} = -\chi_\tau\{(f \overset{\tau}{*} g)(\tau)\}$$

като заменим τ с t в последното равенство, получаваме

$$\chi_t\{(f \overset{t}{*} g)(t)\} = -\chi_t\{(f \overset{t}{*} g)(t)\}.$$

Следователно $\chi_t\{(f \overset{t}{*} g)(t)\} = 0$.
□

2.2.1 Проекционни свойства на конволюцията $\overset{t}{*}$

Ще разгледаме някои връзки на операцията $\overset{t}{*}$ със спектралния проектор на Рис.

Дефиниция 2.1 Съответствието

$$f(t) \to \Lambda_n f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} r_\lambda f d\lambda, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.13}$$

където Γ_n е прост контур съдържащ само нулата λ_n на $E(\lambda)$, е спектрален проектор на Рис, който в нашия случай ще наричаме проектор на Леонтиев.

Основен проблем при спектралните проекции е задачата за единственост или тоталност. В случая на спектралния проектор на Леонтиев (2.13) тази задача изглежда така:

Кога от $\Lambda_n f(t) = 0$, $n = 1, 2, ...$, следва, че $f \equiv 0$?

Този проблем е решен напълно от Леонтиев в [19], стр. 260 - 271. При по-ограничителни условия този проблем е разглеждан от Л. Шварц [86]. Затова следващата теорема е наречена "теорема на Шварц - Леонтиев".

Теорема 2.2 *Нека $\Delta = [\alpha, \beta]$ е краен затворен интервал. Необходимо и достатачно условие за единственост на проекторите на Леонтиев* (2.13) *е краищата на интервала Δ да принадлежат на носителя на функционала χ.*

На проектора Λ_n може да се гледа като на аналог на крайна интегрална трансформация. Като такъв той притежава някои операционни свойства. Например

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t), \quad n = 1, 2, ..., \tag{2.14}$$

където

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} d\lambda. \tag{2.15}$$

От тук се вижда, че $\varphi_n(t)$ е функция от вида $\varphi_n(t) = e^{\lambda_n t} Q_n(t)$, където $Q_n(t)$ е полином от степен $\kappa_n - 1$. Функциите $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, ...$, имат свойствата:

$$\varphi_n(t) \overset{t}{*} \varphi_n(t) = \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) \overset{t}{*} \varphi_k(t) = 0, \quad n \neq k. \tag{2.16}$$

За доказателство на тези свойства, вж. Димовски [45], стр. 101.

Трансформацията (2.14) съпоставя на всяка функция f квазиполином от вида:

$$\Lambda_n f(t) = p_n(t) e^{\lambda_n t}, \tag{2.17}$$

където $\deg p_n(t) \leq \kappa_n - 1$.

Ще разгледаме няколко примера.

Пример 1. (вж. [55] и [50]) Нека λ_n е прост корен на $E(\lambda) = 0$ т. е. $E(\lambda_n) = 0$ и $E'(\lambda_n) \neq 0$. Тогава от теоремата за резидуумите намираме

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} d\lambda = -\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} \tag{2.18}$$

и за проектора Λ_n от (2.14) получаваме

$$\Lambda_n f = -\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} \overset{t}{*} f(t) = -\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} \chi_\tau \left\{ e^{\lambda_n \tau} \int_\tau^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma \right\}.$$

Пример 2. (вж. [55]) Нека λ_n е двукратен корен на $E(\lambda) = 0$, т. е. $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = 0$ и $E''(\lambda_n) \neq 0$. За да приложим теоремата за резидуумите, развиваме $E(\lambda)$ в ред на Тейлър и намираме

$$\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} = \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_n)^2 \left(\frac{1}{2!} E''(\lambda_n) + \frac{(\lambda - \lambda_n)}{3!} E'''(\lambda_n) + \frac{(\lambda - \lambda_n)^2}{4!} E^{(4)}(\lambda_n) + ... \right)}.$$

За $\varphi_n(t)$ получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} d\lambda = \tag{2.19}$$

$$= -\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}, \lambda_n\right) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\frac{1}{2!}E''(\lambda_n) + \frac{(\lambda-\lambda_n)}{3!}E'''(\lambda_n) + \ldots}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_n} =$$

$$= -\frac{2e^{\lambda_n t}}{E''(\lambda_n)}\left(t - \frac{E'''(\lambda_n)}{3E''(\lambda_n)}\right).$$

Пример 3. Нека λ_n е трикратен корен на $E(\lambda) = 0$, т. е. $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = E''(\lambda_n) = 0$ и $E'''(\lambda_n) \neq 0$. Аналогично на пресмятанията в Примери 1 и 2 получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} d\lambda = \tag{2.20}$$

$$-\frac{3e^{\lambda_n t}}{E'''(\lambda_n)}\left(t^2 - \frac{E^{(4)}(\lambda_n)}{2E'''(\lambda_n)}t - \frac{E^{(5)}(\lambda_n)}{10E'''(\lambda_n)} + \frac{(E^{(4)}(\lambda_n))^2}{8(E'''(\lambda_n))^2}\right).$$

Явните представяния за $\varphi_n(t)$ в разгледаните три примера могат да се получат и като се използва равенството (2.16) (вж. [55]), вместо да се пресмята интеграла (2.19).

Ще систематизираме свойствата на Λ_n в следната лема:

Лема 2.3 Проекторите на Леонтиев имат свойствата:

$$\Lambda_m \Lambda_n = \delta_{mn}\Lambda_n, \quad m, n = 0, 1, \ldots, \quad \text{където} \quad \delta_{mn} \quad \text{е символът на Кронекер;} \tag{2.21}$$

$$\Lambda_n\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\Lambda_n f(t)\right) - \chi_\tau\{f(\tau)\}\varphi_n(t), \quad f \in C^1(\Delta); \tag{2.22}$$

$$\Lambda_n(f(t) \overset{t}{*} g(t)) = \Lambda_n(f(t)) \overset{t}{*} \Lambda_n(g(t)), \quad f, g \in C(\Delta); \tag{2.23}$$

$$\Lambda_n(r_n f) = r_n(\Lambda_n f), \quad f \in C(\Delta). \tag{2.24}$$

Операционните свойства (2.21), (2.22), (2.23) и (2.24) могат да бъдат основа на операционно смятане за разглежданата гранична задача, когато е в сила теоремата на Шварц-Леонтиев. Ако Теорема 2.2 не е в сила, се налага да се използва директния алгебричен подход на Микусински.

2.3 Директнен алгебричен подход

2.3.1 Пръстен на конволюционните частни

Ще разгледаме множеството $C(\Delta)$ на непрекъснатите функции в Δ с двете операции: събиране " $+$ " и операцията конволюция $\overset{t}{*}$, зададена с (2.7) вместо "стандартното", "поточково" умножение на функции означавано с ".". $C(\Delta)$ с операциите " $+$ " и $\overset{t}{*}$ е пръстен. По същия начин както от пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ се получават рационалните числа $\mathbb{Q}$, така и в пръстена $(C(\Delta), +, \overset{t}{*})$ ще въведем конволюционни частни.

Конволюцията обикновено има много делители на нулата. Следователно C е само комутативен пръстен с операциите $+$ и $\overset{t}{*}$, но не и област на цялост. Въпреки това множеството $\mathfrak{N}$ от неделителите на нулата в C не е празно.

Например, функцията $\{1\}$ е неделител на нулата. Наистина да допуснем, че $\{1\}$ е делител на нулата т.е., че съществува $f(t) \in C$, $f \neq 0$ и $\{1\} \overset{t}{*} f = 0$. От Теорема 2.1 имаме $\{1\} \overset{t}{*} f = lf$ и следователно $lf = 0$. Прилагаме оператора на диференцирането $\dfrac{d}{dt}$ към равенството $lf = 0$. Получаваме $\dfrac{d}{dt} lf = 0$. Понеже l е десен обратен на оператора на диференцирането $\dfrac{d}{dt}$ (вж. (2.6)) от последното равенство намираме $f = 0$, това противоречи на допускането $f \neq 0$. Следователно $\{1\}$ не е делител на нулата.

Това позволява да използваме процеса "локализация" от общата алгебра (вж. S. Lang [71]). Тогава да въведем пръстена $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}C$ от конволюционни дроби $\dfrac{f}{g}$ с $f \in C$, $g \in \mathfrak{N}$. $\mathcal{M}$ е факторпръстенът $(C \times \mathfrak{N})/_{\sim}$ където факторизацията е спрямо релацията на еквивалентност

$$(f, g) \sim (f_1, g_1) \;\Leftrightarrow\; f \overset{t}{*} g_1 = f_1 \overset{t}{*} g.$$

Казано по друг начин, дробта $\dfrac{f}{g}$ е класът от всички наредени двойки (f_1, g_1), $f_1 \in C$, $g_1 \in \mathfrak{N}$ еквивалентни на (f, g) т. е.

$$\frac{f}{g} = \{(f_1, g_1) : (f_1, g_1) \sim (f, g)\}.$$

Множеството $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}C$ от конволюционните дроби е комутативен пръстен, съдържащ като подпръстен пръстена $C = C(\Delta)$ с умножение $\overset{t}{*}$ дефинирано с (2.7).

Операторът l може да се отъждестви с функцията константа $\{1\}$ в Δ, понеже $lf = \{1\} \overset{t}{*} f$, т.е. $l = \{1\}$. Като неделител на нулата в $\mathcal{M}$, l има обратен елемент в $\mathcal{M}$

$$s = \frac{1}{l}. \tag{2.25}$$

Други елементи на $\mathcal{M}$ са така наречените числови оператори. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогава елементът $\dfrac{\alpha f}{f}$, $f \in \mathfrak{N}$ не зависи от f. Означавайки го с $[\alpha]$ и следвайки Микусински, ще го наричаме *числов оператор*.

Лесно е да се докаже, че $[\alpha+\beta] = [\alpha] + [\beta]$ и $[\alpha\beta] = [\alpha][\beta]$ за произволни $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Следователно, пръстенът на числовите оператори е изоморфен на $(\mathbb{C}, +, .)$ и може да разглеждаме $\mathbb{C}$ като подпръстен на $\mathcal{M}$.

Дефиниция 2.2 (Ларсен [72]). Линейният оператор $A : C \to C$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{t}{*})$, ако за всички функции $f, g \in C$ е изпълнено

$$A(f \overset{t}{*} g) = (Af) \overset{t}{*} g. \tag{2.26}$$

Тъй като $(C, +, \overset{t}{*})$ е пръстен без анихилатори, то (Ларсен [72]), (2.26) е еквивалентно на

$$(Af) \overset{t}{*} g = f \overset{t}{*} (Ag). \tag{2.27}$$

Лема 2.4 Всеки мултипликатор е конволюционно частно.

Доказателство. Нека $f, g \in \mathfrak{N}$. Тогава

$$\frac{Af}{f} = \frac{Ag}{g},$$

следва директно от равенството (2.27).
$\square$

Примери за мултипликатори:

1. Ако $f \in C$, конволюционният оператор $f \overset{t}{*}\ : \ (f \overset{t}{*})g = f \overset{t}{*} g$ е мултипликатор и $(f \overset{t}{*}) = \dfrac{f \overset{t}{*} g}{g}$ не зависи от g.

В този пример попада и $l = \{1\} \overset{t}{*}$;

2. Ако $\lambda \in \mathbb{C}$, тогава $[\lambda]$ е числов мултипликатор и $[\lambda] = \dfrac{\lambda g}{g}$ не зависи от g;

Лема 2.5 *Конволюционните мултипликатори образуват алгебра изоморфна на конволюционната алгебра* $(C, \overset{t}{*})$.

Доказателство. За $f, g \in C$ имаме

$$(f \overset{t}{*})(g \overset{t}{*}) = (f \overset{t}{*} g) \overset{t}{*}$$

защото ако $h \in C$ то

$$(f \overset{t}{*}) \circ (g \overset{t}{*})h = (f \overset{t}{*})(g \overset{t}{*} h) = f \overset{t}{*} (g \overset{t}{*} h) = \left((f \overset{t}{*} g) \overset{t}{*}\right) h.$$

$\square$

Елементът s е алгебричният аналог на оператора за диференцирането $\dfrac{d}{dt}$. Връзката между f' и sf, когато $f \in C^1$ се дава с:

Теорема 2.3 *Нека $f \in C^1(\Delta)$. Тогава*

$$f' = sf - \chi\{f\}, \tag{2.28}$$

където $\chi\{f\}$ се разглежда като числовия оператор $[\chi\{f\}]$, а не като функция константа.

Доказателство. Непосредствено се вижда, че $lf'(t) = f(t) - \chi\{f\}$. В пръстена това равенство може да бъде записано във вида $lf'(t) = f(t) - \chi\{f\}l$. За да получим (2.28) остава само да умножим последното равенство с s и, разбира се, да използваме, че $ls = sl = 1$, където 1 е единицата в пръстена $\mathcal{M}$.
□

Следствие 2.1 *Ако $f \in C^{(k)}(\Delta)$, в сила е тъждеството*

$$f^{(k)} = s^k f - \chi\{f\}s^{k-1} - \chi\{f'\}s^{k-2} - ... - \chi\{f^{(k-1)}\}. \tag{2.29}$$

Доказателство. Ще докажем (2.29) с индукция по k. За $k = 1$, според Теорема 2.3, (2.29) е изпълнено. Допускаме, че (2.29) е вярно при $k - 1$. Ще докажем че (2.29) е вярно и за k. От това, че (2.29) е вярно при $k - 1$ имаме

$$f^{(k-1)} = s^{k-1} f - \chi\{f\}s^{k-2} - \chi\{f'\}s^{k-3} - ... - \chi\{f^{(k-2)}\}$$

Представяме k-тата производна на f по следния начин $\dfrac{d^k}{dx^k} f = \dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f'$. Получаваме

$$\frac{d^k}{dx^k} f = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f' = s^{k-1} f' - \chi\{f'\}s^{k-2} - \chi\{f''\}s^{k-3} - ... - \chi\{f^{(k-1)}\}.$$

Използваме (2.28), за да изразим f' чрез s и намираме

$$\frac{d^k}{dx^k} f = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f' = s^{k-1}(sf - \chi\{f\}) - \chi\{f'\}s^{k-2} - ... - \chi\{f^{(k-1)}\} =$$

$$= s^k f - \chi\{f\}s^{k-1} - \chi\{f'\}s^{k-2} - ... - \chi\{f^{(k-1)}\}.$$

□

Теорема 2.4 *Нека $\mu \in \mathbb{C}$ е числов оператор. Елементът $s - \mu$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато μ е нула на индикатрисата $E(\lambda)$, т. е. $E(\mu) = 0$.*

Доказателство. Нека $E(\mu) = 0$. От (2.28) следва

$$(s - \mu)\{e^{\mu t}\} = s\{e^{\mu t}\} - \mu\{e^{\mu t}\} = \{\mu e^{\mu t}\} + \chi_\tau\{e^{\mu\tau}\} - \mu\{e^{\mu t}\} = E(\mu) = 0.$$

Следователно $s - \mu$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$. От това доказателството следва, че и $e^{\mu t}$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$ при $E(\mu) = 0$.

Нека $s - \mu$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$. Тогава съществува ненулев елемент $\dfrac{g}{h}$ в $\mathcal{M}$, $g \in C(\Delta)$, $h \in \mathfrak{N}$ за който

$$(s - \mu)\frac{g}{h} = 0.$$

Като умножим с h, получаваме уравнението

$$(s-\mu)g = 0.$$

Това уравнение спрямо g е еквивалентно на

$$g - \mu l g = 0.$$

От от него следва, че $g \in C^1(\Delta)$ и

$$g' - \mu g = 0, \quad \chi_\tau\{g(\tau)\} = 0.$$

Всички ненулеви решения на $g' - \mu g = 0$ са $g(t) = Ae^{\mu t}$, $A = const \neq 0$. От граничното условие $\chi_\tau\{g(\tau)\} = 0$ получаваме $\chi_\tau\{e^{\mu\tau}\} = E(\mu) = 0$.
□

Лема 2.6 Нека $\mu \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\mu) = 0$ и P е полином, за които $P(\mu) = 0$. Тогава елементът $P(s)$ в $\mathcal{M}$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство. От $E(\mu) = 0$ следва, че $\chi_\tau\left\{\dfrac{d^n}{d\tau^n}e^{\mu\tau}\right\} = \mu^n \chi_\tau\{e^{\mu\tau}\} = 0$, за $n = 0, 1, ...$, и като използваме (2.29) получаваме $s^n\{e^{\mu t}\} = \dfrac{d^n}{dt^n}e^{\mu t} = \mu^n e^{\mu t}$. Директно намираме

$$P(s)\{e^{\mu t}\} = P(\mu)e^{\mu t} = 0.$$

□

Теорема 2.5 *Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{s-\lambda} = r_\lambda = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \tag{2.30}$$

и

$$\frac{1}{(s-\lambda)^m} = \left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \tag{2.31}$$

за $m > 1$.

Доказателство. Нека y е решение на граничната задача

$$y' - \lambda y = f, \quad \chi_\tau\{y(\tau)\} = 0. \tag{2.32}$$

От (2.28) получаваме $sy - \lambda y = f$ и следователно

$$y = \frac{f}{s-\lambda}.$$

Но решението y на (2.32) е (вж. Теорема 2.1) $y = r_\lambda f = \left\{\dfrac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} f$, т. е.

$$y = \frac{f}{s-\lambda} = r_\lambda f = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} f.$$

Ако f не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, получаваме

$$\frac{1}{s-\lambda} = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\}.$$

За да докажем равенство (2.31), ще докажем една лема и едно нейно следствие.

Лема 2.7 *Нека $f(t,\lambda)$ и $g(t,\lambda)$ са функции на променливите $t \in \Delta$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, непрекъснати по t и диференцируеми по λ. Тогава $f(t,\lambda) \overset{t}{*} g(t,\lambda)$ е диференцируема по λ и*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f(t,\lambda) \overset{t}{*} g(t,\lambda)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)\right) \overset{t}{*} g(t,\lambda) + f(t,\lambda) \overset{t}{*} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(t,\lambda)\right).$$

Доказателство. От Дефиницията (2.7) на конволюцията $\overset{t}{*}$ получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f(t,\lambda) \overset{t}{*} g(t,\lambda)\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t f(t+\tau-\sigma,\lambda)g(\sigma,\lambda)d\sigma\right\} =$$

$$= \chi_\tau\left\{\int_\tau^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[f(t+\tau-\sigma,\lambda)g(\sigma,\lambda)\Big]d\sigma\right\} =$$

$$= \chi_\tau\left\{\int_\tau^t \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t+\tau-\sigma,\lambda)\right)g(\sigma,\lambda) + f(t+\tau-\sigma,\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(\sigma,\lambda)\right)d\sigma\right\} =$$

$$= \chi_\tau\left\{\int_\tau^t \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t+\tau-\sigma,\lambda)\right)g(\sigma,\lambda)d\sigma\right\} + \chi_\tau\left\{\int_\tau^t f(t+\tau-\sigma,\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(\sigma,\lambda)\right)d\sigma\right\}$$

Следователно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f(t,\lambda) \overset{t}{*} g(t,\lambda)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)\right) \overset{t}{*} g(t,\lambda) + f(t,\lambda) \overset{t}{*} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(t,\lambda)\right).$$

□

Непосредствено следствие от Лема 2.7 е

Следствие 2.2 *При условието на Лема 2.7 е изпълнено*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left([f(t,\lambda)]^{\overset{t}{*}\, m}\right) = m\left([f(t,\lambda)]^{\overset{t}{*}\,(m-1)}\right) \overset{t}{*} \frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda).$$

Тук $[f(t,\lambda)]^{\overset{t}{*}\, m} = \underbrace{f(t,\lambda) \overset{t}{*} \ldots \overset{t}{*} f(t,\lambda)}_{m \text{ пъти}}$.

Ще докажем равенство (2.31). Допускаме, че

$$\frac{1}{(s-\lambda)^m} = \left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\}.$$

Диференцираме това равенство спрямо λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{(s-\lambda)^m}\right\} = \left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\}.$$

Ако може да използваме, че

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{(s-\lambda)^m}\right\} = m\frac{1}{(s-\lambda)^{m+1}},$$

веднага намираме

$$\frac{1}{(s-\lambda)^{m+1}} = \left\{\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\}.$$

Ще докажем, че действително

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{(s-\lambda)^m}\right\} = m\frac{1}{(s-\lambda)^{m+1}}.$$

От Следствие 2.2 към Лема 2.7 получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{(s-\lambda)^m}\right] = m\frac{1}{(s-\lambda)^{m-1}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right].$$

Остава да докажем, че

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right] = \frac{1}{(s-\lambda)^2}.$$

Диференцираме двете страни на равенството

$$\frac{1}{s-\lambda} = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}$$

по λ и намираме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right] = \frac{te^{\lambda t}}{E(\lambda)} - \frac{e^{\lambda t}E'(\lambda)}{E^2(\lambda)}.$$

От друга страна, имаме:

$$\frac{1}{(s-\lambda)^2} = \frac{1}{s-\lambda}\frac{1}{s-\lambda} = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \overset{t}{*} \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} =$$

$$= \chi_\tau\left\{\int_\tau^t \frac{e^{\lambda(t+\tau-\sigma)}}{E(\lambda)}\frac{e^{\lambda\sigma}}{E(\lambda)}d\sigma\right\} = \chi_\tau\left\{\frac{e^{\lambda(t+\tau)}(t-\tau)}{E^2(\lambda)}\right\} = \chi_\tau\left\{\frac{te^{\lambda t}e^{\lambda\tau}}{E^2(\lambda)} - \frac{\tau e^{\lambda t}e^{\lambda\tau}}{E^2(\lambda)}\right\} =$$

$$= \frac{te^{\lambda t}}{E(\lambda)} - \frac{e^{\lambda t}E'(\lambda)}{E^2(\lambda)}.$$

Следователно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right] = \frac{1}{(s-\lambda)^2}.$$

□

Построеното операционно смятане позволява ефективно да се решава следния клас гранични задачи.

Нека $P(\lambda)$ е ненулев полином, а χ е ненулев линеен функционал в пространството $C(\Delta)$ на непрекъснатите функции в интервала Δ. Разглеждаме граничната задача

(2.33)
$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f(t), \quad f \in C(\Delta),$$
$$\chi\{y^{(k)}\} = \gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \deg P - 1$$

с дадени $\gamma_k \in \mathbb{C}$. Тази задача се нарича *нелокална гранична задача на Коши, определена от функционала* χ, полинома $P(\lambda)$ и константите $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$, където $n = \deg P$.

2.3.2 Пръстен на мултипликаторните частни

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C([0,\infty)), \overset{t}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [72]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. По правило в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи които не са делители на нулата. Например такъв елемент е мултипликаторът $\{1\} \overset{t}{*}$.

С $\mathfrak{N}$ означаваме множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин както от пръстена на целите числа се получава пръстенът на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим мултипликаторните частни. Но в ”знаменател” може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\dfrac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация"(вж. Ленг [71], стр. 53).

В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност ”$\sim$” такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички мултипликаторни дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

По същия начин, по-който пръстенът на целите числа се разглежда като част от полето на рационалните числа, така и пръстенът на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{t}{*})$ разглеждаме като част от $\mathcal{M}$.

Теорема 2.6 *Пръстенът $\mathcal{M}$ съдържа като подпръстен:*

i) Основното поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

ii) Конволюционния пръстен $(C, \overset{t}{*})$;

iii) Пръстена на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{t}{*})$.

Доказателство. i) Влагането $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{M}$ (или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}$) се дефинира с изображението $\alpha \mapsto [\alpha]$. От съответствието

$$\alpha, \beta \mapsto [\alpha\beta] = \frac{\alpha\beta l}{l} = \frac{\alpha l}{l}\frac{\beta l}{l} = [\alpha][\beta],$$

където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) се вижда, че това изображение е влагане на пръстени.

По подобен начин се доказват следните влагания на пръстени:

ii) $\quad (C, \overset{t}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad f \mapsto \dfrac{(lf) \overset{t}{*}}{l} = [f], \qquad f \in C;$

iii) $\quad \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad M \mapsto \dfrac{M}{I}$, където I е идентитета в $(C, \overset{t}{*})$.

$\square$

По-нататък може да разглеждаме различните обекти: числата, функциите от C, мултипликаторите и мултипликаторните дроби като елементи на единната алгебрична система $\mathcal{M}$.

Лема 2.8 Пръстенът на мултипликаторните частни е изоморфен на пръстената на конволюционните частни.

Доказателство. Нека P и Q са мултипликатори на $(C, \overset{t}{*})$, а a ненулев неделител на нулата в $(C, \overset{t}{*})$. Разглеждаме изображението

$$\frac{P}{Q} \mapsto \frac{Pa}{Qa}$$

което на мултипликаторно частно съпоставя конволюционно частно.

Ще докажем, че това изображение е изоморфизъм между пръстени. Първо ще докажем, че

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} \mapsto \frac{Pa}{Qa} + \frac{Ra}{Sa}.$$

Имаме

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS} \mapsto \frac{(PS + QR)a}{(QS)a} = \frac{PSa}{(QS)a} + \frac{QRa}{(QS)a} = \frac{Pa}{Qa} + \frac{Ra}{Sa}.$$

□

2.4 Периодични и средно-периодични решения

Пример за възникване на нелокална задача на Коши е задачата за намиране периодично решение с период T на обикновено линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти. Разглеждаме линейното диференциално уравнение с постоянни коефициенти:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{2.34}$$

Търсим периодично решение $y(t)$ на това уравнение с период T, т. е. решение което удовлетворява условието:

$$y(t+T) = y(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Необходимо условие уравнението (2.34) да има периодично решение $y(t)$ с период T, е функцията $f(t)$ да е периодична с период T. Изпълнена е следната

Теорема 2.7 *Едно решение $y(t)$ на (2.34) с периодична дясна част $f(t)$ с период T, е периодично с период T тогава и само тогава, когато изпълнява граничните условия:*

$$y^{(k)}(T) - y^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ..., \deg P - 1. \tag{2.35}$$

Доказателство. (вж. [24] стр. 70).

По-общо от понятието периодична функция е понятието средно-периодична функция спрямо даден линеен функционл χ. Задачи свързани с това понятие са разгледани от Димовски и Шкурник в [51] и Димовски и Спиридонова в [53].

Дефиниция 2.3 Една функция $f \in C(-\infty, +\infty)$ се нарича средно-периодична спрямо функционала χ, ако

$$\chi_\tau\{f(t+\tau)\} = 0$$

за всяко $t \in (-\infty, +\infty)$.

"Класическите" периодични функции с период T са средно-периодични спрямо функционала

$$\chi_\tau\{f(\tau)\} = f(T) - f(0).$$

Търсим средно периодично решение спрямо функционала χ на уравнението (2.34), т. е. решение $y(t)$, което удовлетворява условието

$$\chi_\tau\{y(t+\tau)\} = 0$$

за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, едно необходимо условие уравнението (2.34) да има средно периодично решение $y(t)$ спрямо функционала χ, е функцията $f(t)$ да е средно-периодична спрямо функционала χ, т. е. за всяко $t \in \mathbb{R}$ да е изпълнено

$$\chi_\tau\{f(t+\tau)\} = 0.$$

Теорема 2.8 *Едно решение $y(t)$ на (2.34) със средно-периодична спрямо функционала χ дясна част $f(t)$, е средно периодично спрямо функционала χ тогава и само тогава, когато изпълнява граничните условия:*

(2.36) $$\chi_\tau\{y^{(k)}(\tau)\} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ..., \deg P - 1.$$

Доказателство. Нека за решението $y(t)$ на (2.34) е изпълнено

$$\chi_\tau\{y(t+\tau)\} = 0.$$

Диференцираме това равенството k-пъти по t за $k = 0, 1, ..., \deg P - 1$, полагаме $t = 0$ и получаваме (2.36).

Обратно. Нека е изпълнено (2.36). Полагаме

$$u(t) = \chi_\tau\{y(t+\tau)\}.$$

В уравнението (2.34) правим смяна на променливата t с $t + \tau$. Получаваме

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) y(t+\tau) = f(t+\tau), \quad 0 < t < \infty.$$

Прилагаме към това уравнение функционала χ_τ които действа по τ и получаваме

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \chi_\tau\{y(t+\tau)\} = \chi_\tau\{f(t+\tau)\}, \quad 0 < t < \infty.$$

От условието на теоремата имаме, че f е средно периодична спрямо функционала χ, намираме

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

От (2.36) имаме:

$$u(0) = \chi_\tau\{y(\tau)\} = 0,$$
$$u'(0) = \chi_\tau\{y'(\tau)\} = 0,$$
$$...$$
$$u^{(n-1)}(0) = \chi_\tau\{y^{(n-1)}(\tau)\} = 0,$$

където $n = \deg P$. Следователно $u \equiv 0$, т. е. $\chi_\tau\{y(t+\tau)\} = 0$.
□

Равенството (2.29) позволява всяка нелокална задача на Коши (2.33) да се редуцира до алгебрично уравнение от вида

(2.37) $$P(s)y = f + Q(s),$$

в пръстена на конволюционните частни $\mathcal{M}$, с полином $Q(s)$ от степен по-малка от n.

Формалното решение на (2.37) е $y = \dfrac{1}{P(s)} f + \dfrac{Q(s)}{P(s)}$. То е в сила когато $P(s)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Ще покажем, че $P(s)$ не е делител на нулата, тогава и само тогава, когато нито една от нулите на $P(\lambda)$ не е нула на *индикатрисата* $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\}$.

Теорема 2.9 *Нека $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ са различните нули на полинома $P(\mu)$. Изразът $P(s)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато $E(\mu_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., m$.*

Доказателство.

Тъй като $P(s) = a_0(s-\mu_1)^{\gamma_1}...(s-\mu_m)^{\gamma_m}$, твърдението следва от Теорема 2.5.

□

Следствие 2.3 Нека $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ са различните нули на полинома $P(\mu)$ и $E(\mu_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., m$. Тогава граничната задача (2.33) има единствено решение.

Доказателство. Хомогенната гранична задача (2.33)

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0, \quad \chi\{y^{(k)}\} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., \deg P - 1$$

се редуцира до алгебричното уравнение

$$P(s)y = 0$$

в $\mathcal{M}$. Понеже $P(s)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, от тук следва $y \equiv 0$.

□

По-нататък, като стандартен метод, ще използваме алгоритъма на Хевисайд: 1) Разлагаме $P(s)$ на линейни множители; 2) Представяме $\dfrac{1}{P(s)}$ и $\dfrac{Q(s)}{P(s)}$ като сбор на елементарни дроби; 3) Интерпретираме елементарните дроби $\dfrac{1}{s-\lambda}$ и $\dfrac{1}{(s-\lambda)^k}$ като функции; 4) Представяме $\dfrac{1}{P(s)} = \{G(t)\}$ и $\dfrac{Q(s)}{P(s)} = \{H(t)\}$ като функции; 5) Записваме решението във вида $y = G \overset{t}{*} f + H$.

За да изпълним стъпка 3), използваме формулите:

$$\frac{1}{s-\lambda} = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\}, \qquad \frac{1}{(s-\lambda)^k} = \left\{\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{(k-1)}}\left(\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right)\right\}, \quad k = 2, 3, ...$$

Нкарая намираме обобщение на принципа на Дюамел за хомогенната нелокална задача на Коши (2.33).

Теорема 2.10 *Нека $Y = \{Y(t)\}$ е решението на (2.33) за $f(t) \equiv 1$. Тогава*

$$y(t) = \frac{d}{dt}\{Y \overset{t}{*} f\} = \chi\{f\}Y(t) + \chi_\tau\left\{\int_\tau^t Y(t+\tau-\sigma)f'(\sigma)d\sigma\right\}$$

е решението на (2.33) за произволна функция $f \in C^1(\Delta)$.

2.5 Резонансен случай

Ако $P(s)$ е делител на нулата, попадаме в така нареченият *резонансен случай*. Очевидно тогава, ако съществува решение, то не е единствено. За съществуване на решение трябва да се наложат допълнителни изисквания на дясната част f. В модифицирана форма, алгоритъмът на Хевйсаид е приложим и за резонансният случай също. Това приложение не е тривиално (вж. Гроздев [65] и Димовски и Спиридонова [55]).

Разглеждаме елементарната гранична задача

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = f(t), \quad \chi_\tau\{y(\tau)\} = 0 \tag{2.38}$$

където $\lambda_n \in \mathbb{C}$ е κ_n - кратна нула на индикатрисата $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$, т. е.
$E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n - 1)}(\lambda_n) = 0$ и $E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0$.

За следващите разглеждания важна роля играе множеството:

$$\widetilde{C_n} = \left\{ f \in C : f \overset{t}{*} e^{\lambda_n t} = f \overset{t}{*} t e^{\lambda_n t} = ... = f \overset{t}{*} t^{\kappa_n - 1} e^{\lambda_n t} = 0 \right\} = \ker \Lambda_n.$$

От дефиницията на $\widetilde{C_n}$ е очевидно, че $(\widetilde{C_n}, +, \overset{t}{*})$ е подпръстен на $(C(\Delta), +, \overset{t}{*})$. Нещо повече, $\widetilde{C_n}$ е идеал в C.

Лема 2.9 *Нека $f \in C$. Тогава $f \overset{t}{*} \varphi_n(t) = 0$ тогава и само тогава когато $f \overset{t}{*} e^{\lambda_k t} = f \overset{t}{*} t e^{\lambda_n t} = ... = f \overset{t}{*} t^{\kappa_n - 1} e^{\lambda_n t} = 0$.*

Доказателство. Нека $f \overset{t}{*} e^{\lambda_n t} = f \overset{t}{*} t e^{\lambda_n t} = ... = f \overset{t}{*} t^{\kappa_n - 1} e^{\lambda_n t} = 0$. От това, че $\varphi_n(t)$ е функция от вида $\varphi_n(t) = e^{\lambda_n t} Q_n(t)$, където $Q_n(t)$ е полином от степен $\kappa_n - 1$ следва, че $f \overset{t}{*} \varphi_n(t) = 0$.

Обратно нека $f \overset{t}{*} \varphi_n(t) = 0$. Умножаваме това равенство с $(s - \lambda_n)^j$,
$j = 1, 2, ..., \kappa_n - 1$. Тъй като

$$\operatorname{span}\{(s-\lambda_n)\varphi_n(t), (s-\lambda_n)^2\varphi_n(t), ..., (s-\lambda_n)^{\kappa_n - 1}\varphi_n(t)\} = \operatorname{span}\{e^{\lambda_n t}, t e^{\lambda_n t}, ..., t^{\kappa_n - 1} e^{\lambda_n t}\}$$

то $f \overset{t}{*} e^{\lambda_n t} = f \overset{t}{*} t e^{\lambda_n t} = ... = f \overset{t}{*} t^{\kappa_n - 1} e^{\lambda_n t} = 0$.
□

Лема 2.10 *Нека $\lambda_k \in \mathbb{C}$ е такова, че $E(\lambda_k) = 0$. Тогава $s - \lambda_k$ не е делител на нулата в подпръстена $\widetilde{C_k}$.*

Доказателство.

Ще докажем, че от $f \in \widetilde{C_k}$ и $(s - \lambda_k) f = 0$ следва $f \equiv 0$. Допускаме противното, т. е., че съществува такава функция $f \in \widetilde{C_k}$, $f \neq \{0\}$, че

$$(s - \lambda_k) f = 0.$$

Умножаваме с l и намираме:

$$f - \lambda_k l f = 0.$$

Това уравнение за f е еквивалентно на нелокалната гранична задача:

$$f' - \lambda_k f = 0, \quad \chi_\tau\{f(\tau)\} = 0.$$

Единствените решения на уравнението $f' - \lambda_k f = 0$ са:

$$f(t) = A_k e^{\lambda_k t},$$

където $A_k \in \mathbb{C}$. От една страна, от конкретния вид на $f(t)$ следва $\Lambda_k f = f(t) \overset{t}{*} \varphi_k(t) = f$, но от друга от $f \in \widetilde{C_k}$ следва, че $f(t) \overset{t}{*} \varphi_k(t) = 0$ следователно $f(t) \equiv 0$. Това означава, че $s - \lambda_k$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_k}$.
□

Ще означаваме рестрикцията на l върху $\widetilde{C_k}$ с $\widetilde{l}$, а алгебричния обратен на $\widetilde{l}$ в $\widetilde{C_k}$ с $\widetilde{s}$, т. е.

$$\widetilde{s} = \frac{1}{\widetilde{l}}.$$

За $\widetilde{s}$ е изпълнено равенство подобно на равенство (2.28) за s. За $f \in \widetilde{C_k}$ имаме

$$f' = \widetilde{s} f - \chi\{f\}. \tag{2.39}$$

Както видяхме в Лема 2.10, $\widetilde{s} - \lambda_k$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_k}$. Ще намерим представяне на $\dfrac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k}$ като конволюционен мултипликатор.

Теорема 2.11 *Нека $\lambda_k \in \mathbb{C}$ е такова, че $E(\lambda_k) = E'(\lambda_k) = ... = E^{(\kappa_k - 1)}(\lambda_k) = 0$ и $E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*}, \tag{2.40}$$

където в дясната части е означен конволюционният мултипликатор $\left(\left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} \right) f = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} f$, *за* $f \in \widetilde{C_k}$.

Доказателство.

Първо ще изведем формула (2.40) от евристични съображения. За тази цел да направим граничен преход в $r_\lambda f = \left\{ \dfrac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f$, за $\lambda \to \lambda_k$. За да пресметнем тази граница, ще развием $e^{\lambda t}$ и $E(\lambda)$ в ред на Тейлър около λ_k:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_k} r_\lambda f = \lim_{\lambda \to \lambda_k} \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left\{ \frac{e^{\lambda_k t} + \frac{\lambda_k-\lambda}{1!} t e^{\lambda_k t} + \dots + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k-1}}{(\kappa_k-1)!} t^{\kappa_k-1} e^{\lambda_k t} +}{E(\lambda_k) + \frac{\lambda_k-\lambda}{1!} E'(\lambda_k) + \dots + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k-1}}{(\kappa_k-1)!} E^{(\kappa_k-1)}(\lambda_k) +} \right.$$

$$\left. \frac{+\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t} + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} t^{\kappa_k+1} e^{\lambda_k t} + \dots}{+\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} E^{(\kappa_k+1)}(\lambda_k) + \dots} \right\} \overset{t}{*} f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left(\frac{(e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \frac{\lambda_k-\lambda}{1!} (t e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \dots + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k-1}}{(\kappa_k-1)!} (t^{\kappa_k-1} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) +}{E(\lambda_k) + \frac{\lambda_k-\lambda}{1!} E'(\lambda_k) + \dots + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k-1}}{(\kappa_k-1)!} E^{(\kappa_k-1)}(\lambda_k) +} \right.$$

$$\left. \frac{+\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} (t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} (t^{\kappa_k+1} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \dots}{+\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} E^{(\kappa_k+1)}(\lambda_k) + \dots} \right).$$

Понеже $f \in \widetilde{C_k}$ имаме $e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = t e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \dots = t^{\kappa_k-1} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = 0$ и от това, че λ_k е κ_k кратна нула на $E(\lambda)$ получаваме

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k} r_\lambda f = \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left\{ \frac{\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} (t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} (t^{\kappa_k+1} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \dots}{\frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k}}{\kappa_k!} E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^{\kappa_k+1}}{(\kappa_k+1)!} E^{(\kappa_k+1)}(\lambda_k) + \dots} \right\}.$$

След съкращаване на $(\lambda_k - \lambda)^{\kappa_k}$ и граничен преход, намираме

$$\lim_{\lambda\to\lambda_k} r_\lambda f = \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_k} \left(\frac{\frac{1}{\kappa_k!} (t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \frac{\lambda_k-\lambda}{(\kappa_k+1)!} (t^{\kappa_k+1} e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f) + \dots}{\frac{1}{\kappa_k!} E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) + \frac{\lambda_k-\lambda}{(\kappa_k+1)!} E^{(\kappa_k+1)}(\lambda_k) + \dots} \right) = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} f.$$

Горните разсъждения нямат характер на доказателство, а имат само евристична стойност. Затова се налага да направим директна проверка на тъждеството

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} f$$

за произволна функция $f \in \widetilde{C_k}$.

Преминаваме към доказателството на (2.40). Нека $f \in \widetilde{C_k}$. Умножаваме равенството

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} f$$

с $\widetilde{s} - \lambda_k$ и получаваме

$$f = (\widetilde{s} - \lambda_k) \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} f.$$

Ще докажем това равенство. Имаме

$$(\widetilde{s}-\lambda_k)\{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}\} = \widetilde{s}\{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}\} - \lambda_k\{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}\}.$$

Като използваме очевидното равенство $\chi_\tau\{\tau^{\kappa_k}e^{\lambda_k \tau}\} = E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)$ и формулата (2.39), намираме

$$(\widetilde{s}-\lambda_k)\{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}\} = \frac{d}{dt}(t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}) + [\chi_\tau\{\tau^{\kappa_k}e^{\lambda_k \tau}\}] - \lambda_k t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t} =$$

$$= \kappa_k t^{\kappa_k-1}e^{\lambda_k t} + \lambda_k t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t} + [E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)] - \lambda_k t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t} =$$

$$= \kappa_k t^{\kappa_k-1}e^{\lambda_k t} + [E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)].$$

Заместваме полученото за $(\widetilde{s}-\lambda_k)\{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}\}$ в $(\widetilde{s}-\lambda_k)\left\{\dfrac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*} f$. Получаваме

$$(\widetilde{s}-\lambda_k)\left\{\frac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*} f = \frac{\kappa_k t^{\kappa_k-1}e^{\lambda_k t} + [E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)]}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \overset{t}{*} f =$$

$$= \left\{\frac{\kappa_k t^{\kappa_k-1}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + [1]\right\} \overset{t}{*} f = [1] \overset{t}{*} f = f.$$

□

Трябва специално да посочим, че функцията $\dfrac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}$, представяща оператора

$$\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}$$

в $\widetilde{C_k}$ не е единствена. Тя е определена с точност до квазиполином от вида $Q(t)e^{\lambda_k t}$, където $Q(t)$ е произволен полином от степен $\deg Q(t) \le \kappa_k - 1$. Наистина ако $f \in \widetilde{C_k}$ то

$$\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}f = \left\{\frac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + Q(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f = \left\{\frac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*} f,$$

защото от дефиницията на $\widetilde{C_k}$ следва, че $\{Q(t)e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = 0$ за всеки полином от степен по-малка или равна на $\kappa_k - 1$.

Лема 2.11 *Нека за $\lambda_k \in \mathbb{C}$ е изпълнено $E(\lambda_k) = E'(\lambda_k) = ... = E^{(\kappa_k-1)}(\lambda_k) = 0$ и $E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*}, \tag{2.41}$$

където $A_m(t)$ е полином. В дясната част е означен конволюционният мултипликатор

$$\left(\left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*}\right) f = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f$$

за $f \in \widetilde{C_k}$.

Доказателство. Използваме индукция по m. От Теорема 2.11 за $m=1$ имаме

$$A_1(t) = \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} t^{\kappa_k}.$$

Допускаме, че $A_m(t)$ е полином. Ще докажем, че и $A_{m+1}(t)$ също е полином. Имаме

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m+1}} = \frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{\frac{t^{\kappa_k}e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*} \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} e^{\lambda_k(t+\tau-\sigma)} A_m(\sigma)e^{\lambda_k\sigma}d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\chi_\tau\left\{e^{\lambda_k\tau}\int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} A_m(\sigma)d\sigma\right\}.$$

Тъй като от индукционното предположение имаме, че $A_m(t)$ е полином на t, то изразът $\chi_\tau\left\{e^{\lambda_k\tau}\int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} A_m(\sigma)d\sigma\right\}$ също е полином на t.

Следователно

$$A_{m+1}(t) = \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\chi_\tau\left\{e^{\lambda_k\tau}\int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} A_m(\sigma)d\sigma\right\} \tag{2.42}$$

е полином на t.

□

Ще опишем някои свойства на полиномите $A_m(t)$.

Следствие 2.4 *Нека λ_k е такова, че $E(\lambda_k) = E'(\lambda_k) = \ldots = E^{(\kappa_k-1)}(\lambda_k) = 0$ и $E^{(\kappa_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Ако $f \in \widetilde{C_k}$, тогава решение на (2.2)*

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_k y = f(t), \quad \chi_\tau\{y(\tau)\} = 0$$

е:

$$y(t) = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f(t). \tag{2.43}$$

Да обърнем внимание, че в доказателството на Лема 2.11 получихме явно представяне за полинома $A_{m+1}(t)$, участващ в представянето на оператора

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m+1}}$$

чрез $A_m(t)$, участващ в представянето на оператора

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m}}.$$

Следствие 2.5 *Нека $A_m(t)$ е такъв полином, че*

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*}.$$

Тогава полиномът

$$A_{m+1}(t) = \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\chi_\tau \left\{e^{\lambda_k \tau}\int_\tau^t (t+\tau-\sigma)^{\kappa_k} A_m(\sigma)d\sigma\right\}, \tag{2.44}$$

представя оператора

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^{m+1}} = \left\{A_{m+1}(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*}.$$

И тук, както след доказателството на Теорема 2.11, трябва да посочим, че функцията $\left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\}$, представяща оператора

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m},$$

не е единствена. Тя е определена с точност до квазиполином от вида $Q(t)e^{\lambda_k t}$, където $Q(t)$ е произволен полином от степен $\deg Q(t) \le \kappa_k - 1$. Наистина ако $f \in \widetilde{C_k}$ то

$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} f = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t} + Q(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f.$$

Но ако поискаме функцията $\left\{A_1(t)e^{\lambda_k t}\right\}$ представяща оператора $\dfrac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}$ да е от $\widetilde{C_k}$, ще покажем, че полиномът $A_1(t)$ е еднозначно определен и разбира се и полиномите $A_m(t)$ за $m = 2, 3, ...$ получени рекурентно от $A_1(t)$ чрез (2.42) са също еднозначно определени. Намерени по този начин полиномите $A_m(t)$ за $m = 1, 2, 3, ...$ имат интересни свойства.

Лема 2.12 *Съществува единствен полином $Q(t)$ от степен $\deg Q(t) \le \kappa_k - 1$, за които*

$$\frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + Q(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$$

Доказателство. Търсим полином $Q(t)$, за който е изпълнено

$$\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \left\{\frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + Q(t)e^{\lambda_k t}\right\} = 0. \tag{2.45}$$

т. е. $\dfrac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + Q(t)e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$.

Уравнението (2.45) има единствено решение

$$Q(t)e^{\lambda_k t} = -\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \left\{\frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\}. \tag{2.46}$$

□

Ще използваме означението

$$A_1(t) = \frac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} t^{\kappa_k} + Q(t). \tag{2.47}$$

Лема 2.13 *Нека $A_m(t)$ е такъв полином, че*

$$\frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_k)^m} = \left\{A_m(t) e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*}.$$

Съществува единствен полином $Q(t)$ от степен $\deg Q(t) \leq \kappa_k - 1$ за които

$$A_m(t) e^{\lambda_k t} + Q(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$$

Доказателство. Аналогично на доказателството на Лема 2.12 търсим полином $Q(t)$ за който е изпълнено

$$\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \left\{A_m(t) e^{\lambda_k t} + Q(t) e^{\lambda_k t}\right\} = 0. \tag{2.48}$$

т. е. $A_m(t) e^{\lambda_k t} + Q(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$.

Уравнението (2.48) има единствено решение

$$Q(t) e^{\lambda_k t} = -\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \left\{A_m(t) e^{\lambda_k t}\right\}. \tag{2.49}$$

□

Лема 2.14 *Ако $A_1(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$ (т. е. $A_1(t)$ е получен от (2.47)) и полиномите $A_m(t)$ за $m = 2, 3, ...$ са получени рекурентно от $A_1(t)$ чрез (2.42), тогава $A_m(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$ за $m = 2, 3, ...$*

Доказателство. Това, че $A_m(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$ за $m = 2, 3, ...$ може да се види веднага от представянето

$$A_m(t) e^{\lambda_k t} = \{A_{m-1}(t) e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} \{A_1(t) e^{\lambda_k t}\}.$$

Умножаваме конволюционно последното равенство с $\varphi_k(t)$ и намираме:

$$\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \{A_m(t) e^{\lambda_k t}\} = \{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \Big(\{A_{m-1}(t) e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} \{A_1(t) e^{\lambda_k t}\}\Big).$$

От асоциативността и комутативността на $\overset{t}{*}$ и от това, че $\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \{A_1(t) e^{\lambda_k t}\} = 0$, защото $A_1(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$, намираме

$$\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \{A_m(t) e^{\lambda_k t}\} = \{A_{m-1}(t) e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} \Big(\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \{A_1(t) e^{\lambda_k t}\}\Big) = 0.$$

Следователно $A_m(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$ за $m = 1, 2, 3, ...$

□

В случая, когато $A_m(t) e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_k}$, $m = 1, 2, 3, ...$, полиномите $A_m(t)$, $m = 1, 2, 3, ...$ имат свойствата описани в следващата теорема:

Теорема 2.12 *Полиномите $A_m(t)$ имат свойствата:*

$$A'_{m+1}(t) = A_m(t), \tag{2.50}$$
$$\chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_1(\tau)\} = 1, \qquad \chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_{m+1}(\tau)\} = 0 \tag{2.51}$$

за $m = 1, 2, 3, ...,$ *където* $A_1(t) = \dfrac{1}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} t^{\kappa_k} + Q(t)$, $\deg Q(t) = \kappa_k - 1$ *и* $Q(t)$ *е така избран, че* $A_1(t) \in \widetilde{C_k}$*. Т. е. Q(t) е определен от (2.46)* $Q(t)e^{\lambda_k t} = -\{\varphi_k(t)\} \overset{t}{*} \left\{ \dfrac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\}$.

Доказателство. Да докажем първото равенство в (2.51):

$$\chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_1(\tau)\} = \chi_\tau \left\{ \frac{\tau^{\kappa_k} e^{\lambda_n \tau}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} + Q(t) e^{\lambda_n \tau} \right\} = \chi_\tau \left\{ \frac{\tau^{\kappa_k} e^{\lambda_n \tau}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} + \chi_\tau \left\{ Q(t) e^{\lambda_n \tau} \right\}.$$

Понеже степента на $Q(t) < \kappa_k$, а λ_k е κ_k - кратен корен на $E(\lambda) = 0$, получаваме $\chi_\tau \left\{ Q(t) e^{\lambda_n \tau} \right\} = 0$. Следователно

$$\chi_\tau\{e^{\lambda_n \tau} A_1(\tau)\} = \frac{\chi_\tau\{\tau^{\kappa_k} e^{\lambda_k \tau}\}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} = 1.$$

След това, да докажем второто равенство в (2.51). От Теорема 2.11 имаме (2.41):

$$\frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_k)^{m+1}} = \left\{ A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*}.$$

Поради Лема 2.4, на $\left\{ A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*}$ може да гледаме като на елемент на пръстена на конволюционните частни $\mathcal{M}$. От (2.41) намираме

$$\frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_k)} \frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_k)^m} = \left\{ A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} \right\}. \tag{2.52}$$

Следователно
$$A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} = \{A_1(t) e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} \{A_m(t) e^{\lambda_k t}\}.$$
Сега прилагаме функционала χ към последното равенство и получаваме

$$\chi_\tau\{A_{m+1}(\tau) e^{\lambda_k \tau}\} = \chi_\tau\{(A_1(\tau)) \overset{\tau}{*} (A_m(t) e^{\lambda_k \tau})\}.$$

От Лема 2.2 следва, че дясната част на това равенство е равна на 0. С това доказахме (2.51).

Ще докажем (2.50). От (2.52) имаме

$$\frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_k)} \left\{ A_m(t) e^{\lambda_k t} \right\} = \left\{ A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t} \right\}.$$

Умножаваме това равенство с $\widetilde{s} - \lambda_k$ и последователно намираме

$$A_m(t) e^{\lambda_k t} = (\widetilde{s} - \lambda_k) A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t},$$

$$A_m(t) e^{\lambda_k t} = \widetilde{s}\{A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t}\} - \lambda_k A_{m+1}(t) e^{\lambda_k t}.$$

От Теорема 2.3, равенство (2.28) намираме

$$A_m(t)e^{\lambda_k t} = \frac{d}{dt}\left(A_{m+1}(t)e^{\lambda_k t}\right) + \chi_\tau\{A_{m+1}(\tau)e^{\lambda_k \tau}\} - \lambda_k A_{m+1}(t)e^{\lambda_k t}.$$

От доказаното свойство (2.51) следва, че $\chi_\tau\{A_{m+1}(\tau)e^{\lambda_k \tau}\} = 0$, за $m = 1, 2, 3, ...$ и намираме

$$A_m(t)e^{\lambda_k t} = A'_{m+1}(t)e^{\lambda_k t} + \lambda_k A_{m+1}(t)e^{\lambda_k t} - \lambda_k A_{m+1}(t)e^{\lambda_k t}.$$

От тук веднага следва (2.50): $A'_{m+1}(t) = A_m(t)$.

□

2.5.1 Примери

Пример 1. Разглеждаме елементарната нелокална гранична задача:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda y = f(t), \quad \int_0^1 f(\tau)d\tau = 0, \quad t \in [0,1]. \tag{2.53}$$

Тук $\chi_\tau\{g(\tau)\} = \displaystyle\int_0^1 g(\tau)d\tau$ и $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = \dfrac{e^\lambda - 1}{\lambda}$.

Решението на задача (2.53) при такова λ, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (2.4). В конкретния случай получаваме:

$$y = r_\lambda f = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)}f(\sigma)d\sigma\right\} = \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^\lambda - 1}\int_0^1\int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)}f(\sigma)d\sigma d\tau. \tag{2.54}$$

Нулите на $E(\lambda) = \dfrac{e^\lambda - 1}{\lambda}$ са $\lambda_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$ ($E(0) = 1$), всички са прости и $E'(\lambda_n) = \dfrac{1}{\lambda_n}$.

Ще намерим спектралния проектор на Леонтиев Λ_n (2.13). От (2.18) получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} = -\lambda_n e^{\lambda_n t} = -\frac{1}{2n\pi i}e^{2n\pi i t},$$

а за проектора Λ_n намираме

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t) = \lambda_n e^{\lambda_n t}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t e^{\lambda_n(\tau-\sigma)}f(\sigma)d\sigma\right\} =$$

$$= \lambda_n e^{\lambda_n t}\int_0^t\int_\tau^t e^{\lambda_n(\tau-\sigma)}f(\sigma)d\sigma d\tau.$$

Ако λ е такова, че $E(\lambda) = 0$, тогава съществува n, за което $\lambda = \lambda_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$, т. е. λ е една от собствените стойности λ_n на задачата

$$y' - \lambda y = 0, \quad \int_0^t f(\tau)d\tau = 0.$$

В този случай решение на (2.53) не може да се намери чрез (2.54). Попадаме в така наречения резонансен случай. Ако $\lambda = \lambda_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$, тогава $\widetilde{s} - \lambda_n$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_n} = \ker\Lambda_n$ и ако $f \in \widetilde{C_n}$ решение на (2.53)

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = f(t), \quad \int_0^1 y(\tau)d\tau = 0,$$

може да се намери чрез

$$y = \frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_n} \overset{t}{*} f = \left\{\frac{te^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)}\right\} \overset{t}{*} f = \left\{\lambda_n te^{\lambda_n t}\right\} \overset{t}{*} f(t).$$

Да разгледаме по-общата задача

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right)^m y = f(t), \quad t \in (0,1),$$

$$\int_0^1 y^{(j)}(\tau)d\tau = 0, \quad j = 0, 1, ..., m-1,$$

т. е.

$$\int_0^1 y(\tau)d\tau = 0, \qquad y^{(j-1)}(1) - y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, ..., m-1,$$

при $f \in \widetilde{C_n}$ решение е:

$$y = \frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_n)^m} \overset{t}{*} f = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f,$$

където $A_m(t)$ за $m = 1, 2, ...$ може да бъдат получени рекурентно от $A_1(t) \in \widetilde{C_n}$ чрез (2.42). За първите няколко полинома $A_m(t)$ разглеждани в Теорема 2.12 намираме:

$$A_1(t) = \lambda_n t + 1 - \frac{\lambda_n}{2},$$

$$A_2(t) = \frac{\lambda_n}{2}t^2 + \left(1 - \frac{\lambda_n}{2}\right)t - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_n}{12},$$

$$A_3(t) = \frac{\lambda_n}{6}t^3 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_n}{2}\right)t^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_n}{6}\right)t + \frac{1}{12},$$

$$A_4(t) = \frac{\lambda_n}{24}t^4 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\lambda_n}{2}\right)t^3 + \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{\lambda_n}{6}\right)t^2 + \frac{1}{12}t - \frac{\lambda_n}{720},$$

$$A_5(t) = \frac{\lambda_n}{120}t^5 + \frac{1}{24}\left(1 - \frac{\lambda_n}{2}\right)t^4 + \frac{1}{12}\left(-1 + \frac{\lambda_n}{6}\right)t^3 + \frac{1}{24}t^2 - \frac{\lambda_n}{720}t - \frac{1}{720}.$$

Пример 2. Разглеждаме елементарната нелокална гранична задача:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda y = f(t), \quad y(0) + y(1) = 0, \quad t \in [0, 1]. \tag{2.55}$$

Тук функционала χ е $\chi\{g\} = \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$ и $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = \frac{1}{2}(1 + e^\lambda)$.

Решението на задача (2.55) при λ такова, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (2.4). В конкретния случай получаваме:

$$\begin{aligned} y = r_\lambda f &= \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)}f(\sigma)d\sigma\right\} = \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{(1 + e^\lambda)}\left(\int_0^t e^{-\lambda\sigma}f(\sigma)d\sigma + \int_1^t e^{\lambda(1-\sigma)}f(\sigma)d\sigma\right). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Корените на $E(\lambda) = 0$ са $\lambda_n = (1 + 2n)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, всички са прости и $E'(\lambda_n) = \frac{1}{2}e^{(1+2n)\pi i} = -\frac{1}{2}$. Съответните собствени функции са $e^{\lambda_n t} = e^{(1+2n)\pi i t}$.

Ще намерим спектралният проектор на Леонтиев Λ_n (2.13). От (2.18) получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} = -\lambda_n e^{\lambda_n t}$$

и за проектора Λ_n намираме

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t) = 2e^{\lambda_n t}\chi_\tau \left\{ e^{\lambda_n \tau} \int_\tau^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma \right\} =$$

$$= e^{\lambda_n t} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma - \int_1^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma \right) = e^{\lambda_n t} \left(\int_0^1 e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma \right).$$

Ако λ е такова, че $E(\lambda) = 0$, тогава съществува такова n, че $\lambda = \lambda_n = (1+2n)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. λ е една от собствените стойности λ_n на задачата

$$y' - \lambda y = 0, \quad y(0) + y(1) = 0.$$

В този случай решение на задача (2.55)

$$y' - \lambda_n y = f(t), \quad y(0) + y(1) = 0.$$

не може да се намери чрез (2.56). При $\lambda = \lambda_n$ и $f \in \ker \Lambda_n$ решение на (2.55) може да се намери чрез

$$y = \frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_n} \overset{t}{*} f = \left\{ \frac{t e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)} \right\} \overset{t}{*} f = \tag{2.57}$$

$$= -e^{\lambda_n t} \left(t \int_0^1 e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma - \int_1^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma) d\sigma - \int_0^1 \sigma e^{-\lambda_k \sigma} f(\sigma) d\sigma \right).$$

Да разгледаме задачата

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n \right)^m y = f(t), \quad t \in (0,1),$$

$$y^{(j)}(0) + y^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m-1.$$

За $f \in \widetilde{C_n}$ решение е:

$$y = \frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_n)^m} \overset{t}{*} f = \left\{ A_m(t) e^{\lambda_k t} \right\} \overset{t}{*} f,$$

където $A_m(t)$ за $m = 1, 2, ...$ може да бъдат получени рекурентно от $A_1(t) \in \widetilde{C_n}$ чрез (2.42). За първите няколко полинома $A_m(t)$ разглеждани в Теорема 2.12 намираме:

$$A_1(t) = -2t + 1,$$

$$A_2(t) = -t^2 + t - \frac{1}{6},$$

$$A_3(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t,$$

$$A_4(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{360},$$

$$A_5(t) = -\frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{1}{360}t,$$

$$A_6(t) = -\frac{1}{360}t^6 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{144}t^4 + \frac{1}{720}t^2 - \frac{1}{15120}.$$

По-конкретно да разгледаме задачата:

Задача 2.1 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = e^{\lambda_k t}, \quad y(0) + y(1) = 0, \quad t \in (0,1),$$

където $n, k \in \mathbb{Z}$ и $n \neq k$. В този случай $f(t) = e^{\lambda_k t}$ и $\Lambda_n e^{\lambda_k t} = 0$. Решение на тази задача е

$$y(t) = \frac{ie^{i(2k+1)\pi t}}{2(n-k)\pi}.$$

Да разгледаме още една съвсем конкретна задача

Задача 2.2 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = \lambda_n(2t-1) - 2, \quad y(0) + y(1) = 0,$$

където $n \in \mathbb{Z}$. В тази задача $f(t) = \lambda_n(2t-1) - 2$ и $\Lambda_n\{f(t)\} = 0$. Този пример е получен отзад напред, т. е. като сме проверили, че функцията $y(t) = -2t + 1$ е решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = \lambda_n(2t-1) - 2, \quad y(0) + y(1) = 0.$$

Решение на тази задача получено с формула (2.57) е

$$y(t) = -2t + 1 + \frac{4}{\lambda_n^2} e^{\lambda_n t}.$$

Накрая да отбележим, че при $\lambda = \lambda_n = (1+2n)\pi i$ решението на (2.55) не е единствено. Ако $y_1(t)$ е решение на задача (2.55) при $\lambda = \lambda_n$ то и $y(t) = y_1(t) + Be^{\lambda_n t}$ е решение за произволна константа $B \in \mathbb{C}$.

Пример 3. Разглеждаме елементарната нелокална гранична задача:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda y = f(t), \quad y(0) + 2y(1) + y(2) = 0, \quad t \in [0,2]. \tag{2.58}$$

Тук $\chi_\tau\{g(\tau)\} = \frac{1}{4}(g(0) + 2g(1) + g(2))$ и $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = \frac{1}{4}(1+e^\lambda)^2$. Решението на задача (2.58) при λ такова, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (2.4):

$$\begin{aligned} (2.59)\, y &= r_\lambda f = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\} = \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{(1+e^\lambda)^2} \left(\int_0^t e^{-\lambda\sigma} f(\sigma) d\sigma + 2\int_1^t e^{\lambda(1-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \int_2^t e^{\lambda(2-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Нулите на $E(\lambda) = \dfrac{1}{4}(1+e^{\lambda})^2$ са $\lambda_n = (1+2n)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, всички са двукратни и $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = 0$, $E''(\lambda_n) = \dfrac{1}{2}$, $E'''(\lambda_n) = \dfrac{3}{2}$. Съответните собствени и присъединени функции са $e^{(1+2n)\pi i t}$, $te^{(1+2n)\pi i t}$.

Ще намерим спектралния проектор на Леонтиев Λ_n (2.13). От (2.19) получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{2e^{\lambda_n t}}{E''(\lambda_n)}\left(t - \frac{E'''(\lambda_n)}{3E''(\lambda_n)}\right) = -4e^{\lambda_n t}(t-1)$$

и за проектора Λ_n намираме

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t) = -4\{e^{\lambda_n t}(t-1)\} \overset{t}{*} f(t) =$$

$$= -4\chi_\tau\left\{\int_\tau^t e^{\lambda_n(t+\tau-\sigma)}(t+\tau-\sigma-1)f(\sigma)d\sigma\right\} =$$

$$= -4te^{\lambda_n t}\chi_\tau\left\{e^{\lambda_n\tau}\int_\tau^t e^{-\lambda_n\sigma}f(\sigma)d\sigma\right\} -$$

$$-4e^{\lambda_n t}\left(\chi_\tau\left\{\tau e^{\lambda_n\tau}\int_\tau^t e^{-\lambda_n\sigma}f(\sigma)d\sigma\right\} - \chi_\tau\left\{e^{\lambda_n\tau}\int_\tau^t \sigma e^{-\lambda_n\sigma}f(\sigma)d\sigma\right\} - \chi_\tau\left\{e^{\lambda_n\tau}\int_\tau^t e^{-\lambda_n\sigma}f(\sigma)d\sigma\right\}\right).$$

Ако λ е такова, че $E(\lambda) = 0$, тогава съществува такова n, че $\lambda = \lambda_n$ т. е. λ е една от собствените стойности $\lambda_n = (1+2n)\pi i$ на задачата

$$y' - \lambda y = 0, \quad y(0) + 2y(1) + y(2) = 0.$$

Тогава $\widetilde{s} - \lambda_n$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_n}$ и ако $f \in \widetilde{C_n}$, решение на (2.58) е

$$y = \frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_n} \overset{t}{*} f = \left\{\frac{t^2 e^{\lambda_n t}}{E''(\lambda_n)}\right\} \overset{t}{*} f(t) = \{2t^2 e^{\lambda_n t}\} \overset{t}{*} f(t). \tag{2.60}$$

И тук както в Пример 2, решението на задача (2.58) при $\lambda = \lambda_n = (1+2n)\pi i$ не е единствено. Ако $y_1(t)$ е решение на задача (2.58) при $\lambda = \lambda_n$, то и $y(t) = y_1(t) + Ae^{\lambda_n t}$ е решение за произволна константа $A \in \mathbb{C}$.

Да разгледаме по-общата задачата

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right)^m y = f(t), \quad t \in (0,2),$$

$$y^{(j)}(0) + 2y^{(j)}(1) + y^{(j)}(2) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m-1.$$

За $f \in \widetilde{C_n}$ решение е:

$$y = \frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_n)^m} \overset{t}{*} f = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f,$$

където $A_m(t)$ за $m = 1, 2, ...$ може да бъдат получени рекурентно от $A_1(t) \in \widetilde{C_n}$ чрез (2.42). За първите няколко полинома $A_m(t)$ разглеждани в Теорема 2.12 намираме:

$$A_1(t) = 2t^2 - 4t + \frac{5}{3},$$
$$A_2(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{5}{3}t - \frac{1}{3},$$
$$A_3(t) = \frac{1}{6}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{60},$$
$$A_4(t) = \frac{1}{30}t^5 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{5}{18}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{60}t + \frac{1}{180},$$
$$A_5(t) = \frac{1}{180}t^6 - \frac{1}{30}t^5 + \frac{5}{72}t^4 - \frac{1}{18}t^3 + \frac{1}{120}t^2 + \frac{1}{180}t - \frac{1}{1512}.$$

По-конкретно към този Пример 3, ще разгледаме три задачи в резонансния случай:

Задача 3.1 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = e^{\lambda_k t}, \quad t \in (0,2), \quad y(0) + 2y(1) + y(2) = 0,$$

където $n, k \in \mathbb{Z}$ и $n \neq k$. В този случай $f(t) = e^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_n}$ защото $\Lambda_n e^{\lambda_k t} = 0$, при $n \neq k$. Решение на тази задача е

$$y(t) = \{2t^2 e^{\lambda_n t}\} \overset{t}{*} f(t) = \frac{ie^{i(2k+1)\pi t}}{2(n-k)\pi}.$$

Задача 3.2 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = te^{\lambda_k t}, \quad y(0) + 2y(1) + y(2) = 0,$$

където $n, k \in \mathbb{Z}$ и $n \neq k$. В този случай $f(t) = te^{\lambda_k t} \in \widetilde{C_n}$. Решение на тази задача е

$$y(t) = \{2t^2 e^{\lambda_n t}\} \overset{t}{*} f(t) = \frac{e^{i(2k+1)\pi t}\left(2(k-n)it + 1\right)}{4(n-k)^2\pi^2}.$$

В последната задача ще видим, че условието $f \in \widetilde{C_n}$ т. е. $\Lambda_n f(t) = 0$ не е необходимо условие за съществуване на решение.

Задача 3.3 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_n y = \lambda_n(t-1) - 1, \quad y(0) + 2y(1) + y(2) = 0,$$

тук $f(t) = \lambda_n(t-1) - 1$.

Директно се вижда, че решението ѝ е $y(t) = 1 - t$ и $\Lambda_n f(t) = \dfrac{4e^{at}}{a^2} \neq 0$.

Пример 4. Разглеждаме елементарната нелокална гранична задача:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda y = f(t), \qquad y(0) + 3y(1) + 3y(2) + y(3) = 0, \qquad t \in [0,3]. \tag{2.61}$$

Тук $\chi_\tau\{g(\tau)\} = \dfrac{1}{8}(g(0) + 3g(1) + 3g(2) + g(3))$ и $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = \dfrac{1}{8}(1+e^\lambda)^3$.

Решението на задача (2.61) при такова λ, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (2.4):

$$y = r_\lambda f = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma)d\sigma\right\} = \tag{2.62}$$

$$= \frac{e^{\lambda t}}{(1+e^\lambda)^3}\left(\int_0^t e^{-\lambda\sigma} f(\sigma)d\sigma + 3\int_1^t e^{\lambda(1-\sigma)} f(\sigma)d\sigma + 3\int_2^t e^{\lambda(2-\sigma)} f(\sigma)d\sigma + \int_3^t e^{\lambda(3-\sigma)} f(\sigma)d\sigma\right).$$

Корените на $E(\lambda) = \dfrac{1}{8}(1+e^\lambda)^3 = 0$ са $\lambda_n = (1+2n)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, всички са трикратни и

$$E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = E''(\lambda_n) = 0, \quad E'''(\lambda_n) = -\frac{3}{4},\ E^{(4)}(\lambda_n) = -\frac{9}{2},\ E^{(5)}(\lambda_n) = -\frac{75}{4}.$$

Собствената и присъединените функции на λ_n са $e^{(1+2n)\pi i}$, $te^{(1+2n)\pi i}$, $t^2e^{(1+2n)\pi i}$.

Ще намерим спектралният проектор на Леонтиев Λ_n (2.13). От (2.20) получаваме

$$\varphi_n(t) = -\frac{3e^{\lambda_n t}}{E'''(\lambda_n)}\left(t^2 - \frac{E^{(4)}(\lambda_n)}{2E'''(\lambda_n)}t - \frac{E^{(5)}(\lambda_n)}{10E'''(\lambda_n)} + \frac{(E^{(4)}(\lambda_n))^2}{8(E'''(\lambda_n))^2}\right) =$$

$$= 4e^{\lambda_n t}\left(t^2 - 3t + 2\right).$$

Проекторът на Леонтиев е

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t) = 4\{e^{\lambda_n t}\left(t^2 - 3t + 2\right)\} \overset{t}{*} f(t).$$

Ако λ е такова, че $E(\lambda) = 0$, тогава съществува такова n, че $\lambda = \lambda_n = (1+2n)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. λ е една от собствените стойности λ_n на задачата

$$y' - \lambda y = 0, \quad y(0) + 3y(1) + 3y(2) + y(3) = 0.$$

В този случай решение на (2.61) не може да се намери чрез (2.62). Ако $\lambda = \lambda_n$ тогава $\widetilde{s} - \lambda_n$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_n} = \ker \Lambda_n$ и ако $f \in \widetilde{C_n}$ решение на (2.61) може да се намери чрез

$$y = \frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_n} f = \left\{\frac{t^3 e^{\lambda_n t}}{E'''(\lambda_n)}\right\} \overset{t}{*} f = \left\{-\frac{4}{3}t^3 e^{\lambda_n t}\right\} \overset{t}{*} f(t).$$

Да разгледаме по-общата задача

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right)^m y = f(t), \quad t \in (0,3),$$

$$y^{(j)}(0)+3y^{(j)}(1)+3y^{(j)}(2)+y^{(j)}(3)=0, \quad j=0,1,...,m-1.$$

За $f \in \widetilde{C_n}$ решение е:

$$y=\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_n)^m} \overset{t}{*} f=\left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} f,$$

В този случай за първите няколко полинома $A_m(t)$, разглеждани в Теорема 2.12, намираме:

$$A_1(t)=-\frac{4}{3}t^3+6t^2-8t+3,$$
$$A_2(t)=-\frac{1}{3}t^4+2t^3-4t^2+3t-\frac{19}{30},$$
$$A_3(t)=-\frac{1}{15}t^5+\frac{1}{2}t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{19}{30}t+\frac{1}{20},$$
$$A_4(t)=-\frac{1}{90}t^6+\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{3}t^4+\frac{1}{2}t^3-\frac{19}{60}t^2+\frac{1}{20}t+\frac{8}{945},$$
$$A_5(t)=-\frac{1}{630}t^7+\frac{1}{60}t^6-\frac{1}{15}t^5+\frac{1}{8}t^4-\frac{19}{180}t^3+\frac{1}{40}t^2+\frac{8}{945}t-\frac{1}{504}.$$

Задача 4.1 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt}-\lambda_n y=e^{\lambda_k t}, \quad y(0)+3y(1)+3y(2)+y(3)=0,$$

където $\lambda_n=(1+2n)\pi i$, $\lambda_k=(1+2k)\pi i$, $n,k\in\mathbb{Z}$ и $n\neq k$. В този случай $f(t)=e^{\lambda_k t}\in\widetilde{C_n}$. Решение на тази задача е

$$y(t)=\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_n}\{e^{\lambda_k t}\}=-\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_n-\lambda_k}=-\frac{e^{\lambda_k t}}{2(n-k)\pi i}.$$

По-общо ще намерим решение на задачата

$$\left(\frac{dy}{dt}-\lambda_n\right)^m y=e^{\lambda_k t}, \qquad t\in(0,3),$$
$$y^{(j)}(0)+3y^{(j)}(1)+3y^{(j)}(2)+y^{(j)}(3)=0, \qquad j=0,2,...,m-1,$$

където $\lambda_n=(1+2n)\pi i$, $\lambda_k=(1+2k)\pi i$, $n,k\in\mathbb{Z}$ и $n\neq k$. Решение на тази задача е

$$y(t)=\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_n)^m}\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\}=(-1)^m\frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda_n-\lambda_k)^m}=-\frac{e^{\lambda_k t}}{2^m(n-k)^m\pi^m i^m}.$$

Задача 4.2 Да се намери решение на задачата

$$\frac{dy}{dt}-\lambda_n y=te^{\lambda_k t}, \quad y(0)+3y(1)+3y(2)+y(3)=0, \quad t\in(0,3),$$

където $n,k\in\mathbb{Z}$ и $n\neq k$. В този случай $f(t)=te^{\lambda_k t}\in\widetilde{C_n}$. Решение на тази задача е

$$y(t)=\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_n}\{te^{\lambda_k t}\}=\left\{-\frac{4}{3}t^3e^{\lambda_n t}\right\}\overset{t}{*}\{te^{\lambda_k t}\}=-\frac{e^{\lambda_k t}}{(\lambda_n-\lambda_k)^2}-\frac{te^{\lambda_n t}}{\lambda_n-\lambda_k}.$$

По-общо да разгледаме задачата

$$\left(\frac{dy}{dt} - \lambda_n\right)^m y = te^{\lambda_k t}, \qquad t \in (0,3),$$
$$y^{(j)}(0) + 3y^{(j)}(1) + 3y^{(j)}(2) + y^{(j)}(3) = 0, \qquad j = 0, 2, ..., m-1.$$

Решение на тази задача е

$$y(t) = \frac{1}{(\widetilde{s} - \lambda_n)^m}\{te^{\lambda_k t}\} = \left\{A_m e^{\lambda_n t}\right\} \overset{t}{*} \{te^{\lambda_k t}\} = (-1)^m \frac{3e^{\lambda_k t}}{(\lambda_n - \lambda_k)^m} - \frac{te^{\lambda_k t}}{(\lambda_n - \lambda_k)^{m-1}}.$$

2.6 Конволюция при заглаждащ функционал

В Димовски ([45], стр. 77) са разгледани свойства на конволюцията $\overset{t}{*}$ при заглаждащ функционал. Казваме, че функционала χ е заглаждащ, ако е от вида

$$\chi_\tau\{f(\tau\} = \psi_\tau\left\{\int_0^\tau f(\sigma)d\sigma\right\}, \tag{2.63}$$

където ψ е линеен функционал.

При заглаждащ функцинал, ако $f, g \in C(\Delta)$ конволюцията им $(f \overset{t}{*} g)(t)$ е диференцируема и (вж. [45], стр. 77)

$$\frac{d}{dt}\Big((f \overset{t}{*} g)(t)\Big) =$$

$$= \psi_\tau\left\{\int_0^\tau f(t+\tau-\sigma)g(\sigma)d\sigma\right\} + \chi\{f\}g(t) + \chi\{g\}f(t) - \psi\{1\}\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Пример. Нека

$$\chi_\tau\{f(\tau\} = \int_0^1 f(\tau)d\tau.$$

Тук $\psi_\tau\{f(\tau)\} = f(1)$ и при $f, g \in C(\Delta)$ имаме

$$\frac{d}{dt}\Big((f \overset{t}{*} g)(t)\Big) =$$

$$= f(t)\int_0^1 g(\tau)d\tau + g(t)\int_0^1 f(\tau)d\tau - \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau - \int_t^1 f(1+t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Нека $f, g \in C(\Delta)$. В Димовкси [45] е разгледана операцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$ дефинирана с

$$f \overset{t}{\widetilde{*}} g = \frac{d}{dt}\Big((f \overset{t}{*} g)(t)\Big). \tag{2.64}$$

Поради линейността, комутативността и асоциативността на $\overset{t}{*}$ и $\overset{t}{\widetilde{*}}$ има тези свойства. Следователно аналогично на разглежданията до тук, може да разгледаме пръстена $(C(\Delta), +, \overset{t}{\widetilde{*}})$.

За разлика от $\overset{t}{*}$ операцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$ има единица и това е функцията $\{1\}$, т. е. за всяка функция $f \in C(\Delta)$ имаме

$$\{1\} \overset{t}{\widetilde{*}} f = f.$$

Друга разлика между $\overset{t}{*}$ и $\overset{t}{\widetilde{*}}$ е, че в общия случай функцията $f \overset{t}{\widetilde{*}} g$ не удовлетворява граничното условие в задача (2.1), т. е. изобщо

$$\chi\{f \overset{t}{\widetilde{*}} g\} \neq 0.$$

Ще разгледаме някои прилики между $\overset{t}{*}$ и $\overset{t}{\widetilde{*}}$ и свойства на $\overset{t}{\widetilde{*}}$ полезни при решаване на задачи, в които участва заглаждащ функционал.

Също както $\overset{t}{*}$ и операцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$ е конволюция за десния обратен оператор l на оператора за диференциране $\dfrac{d}{dt}$ определен с функционала χ

$$lf(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau - \chi_\tau\left\{\int_0^\tau f(\sigma)d\sigma\right\}.$$

По-точно:

Лема 2.15 Нека $f, g \in C$. Изпълнено е

$$l(f \overset{t}{\widetilde{*}} g) = (lf) \overset{t}{\widetilde{*}} g.$$

Доказателство. С директна проверка като се използва дефиницията на $\overset{t}{\widetilde{*}}$.
□

За следващите изследвания важна роля играе:

Лема 2.16 Нека $f, g \in C$. Изпълнено е

$$f \overset{t}{*} g = (lf) \overset{t}{\widetilde{*}} g. \tag{2.65}$$

Доказателство. Доказателството следва веднага от:

$$f \overset{t}{*} g = l\left(\frac{d}{dt}(f \overset{t}{*} g)\right) = l(f \overset{t}{\widetilde{*}} g) = (lf) \overset{t}{\widetilde{*}} g.$$

В последното равенство е използвано, че $\overset{t}{\widetilde{*}}$ е конволюция за оператора l .
□

Тази лема показва, че всеки конволюционен оператор спрямо конволюцията $\overset{t}{*}$ може директно да бъде изразен като конволюционен оператор спрямо конволюцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$, т. е. веднага може да намерим с каква функция се задава даден конволюционен оператор спрямо конволюцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$.

От тази лема веднага следва представянето за l като конволюционен оператор:

$$lf = \{t - \chi_\tau\{\tau\}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f. \tag{2.66}$$

Това равенство, може да се докаже чрез Лема 2.16 така:

$$lf = \{1\} \overset{t}{*} f = (l\{1\}) \overset{t}{\widetilde{*}} f$$

и разбира се $l\{1\} = t - \chi_\tau\{\tau\}$.

Аналогично на представянето за l може да намерим представяне и на резолвентния оператор (2.4)

$$r_\lambda f = \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t e^{\lambda(\tau-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\}$$

като конволюционен оператор спрямо конволюцията $\overset{t}{\tilde{*}}$.

Лема 2.17 Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) \neq 0$ и $f \in C(\Delta)$. Тогава

$$r_\lambda f = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda E(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right\} \overset{t}{\tilde{*}} f. \tag{2.67}$$

Доказателство. От Лема 2.16 имаме:

$$r_\lambda f = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f = \left(l \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \right) \overset{t}{\tilde{*}} f.$$

Ще пресметнем $l\{e^{\lambda t}\}$.

$$l\left\{e^{\lambda t}\right\} = \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau - \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau e^{\lambda \sigma} d\sigma \right\} = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\chi_\tau\{e^{\lambda \tau}\}}{\lambda} + \frac{\chi\{1\}}{\lambda}.$$

Като използваме $\chi\{1\} = 1$ и $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\lambda \tau}\}$ намираме

$$l\left\{e^{\lambda t}\right\} = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{E(\lambda)}{\lambda}.$$

За $l \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\}$ получаваме

$$l \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda E(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}.$$

Следователно

$$r_\lambda f = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \overset{t}{*} f = \left(l \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} \right\} \right) \overset{t}{\tilde{*}} f = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda E(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right\} \overset{t}{\tilde{*}} f.$$

□

По подобен начин може да намерим представяне за проектора $\Lambda_n f$ чрез $\overset{t}{\tilde{*}}$. От (2.14) имаме

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t), \quad n = 1, 2, ...,$$

където

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)} d\lambda.$$

От Лема 2.16 получаваме

$$\Lambda_n f = \varphi_n(t) \overset{t}{*} f(t) = (l\{\varphi_n(t)\}) \overset{t}{\tilde{*}} f(t).$$

2.6.1 Резонансен случай при заглаждащ функционал

Първо ще разгледаме случая когато λ_k е еднократен корен на $E(\lambda) = 0$ т. е. $E(\lambda_k) = 0$ и $E'(\lambda_k) \neq 0$.

Разглеждаме множеството $\widetilde{C_k}$. Както споменахме по-горе $\widetilde{C_k}$ може да се дефинира като ядро на проектора Λ_k и затова не зависи от конкретната конволюция.

Понеже $le^{\lambda_k t} = \dfrac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k}$, получаваме

$$e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \left\{le^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f = \left\{\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f.$$

Следователно

$$\widetilde{C_k} = \left\{f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = 0\right\} = \left\{f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = 0\right\} = \ker \Lambda_k.$$

От формулата (2.40) за κ_k-кратен корен

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{\frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*}$$

получаваме

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*}.$$

Ще намерим функция, чрез която операторът $\dfrac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k}$ се представя като конволюционен оператор за конволюцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$. Имаме

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\} \overset{t}{*} = \left(l\left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\}\right) \overset{t}{\widetilde{*}}.$$

Ако $f \in \widetilde{C_k}$

$$\left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{\chi_\tau\{\tau e^{\lambda_k \tau}\}}\right\} \overset{t}{*} f = \left(l\left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\}\right) \overset{t}{\widetilde{*}} f.$$

Ще пресметнем $l\left\{\dfrac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\}$. Първо намираме

$$\int_0^t \tau e^{\lambda_k \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k}.$$

За $l\{te^{\lambda_k t}\}$ получаваме:

$$l\{te^{\lambda_k t}\} = \int_0^t \tau e^{\lambda_k \tau} d\tau - \chi_\tau\left\{\int_0^\tau \sigma e^{\lambda_k \sigma} d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k} - \chi_\tau\left\{\frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k \tau}}{\lambda_k^2} + \frac{\tau e^{\lambda_k \tau}}{\lambda_k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{\chi_\tau\left\{e^{\lambda_k \tau}\right\}}{\lambda_k^2} - \frac{\chi_\tau\left\{\tau e^{\lambda_k \tau}\right\}}{\lambda_k}.$$

Като използваме $E(\lambda_k) = \chi_\tau\left\{e^{\lambda_k \tau}\right\} = 0$ и $E'(\lambda_k) = \chi_\tau\left\{\tau e^{\lambda_k \tau}\right\}$ намираме

$$l\{te^{\lambda_k t}\} = -\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k} - \frac{E'(\lambda_k)}{\lambda_k}.$$

Получаваме

$$l\left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\} = -\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)}\left(t - \frac{1}{\lambda_k}\right)e^{\lambda_k t}.$$

Следователно

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f = \left\{-\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)}\left(t - \frac{1}{\lambda_k}\right)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f.$$

Понеже функцията, задаваща оператора $\dfrac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f$, е определена с точност до събираемо от вида $ae^{\lambda_k t}$, $a \in \mathbb{C}$ е константа, може да запишем:

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f = \left\{-\frac{1}{\lambda_k} + \left(\frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)} t + a\right)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f,$$

където $a \in \mathbb{C}$ е произволна константа. Ще определим a така, че функцията

$$-\frac{1}{\lambda_k} + \left(\frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)} t + a\right)e^{\lambda_k t}$$

да принадлежи на $\widetilde{C_k}$. Пресмятаме

$$\Lambda_k\left\{-\frac{1}{\lambda_k} + \left(\frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)} t + a\right)e^{\lambda_k t}\right\} = -\lambda_k e^{\lambda_k t}\left(\frac{1}{\lambda_k} + E'(\lambda_k)a + \frac{E''(\lambda_k)}{2\lambda_k E'(\lambda_k)}\right).$$

Тази проекция е равна на нула тогава и само тогава когато

$$a = -\frac{1}{\lambda_k} - \frac{E''(\lambda_k)}{2E'(\lambda_k)}.$$

Следователно

$$-\frac{1}{\lambda_k} + \left(\frac{1}{\lambda_k E'(\lambda_k)} t - \frac{1}{\lambda_k} - \frac{E''(\lambda_k)}{2E'(\lambda_k)}\right)e^{\lambda_k t} \quad \in \quad \widetilde{C_k}.$$

Пример. Ако $\chi_\tau\{f(\tau)\} = \displaystyle\int_0^1 f(\tau)d\tau$, тогава $E'(\lambda_k) = \dfrac{1}{\lambda_k}$. В този конкретен случай получаваме:

$$l\left\{\frac{te^{\lambda_k t}}{E'(\lambda_k)}\right\} = -\frac{1}{\lambda_k} + \left(t - \frac{1}{\lambda_k}\right)e^{\lambda_k t}.$$

Следователно

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} f = \left\{-\frac{1}{\lambda_k} + \left(t - \frac{1}{\lambda_k}\right)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f.$$

Може да запишем и
$$\frac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}f = \left\{-\frac{1}{\lambda_k} + (t+a)\,e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f,$$
където $a \in \mathbb{C}$ е константа.

Да намерим проекцията на функцията $-\dfrac{1}{\lambda_k} + (t+a)\,e^{\lambda_k t}$ при Λ_k. Намираме:
$$\Lambda_k\left\{-\frac{1}{\lambda_k} + (t+a)\,e^{\lambda_k t}\right\} = \varphi_k(t) \overset{t}{*} f(t) = (l\{\varphi_k(t)\}) \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \left(\frac{1}{2}+a\right)e^{\lambda_k t}.$$

От тук следва, че функцията $-\dfrac{1}{\lambda_k} + (t+a)\,e^{\lambda_k t}$, представяща оператора $\dfrac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}$, принадлежи на $\widetilde{C_k}$ тогава и само тогава когато $a = -\dfrac{1}{2}$. Т. е. има вида
$$-\frac{1}{\lambda_k} + \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{\lambda_k t} = -\frac{1}{\lambda_k} + B_1(t)e^{\lambda_k t},$$
където $B_1(t) = t - \dfrac{1}{2}$ е първият полином на Бернули.

Да отбележим, че $-\dfrac{1}{\lambda_k} + B_1(t)e^{\lambda_k t}$ може да се получи директно от
$$l\left\{A_1(t)e^{\lambda_k t}\right\} = -\frac{1}{\lambda_k} + B_1(t)e^{\lambda_k t},$$
където
$$A_1(t) = \lambda_n t + 1 - \frac{\lambda_n}{2}$$
е съответния полином на Апел, участващ в представянето на конволюционния оператор $\dfrac{1}{\widetilde{s}-\lambda_k}$ като функция от $\widetilde{C_k}$ спрямо конволюцията $\overset{t}{*}$.

В общия случай имаме
$$\frac{1}{(\widetilde{s}-\lambda_k)^m} = \left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{*} = \left\{\frac{(-1)^m}{\lambda_k^m} + \frac{1}{m!}B_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}}.$$
Това представяне е в сила защото от Лема 2.16 следва
$$l\left\{A_m(t)e^{\lambda_k t}\right\} = \frac{(-1)^m}{\lambda_k^m} + \frac{1}{m!}B_m(t)e^{\lambda_k t},$$
където $B_m(t)$ е m-тият полином на Бернули, а $A_m(t)$ са получени по описаният в Лема 2.14 начин.

Функциите
$$\frac{(-1)^m}{\lambda_k^m} + \frac{1}{m!}B_m(t)e^{\lambda_k t}$$
може да се получат независимо от функциите $A_m(t)e^{\lambda_k t}$ по начин подобен на описания в Лема 2.14, а именно

Лема 2.18 *Нека означим*

$$\widetilde{B}_1(t) = -\frac{1}{\lambda_k} + B_1(t)e^{\lambda_k t},$$

и функциите $\widetilde{B}_{m+1}(t)$ *са получени рекурентно от* $\widetilde{B}_1(t)$ *чрез*

$$\widetilde{B}_{m+1}(t) = \left\{-\frac{1}{\lambda_k} + B_1(t)e^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} \widetilde{B}_m(t),$$

за $m = 1, 2, \ldots$.

Тогава

$$\widetilde{B}_m(t) = \frac{(-1)^m}{\lambda_k^m} + \frac{1}{m!}B_m(t)e^{\lambda_k t},$$

където $B_m(t)$ *е* m*- тия полином на Бернули и* $\widetilde{B}_m(t) \in \widetilde{C_k}$*, за* $m = 1, 2, \ldots$.

Доказателство. Аналогично на Лема 2.14.
□

Двукратен корен. Да разгледаме случая когато λ_k е двукратен корен на $E(\lambda)$ т. е. $E(\lambda_k) = E'(\lambda_k) = 0$ и $E''(\lambda_k) \neq 0$. За $\widetilde{C_k}$ имаме:

$$\widetilde{C_k} = \left\{f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = 0\right\} = \left\{f \in C : \{le^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \left(l\{te^{\lambda_k t}\}\right) \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = 0\right\}.$$

Ще видим, че във второто множество може да махнем оператора l. За тази цел да намерим $l\{te^{\lambda_k t}\}$. Имаме

$$l\{te^{\lambda_k t}\} = \int_0^t \tau e^{\lambda_k \tau} d\tau - \chi_\tau \left\{\int_0^\tau \sigma e^{\lambda_k \sigma} d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k} - \chi_\tau \left\{\frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k \tau}}{\lambda_k^2} + \frac{\tau e^{\lambda_k \tau}}{\lambda_k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{\chi_\tau\left\{e^{\lambda_k \tau}\right\}}{\lambda_k^2} + \frac{\chi_\tau\left\{\tau e^{\lambda_k \tau}\right\}}{\lambda_k}.$$

Като използваме $E(\lambda_k) = \chi_\tau\left\{e^{\lambda_k \tau}\right\} = 0 = E'(\lambda_k) = \chi_\tau\left\{\tau e^{\lambda_k \tau}\right\}$, намираме

$$l\{te^{\lambda_k t}\} = -\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k^2} + \frac{te^{\lambda_k t}}{\lambda_k}. \tag{2.68}$$

От тук и от

$$\left\{le^{\lambda_k t}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f = \left\{\frac{e^{\lambda_k t}}{\lambda_k}\right\} \overset{t}{\widetilde{*}} f.$$

намираме, че за $f \in C$ е изпълнено $\{le^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \left(l\{te^{\lambda_k t}\}\right) \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = 0$ тогава и само тогава когато $\{e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \left(te^{\lambda_k t}\right) \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = 0$. Следователно

$$\widetilde{C_k} = \left\{ f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = 0 \right\} = \left\{ f \in C : \{e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = 0 \right\}.$$

Аналогично на разглежданията за еднократен корен и тук ще намерим функция чрез която операторът $\dfrac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k}$ се представя като конволюционен оператор за конволюцията $\overset{t}{\widetilde{*}}$. От формулата (2.40) за κ_k-кратен корен

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{ \frac{t^{\kappa_k} e^{\lambda_k t}}{E^{(\kappa_k)}(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*}$$

получаваме

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{ \frac{t^2 e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*}.$$

От Лема 2.16 имаме

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{ \frac{t^2 e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{*} = \left(l \left\{ \frac{t^2 e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\} \right) \overset{t}{\widetilde{*}}.$$

Ще пресметнем $l \left\{ \dfrac{t^2 e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\}$. Първо намираме

$$\frac{1}{E''(\lambda_k)} \int_0^t \tau^2 e^{\lambda_k \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda_k^3 E''(\lambda_k)} \left(-2 + e^{\lambda_k t}(2 - 2\lambda_k t + \lambda_k^2 t^2) \right).$$

Следователно

$$l \left\{ \frac{t^2 e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\} = \int_0^t \frac{\tau^2 e^{\lambda_k \tau}}{E''(\lambda_k)} d\tau - \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau \frac{\sigma^2 e^{\lambda_k \sigma}}{E''(\lambda_k)} d\sigma \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} + (\lambda_k^2 t^2 - 2\lambda_k t + 2) \frac{e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)}.$$

Получихме, че при двукратен корен λ_k на $E(\lambda)$ имаме

$$\frac{1}{\widetilde{s} - \lambda_k} = \left\{ \frac{1}{\lambda_k} + (\lambda_k^2 t^2 - 2\lambda_k t + 2) \frac{e^{\lambda_k t}}{E''(\lambda_k)} \right\} \overset{t}{\widetilde{*}}.$$

κ_k- кратен корен

Нека λ_k е κ_k кратен корен на индикатрисата $E(\lambda)$. Ще докажем една лема описваща множеството $\widetilde{C_k}$ чрез $\overset{t}{\widetilde{*}}$.

Лема 2.19 *Нека $f \in C$. Тогава*

$$e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = ... = \{t^{\kappa_k - 1} e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = 0$$

тогава и само тогава когато

$$e^{\lambda_k t} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = ... = \{t^{\kappa_k - 1} e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f = 0.$$

Доказателство. Може да се докаже директно с индукция по кратността κ_k на λ_k като корен на $E(\lambda)$.
$\square$

От Лема 2.19 следва, че:

$$\widetilde{C_k} = \left\{ f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{*} f = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = ... = \{t^{\kappa_k - 1} e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{*} f = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ f \in C : e^{\lambda_k t} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = \{te^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f(t) = ... = \{t^{\kappa_k - 1} e^{\lambda_k t}\} \overset{t}{\widetilde{*}} f = 0 \right\}.$$

3 Операционно смятане за нелокални гранични задачи от първи род за квадрата на диференцирането

Операторът $\dfrac{d^2}{dx^2}$ се разглежда в пространството на двукратно гладките функции в интервала $[0,a]$ или върху оста $[0,\infty)$. Операционните смятания свързани с квадрата на диференцирането целят ефективно решаване на гранични задачи от вида

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)y = f,$$

$$y(0)=\alpha_0,\ \ y''(0)=\alpha_1,\ \dots,\ y^{(2n-2)}(0)=\alpha_{n-1},$$
$$\Phi\{y\}=\beta_0,\ \ \Phi\{y''\}=\beta_1,\ \dots,\ \Phi\{y^{(2n-2)}\}=\beta_{n-1},$$

където Φ е ненулев линеен функционал в пространството $C^1([0,a])$ или $C^1[0,\infty)$ на гладките функции, а P е полином с постоянни коефициенти и $\deg P = n$.

Да разгледаме най-простата задача от този тип:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y = f(x),\quad x\in(0,a),\quad y(0)=0,\quad \Phi_\xi\{y(\xi)\}=0, \tag{3.1}$$

където предполагаме, че линейният функционал Φ е дефиниран върху $C^1([0,a])$ или $C^1([0,\infty)$. Всеки такъв функционал Φ има стилтйесово представяне от вида:

$$\Phi_\xi\{f(\xi)\} = Af(a)+\int_0^a f'(\eta)d\alpha(\eta),\quad f\in C^1[0,a], \tag{3.2}$$

където α е функция с ограничена вариация, а A е константа. Ще предполагаме още, че $\Phi_\xi\{\xi\}\neq 0$. В този случай без ограничение на общността ще считаме, че

$$\Phi_\xi\{\xi\}=1. \tag{3.3}$$

В задачите на класическата математическа физика (виж. например Полянин [84]) линейният функционал Φ обикновено е от вида

$$\Phi_\xi\{f(\xi)\} = f(a)\qquad \text{или}\qquad \Phi_\xi\{f(\xi)\}=f'(a)-hf(a),$$

където h е константа. Ако искаме тези функционали да удовлетворяват (3.3), записваме ги във вида

$$\Phi_\xi\{f(\xi)\}=\frac{1}{a}f(a)\qquad \text{или}\qquad \Phi_\xi\{f(\xi)\}=\frac{1}{1-ha}\left(f'(a)-hf(a)\right).$$

Функцията $E(\lambda)=\Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}$ се нарича *синусова индикатриса* на функционала Φ.

Първо разглеждаме задача (3.1) за такива λ, при които $E(\lambda)\neq 0$. В този случай решението на (3.1) е резолвентният оператор $R_{-\lambda^2}(f)$ на (3.1):

$$R_{-\lambda^2}(f)=\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi-\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\Phi_\xi\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^\xi f(\eta)\sin\lambda(\xi-\eta)d\eta\right\}. \tag{3.4}$$

При ограничението $\Phi_\xi\{\xi\} = 1$ този резолвентен оператор е дефиниран при $\lambda = 0$. Означаваме $Lf(x) = R_0(f)$ и намираме

$$Lf(x) = \int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi - x\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi (\xi-\eta)f(\eta)d\eta\right\}. \tag{3.5}$$

L е десният обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{d^2}{dx^2}$ определен с условията $(Lf)(0) = 0$ и $\Phi_\xi\{L_x f(\xi)\} = 0$.

На всеки корен λ_n на уравнението $E(\lambda) = 0$ съответства собствена стойност $-\lambda_n^2$ на спектралната задача

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad x \in (0,a), \quad y(0) = 0, \quad \Phi_\xi\{y(\xi)\} = 0. \tag{3.6}$$

Спектърът на тази задача е непразен, когато носителят на функционала Φ съдържа поне една точка различна от 0. По-нататък ще разглеждаме само такива функционали.

Нека нулите на $E(\lambda)$ са λ_n, съответно с кратностти κ_n, $n = 1, 2, ...$, т. е.

$$E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n - 1)}(\lambda_n) = 0, \quad E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0,$$

за $n = 1, 2, 3, ...$

На всяка собствена стойност $-(\lambda_n)^2$ с кратност κ_n съответства собствена функция $\sin\lambda_n x$ и $\kappa_n - 1$ на брой присъединени функции $x\cos\lambda_n x$, $x^2\sin\lambda_n x$, ..., $x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x$ ако κ_n е нечетно и $x\cos\lambda_n x$, $x^2\sin\lambda_n x$, ..., $x^{\kappa_n-1}\cos\lambda_n x$, ако κ_n е четно (вж. [50]).

Резолвентният оператор (3.4) може да се използва за дефиниране на спектралните проектори, свързани със собствените стойности на (3.6).

Дефиниция 3.1 *[50] Съответствието*

$$f(x) \mapsto P_{\lambda_n}\{f\} = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_n} R_{-\lambda^2}(f)\lambda d\lambda, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{3.7}$$

където Γ_n *е прост контур в комплексната равнина, съдържащ само нулата* λ_n *на* $E(\lambda)$ *и никоя друга нула, се нарича спектрален проектор на граничната задача (3.1), свързан с нулата* λ_n *на инидикатрисата* $E(\lambda)$.

Основен проблем при спектралните проекции е задачата за единственост или тоталност, т. е. кога от $P_{\lambda_n}\{f\} \equiv 0$ за $n = 1, 2, ...$ следва $f \equiv 0$. Решение на този проблем за краен интервал $[a, b]$ се дава от теоремата на Божинов [36]: Необходимо и достатъчно условие за тоталност на P_{λ_n} е десния край на интервала $[0, a]$ да принадлежи на носителя supp Φ на функционала Φ, т. е. $a \in \text{supp } \Phi$.

Пример. Нека λ_n е проста нула на $E(\lambda)$. Тогава

$$P_{\lambda_n}\{f\} = -\frac{1}{E'(\lambda_n)}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi f(\eta)\sin\lambda_n(\xi-\eta)d\eta\right\}\sin\lambda_n x. \tag{3.8}$$

В края на главата ще приведем примери на проектори свързани с кратни нули при конкретни функционали.

3.1 Конволюция на десния обратен оператор L на оператора за квадрата на диференцирането

В Димовски [45] са развити елементи операционно смятане за оператора L в пространството C^1 на диференцируемите функции в интервал $[0, a]$. Следван е методът на Микусински, като вместо Дюамеловата конволюция е използвана конволюцията (3.9).

Теорема 3.1 *(Димовски [45] стр. 119) Нека $f, g \in C^1([0, a])$. Тогава операцията $\overset{x}{*}$:*

$$(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\widetilde{\Phi}_\xi\{h(x, \xi)\}, \tag{3.9}$$

където $\widetilde{\Phi}_\xi = \Phi_\xi \circ l_\xi$ с $l_\xi f(\xi) = \int_0^\xi f(\zeta)d\zeta$ и

$$h(x, \zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta + x - \eta)g(\eta)d\eta - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta - x - \eta|)g(|\eta|)\text{sgn}(\eta(\zeta - x - \eta))d\eta$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C^1([0, a])$, за която резолвентният оператор $R_{-\lambda^2} f$ има представяне от вида

$$R_{-\lambda^2} f = \left\{\frac{\sin \lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f \tag{3.10}$$

и по-специално, $Lf(x) = \{x\} \overset{x}{*} f$.

Доказателство. (Вж. Димовски [45] стр. 119.)

Очевидно е, че ако $f, g \in C([0, a])$ то $f \overset{x}{*} g \in C([0, a])$,
т. е. $\overset{x}{*} : \ C([0, a]) \times C([0, a]) \to C([0, a])$.

Билинейност на (3.9). От линейността на участващите интеграли в дефиницията на (3.9) и линейността на функционала Φ, веднага следва билинейността на $\overset{x}{*}$.

Комутативност на (3.9). Комутативността на $\overset{x}{*}$ ще докажем като направим смяна на интеграционната променлива в двата интеграла, участващи в израза за $h(x, \xi)$. По-подробно, нека да разгледаме първия интеграл

$$\int_x^\xi f(\xi + x - \eta)g(\eta)d\eta$$

полагаме $\alpha = \xi + x - \eta$ следователно $d\eta = -d\alpha$ и $\xi > \alpha > x$. Получаваме

$$\int_x^\xi f(\xi + x - \eta)g(\eta)d\eta = \int_x^\xi f(\alpha)g(\xi + x - \alpha)d\alpha.$$

Аналогично нека да разгледаме и втория интеграл участващ в израза за $h(x, \xi)$

$$\int_{-x}^\xi f(|\xi - x - \eta|)g(|\eta|)\text{sgn}(\eta(\xi - x - \eta))d\eta.$$

Полагаме $\alpha = \xi - x - \eta$ следователно $d\eta = -d\alpha$ и $\xi > \alpha > -x$. Получаваме

$$\int_{-x}^{\xi} f(|\xi - x - \eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\xi - x - \eta))d\eta = \int_{-x}^{\xi} f(|\alpha|)g(|\xi - x - \alpha|)\mathrm{sgn}((\xi - x - \alpha)\alpha)d\alpha.$$

Следователно $f \overset{x}{*} g = g \overset{x}{*} f$.

Асоциативност на (3.9). Първо ще докажем асоциативността на (3.9) за функции от вида $\sin \lambda x$. Нека числата $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ са произволни но $\lambda \neq \mu$. Имаме:

$$\{\sin \lambda x\} \overset{x}{*} \{\sin \mu x\} = \frac{\Phi_\xi\{\cos \xi\lambda\} \sin \mu x - \Phi_\xi\{\cos \xi\mu\} \sin \lambda x}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

От тук намираме директно, че:

$$\left(\{\sin \lambda x\} \overset{x}{*} \{\sin \mu x\}\right) \overset{x}{*} \{\sin \nu x\} = \{\sin \lambda x\} \overset{x}{*} \left(\{\sin \mu x\} \overset{x}{*} \{\sin \nu x\}\right). \tag{3.11}$$

Диференцирайки (3.11) $2m$ пъти по λ, $2n$ пъти по μ и $2p$ пъти по ν намираме

$$\left(\{x^{2m} \sin \lambda x\} \overset{x}{*} \{x^{2n} \sin \mu x\}\right) \overset{x}{*} \{x^{2p} \sin \nu x\} = \{x^{2m} \sin \lambda x\} \overset{x}{*} \left(\{x^{2n} \sin \mu x\} \overset{x}{*} \{x^{2p} \sin \nu x\}\right).$$

Разделяме двете страни на последното равенство на $\lambda\mu\nu$ и го записваме във вида:

$$\left(\{x^{2m}\frac{\sin \lambda x}{\lambda}\} \overset{x}{*} \{x^{2n}\frac{\sin \mu x}{\mu}\}\right) \overset{x}{*} \{x^{2p}\frac{\sin \nu x}{\nu}\} = \{x^{2m}\frac{\sin \lambda x}{\lambda}\} \overset{x}{*} \left(\{x^{2n}\frac{\sin \mu x}{\mu}\} \overset{x}{*} \{x^{2p}\frac{\sin \nu x}{\nu}\}\right).$$

При граничен преход $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$ и $\nu \to 0$, получаваме

$$\left(\{x^{2m+1}\} \overset{x}{*} \{x^{2n+1}\}\right) \overset{x}{*} \{x^{2p+1}\} = \{x^{2m+1}\} \overset{x}{*} \left(\{x^{2n+1}\} \overset{x}{*} \{x^{2p+1}\}\right). \tag{3.12}$$

Това равенство е изпълнено за $m, n, p = 0, 1, 2, ...$

Поради линейността на $\overset{x}{*}$, от равенство (3.12), следва асоциативността на $\overset{x}{*}$ за полиноми на x от нечетна степен. Под полиноми на x от нечетна степен ще разбираме полиноми на x в които всички коефициентите пред x на четна степен са равни на нула. Т. е. ако P, Q, R са полиноми от вида:

$$P(x) = \sum_{l=0}^{p} a_l x^{2l+1}, \quad Q(x) = \sum_{m=0}^{q} b_m x^{2m+1}, \quad R(x) = \sum_{n=0}^{r} c_n x^{2n+1},$$

имаме

$$\left(P(x) \overset{x}{*} Q(x)\right) \overset{x}{*} R(x) = P(x) \overset{x}{*} \left(Q(x) \overset{x}{*} R(x)\right).$$

Понеже всяка функция $f \in C([0, a])$ за която $f(0) = 0$ може да се приближи равномерно с полиноми от нечетна степен и поради непрекъснатостта на $\overset{x}{*}$ следва асоциативността на $\overset{x}{*}$ за функции f, g, h за които $f, g, h \in C([0, a])$ и $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ т. е. за такива функции имаме

$$\left(f \overset{x}{*} g\right) \overset{x}{*} h = f \overset{x}{*} \left(g \overset{x}{*} h\right).$$

За да докажем асоциативността на $\overset{x}{*}$ за произволни функции от $C([0,a])$ (т. е. да отпадне условието $f(0)=g(0)=h(0)=0$ за $f,g,h\in C([0,a])$) директно проверяваме, че за $g,h\in C([0,a])$ и $g(0)=h(0)=0$ е изпълнено:

$$\Big(\{1\}\overset{x}{*}g\Big)\overset{x}{*}h=\{1\}\overset{x}{*}\Big(g\overset{x}{*}h\Big)$$

и

$$\Big(\{1\}\overset{x}{*}\{1\}\Big)\overset{x}{*}h=\{1\}\overset{x}{*}\Big(\{1\}\overset{x}{*}h\Big).$$

Тази проверка е елементарна.

Равенство (3.10) се доказва с директна проверка.

□

Важно свойство на конволюционното произведение $(f\overset{x}{*}g)(x)$ е, че то винаги удовлетворява граничното условие $\Phi_\xi\{f\overset{\xi}{*}g\}=0$.

Лема 3.1 Ако $f,g\in C([0,a])$, то $\Phi_\xi\{f\overset{\xi}{*}g\}=0$.

Доказателство. От дефиницията на конволюцията $\overset{x}{*}$ получаваме:

$$\Phi_x\left\{(f\overset{x}{*}g)(x)\right\}=-\frac{1}{2}\Phi_x\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\},$$

където

$$h(x,\zeta)=\int_x^\zeta f(\zeta+x-\sigma)g(\sigma)d\sigma-\int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\sigma|)g(|\sigma|)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma.$$

От теоремата на Фубини От теоремата на Фубини (вж. [26], стр. 292) за Стилтйесовият интеграл

$$\Phi_\xi\{f(\xi)\}=Af(a)+\int_0^a f'(\sigma)d\alpha(\sigma),$$

имаме

$$\Phi_x\Phi_\xi\{p(x,\xi)\}=\Phi_\xi\Phi_x\{p(x,\xi)\}.$$

Тогава

$$\Phi_x\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}=\Phi_\xi\Phi_x\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}.$$

Аналогично на доказателството на Лема 2.2 за конволюцията $\overset{t}{*}$ и тук намираме:

$$\Phi_x\left\{(f\overset{x}{*}g)(x)\right\}=-\Phi_\xi\{(f\overset{\xi}{*}g)(\xi)\}$$

и като заменим ξ с x в последното равенство получаваме

$$\Phi_x\left\{(f\overset{x}{*}g)(x)\right\}=-\Phi_x\{(f\overset{x}{*}g)(x)\},$$

Следователно $\Phi_x\{(f\overset{x}{*}g)(x)\}=0$.

□

В намерените по-нататък точни решения на гранични задачи, ще участват втора и четвърта производна от конволюцията $(f \overset{x}{*} g)(x)$. Затова сега ще изведем формули за $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f \overset{x}{*} g)(x)$, $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}(f \overset{x}{*} g)(x)$.

Да припомним дефиницията на $(f \overset{x}{*} g)(x)$:

$$(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}, \tag{3.13}$$

$$h(x,\zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta+x-\eta)g(\eta)d\eta - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta-x-\eta))d\eta,$$

$f, g \in C[0,a]$.

По-нататък ще използваме означението

$$k(x,\zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta+x-\eta)g(\eta)d\eta + \int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta-x-\eta))d\eta.$$

Директно се проверява, че

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta}k(x,\zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}h(x,\xi) - 2f(x)g(\xi) - 2g(x)f(\xi)$$

и $k(x,0) = 0$.

Имаме

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial x}h(x,\zeta)d\zeta\right\} = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial \zeta}k(x,\zeta)d\zeta\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{k(x,\xi) - k(x,0)\right\} = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{k(x,\xi)\right\}.$$

От тук за $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f \overset{x}{*} g)(x)$ намираме:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\frac{\partial}{\partial x}k(x,\xi)\right\} = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}h(x,\xi) - 2f(x)g(\xi) - 2g(x)f(\xi)\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}k(x,\zeta) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^\zeta f(\zeta+x-\eta)g(\eta)d\eta + \int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta-x-\eta))d\eta\right) = \\
&= \int_x^\zeta f'(\zeta+x-\eta)g(\eta)d\eta - f(\zeta)g(x) - \int_{-x}^\zeta f'(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta)d\eta - \\
&\quad - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)2\delta(\zeta-x-\eta)\mathrm{sgn}(\eta)d\eta + f(\zeta)g(x) = \\
&= \int_x^\zeta f'(\zeta+x-\eta)g(\eta)d\eta - \int_{-x}^\zeta f'(|\zeta-x-\eta|)g(|\eta|)\mathrm{sgn}(\eta)d\eta - 2f(0)g(|\zeta-x|).
\end{aligned}$$

В извода сме използвали, че

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathrm{sgn}(\eta(\zeta-x-\eta))\big)=-2\delta(\zeta-x-\eta)\ \mathrm{sgn}(\eta)$$

и

$$\int_a^b f(\eta)\delta(\eta-c)d\eta=f(c),$$

където δ е функцията на Дирак.

Понякога ще е удобно да се използва и следното представяне при което сме "прехвърлили" производната от f на g:

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,\zeta)=\int_x^\zeta f(\zeta+x-\eta)g'(\eta)d\eta+\int_{-x}^\zeta f(|\zeta-x-\eta|)g'(|\eta|)\mathrm{sgn}(\zeta-x-\eta)d\eta-2f(\zeta-x)g(0).$$

В приложенията на тази формула, функцията $f(x)$ ще бъде линейна комбинация на функциите $\sin\lambda x,\ x\cos\lambda x,\ x^2\sin\lambda x,\ \dots,\ x^{2n}\sin\lambda x,\ x^{2n+1}\cos\lambda x,\ n=0,1,2,\dots$ и следователно ще бъде нечетна функция т.е. $f(-x)=-f(x)$. Да отбележим, че в случая работим само с функции дефинирани в интервала $[0,a]$. Поради това не е коректно да се говори за нечетни функции, но поради конкретния вид на f имаме $f(-x)=-f(x)$. При такива f имаме $f(|x|)\mathrm{sgn}(x)=f(x)$. Получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,\zeta)=\int_x^\zeta f(\zeta+x-\eta)g'(\eta)d\eta+\int_{-x}^\zeta f(\zeta-x-\eta)g'(|\eta|)d\eta-2f(\zeta-x)g(0)$$

и следователно за втората производна на конволюцията $(f\overset{x}{*}g)(x)$ имаме

$$\begin{aligned}(3.14)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f\overset{x}{*}g)(x) \;=\; & -\frac{1}{2}\Phi_\xi\Big\{-\int_0^x\big(f(\eta+\xi-x)+f(x+\xi-\eta)\big)g'(\eta)d\eta+\\ & +\int_0^\xi\big(f(x+\xi-\eta)-f(\xi-x-\eta)\big)g'(\eta)d\eta-\\ & -2g(0)f(\xi-x)+2f(\xi)g(x)-2f(\xi)g(x)\Big\}.\end{aligned}$$

По аналогичен начин при $f(-x)=-f(x)$ за четвъртата производна на конволюцията $(f\overset{x}{*}g)(x)$ имаме

$$\begin{aligned}(3.15)\quad \frac{\partial^4}{\partial x^4}(f\overset{x}{*}g)(x)= & -\frac{1}{2}\Phi_\xi\Big\{\int_0^x\big(f'(\eta+\xi-x)-f'(x+\xi-\eta)\big)g''(\eta)d\eta+\\ & +\int_0^\xi\big(f'(x+\xi-\eta)-f'(\xi-x-\eta)\big)g''(\eta)d\eta-\\ & -2\big(f''(x)(g(\xi)-g(0))+g''(x)(f(\xi)-f(0))+g(0)(f''(\xi-x)-f''(x))\big)\Big\}.\end{aligned}$$

3.1.1 Проекционни свойства на конволюцията $\overset{x}{*}$

Ще разгледаме някои връзки на операцията $\overset{x}{*}$ със спектралните проектори P_{λ_n} на граничната задача (3.1) дефиниран с равенство (3.7).

На проектора P_{λ_n} може да се гледа като на аналог на крайна интегрална трансформация. Като такъв той притежава някои операционни свойства. Първото от тях е представянето

$$P_{\lambda_n}\{f\} = (\varphi_n \overset{x}{*} f)(x), \tag{3.16}$$

където

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{\sin \lambda x}{\lambda E(\lambda)} d\lambda. \tag{3.17}$$

От тук се вижда, че ако кратността на λ_n като корен на $E(\lambda) = 0$ е κ_n то $\varphi_n(x)$ е функция от вида

$$\varphi_n(x) = a_{n,1}\sin\lambda_n x + a_2 x\cos\lambda_n x + ... + a_{n,\kappa_n-1}x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x \tag{3.18}$$

ако κ_n е нечетно и

$$\varphi_n(x) = a_{n,1}\sin\lambda_n x + a_2 x\cos\lambda_n x + ... + a_{n,\kappa_n-1}x^{\kappa_n-1}\cos\lambda_n x \tag{3.19}$$

ако κ_n е четно.
Тук $a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,\kappa_n-1}$ са константи и $a_{n,\kappa_n-1} \neq 0$.

Функциите $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, имат свойствата:

$$\varphi_n(x) \overset{x}{*} \varphi_n(x) = \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) \overset{x}{*} \varphi_k(x) = 0, \quad n \neq k. \tag{3.20}$$

За доказателство на тези свойства виж. Димовски [45], стр. 166 и [50].

За пример ще намерим функцията $\varphi_n(x)$ при λ_n едно, дву и трикратен корен на $E(\lambda) = 0$. За намирането на $\varphi_n(x)$ ще използваме равенството $\varphi_n(x) \overset{x}{*} \varphi_n(x) = \varphi_n(x)$.

Ако λ_n е еднократен корен на $E(\lambda) = 0$ намираме

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{E'(\lambda_n)}\sin\lambda_n x.$$

Ако λ_n е двукратен корен на $E(\lambda) = 0$ намираме

$$\varphi_n(x) = -\frac{4E'''(\lambda_n)}{3E''^2(\lambda_n)}\sin\lambda_n x + \frac{4}{E''(\lambda_n)}\cos\lambda_n x.$$

Ако λ_n е трикратен корен на $E(\lambda) = 0$ намираме

$$\varphi_n(x) = 3\frac{5E^{(4)}(\lambda_n)^2 - 4E'''(\lambda_n)E^{(5)}(\lambda_n)}{20E'''^3(\lambda_n)}\sin\lambda_n x - \frac{3E^{(4)}(\lambda_n)}{E'''(\lambda_n)^2}\cos\lambda_n x - \frac{6}{E'''(\lambda_n)^2}x^2\sin\lambda_n x.$$

За проектора $P_{\lambda_n}\{f\}$ имаме:

$$P_{\lambda_n}\{f\} \in \operatorname{span}\{\sin\lambda_n x, x\cos\lambda_n x, ..., x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x\}$$

ако κ_n е нечетно и

$$P_{\lambda_n}\{f\} \in \operatorname{span}\{\sin\lambda_n x, x\cos\lambda_n x, ..., x^{\kappa_n-1}\cos\lambda_n x\}$$

ако κ_n е четно.

Конкретен пример на нелокална гранична задача включваща функционал при който възникват трикратни собствени стойности е разгледана подробно в [94].

По-подробно за развитието на функции в редове по собствени и присъединени функции свързани с нелокални гранични задачи вж. [35], [37], [38].

Ще систематизираме свойствата на P_{λ_n} в следващата лема:

Лема 3.2 *Проекторът (3.7) има свойствата:*

(3.21) $\quad P_{\lambda_m}P_{\lambda_n} = \delta_{mn}P_{\lambda_n}, \quad m,n = 0,1,...,$ *където* δ_{mn} *е символът на Кронекер*;

$$P_{\lambda_n}\{f \overset{x}{*} g\} = P_{\lambda_n}\{f\} \overset{x}{*} P_{\lambda_n}\{g\}, \qquad f,g \in C(0,a); \tag{3.22}$$

$$P_{\lambda_n}\{f''(x)\} = (P_{\lambda_n}\{f(x)\})'' - \Phi_\xi\{f(\xi)\}\varphi_n(x) + \big(\Phi\{1\}\varphi_n(x) - P_{\lambda_n}\{1\}\big)f(0), \tag{3.23}$$

$f \in C^2[0,a]$;

$$R_{-\lambda^2}(P_{\lambda_n}\{f\}) = P_{\lambda_n}\left\{R_{-\lambda^2}(f)\right\}, \qquad f \in C^1(0,a). \tag{3.24}$$

Доказателство. Вж. [50].

Операционните свойства (3.21) - (3.24), могат да бъдат основа на операционно смятане за разглежданата гранична задача, когато е в сила теоремата на Божинов (вж. [34] и [36]). Ако не е в сила тази теорема, се налага да се използва директния алгебричен подход на Микусински, което правим по-нататък.

Ще приведем няколко примера на конволюционни произведения, които ще използваме по-нататък.

$$\{\sin\lambda x\} \overset{x}{*} \{\sin\lambda x\} = -\frac{E(\lambda)}{2} x\cos\lambda x + \frac{1}{2\lambda}\left(E(\lambda)+\lambda E'(\lambda)\right)\sin\lambda x,$$

$$\{\sin\lambda x\} \overset{x}{*} \{x\cos\lambda x\} = \frac{E(\lambda)}{4\lambda} x\cos\lambda x + \left(\frac{E(\lambda)}{4}x^2 - \frac{E(\lambda)}{4\lambda^2} + \frac{E'(\lambda)}{4\lambda} + \frac{E''(\lambda)}{4}\right)\sin\lambda x,$$

$$\begin{aligned}\{\sin\lambda x\} \overset{x}{*} \{x^2\sin\lambda x\} &= \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)E(\lambda)x\cos\lambda x + \\ &+ \left(\frac{E(\lambda)}{4\lambda}x^2 - \frac{E(\lambda)}{4\lambda^3} + \frac{E'(\lambda)}{4\lambda^2} - \frac{E''(\lambda)}{4\lambda} - \frac{E'''(\lambda)}{6}\right)\sin\lambda x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{x\cos\lambda x\} \overset{x}{*} \{x\cos\lambda x\} &= \left[\frac{E(\lambda)}{12}x^2 - \frac{E(\lambda)}{4\lambda^2} + \frac{E'(\lambda)}{2\lambda} + \frac{E''(\lambda)}{4}\right]x\cos\lambda x + \\ &+ \left(\frac{E'(\lambda)}{4}x^2 + \frac{E(\lambda)}{4\lambda^3} - \frac{E'(\lambda)}{4\lambda^2} + \frac{E'''(\lambda)}{12}\right)\sin\lambda x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{x\cos\lambda x\} \overset{x}{*} \{x^2\sin\lambda x\} &= -\left(\frac{E'(\lambda)}{6}x^2 + \frac{3E(\lambda)}{8\lambda^3} - \frac{E'(\lambda)}{2\lambda^2} + \frac{E''(\lambda)}{4\lambda} + \frac{E'''(\lambda)}{6}\right)x\cos\lambda x + \\ &+ \left[\frac{E(\lambda)}{24}x^4 - \left(\frac{E(\lambda)}{8\lambda^2} - \frac{E'(\lambda)}{4\lambda}\right)x^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3E(\lambda)}{8\lambda^4} - \frac{3E'(\lambda)}{8\lambda^3} + \frac{E''(\lambda)}{8\lambda^2} - \frac{E^{(4)}(\lambda)}{24}\right]\sin\lambda x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{x^2\sin\lambda x\} \overset{x}{*} \{x^2\sin\lambda x\} &= -\left[\frac{E(\lambda)}{60}x^4 - \frac{E''(\lambda)}{6}x^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3E(\lambda)}{4\lambda^4} - \frac{E'(\lambda)}{\lambda^3} + \frac{E''(\lambda)}{2\lambda^2} - \frac{E^{(4)}(\lambda)}{12}\right]x\cos\lambda x + \\ &+ \left[-\frac{E'(\lambda)}{12}x^4 + \left(\frac{-E(\lambda)}{4\lambda^3} + \frac{E'(\lambda)}{2\lambda^2} - \frac{E''(\lambda)}{2\lambda} - \frac{E'''(\lambda)}{6}\right)x^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3E(\lambda)}{4\lambda^5} - \frac{3E'(\lambda)}{4\lambda^4} + \frac{E''(\lambda)}{4\lambda^3} - \frac{E^{(5)}(\lambda)}{60}\right]\sin\lambda x.\end{aligned}$$

3.2 Директен алгебричен подход

Ще разгледаме множеството C което е едно от пространствата $C([0,a])$ или $C([0,\infty))$ на непрекъснатите функции в $[0,a]$ или в $[0,\infty)$ с двете операции: събиране "$+$" и конволюционно умножение, като вместо "стандартното", "поточково" умножение на функции означавано с "." и $f(t)g(t)$, ще разглеждаме операцията конволюция $\overset{x}{*}$ зададена с (3.9). Множеството C с операциите "$+$" и $\overset{x}{*}$, е пръстен.

Ще въведем пръстена на мултипликаторите на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$. Първо ще дадем дефиниция на мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$.

Дефиниция 3.2 *Линейният оператор $M : C \to C$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$ ако за всички $f, g \in C$ е изпълнено*

$$M(f \overset{x}{*} g) = (Mf) \overset{x}{*} g. \tag{3.25}$$

Пример за мултипликатори на $(C, \overset{x}{*})$ са конволюционните оператори $f \overset{x}{*}$, определени за произволна функция $f \in C$ и действащи по следния начин: $(f \overset{x}{*})g = f \overset{x}{*} g$. Поради асоциативността на $\overset{x}{*}$ операторите $f \overset{x}{*}$ са мултипликатори на алгебрата $(C, \overset{x}{*})$.

Друг пример за мултипликатори на $(C, \overset{x}{*})$ са числовите мултипликатори.

Дефиниция 3.3 *Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогава операторът $[\alpha] : C \to C$, дефиниран чрез $[\alpha]f = \{\alpha f\}$ се нарича числов мултипликатор на алгебрата $(C, \overset{x}{*})$.*

3.2.1 Пръстен на мултипликаторните частни

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C([0,a]), \overset{x}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [72]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. По правило в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи които не са делители на нулата. Например такъв елемент е мултипликаторът $\{x\} \overset{x}{*}$.

Наистина да допуснем, че $\{x\} \overset{x}{*}$ е делител на нулата т.е., че съществува $f(x) \in C$, $f \neq 0$ и $\{x\} \overset{x}{*} f = 0$. От Теорема 3.1 имаме $\{x\} \overset{x}{*} f = Lf$ и следователно $Lf = 0$. Прилагаме оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ към равенството $Lf = 0$. Получаваме $\dfrac{d^2}{dx^2} Lf = 0$. Понеже L е десен обратен на оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ (вж. (3.5)), от последното равенство намираме $f = 0$, което противоречи на допускането $f \neq 0$. Следователно $\{x\} \overset{x}{*}$ не е делител на нулата в $\mathfrak{M}$.

С $\mathfrak{N}$ оначаваме множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин както от пръстена на целите числа се получава пръстенът на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим мултипликаторните частни. Но в "знаменател" може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\dfrac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация"(вж. Ленг [71], стр. 53).

В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност "$\sim$" такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички мултипликаторни дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

По същия начин, по-който пръстенът на целите числа се разглежда като част от полето на рационалните числа, така и пръстенът на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$ разглеждаме като част от $\mathcal{M}$.

Теорема 3.2 *Пръстенът $\mathcal{M}$ съдържа като подпръстен:*

i) Основното поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

ii) Конволюционния пръстен $(C, \overset{x}{*})$;

iii) Пръстена на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$.

Доказателство. i) Влагането $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{M}$ (или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}$) се дефинира с изображението $\alpha \mapsto [\alpha]$. От съответствието

$$\alpha, \beta \mapsto [\alpha\beta] = \frac{\alpha\beta L}{L} = \frac{\alpha L}{L}\frac{\beta L}{L} = [\alpha][\beta],$$

където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) се вижда, че това изображение е влагане на пръстени. За означението "[ ]" вж. Дефиниция 3.3.

По подобен начин се доказват следните влагания на пръстени:

ii) $\quad (C([0,a]), \overset{x}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad f \mapsto \dfrac{(Lf) \overset{x}{*}}{L} = [f], \qquad f \in C;$

iii) $\quad \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad M \mapsto \dfrac{M}{I}$, където I е идентитета в $(C, \overset{x}{*})$.

□

По-нататък ще разглеждаме различните обекти: числата, функциите от C, мултипликаторите и мултипликаторните дроби като елементи на единната алгебрична система $\mathcal{M}$.

Както споменахме, елементът L на $\mathcal{M}$ не е делител на нулата. Важен за по-нататъшните разглеждания е алгебричният обратен на L. Означаваме го с

$$S = \frac{1}{L}.$$

Операторът S е свързан с оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{d^2}{dx^2}$ но не винаги съвпада с него. Връзката между S и $\dfrac{d^2}{dx^2}$ се дава от следната

Теорема 3.3 *Нека* $f \in C^2$. *Тогава*

$$\frac{d^2}{dx^2}f = Sf + S\{x\Phi\{1\} - 1\}f(0) - \Phi_\xi\{f(\xi)\}. \tag{3.26}$$

Доказателство. От представянето (3.5) за L намираме

$$L\frac{d^2}{dx^2}f = f(x) + (x\Phi\{1\} - 1)f(0) - x\Phi_\xi\{f(\xi)\}.$$

Като умножим последното равенство с S и използваме, че $S\{x\} = SL = 1$ получаваме (3.26).

□

Теорема 3.4 *Нека* $f \in C^{2n}$ *за* $n = 1, 2, ...,$. *Тогава*

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f = S^n f + \sum_{j=1}^{n} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\}. \tag{3.27}$$

Доказателство. Ще докажем (3.27) с индукция по n. За $n = 1$, според Теорема 3.3, (3.27) е изпълнено. Допускаме, че (3.27) е вярно при $n - 1$ и ще докажем че (3.27) е вярно и за n. От това, че (3.27) е вярно при $n - 1$ имаме

$$\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}f = S^{n-1}f + \sum_{j=1}^{n-1} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-1-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-1-j))}(\xi)\}.$$

Представяме $2n$-тата производна на f по следния начин $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f = \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}f''$. Получаваме

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f = \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}f'' = S^{n-1}f'' + \sum_{j=1}^{n-1} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\}.$$

Използваме (3.26) за да изразим f'' чрез S и намираме

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f &= S^{n-1}(Sf + S(x\Phi\{1\} - 1)f(0) - \Phi_\xi\{f(\xi)\}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f &= S^n f + S^n(x\Phi\{1\} - 1)f(0) - S^{n-1}\Phi_\xi\{f(\xi)\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\}. \end{aligned}$$

Окончателно намираме

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f = S^n f + \sum_{j=1}^{n} S^j\{x\Phi\{1\} - 1\}f^{(2(n-j))}(0) - S^{j-1}\Phi_\xi\{f^{(2(n-j))}(\xi)\}.$$

□

Подробно разписана доказаната формула (3.27) за $n = 1, 2, 3$ има вида

$$\frac{d^2}{dx^2} f = Sf \quad + \quad S\{x\Phi\{1\} - 1\} f(0) - \Phi_\xi\{f(\xi)\};$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4}{dx^4} f = S^2 f \quad &+ \quad S^2\{x\Phi\{1\} - 1\} f(0) - S\Phi_\xi\{f(\xi)\}) + \\ &+ \quad S\{x\Phi\{1\} - 1\} f''(0) - \ \Phi_\xi\{f''(\xi)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^6}{dx^6} f = S^3 f \quad &+ \quad S^3\{x\Phi\{1\} - 1\} f(0) - S^2\Phi_\xi\{f(\xi)\}) + \\ &+ \quad S^2\{x\Phi\{1\} - 1\} f''(0) - S\Phi_\xi\{f''(\xi)\} + \\ &+ \quad S\{x\Phi\{1\} - 1\} f^{(4)}(0) - \ \Phi_\xi\{f^{(4)}(\xi)\}.\end{aligned}$$

Да обърнем внимание, че от (3.27) се вижда, че $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}} f$ съвпада с $S^n f$ ако функцията f удовлетворява нулеви гранични условия т. е. $f^{(2j)}(0) = 0$ и $\Phi_\xi\{f^{(2j)}(\xi)\} = 0$, за $j = 0, 1, ..., n-1$.

Лема 3.3 Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е числов оператор. Елементът $S + \lambda^2$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато $E(\lambda) = 0$.

Доказателство. Нека $E(\lambda) = 0$. От (3.26) следва

$$S\{\sin \lambda x\} = \frac{d^2}{dx^2} \sin \lambda x + \Phi\{\sin \lambda x\} = -\lambda^2 \sin \lambda x + \lambda E(\lambda).$$

Понеже $E(\lambda) = 0$, получаваме $(S + \lambda^2) \sin \lambda x = 0$. Следователно при $E(\lambda) = 0$ елементът $S + \lambda^2$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$. От това доказателството следва, че и $\sin \lambda x$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$ при $E(\lambda) = 0$.

Нека $S + \lambda^2$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$. Тогава съществува ненулев елемент $\dfrac{f}{g}$ в $\mathcal{M}$, $f \in C([0, a])$, $g \in \mathfrak{N}$ за който

$$(S + \lambda^2) \frac{f}{g} = 0.$$

Като умножим с g, получаваме уравнението за f:

$$(S + \lambda^2) f = 0.$$

Като умножаваме с L и използваме, че $SL = LS = 1$, намираме

$$f + \lambda^2 L f = 0.$$

Оттук следва, че $f \in C^2$ и уравнението е еквивалентно на

$$\frac{d^2}{dx^2} f + \lambda^2 f = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad \Phi_\xi\{f(\xi)\} = 0.$$

Всички решения на $\frac{d^2}{dx^2}f + \lambda^2 f = 0$ са $f(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$. От условието $f(0) = 0$ следва, че $B = 0$. От условието $\Phi_\xi\{f(\xi)\} = 0$ намираме $A\Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\} = 0$. Понеже търсим ненулево решение, трябва $A \neq 0$. Следователно $E(\lambda) = 0$.
□

Лема 3.4 Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) = 0$ и $Q(-\lambda^2) = 0$, където Q е полином. Тогава елементът $Q(S)$ на $\mathcal{M}$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство. От $E(\lambda) = 0$ следва $\Phi_\xi\left\{\frac{d^{2n}}{d\xi^{2n}}\sin\lambda\xi\right\} = (-\lambda^2)^n\Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\} = 0$, за $n = 0, 1, ...$, и като използваме (3.27) получаваме

$$S^n\{\sin\lambda x\} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\sin\lambda x = (-\lambda^2)^n\sin\lambda x.$$

Директно намираме

$$Q(S)\{\sin\lambda x\} = Q(-\lambda^2)\sin\lambda x = 0.$$

□

Теорема 3.5 *Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{S+\lambda^2} = R_{-\lambda^2} = \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\}. \tag{3.28}$$

Доказателство. Ще докажем, че

$$(S+\lambda^2)\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} = 1.$$

Като използваме (3.26) намираме

$$(S+\lambda^2)\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} = S\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} + \lambda^2\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right) + \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda E(\lambda)}\right\} + \lambda^2\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right) = 1.$$

За да получим последното равенство сме използвали

$$\Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda E(\lambda)}\right\} = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}\frac{1}{E(\lambda)} = E(\lambda)\frac{1}{E(\lambda)} = 1.$$

□

Теорема 3.6 *Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) \neq 0$. Тогава за $m = 2, 3, ...$ е изпълнено*

$$\frac{1}{(S+\lambda^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)\lambda}\;\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{(S+\lambda^2)^{m-1}} = \tag{3.29}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!\lambda} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\lambda}}_{n} \frac{\sin\lambda x}{E(\lambda)} =$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!\lambda} D_\lambda^n \frac{\sin\lambda x}{E(\lambda)}.$$

Само тук за удобство с D_λ сме означили оператора $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\dfrac{1}{\lambda}$.

Доказателство. Ще докажем, тази теорема аналогично на доказателството на Теорема 2.5

Лема 3.5 *Нека $f(x,\lambda)$ и $g(x,\lambda)$ са функции на променливите $x \in \Delta$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, непрекъснати по x и диференцируеми по λ. Тогава $f(x,\lambda) \overset{x}{*} g(x,\lambda)$ е диференцируема по λ и*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(f(x,\lambda) \overset{x}{*} g(x,\lambda)\Big) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda)\right) \overset{x}{*} g(x,\lambda) + f(x,\lambda) \overset{x}{*} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x,\lambda)\right).$$

Доказателство. От Дефиницията (3.9) на конволюцията $\overset{x}{*}$ получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(f(x,\lambda) \overset{x}{*} g(x,\lambda)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \left(\int_x^\sigma f(\sigma+x-\eta,\lambda)g(\eta,\lambda)d\eta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-x}^\sigma f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)g(|\eta|,\lambda)\operatorname{sgn}(\eta(\sigma-x-\eta))d\eta\right) d\sigma\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \left(\int_x^\sigma \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[f(\sigma+x-\eta,\lambda)g(\eta,\lambda)\right] d\eta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-x}^\sigma \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)g(|\eta|,\lambda)\operatorname{sgn}(\eta(\sigma-x-\eta))\right] d\eta\right) d\sigma\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \left(\int_x^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\sigma+x-\eta,\lambda)\right] g(\eta,\lambda) + f(\sigma+x-\eta,\lambda)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}g(\eta,\lambda)\right] d\eta - \right.\right.$$

$$- \int_{-x}^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)\right] g(|\eta|,\lambda) +$$

$$\left.\left. + f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}g(|\eta|,\lambda)\right]\operatorname{sgn}(\eta(\sigma-x-\eta))d\eta\right) d\sigma\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \left(\int_x^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\sigma+x-\eta,\lambda)\right] g(\eta,\lambda)d\eta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-x}^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)\right] g(|\eta|,\lambda)\operatorname{sgn}(\eta(\sigma-x-\eta))d\eta\right) d\sigma\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi \left(\int_x^\sigma f(\sigma+x-\eta,\lambda)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}g(\eta,\lambda)\right] d\eta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-x}^\sigma f(|\sigma-x-\eta|,\lambda)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}g(|\eta|,\lambda)\right]\operatorname{sgn}(\eta(\sigma-x-\eta))d\eta\right) d\sigma\right\}.$$

Следователно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f(x,\lambda)\overset{x}{*}g(x,\lambda)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda)\right)\overset{x}{*}g(x,\lambda)+f(x,\lambda)\overset{x}{*}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x,\lambda)\right).$$

□

Непосредствено следствие от Лема 3.5 е

Следствие 3.1 *При условието на Лема 3.5 е изпълнено*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left([f(x,\lambda)]^{\overset{x}{*}\,m}\right)=m\left([f(x,\lambda)]^{\overset{x}{*}\,(m-1)}\right)\overset{x}{*}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda).$$

Тук $[f(x,\lambda)]^{\overset{x}{*}\,m}=\underbrace{f(x,\lambda)\overset{x}{*}\ldots\overset{x}{*}f(x,\lambda)}_{m\ \text{пъти}}$.

Първо ще докажем, че

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{(S+\lambda^2)^m}\right\}=\frac{-2m\lambda}{(S+\lambda^2)^{m+1}}.$$

От Следствие 3.1 към Лема 3.5 получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{(S+\lambda^2)^m}\right]=m\frac{1}{(S+\lambda^2)^{m-1}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{S+\lambda^2}\right].$$

Остава да докажем, че

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{S+\lambda^2}\right]=-\frac{2\lambda}{(S+\lambda)^2}.$$

Диференцираме двете страни на равенството

$$\frac{1}{S+\lambda^2}=\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}$$

по λ и намираме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{S+\lambda^2}\right]=\frac{1}{\lambda E(\lambda)}\left(-\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{E'(\lambda)}{E(\lambda)}\right)\sin\lambda x+x\cos\lambda x\right).$$

От друга страна, имаме:

$$\frac{1}{(S+\lambda^2)^2}=\frac{1}{S+\lambda^2}\frac{1}{S+\lambda^2}=\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\}\overset{x}{*}\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^3E(\lambda)}+\frac{E'(\lambda)}{\lambda^2E^2(\lambda)}\right)\sin\lambda x-\frac{x\cos\lambda x}{2\lambda^2E(\lambda)}\right\}.$$

Следователно

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{S+\lambda^2}\right]=-\frac{2\lambda}{(S+\lambda)^2}.$$

□

За $m = 1, 2, 3, 4$, от (3.29) получаваме:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S+\lambda^2} &= \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\},\\
\frac{1}{(S+\lambda^2)^2} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^3 E(\lambda)}+\frac{E'(\lambda)}{\lambda^2 E^2(\lambda)}\right)\sin\lambda x-\frac{x\cos\lambda x}{2\lambda^2 E(\lambda)}\right\},\\
\frac{1}{(S+\lambda^2)^3} &= \left\{\frac{1}{4\lambda^3 E(\lambda)}\left(\frac{3}{2\lambda^2}+\frac{3E'(\lambda)}{2\lambda E(\lambda)}+\frac{E'(\lambda)^2}{E^2(\lambda)}-\frac{E''(\lambda)}{2E^2(\lambda)}\right)\sin\lambda x-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4\lambda^3 E(\lambda)}\left(\frac{3}{2\lambda}+\frac{E'(\lambda)}{E(\lambda)}\right)x\cos\lambda x-\frac{x^2\sin\lambda x}{8\lambda^3 E(\lambda)}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(S+\lambda^2)^4} &= \left\{\left(\left(\frac{15}{\lambda^3}+\frac{15E'(\lambda)}{\lambda^2 E(\lambda)}+\frac{12E'(\lambda)^2}{\lambda E^2(\lambda)}+\frac{6E'(\lambda)^3}{E^3(\lambda)}-\frac{6E''(\lambda)}{\lambda E(\lambda)}-\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.-\frac{6E'(\lambda)E''(\lambda)}{E^2(\lambda)}+\frac{E^{(3)}(\lambda)}{E(\lambda)}\right)\sin\lambda x-\\
&\qquad-\left(\frac{15}{\lambda^2}+\frac{12E'(\lambda)}{\lambda E(\lambda)}+\frac{6E'(\lambda)^2}{E^2(\lambda)}-\frac{3E''(\lambda)}{E(\lambda)}\right)x\cos\lambda x-\\
&\qquad\left.\left.-3\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{E'(\lambda)^2}{E(\lambda)}\right)x^2\sin\lambda x+x^3\cos\lambda x\right)\frac{1}{48\lambda^4 E(\lambda)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Построеното операционно смятане позволява ефективно да се решава следния клас гранични задачи:

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)y = f(x), \tag{3.30}$$

$$y(0)=\alpha_0,\ y''(0)=\alpha_1,\ \ldots,\ y^{(2n-2)}(0)=\alpha_{n-1}, \tag{3.31}$$

$$\Phi\{y\}=\beta_0,\ \Phi\{y''\}=\beta_1,\ \ldots,\ \Phi\{y^{(2n-2)}\}=\beta_{n-1}, \tag{3.32}$$

където Φ е ненулев линеен функционал в пространството $C^1([0,a])$ или $C^1([0,\infty)$ на гладките функции, а P е полином с постоянни коефициенти и $\deg P = n$, а $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.

Чрез (3.27) и от граничните условия (3.31) - (3.32) получаваме:

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}y = S^k y + \sum_{j=1}^{k} S^j\{x\Phi\{1\}-1\}\alpha_{k-j} - S^{j-1}\beta_{k-j}, \tag{3.33}$$

Записваме диференциалното уравнение (3.30) във вида

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)u := a_n u + \sum_{k=1}^{n} a_{m-k}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}y = f(x).$$

Като използваме (3.33) граничната задача (3.30) - (3.32) се редуцира до едно алгебрично уравнение в $\mathcal{M}$:

$$a_n y + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\left(S^k y + \sum_{j=1}^{k} S^j\{x\Phi\{1\}-1\}\alpha_{k-j} - S^{j-1}\beta_{k-j}\right) = f(x).$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{m-k} S^k y = f(x) - \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S^j\{x\Phi\{1\}-1\}\alpha_{k-j} - S^{j-1}\beta_{k-j}\right)$$

т. е.

$$P(S)y = f(x) - \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S^j\{x\Phi\{1\}-1\}\alpha_{k-j} - S^{j-1}\beta_{k-j}\right). \tag{3.34}$$

Формалното решение на (3.34) е

$$y = \frac{1}{P(S)}f - \frac{Q(S)}{P(S)},$$

където с $Q(S)$ сме означили:

$$Q(S) = \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S^j\{x\Phi\{1\}-1\}\alpha_{k-j} - S^{j-1}\beta_{k-j}\right).$$

То е в сила когато $P(S)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Теорема 3.7 *Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ са различните нули на полинома $P(\lambda)$. Изразът $P(S)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато $E(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$.*

Доказателство.

Тъй като $P(S) = a_0(S-\lambda_1)^{\gamma_1}...(S-\lambda_m)^{\gamma_m}$, твърдението следва от Теорема 3.6.

□

Следствие 3.2 Нека $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ са различните нули на полинома $P(\lambda)$ и $E(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогава граничната задача (3.31) - (3.32) има единствено решение.

Доказателство. Хомогенната гранична задача (3.31) - (3.32)

$$P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)y = 0,$$

$$y(0) = 0\ y''(0) = 0,\ ...,\ y^{(2n-2)}(0) = 0,$$
$$\Phi\{y\} = 0,\ \Phi\{y''\} = 0,\ ...,\ \Phi\{y^{(2n-2)}\} = 0,$$

се редуцира до алгебричното уравнение

$$P(S)y = 0$$

в $\mathcal{M}$. Понеже $P(S)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, от тук следва $y \equiv 0$.

□

3.3 Резонансен случай

Ако $P(s)$ е делител на нулата, попадаме в така нареченият *резонансен случай*. Очевидно тогава, ако съществува решение, то не е единствено. За съществуване на решение трябва да се наложат допълнителни изисквания на дясната част f. Наистина, очевидно тогава необходимо условие е дясната част f да е също делител на нулата.

В модифицирана форма, алгоритъмът на Хевйсаид е приложим и за резонансният случай също.

Разглеждаме по подобен начин, както бе направено за оператора за диференцирането елементарната гранична задача

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda_n^2 y = f(x), \quad x \in (0,a), \quad y(0) = 0, \quad \Phi_\xi\{y(\xi)\} = 0, \tag{3.35}$$

където $\lambda_n \in \mathbb{C}$ е κ_n - кратна нула на индикатрисата $E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \dfrac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \right\}$, т. е. $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n - 1)}(\lambda_n) = 0$ и $E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0$.

За следващите разглеждания важна роля играе множеството:

$$\widetilde{C_n} = \left\{ f \in C^1 : f \overset{x}{*} \sin \lambda_n x = f \overset{x}{*} x \cos \lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x = 0 \right\} = \ker P_{\lambda_n}$$

при нечетно κ_n и

$$\widetilde{C_n} = \left\{ f \in C^1 : f \overset{x}{*} \sin \lambda_n x = f \overset{x}{*} x \cos \lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n - 1} \cos \lambda_n x = 0 \right\} = \ker P_{\lambda_n}$$

при четно κ_n.

От дефиницията на $\widetilde{C_n}$ е очевидно, че $(\widetilde{C_n}, +, \overset{x}{*})$ е подпръстен на $(C, +, \overset{x}{*})$. Нещо повече, $\widetilde{C_n}$ е идеал в C.

Лема 3.6 *Нека $f \in C$. Тогава $f \overset{x}{*} \varphi_n(x) = 0$ тогава и само тогава когато*

$$f \overset{x}{*} \sin \lambda_n x = f \overset{x}{*} x \cos \lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x = 0$$

при нечетно κ_n и

$$f \overset{x}{*} \sin \lambda_n x = f \overset{x}{*} x \cos \lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n - 1} \cos \lambda_n x = 0$$

при четно κ_n.

Доказателство. Ще докажем лемата в случай на нечетно κ_n. При κ_n четно, доказателството е съвсем аналогично.

Нека

$$f \overset{x}{*} \sin \lambda_n x = f \overset{x}{*} x \cos \lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x = 0.$$

Както отбелязахме по-горе (3.18), при κ_n нечетно $\varphi_n(x)$ е функция от вида

$$\varphi_n(x) = a_{n,1} \sin \lambda_n x + a_2 x \cos \lambda_n x + ... + a_{n,\kappa_n - 1} x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x.$$

Тогава $f \overset{x}{*} \sin\lambda_n x = f \overset{x}{*} x\cos\lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x = 0$.

Обратно нека $f \overset{x}{*} \varphi_n(x) = 0$. Умножаваме това равенство с $(S+\lambda_n^2)^j$, $j = 1, 2, ..., \kappa_n - 1$. Тъй като

$$\begin{aligned} &\operatorname{span} \quad \{(S+\lambda_n^2)\varphi_n(x), (S+\lambda_n^2)^2\varphi_n(x), ..., (S+\lambda_n^2)^{\kappa_n-1}\varphi_n(x)\} = \\ = \; &\operatorname{span} \quad \{\sin\lambda_n x, \quad x\cos\lambda_n x, \quad ..., \quad x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x\} \end{aligned}$$

то $f \overset{x}{*} \sin\lambda_n x = f \overset{x}{*} x\cos\lambda_n x = ... = f \overset{x}{*} x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x = 0$.
□

Лема 3.7 *Нека $\lambda_n \in \mathbb{C}$ е такова, че $E(\lambda_n) = 0$. Тогава $S+\lambda_n^2$ не е делител на нулата в подпръстена $\widetilde{C_n}$.*

Доказателство.
Ще докажем, че от $f \in \widetilde{C_n}$ и $(S+\lambda_n^2)f = 0$ следва $f \equiv 0$. Допускаме противното, т. е., че съществува такава функция $f \in \widetilde{C_n}$, $f \neq \{0\}$, че

$$(S+\lambda_n^2)f = 0.$$

Умножаваме с L и намираме:

$$f + \lambda_n^2 Lf = 0.$$

Това уравнение за f е еквивалентно на нелокалната гранична задача:

$$f' + \lambda_n^2 f = 0, \quad f(0) = 0, \quad \Phi_\xi\{f(\xi)\} = 0.$$

Единствените решения на уравнението $f' + \lambda_n^2 f = 0$, които удовлетворяват условието $f(0) = 0$ са:

$$f(x) = A_n \sin\lambda_n x,$$

където A_n е произволна константа. Тези решения удовлетворяват и граничното условие $\Phi_\xi\{f(\xi)\} = 0$, понеже λ_n е такова, че $E(\lambda_n) = \Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda_n\xi}{\lambda_n}\right\} = 0$ и тогава $\Phi_\xi\{f(\xi)\} = A_n\Phi_\xi\{\sin\lambda_n\xi\} = 0$.

От конкретния вид на $f(x)$ следва, че $P_{\lambda_n} f = f(x) \overset{x}{*} \varphi_n(x) = f$. От $f \in \widetilde{C_n}$ имаме, че $f(x) \overset{x}{*} \varphi_k(x) = 0$ и следователно $f(x) \equiv 0$. Това означава, че $S+\lambda_n^2$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_n}$.
□

Ще означаваме рестрикцията на L върху $\widetilde{C_n}$ с $\widetilde{L}$, а алгебричният обратен на $\widetilde{L}$ в $\widetilde{C_n}$ с $\widetilde{S}$ т. е.

$$\widetilde{S} = \frac{1}{\widetilde{L}}.$$

За $\widetilde{S}$ е изпълнено равенство подобно на равенство (3.26) за S. За $f \in \widetilde{C_n}$ имаме

$$\frac{d^2}{dx^2}f = \widetilde{S}f + \widetilde{S}\{x\Phi\{1\} - 1\}f(0) - \Phi_\xi\{f(\xi)\}. \tag{3.36}$$

Както видяхме в Лема 3.7, $\widetilde{S} + \lambda_n^2$ не е делител на нулата в $\widetilde{C_n}$. Ще намерим представяне за $\dfrac{1}{\widetilde{S}+\lambda_n^2}$.

Теорема 3.8 *Нека $\lambda_n \in \mathbb{C}$ е κ_n - кратна нула на $E(\lambda)$ т.е. за λ_n е изпълнено $E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n-1)}(\lambda_n) = 0$ и $E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0$. Тогава*

$$\frac{1}{\widetilde{S}+\lambda_n^2} = \begin{cases} \left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}, & \kappa_n \quad \text{нечетно} \\[2ex] \left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}x^{\kappa_n}\sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}, & \kappa_n \quad \text{четно} \end{cases} \tag{3.37}$$

където в дясната част са означени конволюционните мултипликатори $\left(\left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}\right)f = \left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}f$ *при κ_n нечетно и* $\left(\left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}x^{\kappa_n}\sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}\right)f = \left\{\dfrac{(-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}x^{\kappa_n}\sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*}f$ *при κ_n четно, в $\widetilde{C_n}$, където $f \in \widetilde{C_n}$.*

Доказателство.

И тук както и при доказателството на Лема 3.6 ще докажем теоремата в случай на нечетно κ_n. При κ_n четно, доказателството е съвсем аналогично.

Първо ще изведем формула (3.37) от евристични съображения. Ще направим граничен преход в $R_{-\lambda^2}(f) = \left\{\dfrac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\}\overset{x}{*}f$, при $\lambda \to \lambda_n$. За да пресметнем тази граница, ще развием $\sin\lambda x$ и $E(\lambda)$ в ред на Тейлър около λ_n:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} R_{-\lambda^2}(f) = \lim_{\lambda\to\lambda_n}\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\}\overset{x}{*}f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_n}\left\{\frac{\sin\lambda_n x + \frac{\lambda-\lambda_n}{1!}x\cos\lambda_n x + ... + (-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n-1}}{(\kappa_n-1)!}x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x +}{\lambda\left(E(\lambda_n) + \frac{\lambda-\lambda_n}{1!}E'(\lambda_n) + ... + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n-1}}{(\kappa_n-1)!}E^{(\kappa_n-1)}(\lambda_n) + \right.}\right.$$

$$\left.\frac{+(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x - (-1)^{\frac{\kappa_n}{2}+1}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!}x^{\kappa_n+1}\sin\lambda_n x + ...}{\left. + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!}E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!}E^{(\kappa_n+1)}(\lambda_n) + ...\right)}\right\}\overset{x}{*}f =$$

$$= \lim_{\lambda\to\lambda_n}\left(\frac{\{\sin\lambda_n x\}\overset{x}{*}f + \frac{\lambda-\lambda_n}{1!}\{x\cos\lambda_n x\}\overset{x}{*}f + ... + (-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n-1}}{(\kappa_n-1)!}\{x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x\}\overset{x}{*}f +}{\lambda\left(E(\lambda_n) + \frac{\lambda-\lambda_n}{1!}E'(\lambda_n) + ... + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n-1}}{(\kappa_n-1)!}E^{(\kappa_n-1)}(\lambda_n) + \right.}\right.$$

$$\left.\frac{+(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!}\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\}\overset{x}{*}f - (-1)^{\frac{\kappa_n}{2}+1}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!}\{x^{\kappa_n+1}\sin\lambda_n x\}\overset{x}{*}f + ...}{\left. + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!}E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!}E^{(\kappa_n+1)}(\lambda_n) + ...\right)}\right).$$

Понеже $f \in \widetilde{C_n}$ имаме

$$f\overset{x}{*}\{\sin\lambda_n x\} = f\overset{x}{*}\{x\cos\lambda_n x\} = ... = f\overset{x}{*}\{x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x\} = 0$$

и от това, че λ_n е κ_n кратна нула на $E(\lambda)$, т. е.

$$E(\lambda_n) = E'(\lambda_n) = ... = E^{(\kappa_n - 1)}(\lambda_n) = 0, \quad E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) \neq 0,$$

получаваме

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} R_{-\lambda^2}(f) = \lim_{\lambda\to\lambda_n} \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f =$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} \left(\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}} \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!} \{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} \overset{x}{*} f - (-1)^{\frac{\kappa_n}{2}+1} \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!} \{x^{\kappa_n+1}\sin\lambda_n x\} \overset{x}{*} f + ...}{\lambda \left(\frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n}}{\kappa_n!} E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) + \frac{(\lambda-\lambda_n)^{\kappa_n+1}}{(\kappa_n+1)!} E^{(\kappa_n+1)}(\lambda_n) + ... \right)} \right).$$

След съкращаване на $(\lambda - \lambda_n)^{\kappa_n}$ намираме

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} R_{-\lambda^2}(f) = \lim_{\lambda\to\lambda_n} \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f =$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} \left(\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n+1}{2}} \frac{1}{\kappa_n!} \{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} \overset{x}{*} f - (-1)^{\frac{\kappa_n+1}{2}} \frac{\lambda-\lambda_n}{(\kappa_n+1)!} \{x^{\kappa_n+1}\sin\lambda_n x\} \overset{x}{*} f + ...}{\lambda \left(\frac{1}{\kappa_n!} E^{(\kappa_n)}(\lambda_n) + \frac{\lambda-\lambda_n}{(\kappa_n+1)!} E^{(\kappa_n+1)}(\lambda_n) + ... \right)} \right).$$

Накрая правим граничен преход при $\lambda \to \lambda_n$ и намираме

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} R_{-\lambda^2}(f) = \lim_{\lambda\to\lambda_n} \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}} x^{\kappa_k} \cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} f.$$

Както отбелязахме и при доказателството на аналогичната Теорема 2.11 в Глава 2 за оператора за диференциране и тук, горните разсъждения нямат характер на доказателство, а имат само евристична стойност. Затова се налага да направим директна проверка на тъждеството

$$\frac{1}{\widetilde{S} + \lambda_n^2} f = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}} x^{\kappa_n} \cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} f.$$

Преминаваме към същинското доказателство на (3.37) . Нека $f \in \widetilde{C_n}$. Умножаваме равенството

$$\frac{1}{\widetilde{S} + \lambda_n^2} f = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}} x^{\kappa_n} \cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} f$$

с $\widetilde{S} + \lambda_n^2$. Намираме

$$f = (\widetilde{S} + \lambda_n^2) \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}} x^{\kappa_n} \cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} f.$$

Да докажем това равенство. Получаваме

$$(\widetilde{S} + \lambda_n^2)\{x^{\kappa_k}\cos\lambda_n x\} = \widetilde{S}\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} + \lambda_n^2\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\}.$$

От (3.26) намираме

$$\widetilde{S}\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} = \frac{d^2}{dx^2}(x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x) + \Phi_\xi\{\xi^{\kappa_n}\cos\lambda_n\xi\}.$$

Пресмятаме втората производна и получаваме

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x) = (\kappa_n-1)\kappa_n x^{\kappa_n-2}\cos\lambda_n x - \lambda_n^2 x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x - 2\lambda_n\kappa_n x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x.$$

Следователно

$$(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} =$$
$$= (\kappa_n-1)\kappa_n x^{\kappa_n-2}\cos\lambda_n x - 2\lambda_n\kappa_n x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x + \Phi_\xi\{\xi^{\kappa_n}\cos\lambda_n\xi\}.$$

Понеже λ_n е κ_n кратен корен на $E(\lambda)$ имаме

$$\Phi_\xi\{\xi^{\kappa_n}\cos\lambda_n\xi\} = (-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda).$$

За $(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\}$ получаваме

$$(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\} =$$

$$= (\kappa_n-1)\kappa_n x^{\kappa_n-2}\cos\lambda_n x - 2\lambda_n\kappa_n x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x + (-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda).$$

Заместваме поученото за $(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\{x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x\}$ в $(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\left\{\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_k}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*} f$.

Намираме

$$(\widetilde{S}+\lambda_n^2)\left\{\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*} f =$$

$$= (-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\left\{\frac{(\kappa_n-1)\kappa_n x^{\kappa_n-2}\cos\lambda_n x - 2\lambda_n\kappa_n x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x + (-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda)}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}\right\}\overset{x}{*} f =$$

$$= \left\{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\frac{(\kappa_n-1)\kappa_n x^{\kappa_n-2}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} - (-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}\frac{2\lambda_n\kappa_n x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} + [1]\right\}\overset{x}{*} f = f.$$

Последното равенство е изпълнено защото $f \in \widetilde{C_n}$.
□

Трябва специално да посочим, че функцията $\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n-1}{2}}x^{\kappa_n}\cos\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}$, при κ_n нечетно и функцията $\frac{(-1)^{\frac{\kappa_n}{2}}x^{\kappa_n}\sin\lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)}$ при κ_n четно представяща оператора

$$\frac{1}{\widetilde{S}+\lambda_n^2}$$

действащ в $\widetilde{C_n}$ не е единствена. Тя е определена с точност до функция от вида

$$a_0\sin\lambda_n x + a_1 x\cos\lambda_n x + ... + a_{\kappa_n-1}x^{\kappa_n-1}\sin\lambda_n x$$

при κ_n нечетно и

$$a_0 \sin \lambda_n x + a_1 x \cos \lambda_n x + ... + a_{\kappa_n - 1} x^{\kappa_n - 1} \cos \lambda_n x$$

при κ_n четно, където $a_0, a_1, ..., a_{\kappa_n-1} \in \mathbb{C}$ са произволни константи.

Наистина, нека за определеност κ_n е нечетно. Ако $f \in \widetilde{C_n}$ то

$$\frac{1}{\widetilde{S} + \lambda_n^2} f =$$

$$= \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n - 1}{2}} x^{\kappa_n} \cos \lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} + a_0 \sin \lambda_n x + a_1 x \cos \lambda_n x + ... + a_{\kappa_n - 1} x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x \right\} \overset{x}{*} f =$$

$$= \left\{ \frac{(-1)^{\frac{\kappa_n - 1}{2}} x^{\kappa_k} \cos \lambda_n x}{\lambda_n E^{(\kappa_n)}(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} f,$$

защото от дефиницията на $\widetilde{C_n}$ следва, че $\{\sin \lambda_n x\} \overset{x}{*} f = \{x \cos \lambda_n x\} \overset{x}{*} f = ... = \{x^{\kappa_n - 1} \sin \lambda_n x\} \overset{x}{*} f = 0$.

3.4 Примери

Пример 1. Нека λ_n е еднократна нула на $E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \frac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \right\}$ т. е. $\kappa_n = 1$ и $E(\lambda_n) = 0$ и $E'(\lambda_n) \neq 0$. Тогава

$$\frac{1}{\widetilde{S} + \lambda_n^2} = \left\{ \frac{x \cos \lambda_n x}{\lambda_n E'(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} .$$

$$\frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)^2} = \frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)} \frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)} = \left\{ \frac{x \cos \lambda_n x}{\lambda_n E'(\lambda_n)} \right\} \overset{x}{*} \left\{ \frac{x \cos \lambda_n x}{\lambda_n E'(\lambda_n)} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2 E'^2(\lambda_n)} \left(\left(\frac{E'(\lambda_n)}{2\lambda_n} + \frac{E''(\lambda_n)}{4} \right) x \ \cos \lambda_n x + \left(\frac{E'(\lambda_n)}{4} x^2 - \frac{E'(\lambda_n)}{4\lambda_n^2} + \frac{E^{(3)}}{12} \right) \sin \lambda_n x \right) \right\} \overset{x}{*} .$$

$$\frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)^3} = \frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)} \frac{1}{(\widetilde{S} + \lambda_n^2)^2} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\lambda_n^3 E'^3(\lambda_n)} \left[\left(\left(\frac{3E'^2(\lambda_n)}{\lambda_n} + E'(\lambda_n) E''(\lambda_n) \right) \frac{x^2}{16} - \frac{9E'^2(\lambda_n)}{32\lambda_n^2} - \frac{3E'(\lambda_n)E''(\lambda_n)}{32\lambda_n^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. + \frac{E'(\lambda_n)E'''(\lambda_n)}{16\lambda_n} + \frac{1}{24} E''(\lambda_n) E'''(\lambda_n) - \frac{1}{96} E'(\lambda_n) E^{(4)}(\lambda_n) \right) \sin \lambda_n x -$$

$$\left. \left. - \left(\frac{E'^2(\lambda_n)}{24} x^2 - \frac{3E'^2(\lambda_n)}{8\lambda_n^2} - \frac{3E'(\lambda_n)E''(\lambda_n)}{16\lambda_n} - \frac{E''^2(\lambda_n)}{16} + \frac{E'(\lambda_n)E^{(3)}(\lambda_n)}{24} \right) x \cos \lambda_n x \right] \right\} \overset{x}{*} .$$

За да получим тези представяния сме използвали, че

$$\Phi_\xi \{ \xi^{2k} \sin \lambda\xi \} = (-1)^k \left(2k E^{(2k-1)}(\lambda) + \lambda E^{(2k)}(\lambda) \right),$$

$$\Phi_\xi \{ \xi^{2k+1} \cos \lambda\xi \} = (-1)^k \left((2k+1) E^{(2k)}(\lambda) + \lambda E^{(2k+1)}(\lambda) \right).$$

Пример 2. Разглеждаме граничната задача:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad x \in [0, a]. \tag{3.38}$$

Тук $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = \frac{1}{a} g(a)$. Синусовата индикатриса на този функционал е

$$E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \frac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \right\} = \frac{1}{a} \frac{\sin a\lambda}{\lambda}.$$

Решението на задача (3.38) при λ такова, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (3.4) който в този конкретен случай има вида:

$$y = R_{-\lambda^2} f = \frac{1}{\lambda} \int_0^x f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi - \frac{a \sin \lambda x}{\lambda \sin a\lambda} \int_0^a f(\eta) \sin \lambda(a - \eta) d\eta. \tag{3.39}$$

Собствените стойности на (3.38) са нулите на $E(\lambda)$. Те са

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

всички са еднократни и

$$E'(\lambda_n) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

Собствените функции са:

$$\varphi_n(x) = 2\lambda_n(-1)^n \sin\lambda_n x = \frac{2(-1)^n n\pi}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Нормирани са така, че $\varphi_n \overset{x}{*} \varphi_n = \varphi_n$.

Спектралният проектор P_{λ_n} (3.8) съответстващ на собствената стойност $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{a}$ има вида (вж. (3.7)):

$$\begin{aligned} f(x) \mapsto P_{\lambda_n}\{f\} &= \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_n} R_{-\lambda^2}(f)\lambda d\lambda = (\varphi_n \overset{x}{*} f)(x) = \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{a}\left(\int_0^a f(\xi)\sin\lambda_n(a-\xi)d\xi\right)\sin\lambda_n x, \end{aligned}$$

където Γ_n е прост контур в комплексната равнина съдържащ само нулата λ_n на $E(\lambda)$ и никоя друга нула.

За λ, такова, че $E(\lambda) \neq 0$ решението на (3.38) може да се представи така (вж. Теорема 3.5):

$$y = \frac{1}{S+\lambda^2}f = \left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}\right\} \overset{x}{*} f(x) = \left\{\frac{a\sin\lambda x}{\sin\lambda a}\right\} \overset{x}{*} f(x).$$

За $\lambda = \lambda_n$ възниква резонансен случай и решение на

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda_n^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad x \in [0, a]$$

за $f \in \ker P_{\lambda_n}$ е (вж. Теорема 3.8):

$$y = \frac{1}{\widetilde{S}+\lambda_n^2}f = \left\{\frac{x\cos\lambda_n x}{\lambda_n E'(\lambda_n)}\right\} \overset{x}{*} f = \{(-1)^n x\cos\lambda_n x\} \overset{x}{*} f.$$

Пример 3. Разглеждаме нелокалната гранична задача:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{3.40}$$

Тук $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = 2\left(g(1) - g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Това гранично условие наричаме нелокално гранично условие на Бицадзе-Самарски. Гранични задачи за частни диференциални уравнения включващи това нелокално условие са разгледани в [3], [2], [88].

Синусовата индикатриса на този функционал е

$$E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\} = \frac{2}{\lambda}\left(\sin\lambda - \sin\frac{\lambda}{2}\right).$$

Решението на задача (3.40) при λ такова, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (3.4) който в този конкретен случи има вида:

$$\begin{aligned} R_{-\lambda^2}(f) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi - \\ &- \frac{\sin\lambda x}{2\lambda\left(\sin\lambda - \sin\frac{\lambda}{2}\right)}\left(\int_0^1 f(\eta)\sin\lambda(1-\eta)d\eta - \int_0^{\frac{1}{2}} f(\eta)\sin\lambda(\frac{1}{2}-\eta)d\eta\right). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Нулите на

$$E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\} = \frac{2}{\lambda}\left(\sin\lambda - \sin\frac{\lambda}{2}\right)$$

са $\lambda_n = 2n\pi$, $\mu_m = \dfrac{2}{3}\pi + 4m\pi$, $n = 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ...$, всички са еднократни. Да отбележим, че $E(0) = 1$. За $E'(\lambda)$ намираме

$$E'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(2\cos\lambda - \cos\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{2}{\lambda^2}\left(\sin\lambda - \sin\frac{\lambda}{2}\right).$$

Съответно получаваме

$$E'(\lambda_n) = \frac{2-(-1)^n}{\lambda_n} = \frac{2-(-1)^n}{2n\pi},$$

$$E'(\mu_m) = -\frac{3}{2\mu_m} = -\frac{9}{4\pi(1+2m)}.$$

Съответните собствени функции са $\sin\lambda_n x = \sin 2n\pi x$ и $\sin\mu_m x = \sin\left(\dfrac{2}{3}\pi + 4m\pi\right)x$.

Спектралният проектор P_{λ_n} (3.8) съответстващ на собствена стойност $\lambda_n = 2n\pi$ има вида:

$$P_{\lambda_n}\{f\} = -\frac{2}{E'(\lambda_n)}\left(\int_0^1 f(\eta)\sin\lambda_n(1-\eta)d\eta - \int_0^{\frac{1}{2}} f(\eta)\sin\lambda_n(\frac{1}{2}-\eta)d\eta\right)\sin\lambda_n x =$$

$$= -\frac{4n\pi}{2-(-1)^n}\left(\int_0^1 f(\eta)\sin 2n\pi(1-\eta)d\eta - \int_0^{\frac{1}{2}} f(\eta)\sin 2n\pi(\frac{1}{2}-\eta)d\eta\right)\sin 2n\pi x.$$

Спектралният проектор P_{μ_m} (3.8) съответстващ на собствена стойност $\mu_m = \left(\dfrac{2}{3} + 4m\right)\pi$ има вида:

$$P_{\mu_m}\{f\} = -\frac{2}{E'(\mu_m)}\left(\int_0^1 f(\eta)\sin\mu_m(1-\eta)d\eta - \int_0^{\frac{1}{2}} f(\eta)\sin\mu_m(\frac{1}{2}-\eta)d\eta\right)\sin\mu_m x =$$

$$= -\frac{8\pi(1+2m)}{9}\left(\int_0^1 f(\eta)\sin\left(\frac{2}{3}+4m\right)\pi(1-\eta)d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{1}{2}} f(\eta)\sin\left(\frac{2}{3}+4m\right)\pi(\frac{1}{2}-\eta)d\eta\right)\sin\left(\frac{2}{3}+4m\right)\pi x.$$

Ако λ е такова, че $E(\lambda) = 0$, тогава или съществува n такова, че $\lambda = \lambda_n = 2n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, или съшествува m такова, че $\lambda = \mu_m = \left(\frac{2}{3}+4m\right)\pi$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. λ е една от собствените стойности λ_n или μ_m на задачата

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

За удобство по-надолу ще разглеждаме само при $\lambda = \lambda_n = 2n\pi$. В този случай решение на задача (3.40)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda_n^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

не може да се намери чрез (3.41). При $\lambda = \lambda_n$ и $f \in \ker P_{\lambda_n}$ решение на (3.40) може да се намери чрез (3.37), което в този случай има вида

$$\frac{1}{\widetilde{S}+\lambda_n^2} f = -\left\{\frac{x\cos\lambda_n x}{\lambda_n E'(\lambda_n)}\right\} \overset{x}{*} f = -\left\{\frac{x\cos 2n\pi x}{2-(-1)^n}\right\} \overset{x}{*} f.$$

Пример 4. Ще разгледаме обобщение на нелокалното гранично условие на Бицадзе-Самарски от Пример 3. Този и други подобни примери са разгледани в [93]. Разглеждаме нелокалната гранична задача:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(a) - y(c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad 0 < c < a. \tag{3.42}$$

Тук $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = \frac{1}{a-c}(g(a) - g(c))$. Това нелокално гранично условие, наричаме обобщено условие на Бицадзе-Самарски.

Синусовата индикатриса на този функционал е

$$E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\} = \frac{1}{a-c}\left(\frac{\sin a\lambda}{\lambda} - \frac{\sin c\lambda}{\lambda}\right).$$

Решението на задача (3.42) при λ такова, че $E(\lambda) \neq 0$ е резолвентният оператор (3.4) който в този конкретен случай има вида:

$$\begin{aligned} R_{-\lambda^2}(f) \;\; = \;\; & \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi - \\ & -\frac{(a-c)\sin\lambda x}{\lambda(\sin a\lambda - \sin c\lambda)}\left(\int_0^a f(\eta)\sin\lambda(a-\eta)d\eta - \int_0^c f(\eta)\sin\lambda(c-\eta)d\eta\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Нулите на

$$E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\} = \frac{1}{a-c}\left(\frac{\sin a\lambda}{\lambda} - \frac{\sin c\lambda}{\lambda}\right) \tag{3.44}$$

са

$$\lambda_n = \frac{1}{a+c}(2n-1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

$$\mu_k = \frac{1}{a-c}2k\pi, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

При конкретни a и c могат да съществуват такива k и n, че $\lambda_n = \mu_k$. С други думи аритметичните прогресии, които представят нулите на (3.44) могат да имат общи членове, т.е. получават се двукратни корен. Например при

$$\frac{a}{c} = \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{7}{3}, 5, 9, ...$$

Това не е възможно за ирационални c.

1. Всички собствени стойности λ_n и μ_k са прости. Тогава спектралните проектори съответстващи на λ_n и μ_k, за $n = 1, 2, ...$ и $k = 1, 2, ...$ са:

$$P_{\lambda_n}\{f\} = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_n} R_{-\lambda^2} f(x)\lambda d\lambda =$$

$$= \frac{4}{a\cos a\lambda_n - c\cos c\lambda_n}\left(\int_0^a \sin(\lambda_n(a-\xi))f(\xi)d\xi - \int_0^c \sin(\lambda_n(c-\xi))f(\xi)d\xi\right)\sin\lambda_n x$$

и

$$P_{\mu_n}\{f\} =$$

$$= \frac{4}{a\cos a\mu_n - c\cos c\mu_n}\left(\int_0^a \sin(\mu_n(a-\xi))f(\xi)d\xi - \int_0^c \sin(\mu_n(c-\xi))f(\xi)d\xi\right)\sin\mu_n x.$$

2. Нека за по-кратък запис $a = 1$ и $0 < c < 1$. Ако $\lambda_n = \mu_k$, тогава директно се проверява, че $E(\lambda_n) = 0$, $E'(\lambda_n) = 0$ но $E''(\lambda_n) \neq 0$. Наистина, ако допуснем, че $E''(\lambda_n) = 0$, получаваме $\sin\lambda_n = \sin c\lambda_n = 0$. Следователно $\cos\lambda_n = (-1)^p$, $\cos c\lambda_n = (-1)^q$ където $p, q \in \mathbb{N}$ но $0 < c < 1$ и намираме, че $E'(\lambda_n) \neq 0$ което е противоречие. В този случаи спектралните проектори са

$$\begin{aligned} P_{\lambda_n}\{f\} = C_n &\left(\int_0^1 f(\xi)\sin\lambda_n(1-\xi)d\xi - \int_0^c f(\xi)\sin\lambda_n(c-\xi)d\xi\right) \quad x\cos\lambda_n x \\ &+\left[C_n\left(\int_0^1 (1-\xi)f(\xi)\cos\lambda_n(1-\xi)d\xi - \int_0^c (c-\xi)f(\xi)\cos\lambda_n(c-\xi)d\xi\right)\right. \\ &\left.+\frac{G_n - C_n}{\lambda_n}\left(\int_0^1 f(\xi)\sin\lambda_n(1-\xi)d\xi - \int_0^c f(\xi)\sin\lambda_n(c-\xi)d\xi\right)\right] \quad \sin\lambda_n x, \end{aligned}$$

където

$$C_n = \frac{4}{(1-c^2)\sin\lambda_n}, \quad G_n = \frac{4(\lambda_n\cos\lambda_n - c^3\lambda_n\cos\lambda_n c - 3(1-c^2)\sin\lambda_n)}{3(1-c^2)^2\sin^2\lambda_n}.$$

Пример 5. Разглеждаме нелокалната гранична задача:

$$y'' + \lambda^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad \int_0^a y(\xi)d\xi = 0, \quad x \in [0, a]. \tag{3.45}$$

Тук $\Phi_\xi\{g(\xi)\} = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(\xi)d\xi$. Това гранично условие се нарича нелокално гранично условие на Самарски-Ионкин. Гранични задачи за частни диференциални уравнения включващи това нелокално условие са разгледани в [14].

Синусовата индикатриса на този функционал е

$$E(\lambda) = \int_0^a \frac{\sin \lambda\xi}{\lambda} d\xi = \frac{1 - \cos \lambda\ a}{\lambda^2}.$$

Нулите и са

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Всички са двукратни и съответните спектрални проектори са

$$P_{\lambda_n}\{f\} = \frac{4}{a^2}\left(\int_0^a f(\xi)(a-\xi)\sin \lambda_n \xi d\xi\right) \sin \lambda_n x - \frac{4}{a^2}\left(\int_0^a f(\xi)(1 - \cos \lambda_n \xi) d\xi\right) x \cos \lambda_n x.$$

4 Двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

4.1 Увод

Най-близко до разглежданите в Глави 2 и 3 едномерни операционни смятания, съответно за операторите $\dfrac{d}{dt}$ и $\dfrac{d^2}{dx^2}$, са операционните смятания за частните диференциални оператори $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ в съответно функционално пространство на функции на двете независими променливи t и x. Целта на тези операционни смятания е изучаването на нелокални еволюционни гранични задачи за уравнения от вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - Q\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = F(x,t) \tag{4.1}$$

в ивица D от вида $D = [0,a] \times [0,\infty)$ и с полиноми P и Q.

За да формулираме точния клас задачи, задаваме два линейни функционала $\chi \in (C[0,\infty))^*$ и $\Phi \in (C^1[0,a])^*$.

Граничните условия на разглежданите задачи са следните:

1) ”Начални” условия

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x,\tau)\right\} = f_k(x), \quad k = 0, 1, ..., \deg P - 1, \tag{4.2}$$

с дадени $f_k(x)$ за $0 \le x \le a$. Изобщо, тези условия са нелокални.

2) Граничните условия са от вида

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,t) = \varphi_k(t), \quad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}}u(\xi,t)\right\} = \psi_k(t), \tag{4.3}$$

където $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ а $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ са дадени за $0 \le t < \infty$. Първото от тези гранични условия е локално, а второто - изобщо нелокално.

Идеята на директното операционно смятане за гранични задачи от вида (4.1) - (4.3) е да се въведе конволюционно произведение $u(x,t) \overset{(x,t)}{*} v(x,t)$ в пространството на непрекъснатите функции $C = C(D)$, с цел то да се превърне в конволюционна алгебра и тя да се разшири до пръстен от мултипликаторни частни. Както ще видим по-нататък, това става по начин, подобен на начина, по които от множеството на целите числа се получават рационалните.

В този пръстен от мултипликаторни частни задачата (4.1) - (4.3) се алгебризира и се свежда до едно алгебрично уравнение от първа степен от вида

$$[P(s_t) - Q(S_x)]u = \widetilde{F}, \tag{4.4}$$

където s_t и S_x са основни елементи на пръстена и $\widetilde{F}$ също е елемент на пръстена, включващ в себе си граничните условия. s_t и S_x са алгебричните аналози на диференциалните оператори $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

В случая, когато $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата в пръстена от мултипликаторните частни, формалното решение на (4.4) е

$$u = \frac{1}{P(s_t) - Q(S_x)} \widetilde{F}.$$

Последната стъпка е да се интерпретира като функция от $C(D)$, която ще наричаме *слабо решение* на граничната задача (4.1) - (4.3). Ако слабото решение има производни от достатъчно висок ред, то съвпада с класическото решение.

В тази глава е реализирана описаната програма.

4.2 Двумерна конволюция

Да припомним едномерните конволюции $\overset{t}{*}$ и $\overset{x}{*}$ от глави 2 и 3, съответно:

$$(\varphi \overset{t}{*} \psi)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t \varphi(t + \tau - \sigma)\psi(\sigma) d\sigma \right\} \tag{4.5}$$

в $C(\Delta)$, където Δ е интрвал от $\mathbb{R}$ (в нащия случай $\Delta = [0, \infty)$) и

$$(f \overset{x}{*} g)(x) = -\frac{1}{2} \Phi_\xi \left\{ \int_0^\xi h(x, \zeta) d\zeta \right\}, \tag{4.6}$$

$$h(x, \zeta) = \int_x^\zeta f(\zeta + x - \eta) g(\eta) d\eta - \int_{-x}^\zeta f(|\zeta - x - \eta|) g(|\eta|) \operatorname{sgn}(\eta(\zeta - x - \eta)) d\eta$$

в $C[0, a]$.

По-нататък ще дефинираме двумерна конволюция т. е. конволюции на функции на две променливи $u(x,t) \overset{(x,t)}{*} v(x,t)$ в $C = C(D) = C([0,a] \times [0, \infty))$. При това ще се ръководим от естественото изискване: ако съответните функции на две променливи се представят като произведение на функции на една променлива, то конволюцията на функциите на две променливи да се представя като произведение на конволюции на съответните функции на една променлива т. е. ако $u(x,t) = u_1(x) u_2(t)$, $v(x,t) = v_1(x) v_2(t)$, да е в сила разлагането

$$u(x,t) \overset{(x,t)}{*} v(x,t) = (u_1(x) u_2(t)) \overset{(x,t)}{*} (v_1(x) v_2(t)) = (u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x))(u_2(t) \overset{t}{*} v_2(t)).$$

Ще въведем двумерна конволюция в $C([0,a] \times [0, \infty))$.

Дефиниция 4.1 *(Димовски [47]) Нека $u, v \in C([0,a] \times [0, \infty))$. Тогава*

$$(u \overset{(x,t)}{*} v)(x,t) = \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau u(x, t + \tau - \sigma) \overset{x}{*} v(x, \sigma) d\sigma \right\}. \tag{4.7}$$

Забележка. Директно от тази дефиниция следва, че операцията (4.7) може да бъде представена и по следния начин

$$(u \overset{(x,t)}{*} v)(x,t) = \chi_\tau \Phi_\xi \left\{ \int_0^\xi h(x, t, \zeta, \tau) d\zeta \right\}, \tag{4.8}$$

където

$$h(x,t,\zeta,\tau) = -\frac{1}{2}\left(\int_x^\zeta \int_\tau^t u(\zeta+x-\eta, t+\tau-\sigma)v(\eta,\sigma)d\sigma d\eta - \int_{-x}^\zeta \int_\tau^t u(|\zeta-x-\eta|, t+\tau-\sigma)v(|\eta|,\sigma)\mathrm{sgn}(\eta(\zeta-x-\eta))d\sigma d\eta\right).$$

Ще опишем основните свойства на двумерната конволюция (4.7), които са съществено важни за изграждане на двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Теорема 4.1 Нека $u_1(x), v_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(t), v_2(t) \in C[0,\infty)$. Тогава

$$\{u_1(x)u_2(t)\} \overset{(x,t)}{*} \{v_1(x)v_2(t)\} = \left(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\right)\left(u_2(t) \overset{t}{*} v_2(t)\right). \tag{4.9}$$

Доказателство.

От Дефиниция (4.1) на $\overset{(x,t)}{*}$ имаме

$$\{u_1(x)u_2(t)\} \overset{(x,t)}{*} \{v_1(x)v_2(t)\} = \chi_\tau\left\{\int_0^\tau \big(u_1(x)u_2(t+\tau-\sigma)\big) \overset{x}{*} \big(v_1(x)v_2(\sigma)\big)d\sigma\right\} =$$

$$= \left(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\right)\chi_\tau\left\{\int_0^\tau u_2(t+\tau-\sigma)v_2(\sigma)d\sigma\right\} =$$

$$= \left(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\right)\left(u_2(t) \overset{t}{*} v_2(t)\right).$$

□

По-нататък ще използваме следната лема

Лема 4.1 Операцията $\overset{(x,t)}{*}$ е билинейна.

Доказателство. Поради линейността на функционалите χ и Φ твърдението е очевидно.
□

Лема 4.2 Нека $f = f(x) \in C[0,a]$, $\varphi = \varphi(t) \in C[0,\infty)$ и $u = u(x,t) \in C([0,a]\times[0,\infty))$. Тогава

$$f \overset{x}{*} \left(\varphi \overset{t}{*} u\right) = (f\varphi) \overset{(x,t)}{*} u. \tag{4.10}$$

Доказателство.

Първо ще разгледаме случая когато функцията $u = u(x,t)$ е от вида $u(x,t) = u_1(x)u_2(t)$ за $u_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(t) \in C[0,\infty)$.

$$f(x) \overset{x}{*} \left(\varphi(t) \overset{t}{*} u(x,t)\right) = f(x) \overset{x}{*} \left(\varphi(t) \overset{t}{*} u_1(x)u_2(t)\right) =$$

$$= f(x) \overset{x}{*} \left(\left(\varphi(t) \overset{t}{*} u_2(t) \right) u_1(x) \right) = \left(f(x) \overset{x}{*} u_1(x) \right) \left(\varphi(t) \overset{t}{*} u_2(t) \right).$$

От Теорема 4.1 имаме, че:

$$\left(f(x) \overset{x}{*} u_1(x) \right) \left(\varphi(t) \overset{t}{*} u_2(t) \right) = \left(f(x)\varphi(t) \overset{(x,t)}{*} u_1(x)u_2(t) \right).$$

Следователно когато $u(x,t) = u_1(x)u_2(t)$ получаваме

$$f(x) \overset{x}{*} \left(\varphi(t) \overset{t}{*} u(x,t) \right) = \left(f(x)\varphi(t) \overset{(x,t)}{*} u(x,t) \right).$$

Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $u(x,t) \in C([0,a]\times[0,\infty))$ може да се приближи почти равномерно с полиноми на променливите x и t, т. е. чрез линейни комбинации на функциите $x^n t^k$ за $n,k = 0,1,2,\ldots$. Понеже функцията $x^n t^k$ е от вида $u_1(x)u_2(t)$, то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x,t)}{*}$ следва твърдението на лемата.

□

По-нататък ще използваме следните означения: С l_t означаваме десния обратен оператор на оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$, определен с функционала χ (вж. (2.6)):

$$l_t u(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)d\tau - \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau u(x,\sigma)d\sigma \right\}.$$

Някой свойствата на този оператор разгледахме в Глава 2. Да припомним, че l_t се изразява чрез конволюцията (4.5) по следния начин:

$$l_t = \{1\} \overset{t}{*}.$$

С L_x ще означаваме десния обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, определен с условията $(L_x u)(0,t) = 0$ и $\Phi_\xi\{L_x u(\xi,t)\} = 0$, (вж. Глава 3):

$$L_x u(x,t) = \int_0^x (x-\xi)u(\xi,t)d\xi - x\Phi_\xi \left\{ \int_0^\xi (\xi-\eta)u(\eta,t)d\eta \right\}.$$

Някой свойствата на този оператор разгледахме в Глава 3. Да припомним, че L_x се изразява чрез конволюцията (4.6) по следния начин (вж. Теорема 3.1 от Глава 3):

$$L_x = \{x\} \overset{x}{*}.$$

Теорема 4.2 *Нека $u,v \in C([0,a]\times[0,\infty))$. Тогава операцията (4.7):*

$$(u \overset{(x,t)}{*} v)(x,t) = \chi_\tau \left\{ \int_0^\tau u(x,t+\tau-\sigma) \overset{x}{*} v(x,\sigma)d\sigma \right\}$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0,a]\times[0,\infty))$, за която

$$l_t L_x u = \{x\} \overset{(x,t)}{*} u. \tag{4.11}$$

Тук на функцията $\{x\}$ се гледа като на функция от $C([0,a]\times[0,\infty))$, а не от $C[0,a]$.
Доказателство.

Подобно на доказателството на Лема 4.2 и тук първо ще докажем асоциативността и комутативността за функции от вида $u(x,t) = u_1(x)u_2(t)$, $v(x,t) = v_1(x)v_2(t)$, а после ще използваме билинейността на конволюцията $\overset{(x,t)}{*}$, заедно с теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]).

Нека $u(x,t) = u_1(x)u_2(t), v(x,t) = v_1(x)v_2(t), w(x,t) = w_1(x)w_2(t)$ за $u_1(x), v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(t), v_2(t), w_2(t) \in C[0,\infty)$.

Ще докажем комутативността на $\overset{(x,t)}{*}$:

$$u \overset{(x,t)}{*} v = u_1u_2 \overset{(x,t)}{*} v_1v_2 = (u_1 \overset{x}{*} v_1)(u_2 \overset{t}{*} v_2) = (v_1 \overset{x}{*} u_1)(v_2 \overset{t}{*} u_2) =$$

$$= v_1v_2 \overset{(x,t)}{*} u_1u_2 = v \overset{(x,t)}{*} u.$$

Да докажем асоциативността на $\overset{(x,t)}{*}$. Имаме

$$\left(u \overset{(x,t)}{*} v\right) \overset{(x,t)}{*} w = \left(u_1u_2 \overset{(x,t)}{*} v_1v_2\right) \overset{(x,t)}{*} w_1w_2 =$$

$$= \left((u_1 \overset{x}{*} v_1)(u_2 \overset{t}{*} v_2)\right) \overset{(x,t)}{*} w_1w_2 =$$

$$= \left((u_1 \overset{x}{*} v_1) \overset{x}{*} w_1\right)\left((u_2 \overset{t}{*} v_2) \overset{t}{*} w_2\right) = \left(u_1 \overset{x}{*} (v_1 \overset{x}{*} w_1)\right)\left(u_2 \overset{t}{*} (v_2 \overset{t}{*} w_2)\right) =$$

$$= u_1u_2 \overset{(x,t)}{*} \left((v_1 \overset{x}{*} w_1)(v_2 \overset{t}{*} w_2)\right) =$$

$$= u_1u_2 \overset{(x,t)}{*} \left(v_1v_2 \overset{(x,t)}{*} w_1w_2\right) = u \overset{(x,t)}{*} \left(v \overset{(x,t)}{*} w\right).$$

Според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $u(x,t) \in C([0,a]\times[0,\infty))$ може да се приближи почти равномерно с полиноми на променливите x и t, т. е. чрез линейни комбинации на функциите $x^n t^m$ за $n, m = 0, 1, 2, ...$ Понеже функцията $x^n t^m$ е от вида $u_1(x)u_2(t)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x,t)}{*}$ следва комутативността и асоциативността на $\overset{(x,t)}{*}$ в $C([0,a]\times[0,\infty))$.

Остава да докажем (4.11). Нека $u \in C([0,a]\times[0,\infty))$

$$l_t L_x u = l_t(L_x u) = l_t\left(\{x\} \overset{x}{*} u\right) = \{1\} \overset{t}{*} \left(\{x\} \overset{x}{*} u\right) = \{x\} \overset{(x,t)}{*} u.$$

□

4.3 Мултипликатори на $(C([0,a]\times[0,\infty)), \overset{(x,t)}{*})$

Аналогично на разглежданията в параграфите "Директен алгебричен подход" на глави 2 и 3, ще разгледаме пространството $C = C([0,a]\times[0,\infty))$ на непрекъснатите функции в $[0,a]\times[0,\infty)$ с двете операции: събиране " + " и умножение като вместо "стандартното", "поточково" умножение на функции, означавано с "." и $u(x,t)v(x,t)$, ще разглеждаме двумерната конволюция $\overset{(x,t)}{*}$, зададена с (4.7). Пространството C с операциите " + " и $\overset{(x,t)}{*}$ е пръстен, а също и алгебра над $\mathbb{R}$.

Ще въведем пръстена на мултипликаторите на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,t)}{*})$. Първо ще дадем дефиниция на мултипликатор на тази конволюционна алгебра.

Дефиниция 4.2 *Линеен оператор $M : C \to C$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,t)}{*})$ ако равенството*

$$M(u \overset{(x,t)}{*} v) = (Mu) \overset{(x,t)}{*} v \tag{4.12}$$

е изпълнено за всички $u, v \in C$.

Прост пример на мултипликатори на $(C, \overset{(x,t)}{*})$ са конволюционните оператори $u \overset{(x,t)}{*}$, където $u \in C$. Друг тривиален пример на мултипликатори на $(C, \overset{(x,t)}{*})$ са числовите мултипликатори.

Дефиниция 4.3 *Нека $u \in C$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Операторът $[\lambda] : C \to C$, $[\lambda]u = \{\lambda u\}$ се нарича числов мултипликатор на алгебрата $(C, \overset{(x,t)}{*})$.*

За числовите мултипликатори е изпълнено $[\lambda][\mu] = [\lambda\mu]$. Последното равенство дава основание за наименованието числов мултипликатор. Числовите мултипликатори образуват пръстен, изоморфен на $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Не толкова тривиални примери на мултипликатори са следващите оператори:

Ако $f \in C[0, a]$, тогава конволюционният оператор $f \overset{x}{*}$ в $C[0, a]$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C = C([0, a] \times [0, \infty))$ така, че

$$(f \overset{x}{*})\{u(x, t)\} = \{f(x)\} \overset{x}{*} \{u(x, t)\}.$$

Тук на променливата t се гледа като на параметър.

Аналогично може да разгледаме конволюционния оператор $\varphi \overset{t}{*}$, $\varphi \in C[0, \infty)$ като оператор в цялото пространство $C = C([0, a] \times [0, \infty))$ така, че

$$(\varphi \overset{t}{*})\{u(x, t)\} = \{\varphi(t)\} \overset{t}{*} \{u(x, t)\}.$$

Тук на променливата x се гледа като на параметър.

По-нататък ще използваме означенията

$$[\varphi]_x = \{\varphi(t)\} \overset{t}{*}, \qquad [f]_t = \{f(x)\} \overset{x}{*} . \tag{4.13}$$

Ще наричаме тези оператори *частни числови оператори* спрямо отсъстващите променливи.

Теорема 4.3 *Конволюционните оператори (4.13) са мултипликатори на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,t)}{*})$.*

Доказателство.

Нека $\varphi \in C[0,\infty)$. Ще докажем, че $[\varphi]_x(v \overset{(x,t)}{*} w) = \{[\varphi]_x v\} \overset{(x,t)}{*} w$ или, което е същото, $\varphi \overset{t}{*} (v \overset{(x,t)}{*} w) = (\varphi \overset{t}{*} v) \overset{(x,t)}{*} w$, за произволни функции $v, w \in C([0,a]\times[0,\infty))$.

Първо ще докажем това равенство за функции от вида

$$v(x,t) = v_1(x)v_2(t), \qquad w(x,t) = w_1(x)w_2(t),$$

където $v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(t), w_2(t) \in C[0,\infty)$. Имаме

$$\varphi \overset{t}{*} (v \overset{(x,t)}{*} w) = \varphi \overset{t}{*} (\{v_1v_2\} \overset{(x,t)}{*} \{w_1w_2\}).$$

Като използваме тук и по-долу в доказателството Теорема 4.1 намираме

$$\varphi \overset{t}{*} (\{v_1v_2\} \overset{(x,t)}{*} \{w_1w_2\}) = \varphi \overset{t}{*} \Big((v_1 \overset{x}{*} w_1)(v_2 \overset{t}{*} w_2)\Big) =$$

$$= (v_1 \overset{x}{*} w_1)\Big(\varphi \overset{t}{*} (v_2 \overset{t}{*} w_2)\Big) = (v_1 \overset{x}{*} w_1)\Big((\varphi \overset{t}{*} v_2) \overset{t}{*} w_2\Big) =$$

$$= \Big(v_1(\varphi \overset{t}{*} v_2)\Big) \overset{(x,t)}{*} \{w_1w_2\} = (\varphi \overset{t}{*} \{v_1v_2\}) \overset{(x,t)}{*} \{w_1w_2\} = (\varphi \overset{t}{*} v) \overset{(x,t)}{*} w.$$

Доказахме $\varphi \overset{t}{*} (v \overset{(x,t)}{*} w) = (\varphi \overset{t}{*} v) \overset{(x,t)}{*} w$ за функции от вида $v(x,t) = v_1(x)v_2(t)$, $w(x,t) = w_1(x)w_2(t)$, $v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(t), w_2(t) \in C[0,\infty)$. Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $v = v(x,t) \in C([0,a]\times[0,\infty))$ може да се апроксимира почти равномерно с линейна комбинация на функции от вида $v_1v_2 = v_1(x)v_2(t)$, $v_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(t) \in C[0,\infty)$, например с полиноми на променливите x, t.

Нека $f \in C[0,a]$. Доказателството на $[f]_t(v \overset{(x,t)}{*} w) = \{[f]_t v\} \overset{(x,t)}{*} w$ или, което е същото, $f \overset{x}{*} (v \overset{(x,t)}{*} w) = (f \overset{x}{*} v) \overset{(x,t)}{*} w$, за произволни функции $v, w \in C([0,a]\times[0,\infty))$ се извършва по аналогичен начин на доказателството на $[\varphi]_x(v \overset{(x,t)}{*} w) = \{[\varphi]_x v\} \overset{(x,t)}{*} w$.

□

4.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x,t)}{*})$

Аналогично на разглежданията в глави 2 и 3 ще въведем пръстена на мултипликаторите на $(C, \overset{(x,t)}{*})$ и пръстена на мутипликаторните частни.

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,t)}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [72]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. Обикновено, в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи, които не са делители на нулата. Например такива елементи са: мултипликаторите $\{x\} \overset{x}{*}$ и $\{1\} \overset{t}{*}$ т. е. операторите $L_x = [x]_t$ и $l_t = [1]_x$. Поради Теорема 4.3 елементите $[x]_t, [1]_x \in \mathfrak{M}$.

Означаваме с $\mathfrak{N}$ множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин на начина по който от пръстена на целите числа се получава пръстенът на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим пръстена на мултипликаторните частни. Но в "знаменател" може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\dfrac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация"(вж. Ленг [71], стр. 53).

В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност "$\sim$" такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

По същия начин, по-който пръстенът на целите числа се разглежда като част от полето на рационалните числа, така и пръстенът на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{x}{*})$ разглеждаме като част от $\mathcal{M}$, а също и конволюционните пръстени $(C[0,a], \overset{x}{*})$, $(C[0,\infty), \overset{t}{*})$, $(C, \overset{(x,t)}{*})$. По-точно тези влагания са разгледани в следващата теорема.

Теорема 4.4 *В пръстена $\mathcal{M}$ се съдържат подпръстени, изоморфни на:*

i) Основното поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

ii) Конволюционния пръстен $(C[0,a], \overset{x}{*})$;

iii) Конволюционния пръстен $(C[0,\infty), \overset{t}{*})$;

iv) Конволюционния пръстен $(C, \overset{(x,t)}{*})$;

v) Пръстена на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,t)}{*})$.

Доказателство.

Ще проверим, че следващите изображения са влагания.

i) $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad \alpha \mapsto \dfrac{(L_x\alpha) \overset{x}{*}}{L_x} = [\alpha], \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C}$;

ii) $(C[0,a], \overset{x}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad f \mapsto \dfrac{(L_x f) \overset{x}{*}}{L_x} = [f]_t, \qquad f \in C[0,a];$

iii) $(C[0,\infty), \overset{t}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad \varphi \mapsto \dfrac{(l_t\varphi) \overset{t}{*}}{l_t} = [\varphi]_x, \qquad \varphi \in C[0,\infty);$

iv) $(C, \overset{(x,t)}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad u \mapsto \dfrac{(L_x l_t u) \overset{(x,t)}{*}}{L_x l_t} = u, \qquad u \in C;$

v) $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad M \mapsto \dfrac{M}{I}$, където I е идентитетът в $(C, \overset{(x,t)}{*})$, а $M \in \mathfrak{M}$.

Разглеждаме i). Понеже влагането $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{M}$ (или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}$) се дефинира с изображението $\alpha \mapsto [\alpha]$ то от съответствията

$$\alpha\beta \mapsto [\alpha\beta] = \frac{\alpha\beta L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x}{L_x}\frac{\beta L_x}{L_x} = [\alpha][\beta],$$

и

$$\alpha+\beta \mapsto [\alpha+\beta] = \frac{(\alpha+\beta)L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x + \beta L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x}{L_x} + \frac{\beta L_x}{L_x} = [\alpha]+[\beta],$$

където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) се вижда, че това изображение е влагане на пръстени. За означението "[ ]" вж. Дефиниция 4.3.

Разглеждаме ii). Ще докажем, че изображението в ii) е влагане на пръстени. Нека $f, g \in C[0,a]$. Имаме

$$f+g \mapsto \frac{(L_x(f+g)) \overset{x}{*}}{L_x} = [f+g]_t.$$

От друга страна

$$\frac{(L_x(f+g)) \overset{x}{*}}{L_x} = \frac{(L_x f + L_x g) \overset{x}{*}}{L_x}$$

Поради линейността на $\overset{x}{*}$

$$\frac{(L_x f + L_x g) \overset{x}{*}}{L_x} = \frac{(L_x f) \overset{x}{*}}{L_x} + \frac{(L_x g) \overset{x}{*}}{L_x} = [f]_t + [g]_t.$$

Ще докажем, че образа на произведение на два елемента е произведение на образите им, т.е. ще докажем, че $[f \overset{x}{*} g]_t = [f]_t [g]_t$. Имаме

$$(f \overset{x}{*} g) \mapsto \frac{(L_x(f \overset{x}{*} g)) \overset{x}{*}}{L_x} = [f \overset{x}{*} g]_t.$$

От друга страна

$$\frac{(L_x(f \overset{x}{*} g)) \overset{x}{*}}{L_x} = \frac{\left((L_x f) \overset{x}{*}\right)}{L_x} \frac{\left((L_x g) \overset{x}{*}\right)}{L_x} = [f]_t [g]_t.$$

Това, че останалите изображения също са влагания се доказва аналогично.
□

От сега нататък ще смятаме, че всички тези пръстени са подпръстени на $\mathcal{M}$.

4.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (4.1) - (4.3)

Както споменахме, елементите l_t и L_x на $\mathcal{M}$ не са делители на нулата. Важни за по-нататъшните разглеждания с оглед на алгебризацията на граничните задачи от разглеждания клас са алгебричните обратни на l_t и L_x в $\mathcal{M}$. Означаваме ги с

$$s_t = \frac{1}{l_t}, \qquad S_x = \frac{1}{L_x}.$$

Операторите s_t и S_x са алгебрически аналози на операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Връзката между s_t, S_x и $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ съответно се дава от следващата теорема.

Теорема 4.5 *Нека $u \in C$ притежава непрекъснати частни производни u_t и u_{xx} в $[0,a] \times [0,\infty)$. Тогава*

$$u_{xx} = S_x u + S_x\{x\Phi\{1\} - 1\}u(0,t) - [\Phi_\xi\{u(\xi,t)\}]_x, \tag{4.14}$$

$$u_t = s_t u - [\chi_\tau\{u(x,\tau)\}]_t. \tag{4.15}$$

Доказателство. Равенство (4.14) е доказано в Глава 3 Теорема 3.3, а равенство (4.15) е доказано в Глава 2 Теорема 2.3.
□

Теорема 4.6 *Нека $u \in C$ и $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t) \in C(D)$ за $n = 1,2,...,$ $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(x,t) \in C(D)$ за $m = 1,2,...,$. Тогава*

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u = S_x^m u + \sum_{j=1}^{m} S_x^j\{x\Phi\{1\} - 1\}\frac{\partial^{2(m-j)}}{\partial x^{2(m-j)}}u(0,t) - S_x^{j-1}\Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2(m-j)}}{\partial \xi^{2(m-j)}}u(\xi,t)\right\}, \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}u = s_t^n u - \sum_{j=1}^{n} s_t^{n-j}\chi_\tau\left\{\frac{\partial^{j-1}}{\partial \tau^{j-1}}u(x,\tau)\right\}. \tag{4.17}$$

Доказателство. Равенство (4.16) е доказано в Глава 3, Теорема 3.4, а равенство (4.17) е доказано в Глава 2, Следствие 2.1.
□

Връзките (4.16) и (4.17) ни позволяват да алгебризираме граничната задача (4.1) - (4.3):

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - Q\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = F(x,t), \tag{4.1}$$

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x,\tau)\right\} = f_k(x), \quad k = 0,1,...,\deg P - 1, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,t) = \varphi_k(t), \qquad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}}u(\xi,t)\right\} = \psi_k(t), \quad k = 0,1,...,\deg Q - 1. \tag{4.3}$$

За тази цел, като използваме (4.16) и (4.17) и от граничните условия (4.2) - (4.3) получаваме

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u = S_x^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Phi\{1\} - 1\}\varphi_{k-j}(t) - S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t), \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u = s_t^k u - \sum_{j=1}^{k} s_t^{k-j} f_{j-1}(x). \tag{4.19}$$

Записваме диференциалното уравнение (4.1) във вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - Q\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u := b_n u + \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}u - c_m u - \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u = F(x,t).$$

Като използваме (4.18), (4.19), граничната задача (4.1) - (4.3) се редуцира до едно алгебрично уравнение в $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}(4.20)\quad & b_n u + \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\left(s_t^k u - \sum_{j=1}^{k} s_t^{k-j} f_{j-1}(x)\right) - \\ & - \quad c_m u - \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\left(S_x^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t) - S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t)\right) = F(x,t).\end{aligned}$$

Тук $F(x,t)$, $f_j(x)$, за $j = 0,1,...,\deg P - 1$ и $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ за $i = 0,1,...,\deg Q - 1$ са дадени функции. На тях може да се гледа като на известни елементи от пръстена $\mathcal{M}$. На неизвестната функция u гледаме като на неизвестен елемент от пръстена $\mathcal{M}$. Затова зписваме алгебричното уравнение (4.20) от пръстена $\mathcal{M}$ във вида:

$$\begin{aligned}(4.21)\quad & \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}s_t^k u - \sum_{k=0}^{m} c_{m-k}S_x^k u = F(x,t) + \\ & + \quad \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\sum_{j=1}^{k} s_t^{k-j}f_{j-1}(x) + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t) - S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t)\right)\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}(4.22)\quad & P(s_t)u - Q(S_x)u = F(x,t) + \\ & + \quad \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\sum_{j=1}^{k} s_t^{k-j}f_{j-1}(x) + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t) - S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t)\right)\end{aligned}$$

Както отбелязахме в увода ще се стремим да решим алгебричното уравнение (4.22) в $\mathcal{M}$, а след това да изтълкуваме полученото решение като функция.

Но първо ще представим алгебричното уравнение (4.22) от $\mathcal{M}$ като интегрално уравнение за неизвестната функция u. Умножаваме (4.21) с $L_x^m l_t^n$. Получаваме:

$$\begin{aligned}& L_x^m\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}l_t^n s_t^k u - l_t^n\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}L_x^m S_x^k u = L_x^m l_t^n F(x,t) + \\ + \quad & L_x^m\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\sum_{j=1}^{k} l_t^n s_t^{k-j}f_{j-1}(x) + l_t^n\sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(L_x^m S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t) - L_x^m S_x^{j-1}\psi_{k-j}(t)\right).\end{aligned}$$

Като използваме, че $L_x S_x = 1$ и $l_t s_t = 1$ намираме

$$(4.23)\qquad L_x^m\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}l_t^{n-k}u - l_t^n\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}L_x^{m-k}u = L_x^m l_t^n F(x,t) +$$

$$+L_x^m\sum_{k=1}^{n}b_{n-k}\sum_{j=1}^{k}l_t^{n-k+j}f_{j-1}(x)+l_t^n\sum_{k=1}^{m}c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\left(L_x^{m-j}\{x\Phi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(t)-L_x^{m-j+1}\psi_{k-j}(t)\right).$$

Сега използваме и $L_x=[x]_t$, $L_x^m=L_x^{m-1}\{x\}$ и $l_t=[1]_x$, $l_t^n=l_t^{n-1}\{1\}$. Получаваме интегрално уравнение за функцията u :

$$\begin{gathered}L_x^m\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}l_t^{n-k}u-l_t^n\sum_{k=0}^{m}c_{m-k}L_x^{m-k}u=L_x^ml_t^nF(x,t)+\\ +L_x^m\sum_{k=1}^{n}b_{n-k}\sum_{j=1}^{k}l_t^{n-k+j-1}\{1\}f_{j-1}(x)+\\ +l_t^n\sum_{k=1}^{m}c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\}-L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\varphi_{k-j}(t)-L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t)\Big).\end{gathered}\tag{4.24}$$

Дефиниция 4.4 *Функция $u\in C^1([0,a]\times[0,\infty))$ се нарича слабо решение на граничната задача (4.1) - (4.3) ако удовлетворява интегралното уравнение (4.24).*

Ще докажем, че ако една функция със съответната гладкост удовлетворява интегралното уравнение (4.24), то тя удовлетворява граничните условия (2) и (3).

Лема 4.3 Нека $u=u(x,t)\in C^1([0,a]\times[0,\infty))$, $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(x,t)\in C(D)$, където $n=\deg P$ и u удовлетворява интегралното уравнение (4.24). Тогава u удовлетворява граничните условия (4.2) по t:

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}u(x,\tau)\right\}=f_k(x),\quad k=0,1,...,n-1,$$

за $0\le x\le a$.

Доказателство.

Прилагаме към (4.24) функционала χ. Получаваме

$$\begin{gathered}L_x^m\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}\chi_t\left\{l_t^{n-k}u\right\}-\chi_t\left\{l_t^n\sum_{k=0}^{m}c_{m-k}L_x^{m-k}u\right\}=L_x^m\chi_t\left\{l_t^nF(x,t)\right\}+\\ +L_x^m\sum_{k=1}^{n}b_{n-k}\sum_{j=1}^{k}\chi_t\left\{l_t^{n-k+j-1}\{1\}\right\}f_{j-1}(x)+\\ +\chi_t\left\{l_t^n\sum_{k=1}^{m}c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\}-L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\varphi_{k-j}(t)-L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t)\Big)\right\}.\end{gathered}$$

Като използваме $\chi_\tau\circ l_\tau\equiv 0$, намираме

$$L_x^mb_0\chi_t\{u\}=L_x^m\sum_{k=1}^{n}b_{n-k}\sum_{j=1}^{k}\chi_t\left\{l_t^{n-k+j-1}\{1\}\right\}f_{j-1}(x).$$

Отново като използваме $\chi_\tau \circ l_\tau \equiv 0$ се вижда, че в дясната страна е различно от нула само събираемото което се получава при $k = n$ и $j = 1$, т.е.

$$L_x^m b_0 \chi_t\{u\} = L_x^m b_0 \chi_t \{1\} f_0(x).$$

От $\chi_t\{1\} = 1$ получаваме

$$L_x^m b_0 \chi_t\{u\} = L_x^m b_0 f_0(x).$$

Към последното равенство прилагаме оператора $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$. Понеже L_x е десен обратен на $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, т.е. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} L_x = I$ имаме $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} L_x^m = I$, където I е идентитетът в $C(D)$. Следователно

$$\chi_t\{u(x,t)\} = f_0(x).$$

Накрая сме използвали, че $b_0 \neq 0$, защото $\deg P \geq 1$.

Допускаме, че

$$\chi_\tau \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} u(x,\tau) \right\} = f_j(x),$$

за $j = 1, ..., n-2$. Ще докажем

$$\chi_\tau \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} u(x,\tau) \right\} = f_{n-1}(x).$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}$ към (4.24)

$$\begin{aligned} & L_x^m \left(b_n l_t u + b_{n-1} u + b_{n-2} \frac{\partial}{\partial t} u + ... + b_1 \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} u + b_0 \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} u \right) - \\ & - l_t \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u \quad = \quad L_x^m l_t F(x,t) + \\ & + L_x^m \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \sum_{j=1}^{k} l_t^{n-k+j-1}\{1\} f_{j-1}(x) + \\ & + l_t \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j+1} \Phi\{1\} - L_x^{m-j} \big) \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j+1} \psi_{k-j}(t) \Big). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Нека отделно да разгледаме двойната сума

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \sum_{j=1}^{k} l_t^{n-k+j-1}\{1\} f_{j-1}(x) = \\ = \; & b_{n-1} \; l_t^{n-1}\{1\} f_0(x) + \\ + \; & b_{n-2} \Big(l_t^{n-2}\{1\} f_0(x) + l_t^{n-1}\{1\} f_1(x) \Big) + \\ + \; & \quad ... \quad + \\ + \; & b_1 \; \Big(l_t\{1\} f_0(x) + l_t^2\{1\} f_1(x) + ... + l_t^{n-2}\{1\} f_{n-3}(x) + l_t^{n-1}\{1\} f_{n-2}(x) \Big) + \\ + \; & b_0 \; \Big(\; 1 f_0(x) \; + \; l_t\{1\} f_1(x) + ... + l_t^{n-2}\{1\} f_{n-2}(x) + l_t^{n-1}\{1\} f_{n-1}(x) \Big). \end{aligned}$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}$ към последното равенство. Използваме

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} l_t\{1\} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} l_t^2\{1\} = ... = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} l_t^{n-2}\{1\} = 0$$

и

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} l_t^{n-1}\{1\} = 1.$$

Получаваме

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \sum_{j=1}^{k} l_t^{n-k+j-1}\{1\} f_{j-1}(x) = \tag{4.26}$$
$$= b_{n-1} f_0(x) + b_{n-2} f_1(x) + \ ... \ + b_1 f_{n-2}(x) + b_0 f_{n-1}(x).$$

Сега прилагаме χ към (4.25) и като използваме (4.26) и $\chi_\tau \circ l_\tau \equiv 0$ намираме

$$L_x^m \left(b_{n-1}\chi_t\{u(x,t)\} + b_{n-2}\chi_t\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} + ... + b_1\chi_t\left\{\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}u(x,t)\right\} + b_0\chi_t\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(x,t)\right\}\right) =$$
$$= L_x^m \left(b_{n-1} f_0(x) + b_{n-2} f_1(x) + \ ... \ + b_1 f_{n-2}(x) + b_0 f_{n-1}(x)\right).$$

Понеже

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^j}{\partial \tau^j}u(x,\tau)\right\} = f_j(x),$$

за $j = 1, ..., n-2$, получаваме

$$L_x^m \left(b_{n-1} f_0(x) + b_{n-2} f_1(x) + \ ... \ + b_1 f_{n-2}(x) + b_0\chi_t\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}u(x,t)\right\}\right) =$$
$$= L_x^m \left(b_{n-1} f_0(x) + b_{n-2} f_1(x) + \ ... \ + b_1 f_{n-2}(x) + b_0 f_{n-1}(x)\right).$$

Прилагаме към последното равенство $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$ и понеже $b_0 \neq 0$, намираме

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}}u(x,\tau)\right\} = f_{n-1}(x).$$

□

Сега ще докажем, че ако една функция със съответната гладкост удовлетворява интегралното уравнение (4.24) то тя удовлетворява граничните условия по x.

Лема 4.4 Нека $u = u(x,t) \in C^1([0,a] \times [0,\infty))$, $\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t) \in C(D)$, където $m = \deg Q$ и u удовлетворява интегралното уравнение (4.24). Тогава u удовлетворява граничните условия (4.3) по x.

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,t) = \varphi_k(t), \quad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}}u(\xi,t)\right\} = \psi_k(t),$$

където $k = 0, 1, ..., m-1$, $m = \deg Q$ и $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ са дадени за $0 \le t < \infty$.

Доказателство.

Нека отделно да разпишем по-подробно последната двойна сума участваща в (4.24)

$$\sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big)\varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t) \Big) = \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
= \;& c_{m-1}\Big(\big(L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\} \big)\varphi_0(t) - L_x^{m-1}\{x\}\psi_0(t) \Big) \; + \\
+ \;& c_{m-2}\Big(\big(L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\} \big)\varphi_1(t) - L_x^{m-1}\{x\}\psi_1(t) + \\
& \quad + \big(L_x^{m-2}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-3}\{x\} \big)\varphi_0(t) - L_x^{m-2}\{x\}\psi_0(t) \Big) \; + \\
+ \;& \; ... \; + \\
+ \;& c_1\Big(\big(L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\} \big)\varphi_{m-2}(t) - L_x^{m-1}\{x\}\psi_{m-2}(t) + ... + \\
& \quad + \big(L_x\{x\}\Phi\{1\} - \{x\} \big)\varphi_0(t) - L_x\{x\}\psi_0(t) \Big) \; + \\
+ \;& c_0\Big(\big(L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\} \big)\varphi_{m-1}(t) - L_x^{m-1}\{x\}\psi_{m-1}(t) + ... + \\
& \quad + \big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big)\varphi_0(t) - \{x\}\psi_0(t) \Big)
\end{aligned}$$

1) Първо ще докажем

$$\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}} u(0,t) = \varphi_k(t), \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Полагаме $x = 0$ в (4.24). Използваме, че $(L_x g)(0,t) = 0$, за всяко $g \in C^1(D)$. От (4.27) получаваме:

$$-l_t^n c_0 u(0,t) = -l_t^n c_0 \varphi_0(t).$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$. Да отбележим, че $c_0 \neq 0$, защото $\deg P \geq 1$.
Намираме: $u(0,t) = \varphi_0(t)$.

Допускаме, че

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u(0,t) = \varphi_k(t),$$

за $k = 0, ..., m-2$. Ще докажем че последното равенство е изпълнено за $k = m-1$.

Прилагаме $\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}$ към (4.24). Получаваме

$$\begin{aligned}
L_x \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} l_t^{n-k} u - l_t^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u \quad &= \quad L_x l_t F(x,t) + \\
+ L_x \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \sum_{j=1}^{k} l_t^{n-k+j-1}\{1\} f_{j-1}(x) + & \\
+ l_t^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j+1}\Phi\{1\} - L_x^{m-j} \big)\varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j+1}\psi_{k-j}(t) \Big). &
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Разглеждаме сумата

$$\begin{aligned}(4.29)\qquad & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}L_x^{m-k}u = \\ = \ & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\Big(c_m L_x^m u + c_{m-1}L_x^{m-1}u + ... + c_1 L_x u + c_0 u\Big) = \\ = \ & c_m L_x u + c_{m-1}u(x,t) + ... + c_1\frac{\partial^{2m-4}}{\partial x^{2m-4}}u(x,t) + c_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t).\end{aligned}$$

При $x=0$ от

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,t) = \varphi_k(t),$$

за $k = 0,...,m-2$ получаваме

$$(4.30)\ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}L_x^{m-k}u = c_{m-1}\varphi_0(t) + ... + c_1\varphi_{m-2}(t) + c_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t).$$

От (4.27) като приложим $\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}$, намираме

$$\begin{aligned}(4.31)\ & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t)\Big) = \\ = \ & c_{m-1}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\varphi_0(t) - \{x\}\psi_0(t)\Big) + \\ + \ & c_{m-2}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\varphi_1(t) - \{x\}\psi_1(t)\Big) + \\ + \ & ... + \\ + \ & c_1\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\varphi_{m-2}(t) - \{x\}\psi_{m-2}(t)\Big) + \\ + \ & c_0\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\varphi_{m-1}(t) - \{x\}\psi_{m-1}(t)\Big).\end{aligned}$$

При $x=0$ се получава:

$$\begin{aligned}(4.32)\ & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t)\Big) = \\ = \ & -\Big(c_{m-1}\varphi_0(t) + ... + c_1\varphi_{m-2}(t) + c_0\varphi_{m-1}(t)\Big).\end{aligned}$$

При $x=0$ от (4.28), (4.30) и (4.32) намираме

$$\begin{aligned}& -l_t^n\Big(c_{m-1}\varphi_0(t) + ... + c_1\varphi_{m-2}(t) + c_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t)\Big) = \\ = \ & -l_t^n\Big(c_{m-1}\varphi_0(t) + ... + c_1\varphi_{m-2}(t) + c_0\varphi_{m-1}(t)\Big).\end{aligned}$$

Прилагаме $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$, понеже $c_0 \neq 0$, намираме:

$$\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(0,t) = \varphi_0(t).$$

2) Ще докажем

$$\Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} u(\xi, t) \right\} = \psi_k(t),$$

където $k = 0, 1, ..., m-1$, $m = \deg Q$.

Прилагаме към (4.24) функционала Φ и използваме $\Phi_x \circ L_x \equiv 0$. Получаваме

$$(4.33)\quad -l_t^n \Phi_x \left\{ \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u \right\} =$$
$$= l_t^n \Phi_x \left\{ \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big) \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\} \psi_{k-j}(t) \Big) \right\}.$$

Да разгледаме поотделно двете суми, участващи от двете страни на равенство (4.33).

Първо за сумата от лявата страна на равенството (4.33) имаме

$$(4.34)\qquad \Phi_x \left(\sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u \right) =$$
$$= \Phi_x \left\{ c_m L_x^m u(x,t) + c_{m-1} L_x^{m-1} u(x,t) + ... + c_1 L_x u(x,t) + c_0 u(x,t) \right) =$$
$$= c_0 \Phi_x\{u(x,t)\}.$$

Да разгледаме сумата от дясната страна на равеснство (4.33). От (4.27) се вижда, че

$$(4.35)\ \Phi_x \left\{ \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big\} \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\} \psi_{k-j}(t) \Big) \right) =$$
$$= \ \Phi_x \Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big) \varphi_0(t) - \{x\} \psi_0(t) \Big) \Big) =$$
$$= \ \Phi_x \big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\} \big) \varphi_0(t) - \Phi_x\{x\} \psi_0(t) \big) = -\psi_0(t).$$

В последното равенство сме използвали, че $\Phi_x\{x\} = 1$. От (4.33), (4.34) и (4.35) намираме:

$$-l_t^n c_0 \Phi_x\{u(x,t)\} = -l_t^n c_0 \psi_0(t).$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$, понеже $c_0 \neq 0$, намираме:

$$\Phi_x\{u(x,t)\} = \psi_0(t).$$

Допускаме, че

$$\Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} u(\xi, t) \right\} = \psi_k(t),$$

за $k = 0, 1, ..., m-2$. Ще докажем, че е вярно и за $k = m-1$, т.е.

$$\Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial \xi^{2m-2}} u(\xi, t) \right\} = \psi_k(t),$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}$ към (4.24). Получаваме

$$L_x \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} l_t^{n-k} u - l_t^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u = L_x l_t^n F(x,t)+ \tag{4.36}$$

$$+L_x \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \sum_{j=1}^{k} l_t^{n-k+j-1}\{1\} f_{j-1}(x)+$$

$$+l_t^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big) \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t) \Big).$$

Прилагаме функционала Φ, към (4.36) и като използваме $\Phi_x \circ L_x \equiv 0$ получаваме

$$-l_t^n \Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u(x,t) \right\} = \tag{4.37}$$

$$= l_t^n \Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big) \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t) \Big) \right\}.$$

Ще разгледаме поотделно двете суми в (4.37). Първо разглеждаме лявата страна на равенство (4.37).

$$\Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} L_x^{m-k} u(x,t) \right\} = \tag{4.38}$$

$$= \Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \left(c_m L_x^m u(x,t) + c_{m-1} L_x^{m-1} u(x,t) + \ldots + c_1 L u(x,t) + c_0 u(x,t) \right) \right\} =$$

$$= \Phi_x \left\{ c_m L_x u(x,t) + c_{m-1} u(x,t) + \ldots + c_1 \frac{\partial^{2m-4}}{\partial x^{2m-4}} u(x,t) + + c_0 \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,t) \right\} =$$

$$= c_{m-1}\psi_0(t) + \ldots + c_1 \psi_{m-2}(t)) + c_0 \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,t).$$

Сега ще разгледаме сумата отдясно на ревенството (4.37). От (4.31) получаваме:

$$\Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} c_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\} \big) \varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t) \Big) \right\} =$$

$$\begin{aligned} = \Phi_x \Big\{ \quad & c_{m-1} \quad \Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big) \varphi_0(t) - \{x\}\psi_0(t) \Big) + \\ + \quad & c_{m-2} \quad \Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big) \varphi_1(t) - \{x\}\psi_1(t) \Big) + \\ + \quad & \qquad \ldots \quad + \\ + \quad & c_1 \quad \Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big) \varphi_{m-2}(t) - \{x\}\psi_{m-2}(t) \Big) + \\ + \quad & c_0 \quad \Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\} \big) \varphi_{m-1}(t) - \{x\}\psi_{m-1}(t) \Big) \Big\} = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} = & c_{m-1} & \Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\varphi_0(t) - \Phi_x\{x\}\psi_0(t)\Big) \ + \\ + & c_{m-2} & \Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\varphi_1(t) - \Phi_x\{x\}\psi_1(t)\Big) + \\ + & & \quad ... \quad + \\ + & c_1 & \Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\varphi_{m-2}(t) - \Phi_x\{x\}\psi_{m-2}(t)\Big) + \\ + & c_0 & \Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\varphi_{m-1}(t) - \Phi_x\{x\}\psi_{m-1}(t)\Big). \end{array}$$

Сега използваме, че $\Phi_x\{x\} = 1$. Получаваме

(4.39)

$$\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\varphi_{k-j}(t) - L_x^{m-j}\{x\}\psi_{k-j}(t)\Big)\right\} =$$
$$= -c_{m-1}\psi_0(t) - c_{m-2}\psi_1(t) - ... - c_1\psi_{m-2}(t) - c_0\psi_{m-1}(t).$$

От (4.37), (4.38) и (4.39) получаваме

$$\begin{aligned} &-l_t^n\Big(c_{m-1}\psi_0(t) + ... + c_1\psi_{m-2}(t)) + c_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t)\Big) = \\ &= l_t^n\Big(-c_{m-1}\psi_0(t) - c_{m-2}\psi_1(t) - ... - c_1\psi_{m-2}(t) - c_0\psi_{m-1}(t)\Big). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Накрая прилагаме оператора $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$ към (4.40). Получаваме:

$$\Phi\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,t)\right\} = \psi_{m-1}(t).$$

□

Лема 4.5 Нека $u = u(x,t) \in C^1([0,a]\times[0,\infty))$, е решение на интегралното уравнение (4.24) с непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(x,t) \in C(D)$. Тогава u е класическо решение на граничната задача (4.1) - (4.3).

Доказателство.

Прилагаме оператора $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$ към (4.24). Получаваме

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - Q\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = F(x,t).$$

Понеже съществуват непрекъснати частни производни на u по t и по x от съответния ред, то според Лема 4.3 и Лема 4.4 u удовлетворява и граничните условия (4.2) и (4.3).

□

4.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (4.1) - (4.3).

За да съществува единствено решение на (4.22) в $\mathcal{M}$ е необходимо $P\left(s_t\right) - Q\left(S_x\right)$ да не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. За това в тази глава ще изследваме достатъчни условия, при които $P\left(s_t\right) - Q\left(S_x\right)$ не е делител на нулата.

Да припомним, че в Глава 2 въведохме цялата функция $G(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$ която се нарича експоненциална индикатриса на функционала χ. В Глава 3 въведохме функцията $E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}$ която се нарича синусова индикатриса на функционала Φ.

Бележка. В Глава 2 означавахме експоненциалната индикатриса на функционала χ с $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$.

Лесно се намира достатъчно условие, при което $P\left(s_t\right) - Q\left(S_x\right)$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Лема 4.6 Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) = 0$, а $\mu \in \mathbb{C}$ е число, за което $G(\mu) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$P(\mu) - Q(-\lambda^2) = 0,$$

тогава

$$P(s_t) - Q(S_x)$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство. Ще докажем, че за ненулевият елемент $\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}$ на $\mathcal{M}$ е изпълнено $\left(P(s_t) - Q(S_x)\right)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} = 0$. Имаме

$$\left(P(s_t) - Q(S_x)\right)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} = P(s_t)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} - Q(S_x)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}.$$

Като използваме (4.16), (4.17) и $E(\lambda) = 0$, $G(\mu) = 0$ получаваме

$$P(s_t)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} - Q(S_x)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} = (P(\mu) - Q(-\lambda^2))e^{\mu t}\sin\lambda x = 0.$$

Следователно $\left(P(s_t) - Q(S_x)\right)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\} = 0$.
□

Пример.

Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) = 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ е число, за което $G(\mu) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$\mu - \lambda^2 = 0,$$

тогава

$$s_t + S_x$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Ще докажем, че за ненулевия елемент $\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}$ на $\mathcal{M}$ е изпълнено $(s_t+S_x)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}=0$. Имаме

$$(s_t+S_x)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}=s_t\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}+S_x\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}=$$

$$=\sin\lambda x\ s_t\{e^{\mu t}\}\ +\ e^{\mu t}\ S_x\{\sin\lambda x\}.$$

Използваме (4.14) и (4.15) и получаваме

$$\sin\lambda x\ s_t\{e^{\mu t}\}\ +\ e^{\mu t}\ S_x\{\sin\lambda x\}=$$

$$=\sin\lambda x\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{\mu t}+\chi_\tau\{e^{\mu\tau}\}\right)+e^{\mu t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\lambda x+\Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\}\right).$$

За μ и λ такива, че $G(\mu)=\chi_\tau\{e^{\mu\tau}\}=0$ и $E(\lambda)=\Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}=0$, намираме

$$\sin\lambda x\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{\mu t}+\chi_\tau\{e^{\mu\tau}\}\right)+e^{\mu t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\lambda x+\Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\}\right)=$$

$$=\sin\lambda x\ \frac{\partial}{\partial t}e^{\mu t}+e^{\mu t}\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\lambda x=$$

$$=\mu e^{\mu t}\sin\lambda x-\lambda^2e^{\mu t}\sin\lambda x=(\mu-\lambda^2)e^{\mu t}\sin\lambda x=0.$$

Следователно $(s_t+S_x)\{e^{\mu t}\sin\lambda x\}=0$.
□

Сега ще търсим достатъчни условия кога елементът $P(s_t)-Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. Понеже от това, че $P(s_t)-Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (4.22) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$, ще наричаме съответната теорема, теорема за единственост на решението на граничната задача (4.1) - (4.3).

Теорема 4.7 *Нека $a\in\operatorname{supp}\Phi$, $\deg P\geq 1$, $G(\mu_k)=0$ и $E(\lambda_n)=0$ за $k,n=1,2,\ldots$. Ако $P(\mu_k)-Q(-\lambda_n^2)\neq 0$, тогава елементът $P(s_t)-Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.*

Доказателство.

Допускаме противното, т.е. допускаме, че съществува ненулев елемент на $\mathcal{M}$ т.е. ненулева мулипликаторна дроб $\dfrac{A}{B}\neq 0$, $A\in\mathfrak{M}$ и $B\in\mathfrak{N}$ и $(P(s_t)-Q(S_x))\dfrac{A}{B}=0$. Последното равенство е еквивалентно на $(P(s_t)-Q(S_x))A=0$. Понеже $\dfrac{A}{B}\neq 0$ имаме $A\neq 0$. Тогава съществува функция $u\in C$ такава, че $Av=u\neq 0$. Тогава от $(P(s_t)-Q(S_x))A=0$ получаваме

$$(P(s_t)-Q(S_x))u=0. \tag{4.41}$$

Може да считаме, че u е достатъчно гладка, защото ако например съществува $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)$ но не съществува $\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(x,t)$, то след като умножим $(P(s_t)-Q(S_x))u=0$

с L_x намираме $(P(s_t)-Q(S_x))L_x u = 0$. За функцията $L_x u$ съществува $k+2$ производна по x.

Нека λ_n е α_n - кратна нула на индикатрисата на функционала Φ със собствена функция $\varphi_{n,0}(x)$ и присъединени функции $\varphi_{n,i}(x)$, $i = 1, ..., \alpha_n - 1$. Нека $\varphi_m(x)$ е такава, че (вж. Глава 3 (3.17))

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\sin \lambda x}{\lambda E(\lambda)} d\lambda.$$

Умножаваме (4.41) с φ_n и получаваме

$$(P(s_t) - Q(S_x))\varphi_n u = 0.$$

Означаваме

$$\varphi_n \overset{x}{*} u = \sum_{i=p}^{\alpha_n - 1} a_{n,i}(t)\varphi_{n,i},$$

където $a_{n,p}(t) \neq 0$ за някое p, $0 \leq p \leq \alpha_n - 1$ и намираме

$$(P(s_t) - Q(S_x)) \sum_{i=p}^{\alpha_n - 1} a_{n,i}(t)\varphi_{n,i} = 0.$$

Умножаваме последното равенство с $(S_x + \lambda_n^2)^{\alpha_n - p - 1}$

$$(P(s_t) - Q(S_x)) \sum_{i=p}^{\alpha_n - 1} a_{n,i}(t) \left(S_x + \lambda_n^2\right)^{\alpha_n - p - 1} \varphi_{n,i} = 0.$$

Използваме, че $(S_x + \lambda_n^2)^{\sigma} \varphi_{n,0} = 0$ за $\sigma \geq \alpha_n$ и получаваме

$$(P(s_t) - Q(S_x))a_{n,p}(t)\varphi_{n,\alpha_n - 1}(x) = 0.$$

Но $\varphi_{n,\alpha_n - 1}(x) = b_n \sin \lambda_n x$ и $b_n \neq 0$. Разглеждаме

$$(P(s_t) - Q(S_x))a_{n,p}(t) \sin \lambda_n x = 0.$$

От тук като използваме (4.16) и $E(\lambda_n) = 0$ намираме

$$(P(s_t) - Q(-\lambda_n^2))a_{n,p}(t) \sin \lambda_n x = 0.$$

Следователно

$$(P(s_t) - Q(-\lambda_n^2))a_{n,p}(t) = 0.$$

Това уравнение е еквивалентно на граничната задача

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) a_{n,p}(t) - Q(-\lambda_n^2)a_{n,p}(t) = 0,$$

$$\chi_\tau \left\{ \frac{d^k}{d\tau^k}\ a_{n,p}(\tau) \right\} = 0, \qquad k = 0, 1, ..., \deg P - 1.$$

Понеже $P(\mu_k) - Q(-\lambda_n^2) \neq 0$ според единственото решение е $a_{n,p}(t) \equiv 0$ (вж. Лема 2.3). Следователно

$$\varphi_n \overset{x}{*} u \equiv 0.$$

за всяко n. Понеже $a \in \operatorname{supp} \Phi$ според Теоремата на Божинов (вж. [34] и [36]) следва, че $u \equiv 0$. Това противоречие с допускането $u \neq 0$ доказва теоремата.
□

4.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (4.1) - (4.3). Разширен принцип на Дюамел.

След като доказахме теорема за единственост на решението на граничната задача (4.1) - (4.3), трябва да изучим и въпроса за съществуване на решение.

Тук се налага да уточним за какво решение става дума. Ако говорим за класическо решение, ще трябва да наложим ограничения както на функционалите χ и Φ, така и на граничните функции.

Тъй като граничната задача (4.1) - (4.3) бе сведена до алгебричното уравнение (4.22), то всяко класическо решение трябва да удовлетворява това уравнение. Обратното в общия случай не е вярно. Но може да твърдим, че ако е налице теорема за единственост, т.е. ако елементът $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, то алгебричното уравнение (4.22)

$$\big(P\,(s_t) - Q\,(S_x)\big)u = \widetilde{F},$$

има решение

$$u = \frac{1}{P(s_t) - Q(S_x)}\widetilde{F} \tag{4.42}$$

в $\mathcal{M}$, което ще наричаме *формално решение* на граничната задача (4.1) - (4.3).

След това може да говорим и за *слабо решение* на граничната задача (4.1) - (4.3) (вж. Дефиниция 4.4).

Накрая, функция $u \in C(D)$ която удовлетворява както уравнение (4.1), така и граничните условия (4.2) и (4.3) е класическо решение.

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (4.1) - (4.3).

Теорема 4.8 *Допускаме, че съществува слабо решение $\Omega(x,t)$ на граничната задача (4.1) - (4.3), при специален избор на граничните функции $f_j(x) = 0$, за $j = 0,1,...,\deg P - 1$, $\varphi_k(t) = 0$, $\psi_k(t) = 0$ за $k = 0,1,...,\deg Q - 1$ и на дясната част $F(x,t) = x$ на уравнението (4.1) . Тогава функцията*

$$u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x,t) \overset{(x,t)}{*} F(x,t)\right)$$

е решение на граничната задача (4.1) - (4.3) при достатъчна гладкост на функцията $F(x,t)$ и хомогенни гранични условия.

Доказателство.

Тъй като $\Omega(x,t)$ удовлетворява нулеви гранични условия, в този случай имаме:

$$u(x,t) = S_x s_t\{\Omega(x,t)\}\{F(x,t)\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x,t) \overset{(x,t)}{*} F(x,t)\right).$$

$\Omega(x,t)$ е решение на граничната задача (4.1) - (4.3) при $F(x,t) = x = l_t L_x$ и удовлетворява алгебричното уравнение в $\mathcal{M}$:

$$\Big(P(s_t) - Q(S_x)\Big)\Omega = l_t L_x.$$

Ако $P(s_t) - Q(S_x)$ не е делител на нулата то

$$\Omega = \frac{l_t L_x}{P(s_t) - Q(S_x)} = \frac{1}{s_t S_x (P(s_t) - Q(S_x))}.$$

Ще проверим, че u е решение на уравнението

$$(P(s_t) - Q(S_x))u = F(x,t).$$

Имаме

$$(P(s_t) - Q(S_x))u = (P(s_t) - Q(S_x)) S_x s_t \{\Omega(x,t)\}\{F(x,t)\} =$$

$$= (P(s_t) - Q(S_x)) S_x s_t \frac{1}{s_t S_x (P(s_t) - Q(S_x))}\{F(x,t)\} = \{F(x,t)\}.$$

□

4.8 Примери

Пример 1. Разглеждаме следната гранична задача за уравнението на топлопроводността (вж. параграф 3.4):

$$(4.43)\qquad \begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t, \ \ 0 < x < a,\\ &u(x,0) = f(x)\ ,\\ &u(0,t) = 0\ , \quad u(a,t) = 0. \end{aligned}$$

Като използваме

$$u_t = s_t u - [f(x)]_t, \qquad u_{xx} = S_x u,$$

(вж. (4.14) и (4.15)) алгебризираме задача (4.43):

$$(s_t - S_x)u = [f(x)]_t.$$

Понеже $s_t - S_x$ не е делител на нулата в съответния пръстен на мултипликаторните частни (вж. Теорема 4.7) то

$$u = \frac{1}{s_t - S_x}[f(x)]_t.$$

1. Нека означим с $U = U(x,t)$ решението на (4.43) за $f(x) = \{x\} = L_x = \dfrac{1}{S_x}$. Имаме:

$$U = \frac{1}{S_x(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.43) за произволна функция f може да представим във вида:

$$u = \frac{1}{s_t - S_x}[f(x)]_t = \frac{S_x}{S_x(s_t - S_x)}[f(x)]_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\{U(x,t)\} \overset{x}{*} \{f(x)\}\right).$$

Ако $f \in C^1([0,a])$ и $f(0) = 0$, като използваме (3.14) намираме, че решението на (4.43) е:

$$(4.44)\qquad \begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\{U(x,t) \overset{x}{*} \{f(x)\}\right) =\\ &= -\frac{1}{2a}\left(\int_0^a \big(U(x+a-\xi,t) - U(a-x-\xi,t)\big) f'(\xi)d\xi\right), \end{aligned}$$

където

$$U(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a},$$

е слабо решение на граничната задача (4.43) за $f(x) = \{x\}$.

Да отбележим, че от (4.44) се поучава представянето на Жевре (вж. [16], стр. 189 и [99]):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^a \left(\vartheta\left(\frac{x-\xi}{2a}, \frac{t}{a^2}\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{2a}, \frac{t}{a^2}\right)\right) f(\xi)d\xi,$$

където ϑ е тета функцията

$$\vartheta(x,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t}\cos 2k\pi x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{t}}$$

(вж. [16], стр. 188).

2. Нека означим с Ω решението на (4.43) за $f(x) = L_x\{x\} = \dfrac{1}{S_x^2} = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2}{6}x$. Имаме:

$$\Omega = \frac{1}{S_x^2(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.43) за произволна функция $f \in C^2(0,a)$, $f(0) = f(a) = 0$ е:

$$u(x,t) = \frac{1}{s_t - S_x}[f(x)]_t = \frac{S_x^2}{S_x^2(s_t - S_x)}[f(x)]_t = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\{\Omega(x,t)\} \overset{x}{*} \{f(x)\}\right).$$

Ако $f \in C^2([0,a])$ и $f(0) = f(a) = 0$, като използваме (3.15) намираме, че решението на (4.43) е:

$$u(x,t) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega \overset{x}{*} f(x)) = -\frac{1}{2a}\left(\int_0^a \big(\Omega_x(x+a-\xi,t) - \Omega_x(a-x-\xi,t)\big) f''(\xi)d\xi\right),$$

където

$$\Omega(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a},$$

е слабо решение на граничната задача (4.43) за $f(x) = L_x\{x\} = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2 x}{6}$.

Пример 2. Да разгледаме следната гранична задача за уравнението на топлопроводността включваща нелокално гранично условия на Бицадзе - Самарски (вж. параграф 3.4):

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a, \\ &u(x,0) = f(x)\ , \\ &u(0,t) = 0\ , \quad u(a,t) - u(c,t) = 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

1. Нека означим с $U = U(x,t)$ решението на (4.45) за $f(x) = \{x\} = L_x = \dfrac{1}{S_x}$. Имаме:

$$U = \frac{1}{S_x(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.45) за произволна функция $f \in C^1(0,a)$, $f(0) = 0$ може да представим във вида:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U \overset{x}{*} f(x)) = \\ &= -\frac{1}{2(a-c)}\left(\int_0^a \big(U(x+a-\xi,t) - U(a-x-\xi,t)\big) f'(\xi)d\xi - \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^c \big(U(x+c-\xi,t) - U(c-x-\xi,t)\big) f'(\xi)d\xi\right), \end{aligned} \tag{4.46}$$

където $U(x,t)$ е

$$U(x,t) = -2(a-c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n(a\ \cos a\lambda_n - c\ \cos c\ \lambda_n)} \sin \lambda_n x -$$
$$-2(a-c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 t}}{\mu_n(a\ \cos a\mu_n - c\ \cos c\ \mu_n)} \sin \mu_n x$$

при λ_n и μ_n прости корени на индикатрисите.

2. Нека означим с Ω решението на (4.45) за

$$f(x) = L_x\{x\} = \frac{1}{S_x^2} = \Big(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\Phi_\xi\{\xi^3\}\Big) = \frac{x^3}{6} - \frac{a^2+ac+c^2}{6}x.$$

Имаме:

$$\Omega = \frac{1}{S_x^2(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.45) за произволна функция $f \in C^2(0,a)$, $f(0) = f(a) - f(c) = 0$ е:

$$u(x,t) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega \overset{x}{*} f(x)) = \tag{4.47}$$

$$= -\frac{1}{2(a-c)}\left(\int_0^a \big(\Omega_x(x+a-\xi,t) - \Omega_x(a-x-\xi,t)\big) f''(\xi) d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_0^c \big(\Omega_x(x+c-\xi,t) - \Omega_x(c-x-\xi,t)\big) f''(\xi) d\xi \right),$$

където

$$\Omega(x,t) = 2(a-c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^3(a\ \cos a\lambda_n - c\ \cos c\ \lambda_n)} \sin \lambda_n x +$$
$$+2(a-c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 t}}{\mu_n^3(a\ \cos a\mu_n - c\ \cos c\ \mu_n)} \sin \mu_n x.$$

при λ_n и μ_n прости корени на индикатрисите.

Пример 3. Да разгледаме следната гранична задача за уравнението на топлопроводността включваща нелокално гранично условие на Самарски-Йонкин (вж. параграф 3.4 и вж. [14]):

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a, \\ & u(x,0) = f(x)\ , \\ & u(0,t) = 0\ , \quad \int_0^a u(\xi,t) d\xi = 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

1. Нека означим с $U = U(x,t)$ решението на (4.48) за $f(x) = \{x\} = L_x = \dfrac{1}{S_x}$. Имаме:

$$U = \frac{1}{S_x(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.48) за произволна функция $f \in C(0,a)$, $f(0)=0$ може да представим във вида:

$$u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U \overset{x}{*} f(x)) = \tag{4.49}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int_0^a \Big(U(a+x-\xi,t) - U(a-x-\xi,t)\Big) f(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \Big(U(\xi+a+x,t) + U(a+x-\xi,t) - 2U(x-\xi,t)\Big) f(\xi)d\xi \right),$$

където

$$U(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t}\left(2\lambda_n t \sin\lambda_n x - \lambda_n x \cos\lambda_n x\right),$$

$\lambda_n = \dfrac{2n\pi}{a}$.

2. Нека означим с Ω решението на (4.48) за

$$f(x) = L_x\{x\} = \frac{1}{S_x^2} = \Big(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\Phi_\xi\{\xi^3\}\Big) = \frac{x^3}{6} - \frac{a^2\ x}{12}.$$

Имаме:

$$\Omega = \frac{1}{S_x^2(s_t - S_x)}.$$

Решението на (4.48) за произволна функция $f \in C^1(0,a)$, $f(0)=0$, $\displaystyle\int_0^a f(\xi)d\xi = 0$ е:

$$u(x,t) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega \overset{x}{*} f(x)) = \tag{4.50}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int_0^a \Big(\Omega_x(a+x-\xi,t) - \Omega_x(a-x-\xi,t)\Big) f'(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \Big(\Omega_x(\xi+a+x,t) + \Omega_x(a+x-\xi,t) - 2\Omega_x(x-\xi,t)\Big) f'(\xi)d\xi \right),$$

където

$$\Omega(x,t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t}\left(2\Big(\frac{1}{\lambda_n^3} + \frac{1}{\lambda_n}t\Big)\sin\lambda_n x - \frac{1}{\lambda_n^2}x\cos\lambda_n x\right),$$

$\lambda_n = \dfrac{2n\pi}{a}$.

5 Двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

5.1 Увод

Следващата стъпка в разглежданията ни са операционните смятания за частните диференциални оператори $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Целта на тези операционни смятания е изучаването на нелокални гранични задачи за уравнения от вида

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = F(x,y) \tag{5.1}$$

в правоъгълна област D от вида $D = [0,a] \times [0,b]$ и с полиноми P и Q.

За да формулираме точния клас задачи задаваме два линейни функционала $\Phi \in (C^1[0,a])^*$ и $\Psi \in (C^1[0,b])^*$.

Първата група гранични условия на разглежданите задачи са следните:

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(0,y) = \psi_j(y), \quad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2j}}{\partial \xi^{2j}}u(\xi,y)\right\} = g_j(y), \quad 0 \le y \le b, \tag{5.2}$$

където $j = 0, 1, ..., \deg P - 1$ и $\psi_j(y)$ и $g_j(y)$ са дадени. Първите от тези гранични условия са локални, а вторите - изобщо нелокални.

Втората група гранични условия са:

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u(x,0) = \varphi_k(x), \quad \Psi_\eta\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \eta^{2k}}u(x,\eta)\right\} = f_k(x), \quad 0 \le x \le a, \tag{5.3}$$

където $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ и $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ са дадени. И тук както при първата група гранични условия, първите от тези гранични условия са локални, а вторите - изобщо нелокални.

Идеята на директното операционно смятане за гранични задачи от вида (5.1) - (5.3) е да се въведе конволюционно произведение $u(x,y) \overset{(x,y)}{*} v(x,y)$ в пространството на непрекъснатите функции $C = C(D)$ с цел то да се превърне в конволюционна алгебра и тя да се разшири до пръстен от мултипликаторни частни. Както ще видим по-нататък това става по подобен начин на начина по които от множеството на целите числа за получават рационалните числа.

В този пръстен от мултипликаторни частни задачата (5.1) - (5.3) се алгебризира и се свежда до едно алгебрично уравнение от първа степен от вида

$$[P(S_x) + Q(S_y)]u = \widetilde{F}, \tag{5.4}$$

където S_x и S_y са алгебричните аналози на $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ в пръстена и $\widetilde{F}$ също е елемент на пръстена включващ в себе си граничните условия.

Ако $P(S_x)+Q(S_y)$ не е делител на нулата в пръстена от мултипликаторни частни, тогава формалното решение на (5.4) в пръстена е

$$u = \frac{1}{P(S_x)+Q(S_y)}\widetilde{F}$$

и се интерпретира като функция от $C(D)$, която се нарича слабо решение на граничната задача (5.1) - (5.3).

В тази глава е реализирана описаната програма.

5.2 Двумерна конволюция

Тук ще използваме две едномерни конволюции, свързани с квадрата на диференцирането, разгледани подробно в Глава 3. Нека $f_1, f_2 \in C[0,a]$ и $g_1, g_2 \in C[0,b]$. Съответните едномерни конволюции се дефинират чрез:

$$(f_1 \overset{x}{*} f_2)(x) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,\zeta)d\zeta\right\}, \quad \text{в} \;\; C[0,a], \tag{5.5}$$

$$(g_1 \overset{y}{*} g_2)(y) = -\frac{1}{2}\Psi_\eta\left\{\int_0^\eta k(y,\gamma)d\gamma\right\}, \quad \text{в} \;\; C[0,b], \tag{5.6}$$

където

$$h(x,\zeta) = \int_x^\zeta f_1(\zeta+x-\sigma)f_2(\sigma)d\sigma - \int_{-x}^\zeta f_1(|\zeta-x-\sigma|)f_2(|\sigma|)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma,$$

$$k(y,\gamma) = \int_y^\gamma g_1(\gamma+y-\tau)g_2(\tau)d\tau - \int_{-y}^\zeta g_1(|\gamma-y-\tau|)g_2(|\tau|)\operatorname{sgn}\big(\tau(\gamma-y-\tau)\big)d\tau.$$

Ще дефинираме двумерна конволюция в пространството $C([0,a]\times[0,b])$.

Дефиниция 5.1 *(Димовски [47]) Нека $u, v \in C([0,a]\times[0,b])$. Тогава*

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x,y) = \frac{1}{4}\Phi_\xi\Psi_\eta\left\{\int_0^\xi\int_0^\eta h(x,y,\zeta,\gamma)d\zeta d\gamma\right\}, \tag{5.7}$$

където

$$\begin{aligned}
h(x,y,\zeta,\gamma) &= \int_x^\zeta\int_y^\gamma u(\zeta+x-\sigma,\gamma+y-\tau)v(\sigma,\tau)d\sigma d\tau - \\
&- \int_{-x}^\zeta\int_y^\gamma u(|\zeta-x-\sigma|,\gamma+y-\tau)v(|\sigma|,\tau)\;\operatorname{sgn}\big((\zeta-x-\sigma)\sigma\big)d\sigma d\tau - \\
&- \int_x^\zeta\int_{-y}^\gamma u(\zeta+x-\sigma,|\gamma-y-\tau|)v(\sigma,|\tau|)\;\operatorname{sgn}\big((\gamma-y-\tau)\tau\big)d\sigma d\tau + \\
&+ \int_{-x}^\zeta\int_{-y}^\gamma u(|\zeta-x-\sigma|,|\gamma-y-\tau|)v(|\sigma|,|\tau|)\;\operatorname{sgn}\big((\zeta-x-\sigma)(\gamma-y-\tau)\sigma\tau\big)d\sigma d\tau.
\end{aligned}$$

Забележка. Директно от тази дефиниция следва, че двумерната конволюцията по x и y (5.7) може да бъде представена и по следния начин

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x,y) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,y,\zeta)d\zeta\right\}, \tag{5.8}$$

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x,y) = -\frac{1}{2}\Psi_\eta\left\{\int_0^\eta k(x,y,\gamma)d\gamma\right\}, \tag{5.9}$$

където

$$h(x,y,\zeta) = \int_x^\zeta u(\zeta+x-\sigma,y) \overset{y}{*} v(\sigma,y)d\sigma - \int_{-x}^\zeta u(|\zeta-x-\sigma|,y) \overset{y}{*} v(|\sigma|,y)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma,$$

$$k(x,y,\gamma) = \int_y^\gamma u(x,\gamma+y-\tau) \overset{x}{*} v(x,\tau)d\tau - \int_{-y}^\zeta u(x,|\gamma-y-\tau|) \overset{x}{*} v(x,|\tau|)\operatorname{sgn}\big(\tau(\gamma-y-\tau)\big)d\tau.$$

Ще опишем основните свойства на двумерната конволюция $\overset{(x,y)}{*}$ дефинирана с (5.7), важни за изграждане на двумерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Теорема 5.1 *Нека $u_1(x), v_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(y), v_2(y) \in C[0,b]$. Тогава*

$$\{u_1(x)u_2(y)\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1(x)v_2(y)\} = \Big(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\Big)\Big(u_2(y) \overset{y}{*} v_2(y)\Big). \tag{5.10}$$

Доказателство. За да докажем това твърдение ще използваме представянето (5.8) на $\overset{(x,y)}{*}$. Имаме

$$\{u_1(x)u_2(y)\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1(x)v_2(y)\} = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,y,\zeta)d\zeta\right\},$$

където

$$\begin{aligned} h(x,y,\zeta) &= \int_x^\zeta \big(u_1(\zeta+x-\sigma)u_2(y)\big) \overset{y}{*} \big(v_1(\sigma)v_2(y)\big)d\sigma - \\ &- \int_{-x}^\zeta \big(u_1(|\zeta-x-\sigma|)u_2(y)\big) \overset{y}{*} \big(v_1(|\sigma|)v_2(y)\big)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \big(u_2(y) \overset{y}{*} v_2(y)\big) \quad &\Bigg(\int_x^\zeta u_1(\zeta+x-\sigma)\big)v_1(\sigma)d\sigma - \\ &- \int_{-x}^\zeta u_1(|\zeta-x-\sigma|)v_1(|\sigma|)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma\Bigg). \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}&\{u_1(x)u_2(y)\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1(x)v_2(y)\} =\\ &= -\frac{1}{2}\Phi_\xi \Bigg\{ \int_0^\xi \Bigg(\int_x^\zeta u_1(\zeta + x - \sigma)\big) v_1(\sigma) d\sigma -\\ &- \int_{-x}^{\zeta} u_1(|\zeta - x - \sigma|) v_1(|\sigma|) \operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta - x - \sigma)\big) d\sigma \Bigg) d\zeta \Bigg\} \big(u_2(y) \overset{y}{*} v_2(y)\big).\end{aligned}$$

От Дефиницията (5.5) на $\overset{x}{*}$ получаваме

$$\{u_1(x)u_2(y)\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1(x)v_2(y)\} = \left(u_1(x) \overset{x}{*} v_1(x)\right) \left(u_2(y) \overset{y}{*} v_2(y)\right).$$

□

По-нататък ще използваме следната лема:

Лема 5.1 Операцията $\overset{(x,y)}{*}$ е билинейна.

Доказателство.
Поради линейността на функционалите Φ и Ψ твърдението е очевидно.
□

Лема 5.2 Нека $f = f(x) \in C[0,a]$, $g = g(y) \in C[0,b]$ и $u = u(x,y) \in C([0,a] \times [0,b])$. Тогава

$$f \overset{x}{*} \left(g \overset{y}{*} u\right) = (fg) \overset{(x,y)}{*} u. \tag{5.11}$$

Доказателство.
Първо ще разгледаме случая когато функцията $u = u(x,y)$ е от вида $u(x,y) = u_1(x)u_2(y)$ за $u_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(y) \in C[0,b]$. Имаме

$$f(x) \overset{x}{*} \left(g(y) \overset{y}{*} u(x,y)\right) = f(x) \overset{x}{*} \left(g(y) \overset{y}{*} u_1(x)u_2(y)\right) =$$

$$= f(x) \overset{x}{*} \left(\left(\varphi(y) \overset{y}{*} u_2(y)\right) u_1(x)\right) = \left(f(x) \overset{x}{*} u_1(x)\right) \left(g(y) \overset{y}{*} u_2(y)\right).$$

От Теорема 5.1 имаме, че:

$$\left(f(x) \overset{x}{*} u_1(x)\right) \left(g(y) \overset{y}{*} u_2(y)\right) = \left(f(x)g(y) \overset{(x,y)}{*} u_1(x)u_2(y)\right).$$

Следователно когато $u(x,t) = u_1(x)u_2(y)$ получаваме

$$f(x) \overset{x}{*} \left(g(y) \overset{y}{*} u(x,y)\right) = \left(f(x)g(y) \overset{(x,y)}{*} u(x,y)\right).$$

Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $u(x,y) \in C(D)$ може да се приближи равномерно с полиноми на променливите x и y, т. е. чрез линейна комбинация на функциите $x^n y^k$ за $n, k = 0, 1, 2, \ldots$. Понеже функцията

$x^n y^k$ е от вида $u_1(x)u_2(y)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x,y)}{*}$ следва твърдението на лемата.
□

С L_x означаваме десния обратен оператор на операторът на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ определен с условията $(L_x u)(0,y) = 0$ и $\Phi_\xi\{L_x u(\xi,y)\} = 0$. (вж. Теорема 3.1 от Глава 3)

$$L_x u(x,y) = \int_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi - x\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi (\xi-\eta)u(\eta,y)d\eta\right\}.$$

Някой от свойствата на този оператор разгледахме в Глава 3.

Аналогично, с L_y ще означаваме десния обратен оператор на операторът на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ определен с условията
$(L_y u)(x,0) = 0$ и $\Psi_\eta\{L_y u(x,\eta)\} = 0$:

$$L_y u(x,y) = \int_0^y (y-\xi)u(x,\xi)d\xi - y\Psi_\eta\left\{\int_0^\eta (\eta-\zeta)u(x,\zeta)d\zeta\right\}.$$

Теорема 5.2 *Нека $u, v \in C([0,a]\times[0,b])$. Тогава операцията (5.7):*

$$(u \overset{(x,y)}{*} v)(x,y) = -\frac{1}{2}\Phi_\xi\left\{\int_0^\xi h(x,y,\zeta)d\zeta\right\},$$

където

$$h(x,y,\zeta) = \int_x^\zeta u(\zeta+x-\sigma,y) \overset{y}{*} v(\sigma,y)d\sigma - \int_{-x}^\zeta u(|\zeta-x-\sigma|,y) \overset{y}{*} v(|\sigma|,y)\operatorname{sgn}\big(\sigma(\zeta-x-\sigma)\big)d\sigma,$$

е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0,a]\times[0,b])$, за която

$$L_x L_y u = \{xy\} \overset{(x,y)}{*} u. \tag{5.12}$$

Доказателство.

Подобно на доказателството на Лема 5.2 и тук първо ще докажем, например комутативността за функции от вида $u(x,y) = u_1(x)u_2(y)$, $v(x,y) = v_1(x)v_2(y)$, а после ще използваме теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]).

Нека $u(x,y) = u_1(x)u_2(y)$, $v(x,y) = v_1(x)v_2(y)$, $w(x,y) = w_1(x)w_2(y)$ за $u_1(x), v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$ и $u_2(y), v_2(y), w_2(y) \in C[0,b]$.

Ще докажем комутативността на $\overset{(x,y)}{*}$:

$$u \overset{(x,y)}{*} v = \{u_1u_2\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1v_2\} = (u_1 \overset{x}{*} v_1)(u_2 \overset{y}{*} v_2) = (v_1 \overset{x}{*} u_1)(v_2 \overset{y}{*} u_2) =$$

$$= \{v_1v_2\} \overset{(x,y)}{*} \{u_1u_2\} = v \overset{(x,y)}{*} u.$$

Ще докажем асоциативността на $\overset{(x,y)}{*}$:

$$\left(u \overset{(x,y)}{*} v\right) \overset{(x,y)}{*} w = \left(\{u_1u_2\} \overset{(x,y)}{*} \{v_1v_2\}\right) \overset{(x,y)}{*} \{w_1w_2\} =$$

$$= \left\{(u_1 \overset{x}{*} v_1)(u_2 \overset{y}{*} v_2)\right\} \overset{(x,y)}{*} \{w_1 w_2\} =$$

$$= \left((u_1 \overset{x}{*} v_1) \overset{x}{*} w_1\right)\left((u_2 \overset{y}{*} v_2) \overset{y}{*} w_2\right) = \left(u_1 \overset{x}{*} (v_1 \overset{x}{*} w_1)\right)\left(u_2 \overset{y}{*} (v_2 \overset{y}{*} w_2)\right) =$$

$$= \{u_1 u_2\} \overset{(x,y)}{*} \left\{(v_1 \overset{x}{*} w_1)(v_2 \overset{y}{*} w_2)\right\} =$$

$$= \{u_1 u_2\} \overset{(x,y)}{*} \left(\{v_1 v_2\} \overset{(x,y)}{*} \{w_1 w_2\}\right) = u \overset{(x,y)}{*} \left(v \overset{(x,y)}{*} w\right).$$

Според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $u(x, y) \in C([0, a] \times [0, b])$ може да се приближи равномерно с полиноми на променливите x и y, т. е. чрез линейна комбинация на функциите $x^n y^m$ за $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Понеже функцията $x^n y^m$ е от вида $u_1(x)u_2(y)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x,y)}{*}$ следва комутативността и асоциативността на $\overset{(x,y)}{*}$ в $C([0, a] \times [0, b])$.

Ще докажем (5.12). Нека $u \in C([0, a] \times [0, b])$. От Лема 5.2 получаваме:

$$L_x L_y u = L_x(L_y u) = L_x\left(\{y\} \overset{y}{*} u\right) = \{x\} \overset{x}{*} \left(\{y\} \overset{y}{*} u\right) = \{xy\} \overset{(x,y)}{*} u.$$

□

5.3 Мултипликатори на $(C([0, a] \times [0, b]), \overset{(x,y)}{*})$

Аналогично на разглежданията в параграф 3.2 "Директен алгебричен подход" ще разгледаме пространството $C = C([0, a] \times [0, b])$ на непрекъснатите функции в $[0, a] \times [0, b]$ с двете операции: събиране " $+$ " и умножение като вместо "стандартното", "поточково" умножение на функции означавано с "." и $u(x, y)v(x, y)$, ще разглеждаме двумерната конволюция $\overset{(x,y)}{*}$ зададена с (5.7). Пространството C с операциите " $+$ " и $\overset{(x,y)}{*}$ е пръстен, а също и алгебра над $\mathbb{R}$.

Ще въведем пръстена на мултипликаторите на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$. Първо ще дадем дефиниция на мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$.

Дефиниция 5.2 Линеен оператор $M : C \to C$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$ ако равенството

$$M(u \overset{(x,y)}{*} v) = (Mu) \overset{(x,y)}{*} v \tag{5.13}$$

е изпълнено за всички $u, v \in C$.

Прост пример на мултипликатори на $(C, \overset{(x,y)}{*})$ са конволюционните оператори $u \overset{(x,y)}{*}$, където $u \in C$. Друг тривиален пример на мултипиликатори на $(C, \overset{(x,y)}{*})$ са числовите мултипликатори.

Дефиниция 5.3 Нека $u \in C$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Операорът $[\lambda] : C \to C$, $[\lambda]u = \{\lambda u\}$ се нарича числов мултипликатор на алгебрата $(C, \overset{(x,y)}{*})$.

За числовите мултипликатори е изпълнено $[\lambda][\mu] = [\lambda\mu]$. Последното равенство дава основание за наименованието числов мултипликатор. Числените мултипликатори образуват пръстен, изоморфен на $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Не толкова тривиални примери на мултипликатори са следните оператори:

Ако $f \in C[0,a]$, тогава конволюционния оператор $f \overset{x}{*}$ в $C[0,a]$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C = C([0,a]\times[0,b])$ така, че

$$(f \overset{x}{*})\{u(x,y)\} = \{f(x)\} \overset{x}{*} \{u(x,y)\}.$$

Тук на променливата y се гледа като на параметър.

Аналогично може да разгледаме конволюционя оператор $g \overset{y}{*}$, $g \in C[0,b]$ като оператор в цялото пространство $C = C([0,a]\times[0,b])$ така,че

$$(g \overset{y}{*})\{u(x,y)\} = \{g(y)\} \overset{y}{*} \{u(x,y)\}.$$

Тук на променливата x се гледа като на параметър.

По-нататък ще използваме означенията

$$[f]_y = \{f(x)\} \overset{x}{*}, \qquad [g]_x = \{g(y)\} \overset{y}{*}\,. \tag{5.14}$$

Ще наричаме тези оператори *частни числови оператори* спрямо отсъстващите променливи.

Теорема 5.3 *Конволюционните оператори (5.14) са мултипликатори на конволюционната алгебра* $(C, \overset{(x,y)}{*})$.

Доказателство.

Нека $g \in C[0,b]$. Ще докажем, че $[g]_x(v \overset{(x,y)}{*} w) = \{[g]_x v\} \overset{(x,y)}{*} w$ или, което е същото, $g \overset{y}{*} (v \overset{(x,y)}{*} w) = (g \overset{y}{*} v) \overset{(x,y)}{*} w$, за произволни функции $v, w \in C([0,a]\times[0,b])$.

Първо ще докажем това равенство за функции от вида

$$v(x,y) = v_1(x)v_2(y), \qquad w(x,y) = w_1(x)w_2(y),$$

където $v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(t), w_2(t) \in C[0,b]$. Имаме

$$g \overset{y}{*} (v \overset{(x,y)}{*} w) = g \overset{y}{*} (\{v_1v_2\} \overset{(x,y)}{*} \{w_1w_2\}).$$

Като използваме тук и по-долу в доказателството Теорема 5.1 намираме

$$g \overset{y}{*} (\{v_1v_2\} \overset{(x,y)}{*} \{w_1w_2\}) = g \overset{y}{*} \Big((v_1 \overset{x}{*} w_1)(v_2 \overset{y}{*} w_2)\Big) =$$

$$= (v_1 \overset{x}{*} w_1)\Big(g \overset{y}{*} (v_2 \overset{y}{*} w_2)\Big) = (v_1 \overset{x}{*} w_1)\Big((g \overset{y}{*} v_2) \overset{y}{*} w_2\Big) =$$

$$= \Big(v_1(g \overset{y}{*} v_2)\Big) \overset{(x,y)}{*} \{w_1w_2\} = (g \overset{y}{*} \{v_1v_2\}) \overset{(x,y)}{*} \{w_1w_2\} = (g \overset{y}{*} v) \overset{(x,y)}{*} w.$$

Доказахме $g \overset{y}{*} (v \overset{(x,y)}{*} w) = (g \overset{y}{*} v) \overset{(x,y)}{*} w$ за функции от вида $v(x,y) = v_1(x)v_2(y)$, $w(x,y) = w_1(x)w_2(y)$, $v_1(x), w_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(y), w_2(y) \in C[0,b]$. Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $v = v(x,y) \in C([0,a] \times [0,b])$ може да се апроксимира с линейна комбинация на функции от вида $v_1v_2 = v_1(x)v_2(y)$, $v_1(x) \in C[0,a]$, $v_2(y) \in C[0,b]$, например с полиноми на променливите x и y.

Нека $f = f(x) \in C[0,a]$. Доказателството на $[f]_y(v \overset{(x,y)}{*} w) = \{[f]_y v\} \overset{(x,y)}{*} w$ или, което е същото, $f \overset{x}{*} (v \overset{(x,y)}{*} w) = (f \overset{x}{*} v) \overset{(x,y)}{*} w$, за произволни функции $v, w \in C([0,a] \times [0,b])$ се извършва по аналогичен начин на доказателтвото на
$[g]_x(v \overset{(x,y)}{*} w) = \{[g]_x v\} \overset{(x,y)}{*} w$.
$\square$

5.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x,y)}{*})$

Аналогично на разглежданията в глави 2 и 3 ще въведем пръстена на мултипликаторите на $(C, \overset{(x,y)}{*})$ и пръстена на мутипликаторните частни.

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [72]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. Обикновено, в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи, които не са делители на нулата. Например такива елементи са: мултипликаторите $\{x\} \overset{x}{*}$ и $\{y\} \overset{y}{*}$ т. е. операторите $L_x = [x]_y$ и $L_y = [y]_x$. Поради Теорема 5.3 елементите $[x]_y, [y]_x \in \mathfrak{M}$.

Означаваме с $\mathfrak{N}$ множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин на начина по който от пръстена на целите числа се получава пръстена на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим пръстена на мултипликаторните частни. Но в "знаменател" може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\dfrac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация"(вж. Ленг [71], стр. 53).

В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност "$\sim$" такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

По същия начин, по-който пръстенът на целите числа се разглежда като част от полето на рационалните числа, така и пръстенът на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$ разглеждаме като част от $\mathcal{M}$, а също и конволюционните пръстени $(C[0,a], \overset{x}{*})$, $(C[0,b], \overset{y}{*})$. По-точно тези влагания са разгледани в следващата теорема.

Теорема 5.4 *В пръстена $\mathcal{M}$ се съдържат подпръстени, изоморфни на:*
i) Основното поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;
ii) Конволюционния пръстен $(C[0,a], \overset{x}{*})$;
iii) Конволюционния пръстен $(C[0,b], \overset{y}{*})$;
iv) Конволюционния пръстен $(C, \overset{(x,y)}{*})$;
v) Пръстена на мултипликаторите $\mathfrak{M}$ на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x,y)}{*})$.

Доказателство.
Ще проверим, че следващите изображения са влагания.

i) $\quad \mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M} \ : \ \alpha \mapsto \dfrac{(L_x\alpha)\overset{x}{*}}{L_x} = [\alpha], \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C}$;

ii) $\quad (C[0,a], \overset{x}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \ : \ f \mapsto \dfrac{(L_xf)\overset{x}{*}}{L_x} = [f]_y, \qquad f \in C[0,a]$;

iii) $\quad (C[0,b], \overset{y}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \ : \ g \mapsto \dfrac{(L_yg)\overset{y}{*}}{L_y} = [g]_x, \qquad g \in C[0,b]$;

iv) $\quad (C, \overset{(x,y)}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \ : \ u \mapsto \dfrac{(L_xL_yu)\overset{(x,y)}{*}}{L_xL_y} = u, \qquad u \in C$;

v) $\quad \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \ : \ M \mapsto \dfrac{M}{I}$, където I е идентитетът в $(C, \overset{(x,y)}{*})$, а $M \in \mathfrak{M}$.

Разглеждаме i). Понеже влагането $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{M}$ (или $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}$) се дефинира с изображението $\alpha \mapsto [\alpha]$, то от съответствията

$$\alpha\beta \mapsto [\alpha\beta] = \frac{\alpha\beta L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x}{L_x}\frac{\beta L_x}{L_x} = [\alpha][\beta],$$

и

$$\alpha+\beta \mapsto [\alpha+\beta] = \frac{(\alpha+\beta)L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x + \beta L_x}{L_x} = \frac{\alpha L_x}{L_x} + \frac{\beta L_x}{L_x} = [\alpha]+[\beta],$$

където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) се вижда, че това изображение е влагане на пръстени. За означението "[ ]" вж. Дефиниция 4.3.

Разглеждаме ii). Ще докажем, че изображението в ii) е влагане на пръстени. Нека $f, g \in C[0,a]$

Имаме

$$f+g \mapsto \frac{(L_x(f+g))\overset{x}{*}}{L_x} = [f+g]_y.$$

От друга страна

$$\frac{(L_x(f+g))\overset{x}{*}}{L_x} = \frac{(L_xf+L_xg)\overset{x}{*}}{L_x}.$$

Поради линейността на $\overset{x}{*}$ получаваме.

$$\frac{(L_xf+L_xg)\overset{x}{*}}{L_x} = \frac{(L_xf)\overset{x}{*}}{L_x} + \frac{(L_xg)\overset{x}{*}}{L_x} = [f]_y + [g]_y.$$

Ще докажем, че образа на произведение на два елемента е произведение на образите им, т.е. ще докажем $[f \overset{x}{*} g]_y = [f]_y[g]_y$. Имаме

$$(f \overset{x}{*} g) \mapsto \frac{(L_x(f \overset{x}{*} g)) \overset{x}{*}}{L_x} = [f \overset{x}{*} g]_y.$$

От друга страна

$$\frac{(L_x(f \overset{x}{*} g)) \overset{x}{*}}{L_x} = \frac{\left((L_x f) \overset{x}{*}\right)}{L_x} \frac{\left((L_x g) \overset{x}{*}\right)}{L_x} = [f]_y[g]_y.$$

Това, че останалите изображения също са влагания се доказва аналогично.
□

От сега нататък ще смятаме, че всички тези пръстени са подпръстени на $\mathcal{M}$.

5.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (5.1) - (5.3)

Както споменахме елементите L_x и L_y на $\mathcal{M}$ не са делители на нулата. Важни за по-нататъшните разглеждания с оглед на алгебризацията на граничните задачи от разглеждания клас са алгебричните обратни на L_x и L_y в $\mathcal{M}$. Означаваме ги с

$$S_x = \frac{1}{L_x}, \qquad S_y = \frac{1}{L_y}.$$

Операторите S_x и S_y са алгебрически аналози на операторите $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Връзката между S_x, S_y и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ съответно се дава от следващата теорема.

Теорема 5.5 *Нека $u \in C$ притежава непрекъснати частни производни u_{xx} и u_{yy} в $[0,a] \times [0,b]$. Тогава*

$$u_{xx} = S_x u + S_x\{x\Phi\{1\} - 1\}u(0,y) - [\Phi_\xi\{u(\xi,y)\}]_x, \tag{5.15}$$

$$u_{yy} = S_y u + S_y\{y\Psi\{1\} - 1\}u(x,0) - [\Psi_\eta\{u(x,\eta)\}]_y. \tag{5.16}$$

Доказателство. Равенства (5.15) и (5.16) са доказани в Глава 3 Теорема 3.3.
□

Теорема 5.6 *Нека $u \in C$ и $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(x,t) \in C(D)$ за $k = 1, 2, ...,$, $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u(x,t) \in C(D)$ за $k = 1, 2, ...,$. Тогава*

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u = S_x^k u + \sum_{j=1}^{m} S_x^j\{x\Phi\{1\} - 1\}\frac{\partial^{2(k-j)}}{\partial x^{2(k-j)}}u(0,y) - S_x^{j-1}\Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2(k-j)}}{\partial \xi^{2(k-j)}}u(\xi,y)\right\}, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u = S_y^k u + \sum_{j=1}^{m} S_x^j\{x\Psi\{1\} - 1\}\frac{\partial^{2(k-j)}}{\partial x^{2(k-j)}}u(x,0) - S_y^{j-1}\Psi_\xi\left\{\frac{\partial^{2(k-j)}}{\partial \xi^{2(k-j)}}u(x,\xi)\right\}. \tag{5.18}$$

Доказателство.

Равенства (5.17) и (5.18) са доказани в Глава 3 Теорема 3.4.

□

Връзките (5.17) и (5.18) ни позволяват да алгебризираме граничната задача (5.1) - (5.3)

$$(5.1) \qquad P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = F(x,y),$$

$$(5.2) \qquad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(0,y) = \psi_j(y), \quad \Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2j}}{\partial \xi^{2j}}u(\xi,y)\right\} = g_j(y), \quad j = 0,1,...,\deg P - 1,$$

$$(5.3) \qquad \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u(x,0) = \varphi_k(x), \quad \Psi_\eta\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial \eta^{2k}}u(x,\eta)\right\} = f_k(x), \quad k = 0,1,...,\deg Q - 1.$$

За тази цел като използваме (5.17) и (5.18) и граничните условия (5.2) - (5.3) получаваме

$$(5.19) \qquad \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u = S_x^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Phi\{1\} - 1\}\psi_{k-j}(y) - S_x^{j-1}g_{k-j}(y),$$

$$(5.20) \qquad \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u = S_y^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Psi\{1\} - 1\}\varphi_{k-j}(x) - S_y^{j-1}f_{k-j}(x).$$

Записваме диференциалното уравнение (4.1) във вида

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = b_m u + \sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u + c_n u + \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}u = F(x,y),$$

където $m = \deg P$, $n = \deg Q$ и $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$.

Като използваме (5.19), (5.20) граничната задача (5.1) - (5.3) се редуцира до едно алгебрично уравнение в $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} & b_m u + \sum_{k=1}^{m} b_{n-k}\left(S_x^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Phi\{1\} - 1\}\psi_{k-j}(y) - S_x^{j-1}g_{k-j}(y)\right) + \\ + \quad & c_n u + \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\left(S_y^k u + \sum_{j=1}^{k} S_x^j\{x\Psi\{1\} - 1\}\varphi_{k-j}(x) - S_y^{j-1}f_{k-j}(x)\right) = F(x,y). \end{aligned}$$

Тук $F(x,y)$, $f_j(x)$, $\varphi_j(t)$ за $j = 0,1,...,\deg P-1$ и $g_k(t)$ и $\psi_k(t)$ за $k = 0,1,...,\deg Q-1$ са дадени функции. На тях може да се гледа като на известни елементи от пръстена $\mathcal{M}$. На неизвестната функцията u гледаме като на неизвестен елемент от пръстена $\mathcal{M}$. Затова записваме алгебричното уравнение (4.20) от пръстена $\mathcal{M}$ във вида:

$$\begin{aligned}
(5.21)\qquad & \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} S_x^k u + \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} S_y^k u = F(x,y) + \\
- \ & \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\psi_{k-j}(y) - S_x^{j-1} g_{k-j}(y)\right) - \\
- \ & \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j\{x\Psi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(x) - S_y^{j-1} f_{k-j}(x)\right),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
(5.22)\qquad & P(S_x)u + Q(S_y)u = F(x,y) + \\
- \ & \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\psi_{k-j}(y) - S_x^{j-1} g_{k-j}(y)\right) - \\
- \ & \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \left(S_x^j\{x\Psi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(x) - S_y^{j-1} f_{k-j}(x)\right).
\end{aligned}$$

Както отбелязахме в увода ще се стремим да решим алгебричното уравнение (5.21) в $\mathcal{M}$, а след това да изтълкуваме полученото решение като функция.

Но първо ще предсатвим алгебричното уравнение (5.21) от $\mathcal{M}$ като интегрално уравнение за неизвестната функция u. Умножаваме (5.21) с $L_x^m L_y^n$. Получаваме:

$$\begin{aligned}
& L_y^n \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} L_x^n S_x^k u + L_x^m \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} L_y^n S_y^k u = L_x^m L_y^n F(x,y) + \\
- \quad & L_y^m \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \left(L_x^m S_x^j\{x\Phi\{1\}-1\}\psi_{k-j}(y) - L_x^m S_x^{j-1} g_{k-j}(y)\right) - \\
- \quad & L_x^n \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \left(L_y^n S_y^j\{y\Psi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(x) - L_y^n S_y^{j-1} f_{k-j}(x)\right).
\end{aligned}$$

Като изпозлваме, че $L_x S_x = 1$ и $L_y S_y = 1$ намираме

$$\begin{aligned}
& L_y^n \sum_{k=0}^{n} b_{m-k} L_x^{m-k} u + L_x^m \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} L_y^{n-k} u = L_x^m L_y^n F(x,y) + \\
- \quad & L_y^n \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \left(L_x^{m-j}\{x\Phi\{1\}-1\}\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j+1} g_{k-j}(y)\right) - \\
- \quad & L_x^n \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \left(L_y^{n-j}\{y\Psi\{1\}-1\}\varphi_{k-j}(x) - L_y^{n-j+1} f_{k-j}(x)\right).
\end{aligned}$$

Сега използваме и $L_x = [x]_y$, $L_x^m = L_x^{m-1}\{x\}$ и $L_y = [y]_x$, $L_y^n = L_y^{n-1}\{y\}$. Получаваме интегрално уравнение за функцията $u = u(x,y)$

$$
\begin{aligned}
(5.23)\qquad & L_y^n \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} L_x^{m-k} u + L_x^m \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} L_y^{n-k} u = L_x^n L_y^m F(x,y) + \\
- \; & L_y^n \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}) \psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\} g_{k-j}(y) \Big) - \\
- \; & L_x^m \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_y^{n-j}\{y\}\Psi\{1\} - L_y^{n-j-1}\{y\}) \varphi_{k-j}(x) - L_y^{n-j}\{y\} f_{k-j}(x) \Big).
\end{aligned}
$$

Дефиниция 5.4 *Функция $u \in C^1([0,a] \times [0,b])$ се нарича слабо решение на граничната задача (5.1) - (5.3) ако удовлетворява интегралното уравнение (5.23).*

Ще докажем, че ако една функция със съответната гладкост удовлетворява интегралното уравнение (5.23) то тя удовлетворява граничните условия (5.2) - (5.3).

Лема 5.3 Нека $u = u(x,y) \in C^1([0,a] \times [0,b])$, $\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,y) \in C(D)$, където $m = \deg P$ и u удовлетворява интегралното уравнение (5.23). Тогава u удовлетворява граничните условия (5.2) по x.

$$
\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u(0,y) = \psi_k(y), \quad \Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} u(\xi,y) \right\} = g_k(y),
$$

където $k = 0,1,...,m-1$, $m = \deg P$ и $\psi_k(y)$ и $g_k(y)$ са дадени за $0 \le y \le b$.

Доказателство.

Нека отделно да разпишем по-подробно следната двойна сума участваща в (5.23)

$$
\begin{aligned}
(5.24)\qquad & \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}) \psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\} g_{k-j}(y) \Big) = \\
= \; & b_{m-1} \Big((L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\}) \psi_0(y) - L_x^{m-1}\{x\} g_0(y) \Big) \; + \\
+ \; & b_{m-2} \Big((L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\}) \psi_1(y) - L_x^{m-1}\{x\} g_1(y) + \\
& \qquad + (L_x^{m-2}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-3}\{x\}) \psi_0(y) - L_x^{m-2}\{x\} g_0(y) \Big) \; + \\
+ \; & \;\; ... \; + \\
+ \; & b_1 \Big((L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\}) \psi_{m-2}(y) - L_x^{m-1}\{x\} g_{m-2}(y) + ... + \\
& \qquad + (L_x\{x\}\Phi\{1\} - \{x\}) \psi_0(y) - L_x\{x\} g_0(t) \Big) \; + \\
+ \; & b_0 \Big((L_x^{m-1}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-2}\{x\}) \psi_{m-1}(y) - L_x^{m-1}\{x\} g_{m-1}(y) + ... + \\
& \qquad + (\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}) \psi_0(y) - \{x\} g_0(y) \Big).
\end{aligned}
$$

1) Първо ще докажем

$$\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}u(0,y) = \psi_k(y), \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Полагаме $x = 0$ в (5.23). Използваме, че $(L_x v)(0,y) = 0$, за всяко $v = v(x,y) \in C^1(D)$. От (5.24) получаваме:

$$L_y^n b_0 u(0,y) = L_y^n b_0 \psi_0(y).$$

Прилагаме $\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}$. Да отбележим, че $b_0 \neq 0$, защото $\deg P \geq 1$.
Намираме $u(0,y) = \psi_0(y)$.

Допускаме, че

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,y) = \psi_k(y),$$

за $k = 0, ..., m-2$. Ще докажем че последното равенство е изпълнено за $k = m-1$.

Прилагаме $\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}$ към (5.23). Понеже L_x е десен обратен на $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, т.е. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_x = I$ имаме $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}L_x^m = I$, където I е идентитетът в C. Получаваме

$$\begin{aligned}(5.25)\quad & L_y^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} L_x^{m-k} u + L_x \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} L_y^{n-k} u = L_x L_y^n F(x,y) + \\ - \quad & L_y^n \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\})\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\} g_{k-j}(y) \Big) - \\ - \quad & L_x \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_y^{n-j}\{y\}\Psi\{1\} - L_y^{n-j-1}\{y\})\varphi_{k-j}(x) - L_y^{n-j}\{y\} f_{k-j}(x) \Big).\end{aligned}$$

Разглеждаме сумата

$$\begin{aligned}(5.26)\qquad & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} L_x^{m-k} u = \\ = \quad & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \Big(b_m L_x^m u + b_{m-1} L_x^{m-1} u + ... + b_1 L_x u + b_0 u \Big) = \\ = \quad & b_m L_x u + b_{m-1} u(x,y) + ... + b_1 \frac{\partial^{2m-4}}{\partial x^{2m-4}} u(x,y) + b_0 \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,y).\end{aligned}$$

При $x = 0$ от

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u(0,y) = \psi_k(y),$$

за $k = 0, ..., m-2$ получаваме

$$(5.27)\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} L_x^{m-k} u = b_{m-1}\psi_0(y) + ... + b_1 \psi_{m-2}(y) + b_0 \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,y).$$

Като приложим $\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}$ към (5.24), намираме

$$
\begin{aligned}
(5.28)\ & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y) \Big) = \\
= \ & b_{m-1}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_0(y) - \{x\}g_0(y) \Big) \ + \\
+ \ & b_{m-2}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_1(y) - \{x\}g_1(y) \Big) \ + \\
+ \ & \ ... \ + \\
+ \ & b_1\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_{m-2}(y) - \{x\}g_{m-2}(y) \Big) \ + \\
+ \ & b_0\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_{m-1}(y) - \{x\}g_{m-1}(y) \Big).
\end{aligned}
$$

При $x = 0$ се получава:

$$
\begin{aligned}
(5.29)\ & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y) \Big) = \\
= \ & -\Big(b_{m-1}\psi_0(y) + ... + b_1\psi_{m-2}(y) + b_0\psi_{m-1}(y) \Big).
\end{aligned}
$$

При $x = 0$ от (5.25), (5.27) и (5.29) намираме

$$
\begin{aligned}
& L_y^n\Big(b_{m-1}\psi_0(y) + ... + b_1\psi_{m-2}(y) + b_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,y) \Big) = \\
= \ & L_y^n\Big(b_{m-1}\psi_0(y) + ... + b_1\psi_{m-2}(y) + b_0\psi_{m-1}(y) \Big).
\end{aligned}
$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}$, понеже $b_0 \neq 0$, намираме:

$$
\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(0,y) = \psi_{m-1}(y).
$$

2) Ще докажем

$$
\Phi_\xi \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} u(\xi, y) \right\} = g_k(y),
$$

където $k = 0, 1, ..., m-1$, $m = \deg P$.

Прилагаме функционала Φ към (5.23) и използваме $\Phi_x \circ L_x \equiv 0$. Получаваме

$$
\begin{aligned}
(5.30)\ & L_y^n \Phi_x \left\{ \sum_{k=0}^{n} b_{m-k} L_x^{m-k} u \right\} = \\
- \ & L_y^n \Phi_x \left\{ \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} \sum_{j=1}^{k} \Big((L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\})\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y) \Big) \right\}.
\end{aligned}
$$

Да разгледаме поотделно двете суми, участващи от двете страни на равенство (5.30).

Първо за сумата от лявата страна на равенство (5.30) имаме

$$\begin{aligned}(5.31)\qquad &\Phi_x\left\{\sum_{k=0}^{m} c_{m-k}L_x^{m-k}u\right\} = \\ &= \Phi_x\left\{b_m L_x^m u(x,y) + b_{m-1}L_x^{m-1}u(x,y) + ... + b_1 L_x u(x,y) + b_0 u(x,y)\right\} = \\ &= b_0\Phi_x\{u(x,y)\}.\end{aligned}$$

Да разгледаме сумата от дясната страна на равенство (5.30). От (5.24) се вижда, че

$$\begin{aligned}(5.32)\ &\Phi_x\left\{\sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big\}\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y)\Big)\right\} = \\ =\ &b_0\Phi_x\left\{\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_0(y) - \{x\}g_0(y)\Big)\right\} = \\ =\ &b_0\Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi\{1\}\big)\psi_0(y) - \Phi_x\{x\}g_0(y)\Big) = -b_0 g_0(y).\end{aligned}$$

В последното равенство сме използвали, че $\Phi_x\{x\} = 1$. От (5.30), (5.31) и (5.32) намираме:

$$L_y^n b_0\Phi_x\{u(x,y)\} = L_y^n b_0 g_0(y).$$

Прилагаме $\dfrac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}$, понеже $b_0 \neq 0$, намираме:

$$\Phi_x\{u(x,y)\} = g_0(y).$$

Допускаме, че

$$\Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial\xi^{2k}}u(\xi,y)\right\} = g_k(y),$$

за $k = 0, 1, ..., m-2$. Ще докажем, че е вярно и за $k = m-1$, т.е.

$$\Phi_\xi\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial\xi^{2m-2}}u(\xi,t)\right\} = \psi_k(t).$$

Прилагаме функционала Φ, към (5.25) и като използваме $\Phi_x \circ L_x \equiv 0$ получаваме

$$(5.33)\qquad L_y^n\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m} b_{m-k}L_x^{m-k}u\right\} =$$

$$= -L_y^n\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big((L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\})\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y)\Big)\right\}.$$

Ще разгледаме поотделно двете суми в (5.33). Първо разглеждаме лявата страна на равенство (5.33):

$$\begin{aligned}(5.34)\quad &\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m} b_{m-k}L_x^{m-k}u(x,y)\right\} = \\ &= \Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\left(b_m L_x^m u(x,y) + b_{m-1}L_x^{m-1}u(x,y) + ... + b_1 Lu(x,y) + b_0 u(x,y)\right)\right\} = \\ &= \Phi_x\left\{b_m L_x u(x,y) + b_{m-1}u(x,y) + ... + b_1\frac{\partial^{2m-4}}{\partial x^{2m-4}}u(x,y) + +b_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,y)\right\} = \\ &= b_{m-1}g_0(y) + ... + b_1 g_{m-2}(y) + b_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,y).\end{aligned}$$

Сега ще разгледаме сумата отдясно на равенството (5.33). От (5.24) получаваме:

$$\begin{aligned}&\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y)\Big)\right\} = \\ &= \Phi_x\Big\{\ b_{m-1}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_0(y) - \{x\}g_0(y)\Big) + \\ &+\ b_{m-2}\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_1(y) - \{x\}g_1(y)\Big) + \\ &+\ ... + \\ &+\ b_1\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_{m-2}(y) - \{x\}g_{m-2}(y)\Big) + \\ &+\ b_0\Big(\big(\{x\}\Phi\{1\} - \{1\}\big)\psi_{m-1}(y) - \{x\}g_{m-1}(y)\Big)\Big\} = \\ &= b_{m-1}\Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\psi_0(y) - \Phi_x\{x\}g_0(y)\Big) + \\ &+ b_{m-2}\Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\psi_1(y) - \Phi_x\{x\}g_1(y)\Big) + \\ &+ ... + \\ &+ b_1\Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\psi_{m-2}(y) - \Phi_x\{x\}g_{m-2}(y)\Big) + \\ &+ b_0\Big(\big(\Phi_x\{x\}\Phi\{1\} - \Phi_x\{1\}\big)\psi_{m-1}(t) - \Phi_x\{x\}g_{m-1}(y)\Big).\end{aligned}$$

Сега използваме, че $\Phi_x\{x\} = 1$. Получаваме

$$\begin{aligned}(5.35)\quad &\Phi_x\left\{\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m} b_{m-k}\sum_{j=1}^{k}\Big(\big(L_x^{m-j}\{x\}\Phi\{1\} - L_x^{m-j-1}\{x\}\big)\psi_{k-j}(y) - L_x^{m-j}\{x\}g_{k-j}(y)\Big)\right\} = \\ &= -b_{m-1}g_0(y) - b_{m-2}g_1(y) - ... - b_1 g_{m-2}(y) - b_0 g_{m-1}(y).\end{aligned}$$

От (5.33), (5.34) и (5.35) получаваме

$$\begin{aligned}(5.36)\quad &L_y^n\Big(b_{m-1}g_0(y) + b_{m-2}g_1(y) + ... + b_1 g_{m-2}(y) + b_0\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}}u(x,y)\Big) = \\ &= -L_y^n\Big(-b_{m-1}g_0(y) - b_{m-2}g_1(y) - ... - b_1 g_{m-2}(y) - b_0 g_{m-1}(y)\Big).\end{aligned}$$

Накрая прилагаме оператора $\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}$ към (5.36). Получаваме:

$$\Phi_x \left\{ \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2}} u(x,y) \right\} = g_{m-1}(y).$$

□

Аналогично на доказателството на Лема 5.3 е доказателството на следната лема:

Лема 5.4 Нека $u = u(x,y) \in C^1([0,a] \times [0,b])$, $\frac{\partial^{2n-2}}{\partial y^{2n-2}} u(x,y) \in C(D)$, където $n = \deg Q$ и u удовлетворява интегралното уравнение (5.23). Тогава u удовлетворява граничните условия (5.3) по y.

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} u(x,0) = \varphi_k(x), \quad \Psi_\eta \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \eta^{2k}} u(x,\eta) \right\} = f_k(x), \quad 0 \le x \le a,$$

където $k = 0, 1, ..., n-1$ и $\varphi_k(x)$ и $f_k(x)$ са дадени за $0 \le x \le a$.

Ще докажем, че ако една функция удовлетворява интегралното уравнение (5.23) и е достатъчно гладка то тя е решение и на граничната задача (5.1) - (5.3) т.е. е класическо решение на (5.1) - (5.3).

Лема 5.5 Нека $u = u(x,y) \in C^1([0,a] \times [0,b])$, е решение на интегралното уравнение (5.23) с непрекъснати частни производни $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(x,y) \in C(D)$ и $\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}} u(x,y) \in C(D)$. Тогава u е класическо решение на граничната задача (5.1) - (5.3).

Доказателство.

Прилагаме оператора $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}$ към (5.23). Получаваме

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u + Q\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = F(x,y).$$

Понеже съществуват непрекъснати частни производни на u по x и по y от съответния ред, то според Лема 5.3 и Лема 5.4 u удовлетворява и граничните условия (5.2) - (5.3).

□

5.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (5.1) - (5.3).

За да съществува единствено решение на (5.23) в $\mathcal{M}$ трябва $P(S_x) + Q(S_y)$ да не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. За това в тази глава ще изследваме някои делители и не делители на нулата в $\mathcal{M}$, свързани със задача (5.23).

Да припомним, че в Глава 3 въведохме функцията $E(\lambda) = \Phi_\xi \left\{ \dfrac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \right\}$ която се нарича синусова индикатриса на функционала Φ. Ще означаваме синусовата индикатриса на функционала Ψ с G: $G(\mu) = \Psi_\eta \left\{ \dfrac{\sin \mu\eta}{\eta} \right\}$.

Лема 5.6 Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) = 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ е число, за което $G(\mu) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$P(-\lambda^2) + Q(-\mu^2) = 0,$$

тогава

$$P(S_x) + Q(S_y)$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство. Ще докажем, че за ненулевия елемент $\{\sin \lambda x \sin \mu y\}$ на $\mathcal{M}$ е изпълнено $(P(S_x) + Q(S_y)) \{\sin \lambda x \sin \mu x\} = 0$. Наистина,

$$(P(S_x) + Q(S_y)) \{\sin \lambda x \sin \mu y\} = P(S_x)\{\sin \lambda x \sin \mu y\} + Q(S_y)\{\sin \lambda x \sin \mu y\} =$$

$$= \sin \mu y \; P(S_x)\{\sin \lambda x\} + \sin \lambda x \; Q(S_y)\{\sin \mu y\} = \Big(P(-\lambda^2) + Q(-\mu^2)\Big) \sin \lambda x \sin \mu x = 0.$$

□

Пример.

Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ е число, за което $E(\lambda) = 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ е число, за което $G(\mu) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

тогава

$$S_x + S_y$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Наистина, за ненулевият елемент $\{\sin \lambda x \sin \mu y\}$ на $\mathcal{M}$ е изпълнено $(S_x + S_y) \{\sin \lambda x \sin \mu y\} = 0$. Имаме

$$(S_x + S_y) \{\sin \lambda x \sin \mu y\} = S_x\{\sin \lambda x \sin \mu y\} + S_x\{\sin \lambda x \sin \mu y\} =$$

$$= \sin \mu y \; S_x\{\sin \lambda x\} \; + \sin \lambda x \; S_y\{\sin \mu y\}.$$

Използваме (5.15) и (5.16) и получаваме

$$\sin \mu y \; S_x\{\sin \lambda x\} \; + \sin \lambda x \; S_y\{\sin \mu y\} =$$

$$= \sin\mu y\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\lambda x + \Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\}\right) + \sin\lambda x\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sin\mu y + \Psi_\eta\{\sin\mu\eta\}\right).$$

Тъй като $E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\} = 0$ и $G(\mu) = \Psi_\eta\left\{\dfrac{\sin\mu\eta}{\mu}\right\} = 0$, намираме

$$\sin\mu y\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\lambda x + \Phi_\xi\{\sin\lambda\xi\}\right) + \sin\lambda x\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sin\mu y + \Psi_\eta\{\sin\mu\eta\}\right) =$$

$$= -\lambda^2\sin\mu y\ \sin\lambda x - \mu^2\sin\mu y\ \sin\lambda x = -(\lambda^2+\mu^2)\sin\mu y\ \sin\lambda x.$$

От $\lambda^2+\mu^2 = 0$ получаваме $(S_y + S_x)\{\sin\lambda x\sin\mu y\} = 0$.

Ще докажем теорема която разглежда въпроса кога елементът $P(S_x) + Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. От факта, че $P(S_x) + Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (5.22) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$, ще наричаме съответната теорема, теорема за единственост на граничната задача (5.1) - (5.3).

Теорема 5.7 *Нека $a \in \operatorname{supp}\Phi$ и $\deg Q \geq 1$. Ако $E(\lambda_m) = 0$, $G(\mu_n) = 0$ и $P(-\lambda_m^2) + Q(-\mu_n^2) \neq 0$, за всички $m, n = 1, 2, ...$ тогава елементът $P(S_x) + Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.*

Доказателство.

Допускаме противното, т.е. допускаме, че съществува ненулев елемент на $\mathcal{M}$ т.е. ненулева мулипликаторна дроб $\dfrac{A}{B} \neq 0$, $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{N}$ и $(P(S_x) + Q(S_y))\dfrac{A}{B} = 0$. Последното равенство е еквивалентно на $(P(S_x)+Q(S_y))A = 0$. Понеже $\dfrac{A}{B} \neq 0$ имаме $A \neq 0$. Тогава съществува функция $u \in C$ такава, че $Av = u \neq 0$. Тогава от $(P(S_x) + Q(S_y))A = 0$ получаваме

$$(P(S_x) + Q(S_y))u = 0. \tag{5.37}$$

Може да считаме, че u е достатъчно гладка, защото ако например съществува $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,y)$ но не съществува $\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(x,y)$, то след като умножим $(P(S_x)+Q(S_y))u = 0$ с L_x намираме $(P(S_x) + Q(S_y))L_x u = 0$. За функцията $L_x u$ съществува $k+2$ производна по x.

Нека λ_m е α_m - кратна нула на индикатрисата $E(\lambda) = \Phi_\xi\left\{\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\right\}$ на функционала Φ със собствена функция $\varphi_{m,0}(x)$ и присъединени функции $\varphi_{m,i}(x)$, $i = 1, ..., \alpha_m - 1$. Нека $\varphi_m(x)$ е такава, че (вж. Глава 3 (3.17))

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_m}\frac{\sin\lambda x}{\lambda E(\lambda)}d\lambda.$$

Умножаваме (5.37) с φ_m и получаваме

$$(P(S_x) + Q(S_y))\varphi_m u = 0.$$

Означаваме
$$\varphi_m \overset{x}{*} u = \sum_{i=p}^{\alpha_m-1} a_{m,i}(y)\varphi_{m,i}(x),$$
където $a_{m,p}(y) \neq 0$ за някое p, $0 \le p \le \alpha_m - 1$ и намираме
$$(P(S_x) + Q(S_y)) \sum_{i=p}^{\alpha_m-1} a_{m,i}(y)\varphi_{m,i}(x) = 0.$$
Умножаваме последното равенство с $(S_x + \lambda_m^2)^{\alpha_m-p-1}$
$$(P(S_x) + Q(S_y)) \sum_{i=p}^{\alpha_m} a_{m,i}(t) \left(S_x + \lambda_m^2\right)^{\alpha_m-p-1} \varphi_{m,i} = 0.$$
Използваме, че $(S_x + \lambda_m^2)^{\sigma} \varphi_{m,0} = 0$ за $\sigma \ge \alpha_m$ и получаваме
$$(P(S_x) + Q(S_y))a_{m,p}(y)\varphi_{n,\alpha_m-1}(x) = 0.$$
Но $\varphi_{m,\alpha_m-1}(x) = b_m \sin \lambda_m x$ и $b_m \neq 0$. Разглеждаме
$$(P(S_x) + Q(S_y))a_{m,p}(y) \sin \lambda_m x = 0.$$
Като използваме $E(\lambda_m) = 0$ и (5.15) (аналогично на доказателството на Лема 5.6) получаваме
$$P(S_x)a_{m,p}(y) \sin \lambda_m x = a_{m,p}(y)P(-\lambda_m^2) \sin \lambda_m x.$$
От тук намираме
$$(P(-\lambda_m^2) + Q(S_y))a_{m,p}(y) \sin \lambda_m x = 0.$$
Следователно
$$(P(-\lambda_m^2) + Q(S_y))a_{m,p}(y) = 0.$$
Това уравнение е еквивалентно на граничната задача
$$Q\left(\frac{d^2}{dy^2}\right) a_{m,p}(y) + P(-\lambda_n^2)a_{m,p}(y) = 0,$$
$$\frac{d^{2k}}{dy^{2k}} a_{m,p}(0) = 0, \qquad \Psi_\eta \left\{\frac{d^{2k}}{d\eta^{2k}}\ a_{m,p}(\eta)\right\} = 0, \qquad k = 0, 1, ..., \deg Q - 1.$$
Понеже $\deg Q \ge 1$ и $P(-\lambda_m^2) + Q(-\mu_n^2) \neq 0$ единственото решение е $a_{m,p}(y) \equiv 0$ (вж. Лема 3.2). Следователно
$$\varphi_m \overset{x}{*} u \equiv 0.$$
за всяко m. Понеже $a \in \operatorname{supp} \Phi$ според теоремата на Божинов (вж. [34] и [36]) следва, че $u \equiv 0$. Това противоречие с допускането $u \neq 0$ доказва теоремата.
□

5.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (5.1) - (5.3). Разширен принцип на Дюамел.

След като доказахме теорема за единственост на решението на граничната задача (5.1) - (5.3), трябва да изучим и въпроса за съществуване на решение.

Тук се налага да уточним за какво решение става дума. Ако говорим за класическо решение, ще се наложи да наложим ограничения както на функционалите Φ и Ψ, така и върху граничните функции.

Тъй като граничната задача (5.1) - (5.3) бе сведена до алгебричното уравнение (5.22), то всяко класическо решение трябва да удовлетворява това уравнение. Обратното в общия случай не е вярно. Но може да твърдим, че ако е налице теорема за единственост, т.е. ако елементът $P(S_x) + Q(S_y)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, то алгебричното уравнение (5.22)

$$\big(P(S_x) + Q(S_y)\big)u = \widetilde{F},$$

има решение

$$u = \frac{1}{P(S_x) + Q(S_y)}\widetilde{F} \tag{5.38}$$

в $\mathcal{M}$, което ще наричаме *формално решение* на граничната задача (5.1) - (5.3).

След това може да говорим и за *слабо решение* на граничната задача (5.1) - (5.3) (вж. Дефиниция 5.4).

Накрая, функция $u \in C(D)$ която удовлетворява както уравнение (5.1), така и граничните условия (5.2) и (5.3) е класическо решение.

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (5.1) - (5.3).

Теорема 5.8 *Допускаме, че съществува слабо решение $\Omega(x, y)$ на граничната задача (5.1) - (5.3), при специален избор на граничните функции $\psi_j(y) = 0$, $g_j(y) = 0$ за $j = 0, 1, ..., \deg P - 1$, $\varphi_k(x) = 0$, $f_k(x) = 0$ за $k = 0, 1, ..., \deg Q - 1$ и на дясната част $F(x, y) = xy$ на уравнението (5.1). Тогава функцията*

$$u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Omega(x, y) \overset{(x,y)}{*} F(x, y)\right)$$

е решение на граничната задача (5.1) - (5.3) при достатъчна гладкост на функцията $F(x, y)$ и хомогенни гранични условия.

Доказателство.

$\Omega(x, t)$ е решение на граничната задача (5.1) - (5.3) при нулеви гранични функции и $F(x, y) = xy = L_x L_y = \dfrac{1}{S_x S_y}$ и удовлетворява алгебричното уравнение в $\mathcal{M}$:

$$(P(S_x) + Q(S_y))\Omega = \frac{1}{S_x S_y}$$

Ако $P(S_x)+Q(S_y)$ не е делител на нулата то

$$\Omega(x,y)=\frac{1}{S_xS_y(P(S_x)+Q(S_y))}$$

Ще проверим, че $u=u(x,y)$

$$u(x,y)=S_xS_y\{\Omega(x,y)\}\{F(x,y)\}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Omega(x,y)\overset{(x,y)}{*}F(x,y)\right).$$

е решение на уравнението

$$(P(S_x)+Q(S_y))u=F(x,y).$$

Имаме

$$(P(S_x)+Q(S_y))u=(P(S_x)+Q(S_y))S_xS_y\{\Omega(x,y)\}\{F(x,y)\}=$$

$$=(P(S_x)+Q(S_y))S_xS_y\frac{1}{S_xS_y(P(S_x)+Q(S_y))}\{F(x,y)\}=\{F(x,y)\}.$$

□

5.8 Примери

Ще разгледаме няколко примера на гранични задачи за уравнението на Лаплас включващи локални и нелокални гранични условия. Част от следващите примери са разгледани в [93], [92] и [58].

Пример 1. По нататък ще разгледаме следната **задача на Дирихле в правоъгълник:**

(5.39)
$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\ \ 0<y<b,\\&u(0,y)=0\ ,\quad u(x,0)=0,\\&u(a,y)=0\ ,\quad u(x,b)=f(x).\end{aligned}$$

Като използваме

$$u_{xx}=S_xu,\qquad u_{yy}=S_yu-[f(x)]_y.$$

(вж. (5.15) и (5.16)) алгебризираме задача (5.39):

$$(S_x+S_y)u=[f(x)]_y.$$

Понеже S_x+S_y не е делител на нулата в съответния пръстен на мултипликаторните частни (вж. Теорема 5.7) то

$$u=\frac{1}{S_x+S_y}[f(x)]_y.$$

1. Нека означим с $U=U(x,y)$ решението на (5.39) за $f(x)=\{x\}=L_x=\dfrac{1}{S_x}$. Имаме:

$$U=\frac{1}{S_x(S_x+S_y)}.$$

Решението на (5.39) за произволна функция f може да представим във вида:

$$u = \frac{1}{S_x + S_y}[f(x)]_y = \frac{S_x}{S_x(S_x+S_y)}[f(x)]_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\{U(x,y)\} \overset{x}{*} \{f(x)\}\right).$$

Ако $f \in C^1([0,a])$ и $f(0) = 0$, като използваме (3.14) намираме, че решението на (5.39) е:

$$u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\{U(x,y) \overset{x}{*} \{f(x)\}\right) = -\frac{1}{2a}\left(\int_0^a \big(U(x+a-\xi,y) - U(a-x-\xi,y)\big) f'(\xi)d\xi\right),$$

където

$$U(x,y) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \frac{\sinh \lambda_n y}{\sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a},$$

е слабо решение на граничната задача (5.39) за $f(x) = \{x\}$.

2. Нека означим с Ω решението на (5.39) за $f(x) = L_x\{x\} = \dfrac{1}{S_x^2} = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2}{6}x$. Имаме:

$$\Omega = \frac{1}{S_x^2(S_x+S_y)}.$$

Решението на (5.39) за произволна функция f е:

$$u = \frac{1}{S_x + S_y}[f(x)]_y = \frac{S_x^2}{S_x^2(S_x+S_y)}[f(x)]_y = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\{\Omega(x,y)\} \overset{x}{*} \{f(x)\}\right).$$

Ако $f \in C^2([0,a])$ и $f(0) = f(a) = 0$, като използваме (3.15) намираме, че решението на (5.39) е:

$$u(x,y) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega \overset{x}{*} f(x)) = -\frac{1}{2a}\left(\int_0^a \big(\Omega_x(x+a-\xi,y) - \Omega_x(a-x-\xi,y)\big) f''(\xi)d\xi\right),$$

където

$$\Omega(x,y) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \frac{\sinh \lambda_n y}{\sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

е слабо решение на граничната задача (5.39) за $f(x) = L_x\{x\} = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2 x}{6}$.

Пример 2. Ще разгледаме нелокална гранична задача включваща обобщено условие на Бицадзе - Самарски от вида $u(a,y) - u(c,y) = 0$:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \ \ 0 < y < b, \\ &u(0,y) = 0\ , \quad u(x,0) = 0, \\ &u(a,y) - u(c,y) = 0\ , \quad u(x,b) = f(x), \end{aligned} \tag{5.40}$$

където $0 < c < a$.

Примери включващи нелокално гранично условие на Бицадзе - Самарски са разгледани в [93].

1. Ако $f \in C^1([0,a])$ и $f(0) = 0$, тогава като използваме (3.14) намираме, че решението на (5.40) е:

$$u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U \overset{x}{*} f(x)) = \tag{5.41}$$

$$= -\frac{1}{2(a-c)} \left(\int_0^a \big(U(x+a-\xi,y) - U(a-x-\xi,y) \big) f'(x) d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^c \big(U(x+c-\xi,y) - U(c-x-\xi,y) \big) f'(x) d\xi \right).$$

$U(x,y)$ е слабо решение на граничната задача (5.40) за $f(x) = x$ и

$$U(x,y) = -2(a-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \lambda_n y}{\lambda_n (a \cos a\lambda_n - c\ \cos c\lambda_n) \sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x -$$

$$-2(a-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \mu_n y}{\mu_n (a \cos a\mu_n - c\ \cos c\ \mu_n) \sinh \mu_n b} \sin \mu_n x,$$

където $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{a+c}$ и $\mu_k = \dfrac{2k\pi}{a-c}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

2. Ако $f \in C^2([0,a])$ и $f(0) = f(a) - f(c) = 0$, като използваме (3.15) намираме, че решението на (5.40) е:

$$u(x,y) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega \overset{x}{*} f(x)) = \tag{5.42}$$

$$= -\frac{1}{2(a-c)} \left(\int_0^a \big(\Omega_x(x+a-\xi,y) - \Omega_x(a-x-\xi,y) \big) f''(x) d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^c \big(\Omega_x(x+c-\xi,y) - \Omega_x(c-x-\xi,y) \big) f''(x) d\xi \right).$$

$\Omega(x,y)$ е слабо решение на граничната задача (5.40) за $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2+ac+c^2}{6} x$.

$$\Omega(x,y) = 2(a-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \lambda_n y}{\lambda_n^3 (a \cos a\lambda_n - c\ \cos c\lambda_n) \sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x -$$

$$2(a-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \mu_n y}{\mu_n^3 (a \cos a\mu_n - c\ \cos c\ \mu_n) \sinh \mu_n b} \sin \mu_n x,$$

където $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{a+c}$ и $\mu_k = \dfrac{2k\pi}{a-c}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Пример 3.

Ще разгледаме нелокална гранична задача включваща обобщено условие на Бицадзе - Самарски и по двете променливи x и y от вида съответно $u(a,y) - u(c,y) = 0$

и $\dfrac{1}{b-d}\big(u(x,b)-u(y,d)\big)=f(x)$:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,\\
&u(0,y)=0\ , \quad u(x,0)=0,\\
&u(a,y)-u(c,y)=0\ , \quad \frac{1}{b-d}\big(u(x,b)-u(y,d)\big)=f(x),
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

където $0<c<a$ и $0<d<b$.

В последното нелокално условие сме множили с $\dfrac{1}{b-d}$ за да може функционалът $\Psi_\eta\{g(\eta)\}=\dfrac{1}{b-d}(g(b)-g(d))$ да е нормиран така, че: $\Psi_\eta\{\eta\}=1$ (вж. (3.3)). Разбира се това не е съществено ограничение.

1. Ако $f\in C^1([0,a])$ и $f(0)=0$, като използваме (3.14) намираме, че решението на (5.43) е:

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(U\overset{x}{*}f(x))=\\
&=-\frac{1}{2(a-c)}\left(\int_0^a\big(U(x+a-\xi,y)-U(a-x-\xi,y)\big)f'(x)d\xi-\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^c\big(U(x+c-\xi,y)-U(c-x-\xi,y)\big)f'(x)d\xi\right).
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

$U(x,y)$ е слабо решение на граничната задача (5.43) за $f(x)=x$ и

$$
\begin{aligned}
U(x,y)=-2(a-c)(b-d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\lambda_n y}{\lambda_n(\sinh\lambda_n-\sinh\frac{\lambda_n}{2})(a\cos a\lambda_n-c\ \cos c\lambda_n)}\sin\lambda_n x-\\
-2(a-c)(b-d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\mu_n y}{\mu_n(\sinh\mu_n-\sinh\frac{\mu_n}{2})(a\cos a\mu_n-c\ \cos c\mu_n)}\sin\mu_n x,
\end{aligned}
$$

където $\lambda_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{a+c}$ и $\mu_k=\dfrac{2k\pi}{a-c}$, $n,k\in\mathbb{N}$.

2. Ако $f\in C^2([0,a])$ и $f(0)=f(a)-f(c)=0$, като използваме (3.15) намираме, че решението на (5.43) е:

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\Omega\overset{x}{*}f(x))=\\
&=-\frac{1}{2(a-c)}\left(\int_0^a\big(\Omega_x(x+a-\xi,y)-\Omega_x(a-x-\xi,y)\big)f''(x)d\xi-\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^c\big(\Omega_x(x+c-\xi,y)-\Omega_x(c-x-\xi,y)\big)f''(x)d\xi\right).
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

$\Omega(x,y)$ е слабо решение на граничната задача (5.43) за $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{a^2+ac+c^2}{6}x$ и

$$\Omega(x,y) = 2(a-c)(b-d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \lambda_n y}{\lambda_n^3(\sinh \lambda_n - \sinh \frac{\lambda_n}{2})(a\cos a\lambda_n - c\ \cos c\lambda_n)} \sin \lambda_n x +$$
$$+2(a-c)(b-d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \mu_n y}{\mu_n^3(\sinh \mu_n - \sinh \frac{\mu_n}{2})(a\cos a\mu_n - c\ \cos c\mu_n)} \sin \mu_n x,$$

където $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{a+c}$ и $\mu_k = \dfrac{2k\pi}{a-c}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

6 Многомерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, ..., \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

6.1 Увод

По-нататък ще разгледаме операционните смятания за частните диференциални оператори $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Целта на тези операционни смятания е изучаването на нелокални гранични задачи за уравнения от вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u = F(x_1, ..., x_n, t), \tag{6.1}$$

в правоъгълна област D от вида $D = [0, a_1] \times ... \times [0, a_n] \times [0, \infty)$ и с полиноми P, Q_j на една променлива и $\deg P \geq 1$, $\deg Q_j \geq 1$ за $j = 1, ..., n$.

За да формулираме точния клас задачи задаваме $n+1$ линейни функционала $\chi \in (C[0, \infty))^*$, $\Phi_j \in (C^1[0, a_j])^*$ за $j = 1, ..., n$.

Граничните условия на разглежданите задачи са следните:

1) "Начални" условия свързани с променливата t

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x_1, ..., x_n, \tau)\right\} = f_k(x_1, ..., x_n), \quad k = 0, 1, ..., \deg P - 1, \tag{6.2}$$

с дадени $f_k(x_1, ..., x_n)$ за $0 \leq x_j \leq a_j$, $j = 1, ..., n$. Изобщо, тези условия са нелокални.

2) Граничните условия свързани с променливата x_j за $j = 1, ..., n$ са:
локални

$$\frac{\partial^{2p_j}}{\partial x_j^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = g_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t), \tag{6.3}$$

нелокални

$$\Phi_{j,\xi}\left\{\frac{\partial^{2p_j}}{\partial \xi^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = h_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t), \tag{6.4}$$

с дадени функции $g_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t)$ и $h_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t)$ за $j = 1, ..., n$, $p_j = 0, 1, ..., \deg Q_j - 1$, $0 \leq x_i \leq a_i$, $i = 1, ..., n$ и $i \neq j$, $0 \leq t < \infty$.

И тук както при двумерните операционни смятания идеята е да се разгледа алгебрично уравнение, в някакъв пръстен, съответстващо на разглежданата задача. Да се реши това уравнение в пръстена и полученото решение да се интерпретира като функция. По-точно идеята на директното операционно смятане за гранични задачи от вида (6.1) - (6.4) е да се въведе конволюционно произведение $u(x_1, ..., x_n, t) \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*} v(x_1, ..., x_n, t)$ в пространството на непрекъснатите функции $C = C(D)$ за да се превърне в конволюционна алгебра и тя да се разшири до пръстен от мултипликаторни частни. Както ще видим по-нататък това става по подобен начин, по които от множеството на целите числа се получават рационалните.

В този пръстен от мултипликаторни частни задачата (6.1) - (6.4) се алгебризира и се свежда до едно алгебрично уравнение от първа степен от вида

$$(6.5) \qquad [P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})]u = \widetilde{F},$$

където s_t и S_{x_j} са основни елементи на пръстена и $\widetilde{F}$ също е елемент на пръстена, включващ в себе си граничните условия. s_t и S_{x_j} са алгебричните аналози на диференциалните оператори $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $j = 1, ..., n$.

Нека $P(s_t) - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$ не е делител на нулата в пръстена от мултипликаторните частни. Тогава формалното решение на (6.5) е

$$u = \frac{1}{P(s_t) - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})}\widetilde{F}.$$

Остава то да се интерпретира като функция от $C(D)$, която ще наричаме *слабо решение* на граничната задача (6.1) - (6.4). Ако слабото решение има производни от достатъчно висок ред, то съвпада с класическото решение.

В тази глава е реализирана описаната програма.

6.2 Многомерни конволюции

Ще припомним дефинициите на две едномерни конволюции. Операцията $\overset{t}{*}$ е разгледана в Глава 2, а операциите $\overset{x_j}{*}$ за $j = 1, ..., n$, в Глава 3.

Нека $\varphi, \psi \in C[0, \infty)$ и $f, g \in C[0, a_j]$

$$(6.6) \qquad (\varphi \overset{t}{*} \psi)(t) = \chi_\tau \left\{ \int_\tau^t \varphi(t + \tau - \sigma)\psi(\sigma)d\sigma \right\}, \quad \text{в} \;\; C[0, \infty),$$

и

$$(6.7) \qquad (f \overset{x_j}{*} g)(x_j) = -\frac{1}{2}\Phi_{j,\xi} \left\{ \int_0^\xi h(x_j, \zeta)d\zeta \right\}, \quad \text{в} \;\; C[0, a_j],$$

където

$$h(x_j, \zeta) = \int_{x_j}^{\zeta} f(\zeta + x_j - \sigma)g(\sigma)d\sigma - \int_{-x_j}^{\zeta} f(|\zeta - x_j - \sigma|)g(|\sigma|)\mathrm{sgn}\big(\sigma(\zeta - x_j - \sigma)\big)d\sigma.$$

Като имаме предвид граничната задача (6.1) - (6.4) с n пространствени променливи $x_1, ..., x_n$ и една времева t, ще дефинираме първо k-мерни конволюции $\overset{x_1,...,x_k}{*}$ в $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$, $k = 2, 3, ..., n$. Ще търсим билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$ такава, че ако $u = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_k(x_k)$ и $v = g_1(x_1)g_2(x_2)...g_k(x_k)$, да е изпълнено $u \overset{x_1,...,x_k}{*} v = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)(f_2 \overset{x_2}{*} g_2)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k)$.

След това ще дефинираме $(k+1)$-мерни конволюции $\overset{x_1,...,x_k,t}{*}$ в $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$, $k=1,2,3,...,n$. И тук ще искаме всяка операция да е билинейна, комутативна и асоциативна в $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$ и такава, че ако $u=f_1(x_1)f_2(x_2)...f_k(x_k)\varphi(t)$ и $v=g_1(x_1)g_2(x_2)...g_k(x_k)\psi(t)$, тогава да е изпълнено

$$u\overset{x_1,...,x_k,t}{*}v=(f_1\overset{x_1}{*}g_1)(f_2\overset{x_2}{*}g_2)...(f_k\overset{x_k}{*}g_k)(\varphi\overset{t}{*}\psi).$$

Такива многомерни конволюции $\overset{x_1,...,x_k}{*}$ ще дефинираме последователно в пространствата $C_1=C[0,a_1]$, $C_k=C([0,a_1]\times...\times[0,a_k])$, $k=2,3,...,n$ и $\overset{x_1,...,x_k,t}{*}$ в $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$, $k=1,2,...,n$. За цялото пространство на непрекъснатите функции в $D=[0,a_1]\times...\times[0,a_n]\times[0,\infty)$ ще използваме краткото означение $C:=C(D)$ и ще означаваме пълната конволюция с $\overset{x_1,...,x_n,t}{*}$. В по-абстрактна форма многомерни конволюции са разглеждани от Божинов в [34].

Дефиниция 6.1 *За $u,v\in C[0,a_1]$ дефинираме конволюционното произведение $u\overset{x_1}{*}v$ чрез (6.7). Нека $u,v\in C_k:=C([0,a_1]\times...\times[0,a_k])$, $k=2,...,n$. Тогава*

$$u(x_1,...,x_k)\overset{x_1,...,x_k}{*}v(x_1,...,x_k)=-\frac{1}{2}\Phi_{k,\xi}\left\{\int_0^\xi h_{k-1}(x_1,...,x_k,\zeta)d\zeta\right\}\tag{6.8}$$

с

$$h_{k-1}(x_1,...,x_k,\zeta)=\int_{x_k}^{\zeta}u(x_1,...,x_{k-1},\xi+x_k-\eta)\overset{x_1,...,x_{k-1}}{*}v(x_1,...,x_{k-1},\eta)d\eta-$$

$$-\int_{-x_k}^{\xi}u(x_1,...,x_{k-1},|\xi-x_k-\eta|)\overset{x_1,...,x_{k-1}}{*}v(x_1,...,x_{k-1},|\eta|)\mathrm{sgn}\eta(\xi-x_k-\eta)d\eta.$$

Тази дефиниция е k-мерен аналог на Дефиниция 5.1 на конволюцията $\overset{x,y}{*}$ изразена с равенства (5.8) или (5.9).

Дефиниция 6.2 *Нека $u,v\in C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$. Тогава*

$$\begin{gathered}(u\overset{x_1,...,x_k,t}{*}v)(x_1,...,x_k,t)=\\=\chi_\tau\left\{\int_\tau^t u(x_1,...,x_k,t+\tau-\sigma)\overset{x_1,...,x_k}{*}v(x_1,...,x_k,\sigma)d\sigma\right\},\end{gathered}\tag{6.9}$$

$k=1,2,...,n.$

Тази дефиниция е k-мерен аналог на Дефиниция 4.1 на конволюцията $\overset{x,t}{*}$.

Ще опишем основни свойства на многомерните конволюции $\overset{(x_1,...x_k,t)}{*}$ и $\overset{(x_1,...x_k)}{*}$ които са съществено важни за изграждане на многомерни операционни смятания за операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $k=1,...,n$.

Лема 6.1 Нека $p_{k-1}(x_1,...,x_{k-1}), q_{k-1}(x_1,...,x_{k-1}) \in C([0,a_1]\times...\times[0,a_{k-1}])$ и $u_k(x_k), v_k(x_k) \in C[0,a_k]$ за $k=2,...,n$. Тогава

$$\{p_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})u_k(x_k)\} \overset{x_1,...,x_k}{*} \{q_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})v_k(x_k)\} = \tag{6.10}$$
$$= \Big(\{p_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})\} \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} \{q_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})\}\Big)\Big(\{u_k(x_k)\} \overset{x_k}{*} \{v_k(x_k)\}\Big).$$

Доказателство. От (6.8), получаваме

$$\{p_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})u_k(x_k)\} \overset{x_1,...,x_k}{*} \{q_{k-1}(x_1,...,x_{k-1})v_k(x_k)\} =$$
$$= (p_{k-1} \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} q_{k-1})(x_1,...,x_{k-1}) \left(-\frac{1}{2}\right) \tilde{\Phi}_{k,\xi}\Bigg\{\int_{x_k}^{\xi} u_k(\xi+x_k-\eta)v_k(\eta)d\eta -$$
$$-\int_{-x_k}^{\xi} u_k(|\xi-x_k-\eta|)v_k(|\eta|)\,\mathrm{sgn}(\eta(\xi-x_k-\eta))d\eta\Bigg\} =$$
$$= (p_{k-1} \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} q_{k-1})(x_1,...,x_{k-1})(u_k \overset{x_k}{*} v_k)(x_k).$$

□

Лема 6.2 Нека $p_k(x_1,...,x_k), q_k(x_1,...,x_k) \in C([0,a_1]\times...\times[0,a_k])$ и $\varphi(t), \psi(t) \in C[0,\infty)$ за $k=1,2,...,n$. Тогава

$$\{p_k(x_1,...,x_k)\varphi(t)\} \overset{x_1,...,x_k,t}{*} \{q_k(x_1,...,x_k)\psi(t)\} = \tag{6.11}$$
$$= (p_k \overset{x_1,...,x_k}{*} q_k)(x_1,...,x_k)(\varphi \overset{t}{*} \psi)(t).$$

Доказателство. Доказателството е аналогично на доказателството на Лема 6.1. От (6.9) получаваме

$$\{p_k(x_1,...,x_k)\varphi(t)\} \overset{x_1,...,x_k,t}{*} \{q_k(x_1,...,x_k)\psi(t)\} =$$
$$= \chi_\tau\left\{\int_\tau^t \{p_k(x_1,...,x_k)\varphi(t+\tau-\sigma)\} \overset{x_1,...,x_k}{*} \{q_k(x_1,...,x_k)\psi(\sigma)\}d\sigma\right\} =$$
$$= \{p_k(x_1,...,x_k)\} \overset{x_1,...,x_k}{*} \{q_k(x_1,...,x_k)\}\chi_\tau\left\{\int_\tau^t \varphi(t+\tau-\sigma)\psi(\sigma)d\sigma\right\} =$$
$$= (p_k \overset{x_1,...,x_k}{*} q_k)(x_1,...,x_k)(\varphi \overset{t}{*} \psi)(t).$$

□

Теорема 6.1 *Нека $f_1(x_1), g_1(x_1) \in C[0,a_1]$, ..., $f_k(x_k), g_k(x_k) \in C[0,a_k]$ и $\varphi(t), \psi(t) \in C[0,\infty)$. Тогава*

$$(f_1...f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} (g_1...g_k) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k) \tag{6.12}$$

и

$$(f_1...f_k\varphi) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} (g_1...g_k\psi) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k)(\varphi \overset{t}{*} \psi). \tag{6.13}$$

Доказателство. Ще използваме индукция спрямо броя k на функциите. Нека $k = 1$ (6.12) е тривиално изпълнено. От Лема 6.1, имаме

$$(f_1...f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} (g_1...g_k) = ((f_1...f_{k-1})f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} ((g_1...g_{k-1})g_k) = \\ = \Big((f_1...f_{k-1}) \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} (g_1...g_{k-1})\Big) (f_k \overset{x_k}{*} g_k).$$

Но от индукционното предположение получаваме

$$(f_1...f_{k-1}) \overset{x_1,...,x_{k-1}}{*} (g_1...g_{k-1}) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_{k-1} \overset{x_{k-1}}{*} g_{k-1})$$

и следователно

$$(f_1...f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} (g_1...g_k) = (f_1 \overset{x_1}{*} g_1)...(f_k \overset{x_k}{*} g_k).$$

Доказателството на (6.13) следва веднага от доказаното равенство (6.12) и Лема 6.2.
□

По-нататък ще използваме следната лема

Лема 6.3 Операциите $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$ и $\overset{(x_1,...,x_k,t)}{*}$ за $k = 1, ..., n$ са билинейни.

Доказателство. Поради линейността на функционалите χ и Φ_j, $j = 1, ..., n$ доказателството на твърдението е очевидно.
□

Лема 6.4 Нека $f_1(x_1) \in C[0, a_1]$,..., $f_k(x_k) \in C[0, a_k]$, $\varphi \in C[0, \infty)$, $v \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$, и $w \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k] \times [0, \infty))$. Тогава

$$f_1 \overset{x_1}{*} (f_2 \overset{x_2}{*} ...(f_k \overset{x_k}{*} v)...) = (f_1 f_2 ... f_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} v \tag{6.14}$$

и

$$f_1 \overset{x_1}{*} (f_2 \overset{x_2}{*} ...(f_k \overset{x_k}{*} (\varphi \overset{t}{*} w))...) = (f_1 f_2 ... f_k \varphi) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} w. \tag{6.15}$$

Доказателство. Ще докажем само (6.14). Доказателството на (6.15) е аналогично.

Първо ще разгледаме случая когато функцията $v = v(x_1, ..., x_k)$ е от вида $v = v(x_1, ..., x_k) = g_1(x_1)...g_k(x_k)$ за $g_j(x) \in C[0, a_j]$, $j = 1, ..., k$. Тогава означавайки дясната страна на (6.14) с A намираме

$$A = f_1(x_1) \overset{x_1}{*} (f_2(x_2) \overset{x_2}{*} ...(f_k(x_k) \overset{x_k}{*} v(x_1, x_2, ..., x_k))...) = \\ = f_1(x_1) \overset{x_1}{*} (f_2(x_2) \overset{x_2}{*} ...(f_k(x_k) \overset{x_k}{*} g_1(x_1)g_2(x_2)...g_k(x_k))...) = \\ = f_1(x_1) \overset{x_1}{*} (f_2(x_2) \overset{x_2}{*} ...(f_k(x_k) \overset{x_k}{*} g_k(x_k))g_1(x_1)...g_{k-1}(x_{k-1}))...) = \\ = (f_1(x_1) \overset{x_1}{*} g_1(x_1))...(f_k(x_k) \overset{x_k}{*} g_k(x_k)).$$

От Теорема 6.1 получаваме

$$A = (f_1(x_1)f_2(x_2)...f_k(x_k)) \overset{x_1,...,x_k}{*} (g_1(x_1)g_2(x_2)...g_k(x_k)) = \\ = (f_1(x_1)f_2(x_2)...f_k(x_k)) \overset{x_1,...,x_k}{*} v(x_1, ..., x_k).$$

Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $v(x_1, ..., x_k) \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$ може да се приближи равномерно с полиноми на променливите $x_1, ..., x_k$, т. е. чрез линейна комбинация на функциите $x_1^{n_1}...x_k^{n_k}$ за $k = 1, 2, ..., n$ и $n_k = 0, 1, 2, ...$ Понеже функцията $x_1^{n_1}...x_k^{n_k}$ е от вида $g_1(x_1)...g_k(x_k)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$ следва твърдението на лемата.
□

С L_{x_k} означаваме десния обратен оператор на оператора на квадрата на диференцирането $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ определен с условията $(L_{x_k}u)(0) = 0$ и $\Phi_{k,x_k}\{L_{x_k}u(x_k)\} = 0$ за $k = 1, ..., n$. (вж. Теорема 3.1 от Глава 3)

$$L_{x_k}u(x_k) = \int_0^{x_k}(x_k - \xi)u(\xi)d\xi - x_k\Phi_{k,\xi}\left\{\int_0^{\xi}(\xi - \eta)u(\eta)d\eta\right\}.$$

Да припомним, че L_{x_k} се изразява чрез конволюцията (6.7) по следния начин:

$$L_{x_k} = \{x_k\} \overset{x_k}{*}.$$

Някой от свойствата на този оператор разгледахме в Глава 3.

С l_t означаваме десния обратен оператор на оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$, определен с функционала χ (вж. (2.6))

$$l_t u(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau - \chi_\tau\left\{\int_0^\tau u(\sigma)d\sigma\right\}.$$

Да припомним, че l_t се изразява чрез конволюцията (6.6) по следния начин:

$$l_t = \{1\} \overset{t}{*}.$$

Някой от свойствата на този оператор разгледахме в Глава 2.

Теорема 6.2 *Нека $u, v \in C_k = C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$, $k = 1, ..., n$. Тогава операцията*

$$u(x_1, ..., x_k) \overset{x_1,...,x_k}{*} v(x_1, ..., x_k),$$

дефинирана с (6.8) е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C_k = C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$, за която

$$L_{x_1}...L_{x_k}u(x_1, ..., x_k) = \{x_1...x_k\} \overset{x_1,...,x_k}{*} u(x_1, ..., x_k). \tag{6.16}$$

Доказателство.

Първо ще докажем комутативността $u \overset{x_1,...,x_k}{*} v = v \overset{x_1,...,x_k}{*} u$ и асоциативността $(u \overset{x_1,...,x_k}{*} v) \overset{x_1,...,x_k}{*} w = u \overset{x_1,...,x_k}{*} (v \overset{x_1,...,x_k}{*} w)$ на $\overset{x_1,...,x_k}{*}$ за функции от вида $u(x_1, ..., x_k) = u_1(x)...u_n(x_k)$, $v(x_1, ..., x_k) = v_1(x)...v_k(x_k)$, $w(x_1, ..., x_k) = w_1(x)...w_k(x_k)$, а после ще използваме теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]).

Да докажем комутативността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$. От Теорема 6.1 и комутативността на $\overset{x_j}{*}$ за $j = 1, ..., k$ имаме

$$u \overset{(x_1,...,x_k)}{*} v = \{u_1...u_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{v_1...v_k\} = (u_1 \overset{x_1}{*} v_1)...(u_k \overset{x_k}{*} v_k) = (v_1 \overset{x_1}{*} u_1)...(v_k \overset{x_k}{*} u_k) =$$

$$= \{v_1...v_n\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{u_1...u_k\} = v \overset{(x_1,...,x_k)}{*} u.$$

Да докажем асоциативността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$. От Теорема 6.1 и асоциативността на $\overset{x_j}{*}$ за $j = 1, ..., k$ имаме

$$\left(u \overset{(x_1,...,x_k)}{*} v\right) \overset{(x_1,...,x_k)}{*} w = \left(\{u_1...u_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{v_1...v_k\}\right) \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{w_1...w_k\} =$$

$$= \left\{(u_1 \overset{x_1}{*} v_1)...(u_k \overset{x_k}{*} v_k)\right\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{w_1...w_k\} =$$

$$= \left((u_1 \overset{x_1}{*} v_1) \overset{x_1}{*} w_1\right) ... \left((u_k \overset{x_k}{*} v_k) \overset{x_k}{*} w_k\right) = \left(u_1 \overset{x_1}{*} (v_1 \overset{x_1}{*} w_1)\right) ... \left(u_k \overset{x_k}{*} (v_k \overset{x_k}{*} w_k)\right) =$$

$$= \{u_1...u_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \left\{(v_1 \overset{x_1}{*} w_1)...(v_k \overset{x_k}{*} w_k)\right\} =$$

$$= \{u_1...u_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \left(\{v_1...v_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{w_1...w_k\}\right) = u \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \left(v \overset{(x_1,...,x_k)}{*} w\right).$$

Според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $u(x_1, ..., x_k) \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$ може да се приближи равномерно с полиноми на променливите $x_1, ..., x_n$, т. е. чрез линейна комбинация на функциите $x_1^{p_1}$, ..., $x_k^{p_k}$ за $p_1, ..., p_k = 0, 1, 2, ...$. Понеже функцията $x_1^{p_1}...x_n^{p_k}$ е от вида $u_1(x_1)...u_k(x_k)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$ следва комутативността и асоциативността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$ в $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$.

Ще докажем (6.16). Нека $u \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$. От $L_{x_j} = \{x_j\} \overset{x_j}{*}$ за $j = 1, ..., k$ и Лема 6.4 равенство (6.14) получаваме:

$$L_{x_1}...L_{x_k} u = L_{x_1}...L_{x_{k-1}}(L_{x_k} u) = L_{x_1}...L_{x_{k-1}}\left(\{x_k\} \overset{x_k}{*} u\right) =$$

$$= \{x_1\} \overset{x_1}{*} \left(...\{x_{k-1}\} \overset{x_{n-1}}{*} \left(\{x_k\} \overset{x_k}{*} u\right)...\right) = \{x_1...x_k\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} u.$$

□

Теорема 6.3 *Нека $u, v \in C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k] \times [0, \infty))$, $k = 1, ..., n$. Тогава операцията*

$$u(x_1, ..., x_k, t) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} v(x_1, ..., x_k, t),$$

дефинирана с (6.9) е билинейна, комутативна и асоциативна операция в $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k] \times [0, \infty))$, за която

$$l_t L_{x_1}...L_{x_k} u(x_1, ..., x_k, t) = \{x_1...x_k\} \overset{x_1,...,x_k,t}{*} u(x_1, ..., x_k, t). \tag{6.17}$$

Бележка. Тук функцията $\{x_1...x_k\}$ е разглеждана като функция от $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$.

Доказателство.

Доказателството на тази теорема може да стане по напълно аналогичен начин на доказателството на предната Теорема 6.2. Но за разнообразие ще приведем малко по-различно доказателство.

Първо ще докажем комутативността $u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} v = v \overset{x_1,...,x_k,t}{*} u$ и асоциативността $(u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} v) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} w = u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} (v \overset{x_1,...,x_k,t}{*} w)$ на $\overset{x_1,...,x_k,t}{*}$ за функции от вида $u = U(x_1,...,x_k)\alpha(t)$, $v = V(x_1,...,x_k)\beta(t)$ and $w = W(x_1,...,x_k)\gamma(t)$, а после ще използваме теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) за да докажем теоремата за произволни функции от $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$.

Ще докажем комутативността на $\overset{(x_1,...,x_k,t)}{*}$. От Теорема 6.1 и комутативността на $\overset{x_j}{*}$ за $j=1,...,k$ имаме

$$u \overset{(x_1,...,x_k,t)}{*} v = \{U(x_1,...,x_k)\alpha(t)\} \overset{(x_1,...,x_k,t)}{*} \{V(x_1,...,x_k)\beta(t)\} =$$

$$= \left(\{U(x_1,...,x_k)\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{V(x_1,...,x_k)\}\right)\left(\{\alpha(t)\} \overset{(t)}{*} \{\beta(t)\}\right) =$$

$$= \left(\{V(x_1,...,x_k)\} \overset{(x_1,...,x_k)}{*} \{U(x_1,...,x_k)\}\right)\left(\{\beta(t)\} \overset{(t)}{*} \{\alpha(t)\}\right) =$$

$$= \left(\{V(x_1,...,x_k)\beta(t)\} \overset{(x_1,...,x_k,t)}{*} \{U(x_1,...,x_k)\alpha(t)\}\right) = v \overset{(x_1,...,x_k,t)}{*} u.$$

Ще докажем асоциативността на $\overset{(x_1,...,x_k,t)}{*}$. От Лема 6.2 получаваме

$$(u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} v) \overset{x_1,...,x_k,t}{*} w = \left(\left(U \overset{x_1,...,x_k}{*} V\right) \overset{x_1,...,x_k}{*} W\right)((\alpha \overset{t}{*} \beta) \overset{t}{*} \gamma)$$

и

$$u \overset{x_1,...,x_k,t}{*} (v \overset{x_1,...,x_k,t}{*} w) = \left(U \overset{x_1,...,x_k}{*} \left(V \overset{x_1,...,x_k}{*} W\right)\right)(\alpha \overset{t}{*} (\beta \overset{t}{*} \gamma))$$

От асоциативността на $\overset{x_1,...,x_k}{*}$ и $\overset{t}{*}$ следва асоциативността на $\overset{x_1,...,x_k,t}{*}$ за функции от вида $u = U(x_1,...,x_k)\alpha(t)$, $v = V(x_1,...,x_k)\beta(t)$ and $w = W(x_1,...,x_k)\gamma(t)$. Използвайки теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) за апроксимиране на функции следва комутативността и асоциативността на $\overset{(x_1,...,x_k)}{*}$ за функции от $C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$

Ще докажем (6.17). Нека $u\in C([0,a_1]\times...\times[0,a_k]\times[0,\infty))$. От $l_t = \{1\} \overset{t}{*}$ и $L_{x_j} = \{x_j\} \overset{x_j}{*}$ за $j=1,...,k$ и Лема 6.4 равенство (6.15) получаваме:

$$l_t L_{x_1}...L_{x_k} u = L_{x_1}...L_{x_{k-1}}(L_{x_k} u) = l_t L_{x_1}...L_{x_{k-1}}\left(\{x_k\} \overset{x_k}{*} u\right) =$$

$$= \{1\} \overset{t}{*} \left(\{x_1\} \overset{x_1}{*} \left(...\{x_{k-1}\} \overset{x_{n-1}}{*} \left(\{x_k\} \overset{x_k}{*} u\right)...\right)\right) = \{x_1...x_k\} \overset{(x_1,...,x_k,t)}{*} u.$$

□

Бележка. Избирайки произволни k от променливите $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ за $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, може да дефинираме конволюциите $\overset{x_{i_1},...,x_{i_k}}{*}$ и $\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}$ съответно в $C([0, a_{i_1}] \times ... \times [0, a_{i_k}])$ и $C([0, a_{i_1}] \times ... \times [0, a_{i_k}] \times [0, \infty))$ по същия начин, по който дефинирахме конволюциите $\overset{x_1,...,x_k}{*}$ и $\overset{x_1,...,x_k,t}{*}$ съответно в $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k])$ и $C([0, a_1] \times ... \times [0, a_k] \times [0, \infty))$.

Може да се докаже и:

Теорема 6.4 *Нека*

$$U_1(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}),\ V_1(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) \in C([0, a_{i_1}] \times ... \times [0, a_{i_k}]),$$

$$U_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}}),\ V_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}}) \in C([0, a_{i_{k+1}}] \times ... \times [0, a_{i_{k+m}}]),$$

където $k + m \leq n$. Тогава

$$\left\{U_1(x_{i_1}, ..., x_{i_k})U_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}})\right\} \overset{(x_{i_1},...,x_{i_{k+m}})}{*} \left\{V_1(x_{i_1}, ..., x_{i_k})V_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}})\right\} =$$

$$= \left(\left\{U_1(x_{i_1}, ..., x_{i_k})\right\} \overset{(x_{i_1},...,x_{i_k})}{*} \left\{V_1(x_{i_1}, ..., x_{i_k})\right\}\right) \times$$

$$\times \left(\left\{U_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}})\right\} \overset{(x_{i_{k+1}},...,x_{i_{k+m}})}{*} \left\{V_2(x_{i_{k+1}}, ..., x_{i_{k+m}})\right\}\right).$$

Тази теорема показва, че алгебрата $(C(D), \overset{(x_1,...,x_n)}{*})$ е градуирана.

6.3 Мултипликатори на $(C([0, a_1] \times ... \times [0, a_n] \times [0, \infty)), \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$

Аналогично на разглежданията в Параграфи 2.3 и 3.2 ”Директен алгебричен подход” съответно на Глави 2 и 3 ще разгледаме пространството $C = C([0, a_1] \times ... \times [0, a_n] \times [0, \infty))$ на непрекъснатите функции в $[0, a_1] \times ... \times [0, a_n] \times [0, \infty)$ с двете операции: събиране ” $+$ ” и умножение като вместо ”стандартното”, ”поточково” умножение на функции, означавано с ”.” и $u(x_1, ..., x_n, t)v(x_1, ..., x_n, t)$, ще разглеждаме многомерната конволюция $\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}$, зададена с (4.7). Пространството C с операциите ” $+$ ” и $\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}$ е пръстен, а също и алгебра над $\mathbb{R}$.

Ще въведем пръстена на мултипликаторите на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$. Първо ще дадем дефиниция на мултипликатор на конволюционната алгебра.

Дефиниция 6.3 *Линеен оператор $M : C \to C$ се нарича мултипликатор на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ ако равенството*

$$M(u \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*} v) = (Mu) \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*} v \tag{6.18}$$

е изпълнено за всички $u, v \in C$.

Прост пример на мултипликатори на $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}$ са конволюционните оператори $u \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}$, където $u \in C$. Друг тривиален пример на мултипликатори на $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ са числовите мултипликатори.

Дефиниция 6.4 *Нека $u \in C$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Операторът $[\lambda] : C \to C$, $[\lambda]u = \{\lambda u\}$ се нарича числов мултипликатор на алгебрата $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$.*

За числовите мултипликатори е изпълнено $[\lambda][\mu] = [\lambda\mu]$. Последното равенство дава основание за наименованието числов мултипликатор. Числовите мултипликатори образуват пръстен, изоморфен на $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Не толкова тривиални примери на мултипликатори са следващите оператори:

i) Ако $f = f(x_j) \in C[0,a_j]$, $j = 1,...,n$, тогава конволюционният оператор $f \overset{x_j}{*}$ в $(C[0,a_j], \overset{x_j}{*})$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C(D)$ така, че

$$\left(f \overset{x_j}{*}\right)\{u(x_1,...,x_n,t)\} = \{f(x_j)\} \overset{x_j}{*} \{u(x_1,...,x_n,t)\}.$$

Тук на променливите $x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,t$ се гледа като на параметри. Ще използваме означението $[f]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t} := \{f\} \overset{x_j}{*}$;

ii) Ако $\varphi = \varphi(t) \in C[0,\infty)$, тогава конволюционният оператор $\varphi \overset{t}{*}$ в $(C[0,\infty), \overset{t}{*})$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C(D)$ така, че

$$\left(\varphi \overset{t}{*}\right)\{u(x_1,...,x_n,t)\} = \{\varphi(t)\} \overset{t}{*} \{u(x_1,...,x_2,t)\}.$$

Тук на променливите $x_1,...,x_n$ се гледа като на параметри. Ще използваме означението $[\varphi]_{x_1,...,x_n} := \{\varphi(t)\} \overset{t}{*}$;

iii) Ако $G = G(x_{i_1}...x_{i_k}) \in C([0,a_{i_1}]\times...\times[0,a_{i_k}])$, тогава конволюционният оператор $G \overset{(x_{i_1}...x_{i_k})}{*}$ в $(C([0,a_{i_1}]\times...\times[0,a_{i_k}], \overset{(x_{i_1}...x_{i_k})}{*})$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C(D)$ така, че

$$\left(G \overset{(x_{i_1}...x_{i_k})}{*}\right)\{u(x_1,...,x_n,t)\} = \{G\} \overset{(x_{i_1}...x_{i_k})}{*} \{u(x_1,...,x_2,t)\}.$$

Тук на променливите $x_{i_{k+1}}...x_{i_n}, t$ се гледа като на параметри. Ще използваме означението $[G]_{x_{i_{k+1}}...x_{i_n},t} := \{G\} \overset{(x_{i_1}...x_{i_k})}{*}$;

iv) Ако $G = G(x_{i_1}...x_{i_k}) \in C([0,a_{i_1}]\times...\times[0,a_{i_k}])$, тогава конволюционният оператор $F \overset{x_{i_1}...x_{t_k},t}{*}$ в $(C([0,a_{i_1}]\times...\times[0,a_{i_k}]\times[0,\infty)), \overset{(x_{i_1}...x_{i_k},t)}{*})$ може да бъде разглеждан като оператор в цялото пространство $C(D)$ така, че

$$\left(F \overset{(x_{i_1}...x_{i_k},t)}{*}\right)\{u(x_1,...,x_n,t)\} = \{F\} \overset{(x_{i_1}...x_{i_k},t)}{*} \{u(x_1,...,x_2,t)\}.$$

Тук на променливите $x_{i_{k+1}}...x_{i_n}$ се гледа като на параметри. Ще използваме означението $[F]_{x_{i_{k+1}}...x_{i_n}} := \{F\} \overset{(x_{i_1}...x_{i_k},t)}{*}$;

В iii) и iv) $1 \leq i_1 < i_1 < ... < i_k \leq n$, $k = 1, ..., n$.

Ще наричаме тези оператори *частни числови оператори* спрямо отсъстващите променливи.

Теорема 6.5 *Конволюционните оператори i) - iv) са мултипликатори на конволюционната алгебра* $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$.

Доказателство. Понеже доказателствата за всички оператори i) - iv) са сходни, ще докажем само за един от тях. Нека например да докажем, че операторът ii) е мултипликатор. Нека $\varphi = \varphi(t) \in C[0,\infty)$. Ще докажем, че $[\varphi]_t(v*w) = \{[\varphi]_t v\}*w$ или което е същото $\varphi \overset{t}{*} (v*w) = (\varphi \overset{t}{*} v) * w$, за произволни функции $v, w \in C(D)$. Първо ще докажем това равенство за функции от вида $v(x_1, ..., x_n, t) = v_1(x_1)...v_n(x_n)v_{n+1}(t)$, $w(x_1, ..., x_n, t) = w_1(x_1)...w_n(x_n)w_{n+1}(t)$. Като използваме Теорема 6.1 получаваме

$$\varphi \overset{t}{*} (v*w) = \varphi \overset{t}{*} (v_1...v_{n+1} * w_1...w_{n+1}) =$$
$$= \varphi \overset{t}{*} \Big((v_1...v_n \overset{x_1,...,x_n}{*} w_1...w_n)(v_{n+1} \overset{t}{*} w_{n+1}) \Big)$$

Понеже за конволюционната алгебра $(C[0,\infty), \overset{t}{*})$ функцията $\{v_1...v_n \overset{x_1...x_n}{*} w_1...w_n\}$ е числов мултипликатор намираме

$$\varphi \overset{t}{*} \Big((v_1...v_n \overset{x_1,...,x_n}{*} w_1...w_n)(v_{n+1} \overset{t}{*} w_{n+1}) \Big) =$$
$$= (v_1...v_n \overset{x_1,...,x_n}{*} w_1...w_n) \Big((\varphi \overset{t}{*} v_{n+1}) \overset{t}{*} w_{n+1} \Big) = (\varphi \overset{t}{*} v) * w.$$

Следователно
$$\varphi \overset{t}{*} (v*w) = (\varphi \overset{t}{*} v) * w.$$

Но според теоремата на Стоун - Вайерщрас (вж. [17]) всяка функция $v(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$ може да се приближи равномерно с полиноми на променливите $x_1, ..., x_k$, т. е. чрез линейна комбинация на функциите $x_1^{n_1}...x_k^{n_k}$ за $k = 1, 2, ..., n$ и $n_k = 0, 1, 2, ...$ Понеже функцията $x_1^{n_1}...x_k^{n_k}$ е от вида $g_1(x_1)...g_k(x_k)$ то от доказаното по-горе и билинейността на $\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}$ следва твърдението на теоремата.

Доказателството за другите оператори се прави аналогично: Първо се доказва за функции от вида $g_1(x_1)...g_k(x_k)$ и след това се използва теоремата на Стоун - Вайерщрас.

□

6.4 Пръстен на мултипликаторните частни на $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$

Аналогично на разглежданията в Глави 2 и 3 ще въведем пръстена на мултипликаторите на $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ и пръстена на мутипликаторните частни.

Множеството на всички мултипликатори на конволюционната алгебра $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$ е комутативен пръстен (вж. [72]). Ще го означаваме с $\mathfrak{M}$. Обикновено, в $\mathfrak{M}$ има елементи, които са делители на нулата. Но в $\mathfrak{M}$ има и елементи, които не са делители на нулата. Например такива елементи са: мултипликаторите $\{x_j\} \overset{x_j}{*}$ и $\{1\} \overset{t}{*}$ т. е. операторите $L_{x_j} = [x]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}$ и $l_t = [1]_{x_1,...,x_n}$. Поради Теорема 6.5 имаме $[x]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}, [1]_{x_1,...,x_n} \in \mathfrak{M}$.

Означаваме с $\mathfrak{N}$ множеството на всички ненулеви неделители на нулата в $\mathfrak{M}$. Множеството $\mathfrak{N}$ е мултипликативно подмножество на $\mathfrak{M}$, т. е. от $p, q \in \mathfrak{N}$ следва, че $pq \in \mathfrak{N}$.

По подобен начин на начина по който от пръстена на целите числа се получава пръстенът на рационалните числа, така и от пръстена $\mathfrak{M}$ ще получим пръстена на мултипликаторните частни. Но в "знаменател" може да стои само ненулев неделител на нулата.

По-подробно, разглеждаме мултипликаторни дроби от вида $\frac{M}{N}$, където $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$. Те се въвеждат по стандартна процедура от общата алгебра, наречена "локализация"(вж. Ленг [71], стр. 53).

В множеството $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ въвеждаме релация на еквивалентност "$\sim$" такава, че

$$(M, N) \sim (M_1, N_1)$$

тогава и само тогава когато

$$MN_1 = NM_1.$$

Множеството от всички дроби означаваме с $\mathcal{M} = \mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$. $\mathcal{M}$ е комутативен пръстен.

Теорема 6.6 *В пръстена $\mathcal{M}$ се съдържат подпръстени, изоморфни на:*
i) Основното поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

Конволюционните пръстени:
ii) $(C[0,\infty), \overset{t}{*})$;
iii) $(C[0,a_j], \overset{x_j}{*})$, $j = 1, ..., n$;
iv) $(C([0,a_{i_1}] \times ... \times [0,a_{i_k}]), \overset{x_{i_1},...,x_{i_k}}{*})$, $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $k = 1, ..., n$;
v) $(C([0,a_{i_1}] \times ... \times [0,a_{i_k}] \times [0,\infty)), \overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*})$, $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $k = 1, ..., n$;
vi) $(C, \overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})$.

Доказателство. Ще проверим, че следващите изображения са влагания:

i) $$\mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad \alpha \mapsto \frac{(L_x\alpha) \overset{x}{*}}{L_x} = [\alpha], \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ или } \alpha \in \mathbb{C} \;;$$

ii) $$(C[0,\infty), \overset{t}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad \varphi \mapsto \frac{(l_t\varphi) \overset{t}{*}}{l_t} = [\varphi]_{x_1,...,x_n};$$

iii) $$(C[0,a_j], \overset{x_j}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad : \quad f \mapsto \frac{(L_{x_j}f) \overset{x_j}{*}}{L_{x_j}} = [f]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t};$$

iv) $$(C([0,a_{i_1}] \times ... \times [0,a_{i_k}]), \overset{x_{i_1},...,x_{i_k}}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M} \quad :$$

$$G \mapsto \frac{(L_{x_{i_1}} ... L_{x_{i_k}} G) \overset{x_{i_1},...,x_{i_k}}{*}}{L_{x_{i_1}} ... L_{x_{i_k}}} = [G]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n},t};$$

v) $\quad (C([0,a_{i_1}]\times ...\times [0,a_{i_k}]\times [0,\infty)), \overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}) \hookrightarrow \mathcal{M}\ :$

$$F\mapsto \frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=[F]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}};$$

vi) $\quad (C,\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*})\hookrightarrow \mathcal{M}\ :\ u\mapsto \dfrac{u\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}}{I}.$

Да разгледаме v). Ще докажем, че изображението в v) е влагане на пръстени. Нека $F_1,F_2\in C([0,a_{i_1}]\times ...\times [0,a_{i_k}]\times [0,\infty))$. Имаме

$$F_1+F_2\mapsto \frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}(F_1+F_2))\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=[F_1+F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}.$$

От друга страна

$$\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}(F_1+F_2))\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_1+l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_2)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}.$$

Поради линейността на $\overset{x}{*}$ получаваме.

$$\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_1+l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_2)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=$$

$$=\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_1)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}+\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_2)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=$$
$$=[F_1]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}+[F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}.$$

Ще докажем, че образът на произведение на два елемента е произведение на образите им, т.е. ще докажем

$$[F_1\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}=[F_1]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}[F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}.$$

Имаме

$$(F_1\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}F_2)\mapsto \frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}(F_1\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}F_2))\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=[F_1\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}.$$

От друга страна

$$\frac{(l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}(F_1\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}F_2))\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=$$

$$=\frac{\left((l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_1)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}\right)}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}\frac{\left((l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}F_2)\overset{x_{i_1},...,x_{i_k},t}{*}\right)}{l_tL_{x_{i_1}}...L_{x_{i_k}}}=$$

$$= [F_1]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}[F_2]_{x_{i_{k+1}},...,x_{i_n}}.$$

Това, че останалите изображения също са влагания, се доказва аналогично.
□

От сега нататък ще смятаме, че всички тези пръстени са подпръстени на $\mathcal{M}$.

Заради това може да разглеждаме всички различни обекти: числа, функции с различен брой променливи, мултипликатори и мултипликаторни дроби, като елементи на *една алгебрична система* $\mathcal{M}$.

6.5 Алгебричен еквивалент на граничната задача (6.1) - (6.4)

Важни за по-нататъшните разглеждания с оглед на алгебризацията на граничните задачи от разглеждания клас са алгебричните обратни на l_t, L_{x_j}, $j = 1, 2, ..., n$ в $\mathcal{M}$ (както споменахме в по-горе те не са делители на нулата в $\mathcal{M}$). Означаваме ги с

$$s_t = \frac{1}{l_t}, \qquad S_{x_j} = \frac{1}{L_{x_j}}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Операторите s_t и S_{x_j} са алгебрически аналози на операторите $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Връзката между s_t, S_{x_j} и $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ съответно се дава от следващата теорема.

Теорема 6.7 *Нека $u \in C(D)$ притежава непрекъснати частни производни u_t и $u_{x_j x_j}$ в D. Тогава*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = S_{x_j} u + S_{x_j}\{(x_j \Phi_j\{1\} - 1) u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t)\} - \\ -[\Phi_{j,\xi}\{u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\}]_{x_j}, \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = s_t u - [\chi_\tau\{u(x_1, ..., x_n, \tau)\}]_t. \tag{6.20}$$

Доказателство. Равенство (6.19) е доказан в Глава 3 Теорема 6.20, а равенство (4.15) е доказано в Глава 2 - Теорема 2.3.
□

Теорема 6.8 *Нека $u \in C$ и $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n} u(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$ за $n = 1, 2, ...$, $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t) \in C(D)$ за $m = 1, 2, ...,$. Тогава*

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x_j^{2m}} u = S_{x_j}^m u + \\ + \sum_{k=1}^{m} S_{x_j}^k \left\{ (x_j \Phi_j\{1\} - 1) \frac{\partial^{2(m-k)}}{\partial x_j^{2(m-k)}} u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) \right\} - \\ -S_{x_j}^{k-1} \Phi_{j,\xi} \left\{ \frac{\partial^{2(m-k)}}{\partial \xi^{2(m-k)}} u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t) \right\}, \tag{6.21}$$

$$(6.22) \qquad \frac{\partial^r}{\partial t^r}u = s_t^r u - \sum_{k=1}^{r} s_t^{r-k}\chi_\tau\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial \tau^{k-1}}u(x_1,...,x_n,\tau)\right\}.$$

Доказателство. Равенство (6.21) е доказано в Глава 3, Теорема 3.4, а равенство (6.22) е доказано в Глава 2, Следствие 2.1.
□

Връзките (6.21) и (2.14) ни позволяват да алгебризираме граничната задача (6.1) - (6.4):

$$(6.1) \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u = F(x_1,...,x_n,t),$$

$$(6.2) \qquad \chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}u(x_1,...,x_n,\tau)\right\} = f_k(x_1,...,x_n), \qquad k = 0,1,...,\deg P - 1,$$

$$(6.3) \qquad \frac{\partial^{2p_j}}{\partial x_j^{2p_j}}u(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},...,x_n,t) = g_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t),$$

$$(6.4) \qquad \Phi_{j,\xi}\left\{\frac{\partial^{2p_j}}{\partial \xi^{2p_j}}u(x_1,...,x_{j-1},\xi,x_{j+1},...,x_n,t)\right\} = h_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t),$$
$$p_j = 0,1,...,\deg Q_j - 1, \qquad j = 1,2,...,n.$$

За тази цел като използваме (6.21) и (2.14) и от граничните условия (6.2) - (6.4) получаваме

$$(6.23) \qquad \frac{\partial^{2m}}{\partial x_j^{2m}}u = S_{x_j}^m u + \sum_{k=1}^{m} S_{x_j}^k\left\{(x_j\Phi_j\{1\}-1)g_{j,m-k}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)\right\} -$$
$$-S_{x_j}^{k-1}h_{j,m-k}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t),$$

$$(6.24) \qquad \frac{\partial^r}{\partial t^r}u = s_t^r u - \sum_{k=1}^{r} s_t^{n-k} f_{k-1}(x_1,...,x_n).$$

Аналогично на разглежданията в Глава 4.5 ”Алгебричен еквивалент на граничната задача (4.1) - (4.3)” и тук записваме диференциалното уравнение (6.1) във вида:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u =$$
$$b_r u + \sum_{k=1}^{r} b_{r-k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}u - \sum_{j=1}^{n}\left(c_{j,m_j}u + \sum_{k=1}^{m_j} c_{j,m_j-k}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u\right) = F(x_1,...,x_n,t),$$

където

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} b_{r-k}\lambda^k = b_0\lambda^r + b_1\lambda^{r-1} + ...b_{r-1}\lambda + b_r, \qquad b_0,...,b_r \in \mathbb{R},$$

$$Q_j(\mu) = \sum_{p=0}^{m_j} c_{j,m_j-p}\mu^p = c_{j,0}\mu^{m_j} + c_{j,1}\mu^{m_j-1} + ...c_{j,m_j-1}\mu + c_{j,m_j},$$

$c_{j,0},...,c_{j,m_j} \in \mathbb{R}$ за $m_j = \deg Q_j$ и $j = 1,...,n$.

Като използваме (6.23), (6.24) граничната задача (6.1) - (6.4) се редуцира до едно алгебрично уравнение в $\mathcal{M}$:

(6.25)
$$b_r u + \sum_{k=1}^{r} b_{r-k}\left(s_t^k u - \sum_{p=1}^{k} s_t^{k-p} f_{p-1}\right) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n}\left(c_{j,m_j} u + \sum_{k=1}^{m_j} c_{j,m_j-k}\left(S_{x_j}^k u + \sum_{p=1}^{k} S_{x_j}^p \left\{(x_j\Phi_j\{1\}-1)g_{j,k-p}\right\} - S_{x_j}^{p-1} h_{j,k-p}\right)\right) = F.$$

Тук
$$F = F(x_1,...,x_n,t), \qquad f_k = f_p(x_1,...,x_n), \quad k = 0,1,...,\deg P - 1,$$

$$g_{j,p_j} = g_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t), \qquad h_{j,p_j} = h_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t),$$

за $p_j = 0,1,...,\deg Q_j - 1$, $j = 1,...,n$ са дадени функции. На тях може да се гледа като на известни елементи от пръстена $\mathcal{M}$. На неизвестната функция u гледаме като на неизвестен елемент от пръстена $\mathcal{M}$. Затова записваме алгебричното уравнение (6.25) от пръстена $\mathcal{M}$ във вида:

$$(6.26) \qquad P(s_t)\, u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right) u = F + \sum_{k=1}^{r} b_{r-k} \sum_{p=1}^{k} s_t^{k-p} f_{p-1} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} c_{j,m_j-k} \sum_{p=1}^{k}\left(S_{x_j}^p \left\{(x_j\Phi_j\{1\}-1)g_{j,k-p}\right\} - S_{x_j}^{p-1} h_{j,k-p}\right).$$

Както отбелязахме в увода ще се стремим да решим алгебричното уравнение (6.26) в $\mathcal{M}$, а след това да изтълкуваме полученото решение като функция.

Но първо ще представим алгебричното уравнение (6.26) от $\mathcal{M}$ като интегрално уравнение за неизвестната функция u. За тази цел умножаваме (6.26) с $L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n} l_t^r$, където $r = \deg P$, $m_1 = \deg Q_1$, ..., $m_n = \deg Q_n$. Получаваме:

$$L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n} P(l_t^r s_t)\, u - \sum_{j=1}^{n} L_{x_1}^{m_1}...L_{x_{j-1}}^{m_{j-1}} L_{x_{j+1}}^{m_{j+1}}...L_{x_n}^{m_n} l_t^r Q_j\left(L_{x_j}^{m_j} S_{x_j}\right) u =$$
$$= L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n} l_t^r F + L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n} \sum_{k=1}^{r} b_{r-k} \sum_{p=1}^{k} l_t^r s_t^{k-p} f_{p-1} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} L_{x_1}^{m_1}...L_{x_{j-1}}^{m_{j-1}} L_{x_{j+1}}^{m_{j+1}}...L_{x_n}^{m_n} \sum_{k=1}^{m_j} c_{j,m_j-k} \sum_{p=1}^{k}\left(L_{x_j}^{m_j} S_{x_j}^p \left\{(x_j\Phi_j\{1\}-1)g_{j,k-p}\right\} - L_{x_j}^{m_j} S_{x_j}^{p-1} h_{j,k-p}\right).$$

Като използваме, че $L_{x_j} S_{x_j} = 1$, $l_t s_t = 1$, $L_{x_j} = [x_j]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}$, $L_{x_j}^k = L_{x_j}^{k-1}\{x_j\}$ и

$l_t = [1]_{x_1,\ldots,x_n}$, $l_t^k = l_t^{k-1}\{1\}$ намираме

$$L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n}\widetilde{P}\left(l_t\right)u - \sum_{j=1}^{n} L_{x_1}^{m_1}...L_{x_{j-1}}^{m_{j-1}}L_{x_{j+1}}^{m_{j+1}}...L_{x_n}^{m_n}l_t^r\ \widetilde{Q_j}\left(L_{x_j}\right)u \quad =$$
$$= \quad L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n}l_t^r F \quad + \quad L_{x_1}^{m_1}...L_{x_n}^{m_n}\sum_{k=1}^{r} b_{r-k}\sum_{p=1}^{k} l_t^{r-k+p-1}\{1\}f_{p-1} \quad +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} L_{x_1}^{m_1}...L_{x_{j-1}}^{m_{j-1}}L_{x_{j+1}}^{m_{j+1}}...L_{x_n}^{m_n}l_t^r\sum_{k=1}^{m_j} c_{j,m_j-k}\sum_{p=1}^{k}\left(\left\{(L_{x_j}^{m_j-p}\{x_j\}\Phi_j\{1\} - L_{x_j}^{m_j-p-1}\{x_j\})g_{j,k-p}\right\} - \right.$$
$$\left. -L_{x_j}^{m_j-p}\{x_j\}h_{j,k-p}\right), \tag{6.27}$$

където полиномите $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q_j}$ се определят с равенствата:

$$\widetilde{P}(\mu) = \mu^r P\left(\frac{1}{\mu}\right), \qquad \widetilde{Q_j}(\lambda) = \lambda^{m_j}Q_j\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

и $r = \deg P$, $m_j = \deg Q_j$, $j = 1, ..., n$.

Дефиниция 6.5 *Функция $u \in C^1(D)$ се нарича слабо решение на граничната задача (6.1) - (6.4), ако удовлетворява интегралното уравнение (6.27).*

Лема 6.5 Нека $u = u(x_1, ..., x_n, t) \in C^1(D)$, $\dfrac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}}u(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$, където $r = \deg P$ и u удовлетворява интегралното уравнение (6.27). Тогава u удовлетворява граничните условия (6.2) по t:

$$\chi_\tau\left\{\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}u(x_1, ..., x_n, \tau)\right\} = f_k(x_1, ..., x_n), \qquad k = 0, 1, ..., \deg P - 1,$$

за $0 \le x_j \le a_j$, $j = 1, ..., n$.

Доказателство. Аналогично на доказателството на Лема 4.3.
□

Лема 6.6 Нека $u = u(x_1, ..., x_n, t) \in C^1(D)$, $\dfrac{\partial^{2m_j-2}}{\partial x_{x_j}^{2m_j-2}}u(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$, където $m_j = \deg Q_j$ и u удовлетворява интегралното уравнение (6.27). Тогава u удовлетворява граничните условия (6.3) и (6.4) по x_j:

$$\frac{\partial^{2p_j}}{\partial x_j^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = g_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t),$$

$$\Phi_{j,\xi}\left\{\frac{\partial^{2p_j}}{\partial\xi^{2p_j}}u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = h_{j,p_j}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t),$$

където $p_j = 0, 1, ..., \deg Q_j - 1$, $j = 1, 2, ..., n$.

Доказателство. Аналогично на доказателството на Лема 4.4.
□

Лема 6.7 Нека $u = u(x_1, ..., x_n, t) \in C^1(D)$, е решение на интегралното уравнение (6.27) с непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial^r}{\partial t^r} u(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$ и $\dfrac{\partial^{2m_j}}{\partial x_j^{2m_j}} u(x_1, ..., x_n, t) \in C(D)$. Тогава u е класическо решение на граничната задача (6.1) - (6.4).

Доказателство.

Прилагаме оператора $\dfrac{\partial^r}{\partial t^r} \dfrac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} ... \dfrac{\partial^{2m_n}}{\partial x_n^{2m_n}}$, където $r = \deg P$, $m_1 = \deg Q_1, ..., m_n = \deg Q_n$ към (6.27). Получаваме

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u = F(x_1, ..., x_n, t).$$

Понеже съществуват непрекъснати частните производни на u по t и по $x_1, ..., x_n$ от съответния ред, то според Лема 6.5 и Лема 6.6 u удовлетворява и граничните условия (6.2), (6.3) и (6.4).
□

6.6 Теорема за единственост на решението на граничната задача (6.1) - (6.4)

За да съществува единствено решение на (6.26) в $\mathcal{M}$ трябва $P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ да не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. За това в тази глава ще изследваме достатъчни условия, при които $P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ не е делител на нулата.

Да припомним, че в Глава 2 въведохме цялата функция $G(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$ която се нарича индикатриса на функционала χ. В Глава 3 въведохме функцията $E_j(\lambda_j) = \Phi_{j,\xi}\left\{\dfrac{\sin\lambda_j\xi}{\lambda_j}\right\}$, $j = 1, 2, ..., n$ която се нарича синусова индикатриса на функционала Φ_j.

Бележка. В Глава 2 означавахме индикатрисата на функционала χ с $E(\lambda) = \chi_\tau\{e^{\tau\lambda}\}$.

Лесно се намира достатъчно условие, при което $\sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Лема 6.8 Нека λ_j, $j = 1, ..., n$, са числа за които $E_j(\lambda_j) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j(-\lambda_j^2) = 0,$$

тогава

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство.

От (6.19), като използваме $E_j(\lambda_j) = 0$ получаваме $S_{x_j}\{\sin \lambda_j x_j\} = -(\lambda_j)^2 \sin \lambda_j x_j$, $j = 1, 2, ..., n$. Намираме

$$\left(\sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j}) \right) \{\sin \lambda_1 x_1 ... \sin \lambda_n x_n\} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} Q_j \left(-(\lambda_j)^2 \right) \right) \sin \lambda_1 x_1 ... \sin \lambda_n x_n = 0.$$

□

Лесно се намира и достатъчно условие, при което $P\left(s_t\right) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Лема 6.9 Нека $\mu, \lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., n$ са числа за които $G(\mu) = 0$ и $E_j(\lambda_j) = 0$. Ако съществува дисперсионна зависимост от вида

$$P(\mu) - \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(-(\lambda_j)^2 \right) = 0,$$

тогава

$$P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$$

е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство. Аналогично на доказателството на предната Лема 6.8, получаваме

$$\left(P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j}) \right) \{e^{\mu_m t} \sin \lambda_1 x_1 ... \sin \lambda_n x_n\} =$$

$$= \left(P(\mu) - \sum_{j=1}^{n} Q_j \left(-(\lambda_j)^2 \right) \right) e^{\mu t} \sin \lambda_1 x_1 ... \sin \lambda_n x_n = 0.$$

□

Сега ще търсим достатъчни условия кога елементът $P\left(s_t\right)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$. Понеже от това, че $P\left(s_t\right)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$ следва, че алгебричното уравнение (6.26) в $\mathcal{M}$ има единствено решение в $\mathcal{M}$, ще наричаме съответната теорема, теорема за единственост на решението на граничната задача (6.1) - (6.4).

Теорема 6.9 *Нека* $a_j \in \operatorname{supp} \Phi_j,\ j=1,...,n$ *и* $\deg P \geq 1$. *Ако*

$$P(\mu_m)-\sum_{j=1}^{n} Q_j\left(-(\lambda_j^{(k_j)})^2\right) \neq 0,$$

за $k_1,k_2,...,k_n \in \mathbb{N}$, *тогава елементът*

$$P(s_t)-\sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$$

не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

Доказателство.

Допускаме противното, т.е. допускаме, че съществува ненулев елемент на $\mathcal{M}$ т.е. ненулева мултипликаторна дроб $\dfrac{A}{B} \neq 0$, $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{N}$ и $\left(P(s_t)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)\dfrac{A}{B}=0$. Последното равенство е еквивалентно на $\left(P(s_t)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)A=0$. Понеже $\dfrac{A}{B}\neq 0$ имаме $A \neq 0$. Тогава съществува функция $u \in C$ такава, че $Av=u\neq 0$. Тогава от $A \neq 0$ и

$$\left(P(s_t)-\sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)A=0$$

получаваме

$$\left(P(s_t)-\sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)u=0. \tag{6.28}$$

Може да считаме, че u е достатъчно гладка, защото ако например съществува $\dfrac{\partial^k}{\partial x_j^k}u(x_1,...,x_n,t)$ но не съществува $\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_j^{k+1}}u(x_1,...,x_n,t)$, то след като умножим $\left(P(s_t)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)u=0$ с L_{x_j} намираме $\left(P(s_t)-\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right)L_{x_j}u=0$. За функцията $L_{x_j}u$ съществува $k+2$ производна по x_j.

Нека $\lambda_j^{(k)}$, $j = 1, ..., n$, за $k \in \mathbb{N}$, е $\alpha_j^{(k)}$ - кратна нула на индикатрисата $E_j(\lambda_j) = \Phi_{j,\xi}\left\{\dfrac{\sin \lambda_j \xi}{\lambda_j}\right\}$ на функционала Φ_j със собствена функция $\sin \lambda_j^{(k)} x_j$ и $\alpha_j^{(k)} - 1$ присъединени функции

$$\varphi_{k,q}^{(j)} = \left(S_{x_j} + (\lambda_j^{(k)})^2\right)^q \varphi_{k,0}^{(j)}, \quad 1 \le q \le \alpha_j^{(k)} - 1,$$

където

$$\varphi_{k,0}^{(j)}(x_j) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j^{(k)}} \frac{\sin \lambda x_j}{\lambda E_j(\lambda)} d\lambda$$

и $\Gamma_j^{(k)}$ е прост контур в комплексната равнина, съдържащ само нулата $\lambda_j^{(k)}$ на $E_j(\lambda_j)$ и никоя друга нула на $E_j(\lambda_j)$ (вж. Димовски и Петрова [50], р.94). Да обърнем внимание, че $\varphi_{k,\alpha_j^{(k)}-1}^{(j)}(x_j) = b_j^{(k)} \sin \lambda_j^{(k)} x_j$ за $b_j^{(k)} \neq 0$. Съответното $\alpha_j^{(k)}$-мерно собствено пространство е

$$\mathcal{E}_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)} = \operatorname{span}\{\varphi_{k,q}^{(j)}(x_j),\ q = 0, 1, ..., \alpha_j^{(k)} - 1\}, \quad k = 1, 2, ...$$

Спектралният проектор $P_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)} : C[0, a_j] \to \mathcal{E}_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)}$ се дефинира с $P_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)}\{f\} = f \overset{x_j}{*} \varphi_{k,0}^{(j)}$, $k = 1, 2, ...$ (вж. Димовски [45], стр. 165).

Според теоремата на Божинов [34], понеже $a_j \in \operatorname{supp}\Phi_j$, следва, че проекторите $P_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)}$ образуват тотална система в $C[0, a_j]$, т.е. ако $P_{\lambda_j^{(k)}}^{(j)}\{f\} = 0$, $k = 1, 2, ...$, следва $f \equiv 0$. (За кратко доказателство на теоремата на Божинов вж. Димовски и Петрова [50] стр. 97-98). Означаваме

$$\begin{aligned} u_{k_1,...,k_n}&(x_1, ..., x_n, t) = \\ &= u(x_1, ..., x_n, t) \overset{x_1}{*} \varphi_{k_1,0}^{(1)}(x_1) \overset{x_2}{*} \varphi_{k_2,0}^{(2)}(x_2) \overset{x_3}{*} ... \overset{x_n}{*} \varphi_{k_n,0}^{(n)}(x_n). \end{aligned} \tag{6.29}$$

От (2.14) следва

$$\left(P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right) u_{k_1,...,k_n} = 0. \tag{6.30}$$

Ще докажем, че това уравнение има само нулевото решение $u_{k_1,...,k_n} \equiv 0$ в

$$\mathcal{E}_{\lambda_1^{(k_1)}}^{(1)} \otimes ... \otimes \mathcal{E}_{\lambda_n^{(k_n)}}^{(n)} \otimes C[0, \infty).$$

Допускаме противното т.е. че съществува ненулево решение

$$u_{k_1,...,k_n} \in \mathcal{E}_{\lambda_1^{(k_1)}}^{(1)} \otimes ... \otimes \mathcal{E}_{\lambda_n^{(k_n)}}^{(n)} \otimes C[0, \infty)$$

на (6.30).

$u_{k_1,...,k_n}$ трябва да има вида

$$u_{k_1,...,k_n}(x_1, ..., x_n, t) = \sum_{j_1=p_1}^{\alpha_{k_1}^{(1)}-1} ... \sum_{j_n=p_n}^{\alpha_{k_n}^{(n)}-1} A_{j_1,...,j_n}^{(k_1,...,k_n)}(t) \varphi_{k_1,j_1}^{(1)}(x_1) ... \varphi_{k_n,j_n}^{(n)}(x_n),$$

където $A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t) \neq 0$ за някои $p_1, ..., p_n$, $0 \leq p_1 \leq \alpha^{(1)}_{k_1} - 1, ..., 0 \leq p_n \leq \alpha^{(n)}_{k_n} - 1$.

Умножаваме (6.30) със следния елемент от $\mathcal{M}$:

$$\left[S_{x_1} + (\lambda^{(k_1)}_1)^2\right]^{\alpha^{(1)}_{k_1} - p_1 - 1} \dots \left[S_{x_n} + (\lambda^{(k_n)}_n)^2\right]^{\alpha^{(n)}_{k_n} - p_n - 1}. \tag{6.31}$$

Понеже $\left[S_{x_j} + (\lambda^{(k_j)}_j)^2\right]^{q_j} \varphi^{(j)}_{k_j,0}(x_j) = 0$, за $q_j \geq \alpha^{(j)}_{k_j}$ намираме

$$\left[P(s_t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right] A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t)\varphi^{(1)}_{k_1,\alpha^{(1)}_{k_1}-1}(x_1)...\varphi^{(n)}_{k_n,\alpha^{(n)}_{k_n}-1}(x_n) = 0.$$

Но $\varphi^{(j)}_{k_j,\alpha^{(j)}_{k_j}-1}(x_j) = b^{(k_j)}_j \sin\lambda^{(k_j)}_j x_j$ за $b^{(k_j)}_j \neq 0$, $j = 1, ..., n$. Получаваме

$$\left[P(s_t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right] A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t) \sin\lambda^{(k_1)}_1 x_1 ... \sin\lambda^{(k_n)}_n x_n = 0.$$

Това уравнение за $A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t)$ е еквивалентно на нелокалната гранична задача

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(-(\lambda^{(k_j)}_j)^2\right) A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t) = 0,$$

$$\chi_\tau\left\{\frac{d^m}{d\tau^m} A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(\tau)\right\} = 0, \quad m = 0, 1, ..., \deg P - 1.$$

Понеже $\deg P \geq 1$ и

$$P(\mu_m) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(-(\lambda^{(k_j)}_j)^2\right) \neq 0,$$

от Следствие 2.3 получаваме, че единственото решение е $A^{(k_1,...,k_n)}_{p_1,...,p_n}(t) \equiv 0$.

Следователно,

$$u_{k_1,...,k_n}(x_1, ..., x_n, t) \equiv 0$$

за всички $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$. Понеже $a_j \in \text{supp}\Phi_j$, $j = 1, 2, ..., n$ според теоремата на Божинов (вж. [34] и [36]) следва, че $u(x_1, ..., x_n, t) \equiv 0$. Това противоречие доказва, че

$[P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})]$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$.

□

Следствие 6.1 Нека $a_j \in \text{supp}\,\Phi_j$, $j = 1, ..., n$ и $\deg P \geq 1$. Ако $P(\mu_m) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(-(\lambda^{(k_j)}_j)^2\right) \neq 0$, $j = 1, ..., n$, за всички $m, k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$, Тогава граничната задача (6.1) - (6.4) има единствено решение.

Доказателство. Хомогенната гранична задача (6.1) - (6.4) се редуцира до алгебричното уравнение

$$\left(P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})\right) u = 0$$

в $\mathcal{M}$. Понеже $P(s_t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(S_{x_j})$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, от тук следва $u \equiv 0$.

□

6.7 Теорема за съществуване на решение на граничната задача (6.1) - (6.4). Разширен принцип на Дюамел.

След като доказахме теорема за единственост на решението на граничната задача (6.1) - (6.4), трябва да изучим и въпроса за съществуване на решение.

Тук се налага да уточним за какво решение става дума. Ако говорим за класическо решение, ще трябва да наложим ограничения както на функционалите χ и Φ_j, $j = 1, ..., n$, така и на граничните функции.

Тъй като граничната задача (6.1) - (6.4) бе сведена до алгебричното уравнение (6.26), то всяко класическо решение трябва да удовлетворява това уравнение. Обратното в общия случай не е вярно. Но може да твърдим, че ако е налице теорема за единственост, т.е. ако елементът $P\left(s_t\right) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)$ не е делител на нулата в $\mathcal{M}$, то алгебричното уравнение (6.26) в $\mathcal{M}$

$$\left(P\left(s_t\right) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)\right) u = \widetilde{F},$$

има решение

$$u = \frac{1}{P\left(s_t\right) - \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(S_{x_j}\right)} \widetilde{F} \tag{6.32}$$

в $\mathcal{M}$, което ще наричаме *формално решение* на граничната задача (6.1) - (6.4).

След това може да говорим и за *слабо решение* на граничната задача (6.1) - (6.4) (вж. Дефиниция 6.5).

Накрая, функция $u \in C(D)$ която удовлетворява както уравнение (6.1), така и граничните условия (6.2), (6.3) и (6.4) е класическо решение.

В общия случай можем да докажем следната (условна) теорема за съществуване на слабо решение на граничната задача (6.1) - (6.4).

Теорема 6.10 *Допускаме, че съществува слабо решение $\Omega(x_1, ..., x_n, t)$ на граничната задача (6.1) - (6.4), при специален избор на граничните функции*

$$f_k(x_1, ..., x_n) = 0, \quad \textit{за} \ \ k = 0, 1, ..., \deg P - 1,$$

$$g_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)=0, \quad h_{j,p_j}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)=0$$

за $p_j=0,1,...,\deg Q_j-1,\ j=1,2,...,n$ *и на дясната част* $F(x_1,...,x_n,t)=x_1...x_n$ *на уравнението (6.1).*

Тогава функцията

$$u(x_1,...,x_n,t)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}...\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x_1,...,x_n,t)\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}F(x_1,...,x_n,t)\right)$$

е решение на граничната задача (6.1) - (6.4) при достатъчна гладкост на функцията $F(x_1,...,x_n,t)$ *и хомогенни гранични условия.*

Доказателство.

$\Omega=\Omega(x_1,...,x_n,t)$ е решение на граничната задача (6.1) - (6.4) при нулеви гранични функции и $F(x_1,...,x_n,t)=x_1...x_n=L_{x_1}...L_{x_n}l_t=\dfrac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}s_t}$. Тогава Ω удовлетворява алгебричното уравнение в $\mathcal{M}$:

$$\left(P\left(s_t\right)-\sum_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)\Omega=\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}s_t}.$$

Ако $P\left(s_t\right)-\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)$ не е делител на нулата то решението в $\mathcal{M}$ е

$$\Omega=\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}s_t\left(P\left(s_t\right)-\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)}. \tag{6.33}$$

Ще проверим, че $u=u(x_1,...,x_n,t)$

$$u(x_1,...,x_n,t)=S_{x_1}...S_{x_n}s_t\{\Omega(x_1,...,x_n,t)\}\{F(x_1,...,x_n,t)\}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}...\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Omega(x_1,...,x_n,t)\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}F(x_1,...,x_n,t)\right).$$

е решение на уравнението

$$\left(P\left(s_t\right)-\sum_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)u=F(x_1,...,x_n,t).$$

Имаме

$$\left(P\left(s_t\right)-\sum_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)u=$$
$$=\left(P\left(s_t\right)-\sum_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)S_{x_1}...S_{x_n}s_t\{\Omega(x_1,...,x_n,t)\}\{F(x_1,...,x_n,t)\}=$$
$$=\left(P\left(s_t\right)-\sum_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)S_{x_1}...S_{x_n}s_t\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}s_t\left(P\left(s_t\right)-\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j\left(S_{x_j}\right)\right)}\{F(x_1,...,x_n,t)\}=$$
$$=\{F(x_1,...,x_n,t)\}.$$

□

7 Многомерно уравнение на топлопроводността

Сега ще разгледаме един частен случай на граничната задача (6.1) - (6.4) в който е възможно получаването на решението в затворен вид, като многомерната задача се свежда до едномерни задачи. Голяма част от резултатите в тази глава са разгледани в [56] и [57] .

Разглеждаме многомерното уравнение на топлопроводността:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u = F(x_1, ..., x_n, t), \quad u = u(x_1, ..., x_n, t), \tag{7.1}$$

$$u(x_1, ..., x_n, 0) = f(x_1, ..., x_n),$$

$$u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = g_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t),$$

$$\Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = h_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t),$$
$$j = 1, 2, ..., n.$$

За да намерим точно решение разглеждаме задачата:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u = 0, \tag{7.2}$$

$$u(x_1, ..., x_n, 0) = f_1(x_1)...f_n(x_n), \tag{7.3}$$

$$u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = 0, \tag{7.4}$$

$$\Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{7.5}$$

Да припомни, че $u = u(x_1, ..., x_n, t)$ се нарича слабо решение на граничната задача (7.2) - (7.5) ако удовлетворява интегралното уравнение (вж. Дефиниция 6.5)

$$\begin{aligned} L_{x_1}...L_{x_n}u - \sum_{j=1}^{n} L_{x_1}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}l_t\ u \quad &= \\ = L_{x_1}...L_{x_n}f_1(x_1)...f_n(x_1). \end{aligned}$$

Тази многомерна задача, ще сведем до следните n - на брой едномерни задачи.

$$\frac{\partial}{\partial t}v_j - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}v_j = 0, \quad v_j = v_j(x_j, t), \tag{7.6}$$

$$v_j(x_j, 0) = f_j(x_j), \tag{7.7}$$

$$v_j(0, t) = 0, \qquad \Phi_{j,\xi}\left\{v_j(\xi, t)\right\} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{7.8}$$

$v_j = v_j(x_j, t)$ се нарича слабо решение на едномерната гранична задача (7.6) - (7.8) ако удовлетворява интегралното уравнение

$$L_{x_j} v_j - l_t\ v_j = L_{x_j} f_j(x_j).$$

Лема 7.1 *Нека* $v_j(x_j, t) \in C^1([0, a_j] \times [0, \infty))$, $j = 1, ..., n$ *е слабо решение на граничната задача* (7.6) - (7.8). *Тогава* $u(x_1, ..., x_n, t) = v_1(x_1, t)...v_n(x_n, t) \in C(D)$ *е слабо решение на граничната задача (7.2) - (7.5).*

Забележка Ако $v_j(x_j, t)$, $j = 1, ..., n$, е класическо решение на граничната задача (7.6) - (7.8), тогава $u(x_1, ..., x_n, t) = v_1(x_1, t)...v_n(x_n, t)$ е класическо решение на граничната задача (7.2) - (7.5).

Доказателство.

Ще докажем тази лема по индукция. За $n = 1$ няма какво да се доказва. Допускаме, че лемата е вярна при $n-1$, ще докажем, че е изпълнена и за n. Ще докажем нещо повече. Нека $u = v(x_1, t)w(x_2, ..., x_n, t)$ и $v = v(x_1, t)$, е слабо решение на граничната задача:

$$\frac{\partial}{\partial t} v - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v = 0, \tag{7.9}$$

$$v(x_1, 0) = f(x_1), \tag{7.10}$$

$$v(0, t) = 0, \qquad \Phi_{1,\xi}\{v(\xi, t)\} = 0, \qquad p = 0, 1, ..., \deg Q_1 - 1. \tag{7.11}$$

$w = w(x_2, ..., x_n, t)$ е слабо решение на граничната задача:

$$\frac{\partial}{\partial t} w - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} w = 0, \tag{7.12}$$

$$w(x_2, ..., x_n, 0) = g(x_2, ..., x_n), \tag{7.13}$$

$$w(x_2, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = 0, \tag{7.14}$$

$$\Phi_{j,\xi}\{w(x_2, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\} = 0, \quad j = 2, 3, ..., n. \tag{7.15}$$

Имаме

$$L_{x_1} v = l_t\ v + L_{x_1} f(x_1), \tag{7.16}$$

и

$$L_{x_2}...L_{x_n} w = l_t \sum_{j=2}^{n} L_{x_2}...L_{x_{j-1}} L_{x_{j+1}}...L_{x_n} w + L_{x_2}...L_{x_n} g(x_2, ..., x_n). \tag{7.17}$$

Ще докажем, че е изпълнено равенството:

$$(7.18)\qquad \begin{aligned} &L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_n}vw-\sum_{j=1}^{n}L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}l_t\ vw \quad = \\ &=L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_n}fg. \end{aligned}$$

Да разгледаме отделно сумата участваща в (7.18). Като използваме, че $v=v(x_1,t)$ е функция само на x_1 и на t, а $w=w(x_2,...,x_n,t)$ е функция само на $x_2,...,x_n$ и на t намираме:

$$(7.19)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}l_t\ vw= \\ &=l_t\left(vL_{x_2}...L_{x_n}w\right)+l_t\left(\left(L_{x_1}v\right)\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}\ w\right). \end{aligned}$$

Заместваме (7.19) в (7.18). Получаваме:

$$(7.20)\qquad \begin{aligned} &\left(L_{x_1}v\right)\left(L_{x_2}...L_{x_n}w\right)-l_t\left(v\left(L_{x_2}...L_{x_n}w\right)\right)- \\ &-l_t\left(\left(L_{x_1}v\right)\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}\ w\right)=\left(L_{x_1}f\right)\left(L_{x_2}...L_{x_n}g\right). \end{aligned}$$

Сега заместваме (7.16) и (7.17) в (7.20). Намираме

$$\begin{aligned} &\left(l_tv+L_{x_1}f\right)\left(l_t\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w+L_{x_2}...L_{x_n}g\right)- \\ &-l_t\left(v\left(l_t\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}\ w+L_{x_2}...L_{x_n}g\right)\right)- \\ &-l_t\left(\left(l_tv+L_{x_1}f\right)\left(\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w\right)\right)=\left(L_{x_1}f\right)\left(L_{x_2}...L_{x_n}g\right). \end{aligned}$$

Като използваме, че f и g не зависят от t и след съкращаване получаваме:

$$\begin{aligned} &\left(l_tv\right)\left(l_t\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w\right)-l_t\left(v\left(l_t\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w\right)\right)- \\ &-l_t\left(\left(l_tv\right)\left(\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w\right)\right)=0. \end{aligned}$$

Нека означим

$$W=\sum_{j=2}^{n}L_{x_2}...L_{x_{j-1}}L_{x_{j+1}}...L_{x_n}w.$$

Трябва да докажем:

$$\left(l_tv\right)\left(l_tW\right)-l_t\left(v\left(l_tW\right)\right)-l_t\left(\left(l_tv\right)W\right)=0.$$

От дефиницията на l_t веднага следва:

$$(l_tv)(l_tW) \ - \ l_t(v(l_tW)) \ - \ l_t(W(l_tv)) =$$

$$= \Big(\int_0^t v(x_1,\tau)d\tau\Big)\Big(\int_0^t W(x_2,...,x_n,\tau)d\tau\Big) -$$

$$-\int_0^t v(x_1,\tau)\Big(\int_0^\tau W(x_2,...,x_n,\theta)d\theta\Big)d\tau - \int_0^t W(x_2,...,x_n,\tau)\Big(\int_0^\tau v(x_1,\theta)d\theta\Big)d\tau = 0.$$

$\square$

Да разгледаме многомерното уравнение на топлопроводността:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u = F(x_1,...,x_n,t), \tag{7.21}$$

$$u(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n), \tag{7.22}$$

$$u(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},...,x_n,t) = g_j(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t), \tag{7.23}$$

$$\Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1,...,x_{j-1},\xi,x_{j+1},...,x_n,t)\right\} = h_j(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t), \tag{7.24}$$

$j = 1,2,...,n.$

Ако $s_t - S_1 - ... - S_n$ не е делител на нулата формалното решение на граничната задача (7.21) - (7.24) е

$$u = \frac{1}{s_t - S_1 - ... - S_n}\Big(F + [f]_t + \sum_{j=1}^n \left(S_j(x_j\Phi_j\{1\} - 1)[g_j]_{x_j} - [h_j]_{x_j}\right)\Big). \tag{7.25}$$

Ще интерпретираме това формално решение.

1. Разглеждаме задата

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u = 0, \tag{7.26}$$

$$u(x_1,...,x_n,0) = x_1...x_n,$$
$$u(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},...,x_n,t) = 0, \qquad \Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1,...,x_{j-1},\xi,x_{j+1},...,x_n,t)\right\} = 0,$$
$$j = 1,2,...,n.$$

Нека означим формалното решението на тази задача с Ω. От (7.25) за $F \equiv g_j \equiv h_j \equiv 0$, $j = 1,2,...,n$, $f = x_1...x_n$, намираме

$$\Omega = \frac{1}{s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n}}[x_1...x_n]_t = \tag{7.27}$$

$$= \frac{1}{s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n}}L_{x_1}...L_{x_n} = \frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}(s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})}.$$

Ще използваме Лема 7.1 за да представим решението Ω на граничната задача (7.26) като произведение на решенията на n - едномерни граничната задача. За тази цел разглеждаме задачите:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_j}{\partial t}-\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j^2}=0,\\&v_j(x_j,0)=x_j,\\&v_j(0,t)=0,\qquad \Phi_{j,\xi}\{v_j(\xi,t)\}=0,\qquad j=1,...,n.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Нека означим формалното решение, ако съществува, на всяка една от тази задача съответно с Ω_j, $j=1,...,n$.

$$\Omega_j=\frac{1}{s_t-S_{x_j}}[x_j]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}=\frac{1}{S_{x_j}(s_t-S_{x_j})}.$$

Теорема 7.1 *Нека* $\Omega_j=\dfrac{1}{S_{x_j}(s_t-S_{x_j})}$, $j=1,...,n$, *са слаби решения на граничните задачи (7.28). Тогава*

$$\Omega=\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}(s_t-S_{x_1}-...-S_{x_n})}=\prod_{j=1}^{n}\Omega_j(x_j,t),$$

където $\prod\limits_{j=1}^{n}$ *е обикновеното произведение, е слабо решение на (7.26).*

Доказателство. Доказателството следва веднага от Теорема 7.1.
□

Ще интерпретираме (7.25) за произволни F, f и h_j, $j=1,...,n$. Без загуба на общност ще предполагаме, че $g_j(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t)\equiv 0$. Формалното решение (7.25) на граничната задача (7.21) може да се представи във вида:

$$u=S_{x_1}...S_{x_n}\left(\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}(s_t-S_{x_1}-...-S_{x_n})}F+\right.$$
$$+\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}(s_t-S_{x_1}-...-S_{x_n})}[f]_t-$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{S_{x_1}...S_{x_n}(s_t-S_{x_1}-...-S_{x_n})}[h_j]_{x_j}\right)\right).\tag{7.29}$$

Като функция решението има вида

$$u=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}...\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\left(\Omega\overset{(x_1,...,x_n,t)}{*}F+\Omega\overset{x_1,...,x_n}{*}f-\sum_{j=1}^{n}\left(\Omega\overset{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t}{*}h_j\right)\right),\tag{7.30}$$

при достатъчна гладкост на функциите F, f and h_j.

2. Ще дадем друга интерпретация на решението (7.25) на граничната задача (7.21) - (7.24).

Разглеждаме задачата

$$(7.31)\quad \frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u = 0,$$

$$u(x_1, ..., x_n, 0) = f(x_1, ..., x_n),$$
$$u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = 0, \qquad \Phi_{j,\xi}\left\{u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t)\right\} = 0,$$
$$j = 1, 2, ..., n,$$

за

$$(7.32)\qquad \begin{aligned} f(x_1, ..., x_n) &= L_{x_1}\{x_1\}...L_{x_n}\{x_n\} = \frac{1}{S_{x_1}^2...S_{x_n}^2} = \\ &= \left(\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1}{6}\Phi_{1,\xi}\{\xi^3\}\right)...\left(\frac{x_n^3}{6} - \frac{x_n}{6}\Phi_{n,\xi}\{\xi^3\}\right). \end{aligned}$$

Означаваме нейното слабо решение, ако съществува с $W = W(x_1, ..., x_n, t)$. От (7.25) за $F \equiv g_j \equiv h_j \equiv 0$, $j = 1, 2, ..., n$ и f зададена с (7.32) намираме следното алгебрично представяне на формалното решение $W = W(x_1, ..., x_n, t)$ на граничната задача (7.31)

$$(7.33)\quad W = \frac{1}{s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n}}\left[\left(\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1}{6}\Phi_{1,\xi}\{\xi^3\}\right)...\left(\frac{x_n^3}{6} - \frac{x_n}{6}\Phi_{n,\xi}\{\xi^3\}\right)\right]_t =$$
$$= \frac{1}{s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n}}L_{x_1}\{x_1\}...L_{x_n}\{x_n\} = \frac{1}{S_{x_1}^2...S_{x_n}^2(s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})}.$$

Ще използваме Теорема 7.1 за да представим решението W на граничната задача (7.31) като произведение на решенията на n - едномерни граничната задача. За тази цел разглеждаме задачите:

$$(7.34)\qquad \frac{\partial w_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j^2} = 0,$$
$$w_j(x_j, 0) = \frac{x_j^3}{6} - \frac{x_j}{6}\Phi_{j,\xi}\{\xi^3\},$$
$$w_j(0, t) = 0, \qquad \Phi_{j,\xi}\{v_j(\xi, t)\} = 0, \qquad j = 1, ..., n.$$

Нека означим формалното решение, ако съществува, на всяка една от тази задача съответно с W_j, $j = 1, ..., n$.

$$W_j = \frac{1}{s_t - S_{x_j}}\left[\frac{x_j^3}{6} - \frac{x_j}{6}\Phi_{j,\xi}\{\xi^3\}\right]_{x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n,t} = \frac{1}{S_{x_j}^2(s_t - S_{x_j})}.$$

Теорема 7.2 *Нека* $W_j = \dfrac{1}{S_{x_j}^2(s_t - S_{x_j})}$, $j = 1, ..., n$, *са слаби решения на граничните задачи (7.34). Тогава*

$$W = \frac{1}{S_{x_1}^2...S_{x_n}^2(s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})} = \prod_{j=1}^{n} w_j(x_j, t),$$

където $\prod_{j=1}^{n}$ *е обикновеното произведение, е слабо решение на (7.26).*

Доказателство. Доказателството следва веднага от Теорема 7.1.
□

По-нататък без загуба на общност ще предполагаме, че $g_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t) \equiv 0$. Формалното решение (7.25) на граничната задача (7.21) - (7.24) за произволни $F(x_1, ..., x_n, t)$, $f(x_1, ..., x_n)$ and $h_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t)$, $j = 1, ..., n$ може да се представи във вида:

$$(7.35) \qquad u = S_{x_1}^2 ... S_{x_n}^2 \left(\frac{1}{S_{x_1}^2 ... S_{x_n}^2 (s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})} F + \right. + \frac{1}{S_{x_1}^2 ... S_{x_n}^2 (s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})} [f]_t - \left. - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{S_{x_1}^2 ... S_{x_n}^2 (s_t - S_{x_1} - ... - S_{x_n})} [h_j]_{x_j} \right) \right).$$

Като функция то има вида

$$(7.36) \quad u = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} ... \frac{\partial^4}{\partial x_n^4} \left(W \overset{(x_1, ..., x_n, t)}{*} F + W \overset{x_1, ..., x_n}{*} f - \sum_{j=1}^{n} \left(W \overset{x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n, t}{*} h_j \right) \right).$$

При достатъчна гладкост на функциите F, f и h_j това решение е слабо или класическо.

7.1 Примери

Пример 1. Разглеждаме нелокалната гранична задача

$$u_t - u_{x_1x_1} - ... - u_{x_nx_n} = 0, \quad 0 < x_j < a_j, \quad 0 < t,$$
$$u(x_1, ..., x_n, 0) = f(x_1, ..., x_n),$$
$$u(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n, t) = 0, \tag{7.37}$$
$$\int_0^{a_j} u(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n, t) d\xi = 0,$$

където $j = 1, ..., n$.

За да намерим точно решение на (7.37) разглеждаме следната едномерна гранична задача:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j^2} = 0,$$
$$v_j(x_j, 0) = f_j(x_j),$$
$$v_j(0, t) = 0, \quad \int_0^{a_j} v_j(\xi, t) d\xi = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

В този случай $\Phi_{j,\xi}\{f(\xi)\} = \dfrac{2}{a_j} \displaystyle\int_0^{a_j} f(\xi) d\xi$, $j = 1, ..., n$.

Слабото решение на тази гранична задача за

$$f_j(x_j) = \left(\frac{x_j^3}{6} - \frac{x_j}{6} \Phi_{j,\xi}\{\xi^3\}\right) = \frac{x_j^3}{6} - \frac{a_j^2\, x_j}{12}$$

е

$$H_j(x_j, t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_j^3}{k^3 \pi^3} + \frac{2a_j}{k\pi} t \right) \sin \frac{2k\pi}{a_j} x_j - \frac{a_j^2}{k^2 \pi^2} x \cos \frac{2k\pi}{a_j} x_j \right).$$

Теорема 7.3 *Нека $f \in C(D)$ е такава, че f_{x_j}, $j = 1, ..., n$ са непрекъснати и*

$$\int_0^{a_j} f(x_1, ..., x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, ..., x_n) d\xi = 0,$$

$j = 1, ..., n$. Тогава

$$u = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} ... \frac{\partial^4}{\partial x_n^4} \left(H_1 \overset{x_1}{*} ... \overset{x_{n-1}}{*} \left(H_n \overset{x_n}{*} f \right) \right) \tag{7.38}$$

е слабо решение на (7.37). Ако предположим допълнително, че f има непрекъснати втори производни $f_{x_jx_j}$, $j = 1, ..., n$ тогава (7.38) е класическо решение на (7.37). Ако $f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) ... f_n(x_n)$, тогава решението на (7.37) е:

$$u = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^4}{\partial x_j^4} \left(H_j \overset{x_j}{*} f_j \right) = \tag{7.39}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2} \Bigg(\int_0^{a_j} f_j'(\xi) \Big(H_{j,x_j}(a_j + x_j - \xi, t) - H_{j,x_j}(a_j - x_j - \xi, t) \Big) d\xi -$$

$$- \int_0^{x_j} f_j'(\xi) \Big(H_{j,x_j}(\xi + a_j + x_j, t) + H_{j,x_j}(a_j + x_j - \xi, t) - 2H_{j,x_j}(x_j - \xi, t) \Big) d\xi \Bigg),$$

където $H_{j,x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} H_j$.

Доказателство. Доказателството следва веднага от Теорема 7.1.
□

Пример 2. Разглеждаме нелокалната гранична задача

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \quad 0 < t, \\
&u(x, y, z, 0) = f_1(x) f_2(y) f_3(z), \\
&u(0, y, z, t) = 0, \qquad u(a, y, z, t) = 0, \\
&u(x, 0, z, t) = 0, \qquad u(x, b, z, t) - u(x, d, z, t) = 0, \quad 0 < d < b, \\
&u(x, y, 0, t) = 0, \qquad \int_0^c u(x, y, \xi, t) d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

За да намерим точно решение на (7.40) разглеждаме следните три едномерни гранични задачи (вж. параграф 4.8 Примери):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \\
&v_1(x, 0) = f_1(x), \\
&v_1(0, t) = 0, \qquad v_1(a, t) = 0.
\end{aligned}$$

В този случай $\Phi_{1,\xi}\{f(\xi)\} = \dfrac{1}{a} f(a)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0, \\
&v_2(y, 0) = f_2(y), \\
&v_2(0, t) = 0, \qquad v_2(b, t) - v_2(d, t) = 0.
\end{aligned}$$

В този случай $\Phi_{2,\xi}\{f(\xi)\} = \dfrac{1}{b - d}(f(b) - f(d))$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} = 0, \\
&v_3(z, 0) = f_3(z), \\
&v_3(0, t) = 0, \qquad \int_0^c v_3(\xi, t) d\xi = 0.
\end{aligned}$$

В този случай $\Phi_{3,\xi}\{f(\xi)\} = \dfrac{2}{c^2} \displaystyle\int_0^c f(\xi) d\xi$.

Нека $f_1 \in C^1(0,a)$, $f_2 \in C^1(0,b)$, $f_3 \in C(0,c)$ и $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$, тогава решенията на съответните едномерни задачи са:

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U_1 \overset{x}{*} f_1(x)\right) = \\ &= -\frac{1}{2a}\left(\int_0^a \left(U_1(x+a-\xi,t) - U_1(a-x-\xi,t)\right) f_1'(\xi)d\xi\right), \end{aligned}$$

където

$$U_1(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}.$$

$$v_2(y,t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(U_2 \overset{y}{*} f_2(y)) =$$

$$= -\frac{1}{2(b-d)}\left(\int_0^b \left(U_2(y+b-\xi,t) - U_2(b-y-\xi,t)\right) f_2'(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^d \left(U_2(y+d-\xi,t) - U_2(d-y-\xi,t)\right) f_2'(\xi)d\xi\right),$$

където $U_2(y,t)$ е

$$U_2(y,t) = -2(b-d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n(b\ \cos b\lambda_n - d\ \cos d\ \lambda_n)} \sin\lambda_n y -$$

$$-2(b-d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 t}}{\mu_n(b\ \cos b\mu_n - d\ \cos d\ \mu_n)} \sin\mu_n y$$

при λ_n и μ_n прости корени на индикатрисите.

(7.41)
$$v_3(z,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U_3 \overset{z}{*} f_3(z)) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(\int_0^c \left(U_3(c+z-\xi,t) - U_3(c-z-\xi,t)\right) f_3(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \left(U_3(\xi+c+z,t) + U_3(c+z-\xi,t) - 2U_3(z-\xi,t)\right) f(\xi)d\xi\right),$$

където

$$U_3(z,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t}\left(2\lambda_n t\sin\lambda_n z - \lambda_n z\cos\lambda_n x\right),$$

$\lambda_n = \dfrac{2n\pi}{c}$.

Решението $u = u(x,y,z,t)$ на граничната задача (7.40) е

$$u(x,y,z,t) = v_1(x,t)v_2(y,t)v_3(z,t).$$

8 Авторска справка и апробация на резултатите от дисертацията

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

По мнение на автора, основните приноси в дисертационния труд могат да се формулират така:

– Изследван е резонансният случай възникващ при нелокални задачи на Коши при най-общ функионал.

– Изградено е операционно смятане за оператора за квадрата на диференцирането $\frac{d^2}{dx^2}$. Частично е изследван резонансният случай при нелокални гранични задачи свързани с оператора за квадрата на диференцирането определен с едно локално условие и едно нелокално.

– Разгледано е обобщение на задачата на Бицадзе - Самарски.

– Въведени са и са изследвани многомерни конволюции свъразани с оператора за диференциране и с оператора за квадрата на диференцирането. Изградено е операционно смятане за частните диференциални оператори $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

– Изразено е решението на n-мерното уравнение на топлопроводността чрез решенията на n едномерни уравнения на топлопроводността.

Апробация на резултатите от дисертацията

Резултатите по темата на дисертацията са докладвани на:

1. MASSEE, International Congress on Mathematics, MICOM 2009, 16 - 20 September, 2009, Ohrid, Republic of Macedonia.
Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Exact solutions of the Bitsadze - Samarski problem.

2. Пролетната научна сесия на ФМИ "СУ. Св. Кл. Охридски", март 2009 г.
Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Точно решение на задачата на Битцадзе - Самарски.

3. International Conference "GFTA' 2010" (Geometric Function Theory and Applications), Sofia, 27-31 August 2010, IMI-BAS.
Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii condition.

4. Конференция на СМБ, Албена - 2010.
Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem.

5. Конференция на СМБ, Албена - 2010.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Nonlocal boundary value problems for two-dimensional potential equation on a rectangle.

6. Конференция на СМБ, Боровец - 2011.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Three-dimensional operational calculi for nonlocal evolution boundary value problems.

7. International Conference ”Transform Methods & Special Functions ’2011”, 20 - 23 October 2011, Sofia - Bulgaria.

I. Dimovski, Yu. Tsankov, Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equation.

8. Отчетна научна сесия на ИМИ-БАН, Секция Анализ, Геометрия и Топология (2011).

Ю. Цанков, Резонансни трептения на правоъгълна мембрана при нелокално гранично условие.

9. Конференция на СМБ, Боровец - 2012.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Exact solutions of nonlocal boundary value problems for one- and two-dimensional heat equation.

10. 18th International Conference on Applications of Computer Algebra-ACA 2012, June 25 - 28, Sofia, Bulgaria.

Yulian Tsankov, Exact Solution of Local and Nonlocal BVPs for the Laplace Equation in a Rectangle.

11. MechAM2012-Contemporary Problems of Mechanics and Applied Mathematics, September 3-6, 2012, Novi Sad, Serbia.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Operational calculi for multivariate evolution boundary value problems.

12. ”Complex Analysis and Applications ’13”, International Memorial Conference for the 100th Anniversary of Acad. Ljubomir Iliev, 31 Oct.-2 Nov. 2013.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Resonance Cases for Nonlocal Cauchy Problems.

Следващите съвместни доклади са изнесени от проф. Иван Димовски:

1. Семинар ”Алгебра и логика” съвместно заседание с Общия семинар по анализ, ИМИ - БАН, 17 юни 2011 г.

Ivan Dimovski, Yulian Tsankov, Пръстени от мултипликаторни частни, свързани с многомерни гранични задачи.

2. AMEE ’11, 37th International Conference, 8-13 June 2011, Sozopol - Bulgaria.

Dimovski, I. H., Tsankov Y. Ts. Multi-dimensional Operational Calculi for Linear Nonlocal Boundary Value Problems.

Публикации по темата на дисертацията

Номерацията на статиите съответства на номерацията им в литературата към дисертацията.

[56] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equations. *Mathematica Balkanica (New Ser.)*, Vol. 26, Fasc. 1-2, 2012, pp. 89-102.

[57] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Operational calculi for multidimensional nonlocal evolution boundary value problems. *Proc. of the 37th Internat. Conf. "Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11)"*, In: *AIP Conference Proceedings*, Volume 1410, 2011, pp. 167-180.

[58] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 39 Spring Conf. UBM, 2010, pp. 114-122.

[92] Tsankov Y. T. Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii constraints. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. Volume 13, No 4, 2010, pp. 435-446.

[93] Tsankov Y. T. Exact solution of local and nonlocal BVPs for the Laplace equation in a rectangle, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Vol. 8372, Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp 190-200.

[94] Tsankov Y. T. Explicit solution of a nonlocal boundary value problem for heat equation, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*. Vol. 66, No 7, 2013, pp. 941-950.

От тези 6 публикации: 3 са в рецензирани периодични списания, индексирани в световната мрежа, едно от които е с импакт-фактор (ДБАН, ИФ = 0.211 за 2012); 2 са в рецензирани сборници на международни конференции (индексирани в Scopus и имащи SJR-рангове, съответно в сериите: American Institute of Physics, SJR = 0.161 (2012); Lecture Notes in Computer Sciences, SJR = 0.33 (2012)); 1 - в сборник (рецензиран) с трудове на СМБ.

Всичките публикации са на английски език, две от тях са самостоятелни.

Редица от резултатите по дисертцаионния труд и от изброените публикации са залегнали в работните програми на няколко научно-изследователски проекта, в които докторантът е участвал в периода на докторантурата: един проект по линия на ФНИ - МОМН (ДИД 02-25/ 2009-2013), един - по двустранно сътрудничество между БАН и Сръбската академия на науките и изкуствата (2012-2014), и няколко НИП към ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски" : договор "Геометрични структури на инцидентност" № 192 от 2010; № 174 от 2011; № 109 от 2012; № 100 от 2013; 2014 (още няма номер).

Благодарности

Авторът изказва сърдечна благодарност и дълбока признателност на научния си консултант **чл. кор. проф. дмн Иван Димовски** за плодотворните обсъждания, всестранната помощ и търпението при подготовката на дисертацията.

Сърдечно благодаря на **проф. дмн Николай Божинов** за консултациите и препоръчаната литература по дисертацията.

Изказвам благодарност на колегите от секция "Анализ, геометрия и топология" към Института по математика и информатика при БАН за подкрепата, отзивчивостта и вниманието което проявиха при работата ми над дисертационния труд.

Литература

[1] Ахиезер Н. И., Демидов С. С. и др. *Мтематика XIX века.* Москва, Наука, 1987. 5, 6, 14

[2] Бицадзе А. В., *Некоторые классы уравнений в частных производных.* Москва, "Наука", 1981. 86

[3] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *ДАН СССР* , **185**, 4, 1969, с. 739-741. 86

[4] Брадистилов Г., Бояджиев Г. *Операционно смятане.* ДИ Техника. София, 1964. 9, 13

[5] Вашченко-Захарченко М. Е. *Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений.* Дисертация на степень магистра, Киев, 1862. 5

[6] Волтьера В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-диффернциальных уравнений.* Москва, Наука, 1982. 9

[7] Гроздев С. *Конволюционен подход към абстрактни диференциални уравнения в особения случай.* Канд. дисертация, София, 1980. 13

[8] Гроздев С., Димовски И. Директни операционни методи за намиране периодични решения на линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. *Мат. и мат. образувание.* СМБ 1979 г., с. 187 - 196. 13

[9] Димовски И. Х. *Конволюционен метод в операционното смятане.* Автореферат на дисертация за присъждане на научна степен "доктор на математическите науки", София, 1977. 13

[10] Димовски И. Х. Съвременното операционно смятане, *ФМС*, т. 19, 1976, с. 54-71. 14

[11] Димовски И. Х. Върху основите на операционно смятане. *Мат. и Мат. образувание. Доклади на Втора пролетна конференция на БМД*, 1973, с. 103-112. 14

[12] Диткин В. А., Прудников А. П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Москва, Наука, 1974. 12

[13] Ердей А. *Операционно смятане и обобщени функции*, София, Наука и изкуство, 1970. 10, 11

[14] Ионкин Н. И. Численное решение неклассических краевых задач для уравнения теплопроводности, *Дифференциальные уравнения* т. 13, 2, 1977, с. 294-304. 90, 117

[15] Карслоу Х., Егер Д. *Опрерационные методы в прикладной математике.* Москва. ИЛ. 1948. 9, 14

[16] Карташов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* Москва, Высшая школа, 2001. 115, 116

[17] Коробейник Ю. Ф. *Теорема Стоуна-Вейерштрасса.* Изд-во Ростовского университета, 1992. 94, 95, 97, 122, 123, 124, 126, 151, 152, 153, 156

[18] Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики.* М.: ГИТТЛ, 1951. 13

[19] Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* Москва, Наука, 1976. 16, 19

[20] Летников А. В., Черних В. А. *Основiъ дробного изисления,* Нефтегаз, Москва, 2011. 6

[21] Малаховская Р. М. *Алгебрическое операционное исчисление и его приложения.* Томск, част 1 и 2, 1982. 12, 14

[22] Микусинский Я. *Операционное исчисление*, Москва, Иностранной литературе, 1956. 9, 10, 11

[23] Рашевский П. К. О разпространении операционного исчисления на краевые задачи. *Успехи математических наук*, т. VIII, вып. 4 (56), июль-август, 1953. 11

[24] Спиридонова М. *Директни операционни методи в програмна среда за компютърна алгебра.* Докторска дисертация, София, 2008. 13, 30

[25] Титчмарш Э. *Введение в теорию интегралов Фурье.* М. 1948. 10

[26] Толстолов Г. П. *Мера и интеграле.* Москва, Наука, 1976. 19, 64

[27] Шостак Р. Я. *Операционное исчисление*, Москва, Высшая школа, 1968. 9

[28] Штокало И. З. *Операционное изчисление.* Издательство "Наукова Думка", Киев, 1972. 5, 6, 7, 8, 14

[29] Эфрос А. М., Данилевский А. М. *Операционное исчисление и контурные интегралы*, Харков, 1937. 9

[30] Arbogast L. F. A. *Du calcul des dérivations.* Strasbourg, 1800. 4

[31] Bellert S. On the Continuation of the Idea of Heaviside in the Operational Calculus, *J. Franlin Inst.*, **276**, 5, 1963, pp. 411-440. 11

[32] Boole G. On the integration of linear equations with constant coefficients, *Cambridge Math. J.*, vol 2, 1841, pp. 114-119. 5

[33] Boole G. *Treatise on differential equations.* Cambridge: Macmillan, 1859. 6

[34] Bozhinov N. S. *Convolutional representations of commutants and multipliers*, Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1988. 68, 112, 139, 148, 166, 167

[35] Bozhinov N. S. Convolutional representations of commutants and multipliers, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, **41**, 12 1988, pp. 19-21. 68

[36] Bozhinov N. S. On theorems of uniqueness and completeness of expansion on eigen and associated eigenfunctions of the nonlocal Sturm-Liouville operator on a finite interval. *Diferenzialnye Uravnenya*, **26**, 5, 1990, pp. 741-453 (Russian) 61, 68, 112, 139, 167

[37] Bozhinov N. S. A necessary and sufficient condition for recovery of functions from their coefficent in the root expansion of the nonlocal Sturm-Liouville operator, *Soviet Math. Dokl.*, **44**, 1, 1992, pp. 183-186. 68

[38] Bozhinov N. S. Sufficient conditions for the basis property, convergence and summability of a root expansion in a nonlocal Sturm-Liouville problem, *Soviet Math. Dokl.*, **44**, 1, 1992, pp. 257-262. 68

[39] Bromwich T. G. I'A. Examples of operational method in mathematical Physics. *Phil. Mag.*, vol. 27 (6th series), 1919, p. 407-419. 8

[40] Carson J. R. The Heaviside operational calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Volume **32**, Number 1, 1926, pp. 43-68. 8

[41] Cauchy A. L. Sur l'analogie des puissances et des differences. *Exercices de mathématiques*, Paris., vol. 2. 1827, pp. 159-209. 4, 5

[42] Churchill R. V. *Operational Mathematics*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Company New York, 1972. 12

[43] Davis H. T. *The theory of linear operators*, Principia Press, 1936. 8, 14

[44] Dimovski I. H. On an operational calculus for a differential operator. *Ibid*, **21**, 6, 1968, pp. 513-516. 13

[45] Dimovski I. H. *Convolutional Calculus.* Kluwer, Dordrecht. 1990. 13, 15, 17, 20, 51, 62, 67, 166

[46] Dimovski I. H. Nonlocal operational calculi. *Proc. Steklov Inst. Math.*, issue 3, 1995, pp. 53-56. 17

[47] Dimovski I. H., Nonlocal boundary value problems. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 38 Spring Conf. UBM, 2009, pp. 31-40. 92, 120

[48] Dimovski I. H. On an operational calculus for vector-valued functions, *Math. Balkanica*, **4**, 1974, pp. 129-135. 13

[49] Dimovski I. H. Two new convolutions for linear right inverse operators of $\frac{d^2}{dt^2}$. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, **29**, 1, 1976, pp. 25-28. 14

[50] Dimovski, I. H., Petrova R. I. Finite integral transforms for nonlocal boundary value problems. *Generalized Functions and Convergence*, eds. P. Antosik and A. Kamiński. World Scientific, Singapore, 1990. 20, 61, 67, 68, 166

[51] Dimovski I. H., K. Skórnik. Computational approach to nonlocal boundary value problems by multivariate operational calculus. *Math. Sci. Res. J.*, **9**, 12, 2005, pp. 315-329. 30

[52] Dimovski I. H., Spiridonova M. Numerical solution of boundary value problems for the heat and related equations. *Computer algebra and its application in Physics CAAP*, Dubna, 2001, pp. 32-42. 14

[53] Dimovski I. H., Spiridonova. M. Main-priodic operational calculi. *Algebraic analysis and related topics. Banach center publications*, **53**, Warszawa, 2000, pp. 105-112. 30

[54] Dimovski I. H., Spiridonova M. Operational Calculus Approach to Nonlocal Cauchy Problems. *Math. Comput. Sci.*, Vol. 4, 2010, p. 243-258. 15

[55] Dimovski I. H., Spiridonova M. Operational Calculi for Nonlocal Cauchy Problems in Resonance Cases. *AADIOS 2012*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 8372, 2014, pp. 83-95. 15, 20, 21, 33

[56] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Exact solutions of nonlocal BVPs for the multidimensional heat equations. *Mathematica Balkanica*, New Series Vol. 26, Fasc. 1-2, 2012. 170, 182

[57] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Operational calculi for multidimensional nonlocal evolution boundary value problems. *Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11): Proceedings of the 37th International Conference. AIP Conference Proceedings*, Volume 1410, 2011, pp. 167-180. 170, 182

[58] Dimovski I. H., Tsankov Y. T. Explicit solution of Bitsadze-Samarskii problem. *Mathematics and Math. Education*, Proc. 39 Spring Conf. UBM, 2010, pp. 114-122. 141, 182

[59] Edwards, R. E. *Functional analysis. Theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, Chicago, San Francisko, Toronto, London, 1965. 15

[60] Giorgi, G. Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili. *Atti Assoc. elettr. ital.*, VIII, 1904, pp. 65-143. 8

[61] Giorgi, G. Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica. *Atti Assoc. elettr. ital.*, IX, 1905, pp. 651-699. 8

[62] Gregory D. F. On the solution of linear differential equations with constant coefficients. *Cambridge Math. J.*, 1837-1839, vol. 1, pp. 25-28. 5

[63] Gregory D. F. On the solution of partial differential equations. *Cambridge Math. J.*, 1837-1839, vol. 1, pp. 123-141. 5

[64] Gregory D. F. Demonstrations of theories in the differential calculus and calculus of finite differences. *Cambridge Math. J.*, 1837-1839, vol. 1, pp. 234-244. 5

[65] Grozdev S. A convolutional approach to initial value problems for equations with right invertible operators. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, **33**, No 1, 1980, pp. 35-38. 15, 33

[66] Gutterman, M. An operational method in partial differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, N 2, 1969, pp. 468 - 493. 12

[67] Heaviside O. *Electrical papers*, London; New York: Macmillan, vol 1-2, 1892. 6

[68] Heaviside O. *Electromagnetic theory*, London, The Electrician Co, vol. 1-3, 1893-1912. 6, 7

[69] Jeffreys H. *Operational methods in mathematical physics.* Cambridge at the university press, 1927. 8

[70] Lagrange J. L. Sur une nouvelle espéce du calcul relatif á la différentation des quantities variables, *Nouv. Mém. Acad sci. Berlin. Cl. Math.*, (1772), 1774, pp. 185-221. 4

[71] Lang S. *Algebra.* Addison Wesley, 1969. 22, 28, 71, 98, 126, 157

[72] Larsen R. *An Iintroduction to the Theory of Multipliers.* Springer, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1971. 23, 28, 70, 97, 126, 156

[73] Leibniz G. W. *Mathematische Schriften.* Berlin; Halle: Scmidt, 1849-1863, Bd. 1-7. 4

[74] Lother B. Generalized convolutions, *Math. Nachr.*, **72**, 1976, pp. 239 - 245. 13

[75] March H. W. The Heaviside operational calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Volume **33**, Number 3, 1927, pp. 311-318. 8

[76] Masuda K. A note on the Convolution Theorem on Functions of Several Variables. *Proc. Japan Acad.*, **58**, Ser. A, Vol. 58, 1982, pp. 402-405. 11

[77] Mikusiński J. *Operational Calculus.* Pergamon, Oxford, 1959. 10

[78] Mikusiński J. Convolution of functions of several variables. *Studia Mathematica*, 1961, Vol. 20, Issue: 3, pp. 301-312. 11

[79] Mikusiński J., Ryll-Nardzewski. Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables. *Studia Mathematica*, 1953, Vol. 13, Issue: 1, pp. 62-68. 11

[80] Moor D. H. *Heaviside operational Calculus*, American Elsevier, New York, 1971. 6, 11

[81] Oltramare G. *Calcul de Généralisation.* Paris, A. Hermann, 1899. 8vo. 6

[82] Oltramare G. The Calculus of Generalization, *Bull. Amer. Math. Soc.* Volume 6, Number 3, 1899, pp. 109-113. 6

[83] Pérès J. Calcul symbolique d'Heaviside et calcul de composition de Vito Voltera, *C. R. Acad. Sci.*, Paris 217, 1943, pp. 517-520. 9

[84] A. D. Polyanin A. D. *Handbook on Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman & Hall CRS, London, 2001. 60

[85] Prudnikov A. P. On the continuation of the ideas of Heaviside and Mikusiński in operational calculus. Different aspects of differentiability. *Dissertationses mathematicae*, 340, 1995, pp. 237-286. 11, 14

[86] Schwartz L. Approximation d'une function quelconque par sommes d'exponentielles imaginaires. *Annales Facuté des Sci.* Univ. Toulouse, 6, 1943, pp. 111-175. 19

[87] Servois F. J. Réflexions sur les divers systémes d'exposition des principes du calcul différentiel. *Ann. math.*, 1814-1815, vol 5, pp. 93-172. 4

[88] Skubachevskii, A. L., The elliptic problems of A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, *Soviet Math. Dokl.* **30**, 2, 1984. 86

[89] Spiridonova M. Computation of periodic solutions of Differencial Equations by the Operational Calculu Approach, *Mat. and Educ, of Math. UMB*, 2005, pp. 191 - 195. 13

[90] Stephens E. *The Elementary Theory of Operational Mathematics*, McGraw Hill Book Co., Inc., New York and London, 1937. 8

[91] Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions, *Proc. of London Math. Soc.*, 25, 1926, pp. 283-302. 10, 11

[92] Tsankov Y. T. Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing a Bitsadze-Samarskii constraints. *Fractional calculus and applied analysis.* Volume 13, N 4, 2010, pp. 435-446. 141, 182

[93] Tsankov Y. T. Exact solution of local and nonlocal BVPs for the Laplace equation in a rectangle, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Vol. 8372, Berlin, Heidelberg, Springer, 2014. 88, 141, 142, 182

[94] Tsankov Y. T. Explicit solution of a nonlocal boundary value problem for heat equation, *Comptes rendus de l'Acade'mie bulgare des Sciences.* **66**, 7, 2013, pp. 941 - 950. 68, 182

[95] Van der Pol B., Bremmer H. *Operational calculus based on the two-sided Laplace Integral*, University Press, Cambridge, 1950. 8

[96] Vasilach S. Sur un calcul operational algebraique pour functions de deux variables. *Rev. Math. Pures et Appl.*, 1957, 2, pp. 181-238. 12

[97] Vasilach S. Calcul operational algebraique pour functions des dedistributions á support dans R_+^n, *Rev. Math. Pures et Appl.*, 1963, t. 8, N 1, pp. 19 - 61. 12

[98] Volterra V., Pérès J. *Leçons sur la composition et les functions permutables*, Paris: Gauthier-Villars, 1924. 9

[99] Widder D. V. *The Heat Equation*, Academic Press, 1976. 115

[100] Yosida K. *Operational Calculus*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984. 11