БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ВЛАДИМИР ЙОРДАНОВ КРЪСТЕВ

ДОСТАТЪЧНИ УСЛОВИЯ ЗА ОПТИМАЛНОСТ ЗА ВЪЗРАСТОВО-СТРУКТУРИРАНИ ЗАДАЧИ НА ОПТИМАЛНОТО УПРАВЛЕНИЕ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за получаване на образователна
и научна степен „доктор“

Научна специалност 01.01.11 Изследване на операциите

Научен ръководител: доц. д-р Цветомир Йотов Цачев

СОФИЯ, 2013

Съдържание

Съдържание на дисертацията

Глава 1. Увод

1.1. Същност, исторически бележки и приложения на възрастово-структурираните задачи на оптималното управление

В тази секция характеризираме възрастово-структурираните задачи като дял на хетерогенните задачи на оптималното управление. Даваме исторически бележки за възникването им. За приложенията на тези задачи посочваме източници от библиографията.

1.2. Обща задача и основни предположения

В дисертацията разглеждаме частни случаи на следната обща задача:

$$
\begin{aligned}
J(u,v,w) \;=\; & \int\limits_0^\omega l(a, y(T,a))\, da \; + \\
+ \int\limits_0^T \int\limits_0^\omega & L\left(t, a, y(t,a), p(t,a), q(t), u(t,a), v(t), w(a)\right)\, da\, dt \;\longrightarrow\; \max
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

при динамиката

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) y(t,a) = f\left(t, a, y(t,a), p(t,a), q(t), u(t,a)\right), \tag{2.2}$$

$$p\,(t,a) = \int_0^\omega g\left(t, a, a', y\left(t, a'\right), u\left(t, a'\right)\right) da', \tag{2.3}$$

$$q(t) = \int_0^\omega h\left(t, a, y(t,a), p(t,a), q(t), u(t,a)\right)\, da, \tag{2.4}$$

началното условие

$$y(0,a) = \psi(a, w(a)) \qquad \text{за } a \in [0,\omega], \tag{2.5}$$

граничното условие

$$y(t,0) = \varphi(t, q(t), v(t)) \quad \text{за } t \in [0,T\rangle, \tag{2.6}$$

ограниченията върху управляващите променливи

$$u(t,a) \in U(t,a), v(t) \in V(t), w(a) \in W(a) \quad \text{за } t \in [0,T\rangle \text{ и } a \in [0,\omega], \tag{2.7}$$

и ограничението

$$F\left(t, a, y(t,a), p\,(t,a), q(t), u(t,a), v(t), w(a)\right) \geq 0. \tag{2.8}$$

Променливата $a \in [0, \omega]$ се нарича възраст, а ω – максимална възраст, до която могат да достигнат изучаваните обекти. С t означаваме времето, протичащо в интервала $[0, T\rangle$. Когато $T < \infty$, това е крайния интервал $[0, T]$, а когато $T = \infty$ е безкрайния интервал $[0, \infty)$. Във втория случай $l(a, y)$ не участва в (2.1). Понякога се оказва удобно да трансформираме оригиналните променливи (координати) (t, a) в така наречените характеристични координати (t, x) чрез трансформацията $x = t - a$. Новата променлива (координата) $x \in [-\omega, T\rangle$ се интерпретира като времето на раждане на изучаваните обекти.

Означаваме с (s, c) всяка двойка от състояние s и управление c, т. е. от фазови променливи $s \stackrel{def}{=} (y, p, q)$ и от управляващи променливи $c \stackrel{def}{=} (u, v, w)$. При това y наричаме локална, а p и q - нелокални фазови променливи. Променливата u наричаме разпределено, v - гранично и w - начално управление.

Във всички частни случаи на задачата (2.1)-(2.8), смятаме, че подинтегралната функция L може да се представи в следния вид:

$$L(t, a, y, p, q, u, v, w) = f_0(t, a, y, p, q, u) + \frac{\psi_0(a, w)}{T} + \frac{\varphi_0(t, q, v)}{\omega}. \tag{2.9}$$

Областта, в която разглеждаме задачата, е $Q \stackrel{def}{=} [0, T\rangle \times [0, \omega]$. Множествата, в които са ограничени управляващите функции (променливи), са $U(t, a) \subset \mathbb{R}^{k_1}$, $V(t) \subset \mathbb{R}^{k_2}$ и $W(a) \subset \mathbb{R}^{k_3}$, а управляващите функции са $u : Q \to \mathbb{R}^{k_1}$, $v : [0, T\rangle \to \mathbb{R}^{k_2}$ и $w : [0, \omega] \to \mathbb{R}^{k_3}$. С изключение на L и l, функциите са векторни: $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^r$, $f \in \mathbb{R}^m$, $g \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^r$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $F \in \mathbb{R}^l$. За функциите L, l, f, g, h, φ, ψ, f_0, φ_0, ψ_0 и F са изпълнени условията на Каратеодори (измерими по t, a, a' и непрекъснати по останалите променливи). Те са локално съществено ограничени и диференцируеми по (y, p, q, u, v, w). За частните производни също са изпълнени условията на Каратеодори (измерими по t, a, a' и непрекъснати по останалите променливи) и също са локално съществено ограничени.

Векторът $\vec{e} = (1, 1)$ наричаме характеристично направление на диференциалния оператор $\Big(\partial/\partial t + \partial/\partial a\Big)$, а последния наричаме производна по характеристичното направление $\vec{e}$, т.е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) y(t, a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{y(t + \varepsilon, a + \varepsilon) - y(t, a)}{\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Допустимо управление наричаме всяка тройка $c(\cdot, \cdot) = (u(\cdot, \cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ от функции, където $u(\cdot, \cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ са измерими съответно в Q, $[0, T\rangle$ и $[0, \omega]$, и почти навсякъде са удовлетворени ограниченията (2.7). Решението на системата (2.2)-(2.4) дефинираме като в [18, дефиниция 1]:

Дефиниция 2.1. *Нека $\Gamma \subset Q$ е произволна непрекъсната крива и нека всяка характеристична отсечка $\{(t, a) \in Q : t - a = const\}$ пресича Γ точно в 1 точка. За всяка пресечна точка γ означаваме с $S(\gamma)$ интервалът от стойностите на s, за които точките $\gamma + s\vec{e}$ принадлежат на характеристичната отсечка (а следователно $\gamma + s\vec{e}$ принадлежат и на Q).*

Решение на системата (2.2)-(2.4), съответстващо на допустимото управление $c(\cdot, \cdot)$ и удовлетворяващо условията

$$y(\gamma) = \bar{y}(\gamma), \quad \gamma = (t, a) \in \Gamma,$$

наричаме тройка (y, p, q) *от измерими и локално ограничени в* Q *(съответно в* $[0, T\rangle$*) функции, за които е в сила уравнението*

$$y\left(\gamma + s\vec{e}\right) = \bar{y}(\gamma) + \int_0^s f\left(\gamma + \tau\vec{e}, y\left(\gamma + \tau\vec{e}\right), p\left(\gamma + \tau\vec{e}\right), q\left(t_0 + \tau\right), u\left(\gamma + \tau\vec{e}\right)\right) d\tau$$

за п. в. $\gamma = (t_0, a_0) \in \Gamma$ *и за п. в.* $s \in S(\gamma)$*, и уравненията* (2.3) *и* (2.4) *са в сила за п. в.* $(t, a) \in Q$ *(съответно* $t \in [0, T\rangle$*).*

За фиксирано допустимо управление, решението на системата (2.2)-(2.4), което удовлетворява условията (2.5), (2.6) и (2.8), наричаме допустимо състояние или допустима фазова траектория. При това смятаме, че за всяко допустимо управление съществува единствено решение на (2.2)-(2.4) в областта Q.

1.3. Приложения на достатъчните условия за оптималност. Организация на дисертацията

Достатъчните условия имат 2 основни приложения: за намиране на оптимално решение и за установяване оптималността на кандидат-оптимално решение.

В глава 2 илюстрираме приложението на достатъчните условия за оптималност, известни от оптималното управление за ОДУ, при решаването на възрастово структурирани задачи без нелокални фазови и без странични управляващи променливи. За тази цел разглеждаме решението на модел за определяне на оптимална рекламна стратегия. В глава 3 предлагаме достатъчни условия за оптималност от типа на Ароу за възрастово-структурираните задачи без фазови ограничения, докато в глава 4 – достатъчни условия за оптималност от типа на Мангасарян за задачите с фазови ограничения. С цел да илюстрираме приложението на тези достатъчни условия, в глава 3 разглеждаме модели на задача за оптимално обучение и на задача за оптимално противодействие на нарушения. В глава 4 разглеждаме модел на задача за оптимални инвестиции в средства за производство. За намирането на оптималното решение на последния модел предлагаме числен метод, разработен на основата на метода на стрелбите. Доказваме, че получената по този метод редица е сходяща, и че получената като граница на тази редица двойка от управление и състояние удовлетворява достатъчните условия за оптималност от глава 4.

Глава 2. Свеждане към задачи на оптималното управление за обикновени диференциални уравнения

Решаването на някои възрастово-структурирани задачи може да се сведе до решаването на задачите от еднопараметрична съвкупност от задачи за обикновени диференциални уравнения, които ние наричаме подзадачи. Целевият функционал на дадената задача трябва да достига оптимума си, когато всеки от целевите функционали на подзадачите достига своя оптимум. В тази глава даваме пример на такова свеждане.

2.1. Модел на Фагиан и Гросет за намиране на оптимална рекламна стратегия

Разглеждаме следната задача на възрастово-структурираното оптимално управление за намиране на оптимална рекламна стратегия на фирма:

$$J(u) = \int_0^{\infty} \int_0^{\omega} e^{-\rho t} \left[\pi(a)G(t,a) - c\left(a, u(t,a)\right)\right] dadt \to \max \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) G(t,a) = -\delta(a)G(t,a) + u(t,a), \tag{1.2}$$

$$G(t,0) = 0 \qquad \text{за всяко } t \in [0,\infty), \tag{1.3}$$

$$G(0,a) = g(a) \quad \text{за всяко } a \in (0,\omega], \tag{1.4}$$

$$u(t,a) \geq 0. \tag{1.5}$$

Областта, в която се изменят времето и възрастта е $Q = [\,0,\infty)\times[\,0,\omega]$. Разделяме я на подобластите $Q_1 = Q \cap \{(t,a) : t - a < 0\}$ и $Q_2 = Q \cap \{(t,a) : t - a \geq 0\}$. Управляващата променлива е $u(t,a)$ и представя рекламните усилия за привличане на клиенти от възрастовия сегмент a в момента t. Фазовата променлива $G(t,a)$ е клиентелата от потребителите на възраст a в момента t. Фирмата максимизира сегашната стойност на потока от печалбите. Тази стойност е представена чрез функционала в (1.1). Подинтегралната функция е дисконтираната печалба от сегмента a в момента t. Печалбата от сегмента е разликата между нетните приходи $\pi(a)G(t,a)$ от продажбите на фирмата и рекламните разходи $c(a,u)$ за привличане на клиенти от възрастовия сегмент. Предполагаме, че функциите $\pi(a)$ и $c(a,u)$ са непрекъснати, и че $c(a,u)$ е силно изпъкнала и диференцируема по u.

Динамиката на клиентелата се описва чрез уравнението (1.2). Лявата страна е производната на фазовата променлива $G(t,a)$ по характеристичното направление и отразява факта, че с времето потребителите преминават в по-старши възрастов сегмент. Дясната страна отразява факта, че във всеки момент t промяната на размера на сегмента от клиентите във възрастовия интервал $[a, a+da]$ е равна на дължината da на интервала, умножена по разликата между рекламните усилия $u(t,a)$, насочени към този сегмент, и амортизацията $\delta(a)G(t,a)$ на капитала от клиенти. Тук непрекъснатата неотрицателна функция $\delta(a)$ е зависещата от възрастта на клиентите амортизационна норма.

Граничното условие (1.3) означава, че плътността на клиентелата за сегмента от потребители на възраст 0 винаги е 0, а началното (1.4) означава, че в началния момент плътността на клиентелата за различните възрастови сегменти е зададена чрез неотрицателната измерима ограничена функция $g(a)$.

Въведеният модел представлява незначително обобщение на модела на Фагиан и Гросет, в което позволяваме на амортизационната норма на капитала от клиенти да зависи от възрастта.

2.2. Решение на модела на Фагиан и Гросет

Решаваме модела чрез свеждане до еднопараметрична съвкупност от задачи на оптималното управление за ОДУ. За решаването на получените задачи използваме достатъчните условия за оптималност от [40] и [41].

Първо преминаваме към характеристичните координати. Получаваме:

$$J(u) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{t-\omega}^{t} e^{-\rho t} \left[\pi(t-x)G(t,t-x) - c\left(t-x, u(t,t-x)\right)\right] dxdt \to \max, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}G(t,t-x) = -\delta(t-x)G(t,t-x) + u(t,t-x) \quad \text{за всяко } x \in [-\omega, \infty), \quad (2.2)$$

$$G(x,0) = 0 \quad \text{за } x \geq 0, \quad (2.3)$$

$$G(0,-x) = g(-x) \quad \text{за } x \in [-\omega, 0), \quad (2.4)$$

$$u(t,t-x) \geq 0. \quad (2.5)$$

В тези координати динамиката се описва чрез еднопараметрична съвкупност от обикновени диференциални уравнения. За подобластта Q_1 началното условие е зададено чрез уравнението (2.4), а за подобластта Q_2 – чрез уравнението (2.3). Времевите интервали за тези уравнения също са различни за двете подобласти. За Q_1 времето t протича в интервала $[0, x+\omega]$, а за Q_2 – в интервала $[x, x+\omega]$.

Горната задача разглеждаме първо при допълнителното условие за ограниченост на управляващата променлива, тоест вместо (2.5) поставяме условието

$$0 \leq u(t,t-x) \leq N \qquad \text{за някакво } N > 0. \quad (2.6)$$

Чрез теоремата на Фубини ([29, стр 298]) сменяме реда на интегрирането в целевия функционал на (1.1) и той се записва във вида

$$\begin{aligned} J(u) = &\int\limits_{-\omega}^{0} \int\limits_{0}^{x+\omega} e^{-\rho t} \left[\pi(t-x)G(t,t-x) - c\left(t-x, u(t,t-x)\right)\right] dtdx + \\ + &\int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{x}^{x+\omega} e^{-\rho t} \left[\pi(t-x)G(t,t-x) - c\left(t-x, u(t,t-x)\right)\right] dtdx \to \max. \end{aligned} \quad (2.7)$$

По-нататък за удобство отразяваме зависимостта от променливата x чрез удебелен шрифт: $\boldsymbol{u}(t) \stackrel{def}{=} u(t,t-x)$, $\boldsymbol{\pi}(t) \stackrel{def}{=} \pi(t-x)$, $\boldsymbol{G}(t) \stackrel{def}{=} G(t,t-x)$, $\boldsymbol{c}(t,u) \stackrel{def}{=} c(t-x,u)$ и $\boldsymbol{\delta}(t) \stackrel{def}{=} \delta(t-x)$. Очевидно за максимизирането на функционала е достатъчно да се максимизират вътрешните интеграли. Поради това задачата, описана чрез уравненията (2.2)-(2.4), (2.6) и (2.7) се разпада на еднопараметрична съвкупност от задачи за ОДУ. Последната представяме чрез следните 2 задачи:

Задача 2.1. *За всяко фиксирано $x \in [-\omega, 0)$ да се намери оптималната двойка от управляваща и фазова променливи $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{G})$ за следната задача на оптималното управление:*

$$J_1(\boldsymbol{u}) = \int_0^{x+\omega} e^{-\rho t} \left(\boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{G}(t) - \boldsymbol{c}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right)\right) dt \to \max,$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}(t) = -\boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{G}(t) + \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{G}(0) = g(-x) \geq 0, \quad 0 \leq \boldsymbol{u}(t) \leq N.$$

Задача 2.2. *За всяко фиксирано $x \in [0,\infty)$ да се намери оптималната двойка от управляваща и фазова променливи $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{G})$ за следната задача на оптималното управление:*

$$J_2(\boldsymbol{u}) = \int_x^{x+\omega} e^{-\rho\, t}\left(\boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{G}(t) - \boldsymbol{c}\,(t,\boldsymbol{u}(t))\right) dt \to \max,$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}(t) = -\boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{G}(t) + \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{G}(x) = 0, \quad 0 \le \boldsymbol{u}(t) \le N.$$

За намирането на оптималните им решения използваме достатъчното условие на Ароу (виж в [41, стр 107]). Съответстващия на двете задачи хамилтониан е

$$H\left(\boldsymbol{G},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\psi},t\right) = e^{-\rho\, t}\left(\boldsymbol{\pi}(t)\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{c}\,(t,\boldsymbol{u})\right) - \boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{u}. \tag{2.8}$$

В този хамилтониан съответстващата на x спрегната променлива $\boldsymbol{\psi}$ е решението на следната задача на Коши за спрегнатото уравнение:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = -e^{-\rho\, t}\,\boldsymbol{\pi}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)\,\boldsymbol{\psi}(t), \qquad \boldsymbol{\psi}(x+\omega) = 0. \tag{2.9}$$

За двете задачи оптималното управление $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ се определя чрез равенството

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{cases} N, & \text{ако } N \le \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}\left(e^{\rho\, t}\boldsymbol{\psi}(t)\right), \\[2ex] \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}\left(e^{\rho\, t}\boldsymbol{\psi}(t)\right), & \text{ако } 0 < \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}\left(e^{\rho\, t}\boldsymbol{\psi}(t)\right) < N, \\[2ex] 0, & \text{ако } \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}\left(e^{\rho\, t}\boldsymbol{\psi}(t)\right) \le 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

където $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}$ е обратната на функцията $\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)$, т. е. ако $z = \dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,y)$, то $y = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial u}\,(t,\cdot)\right)^{-1}(z)$.

Спрегнатата променлива $\boldsymbol{\psi}(t)$ е

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int\limits_t^{x+\omega} e^{\int_\tau^t \boldsymbol{\delta}(s)\,ds}\, e^{-\rho\,\tau}\,\boldsymbol{\pi}(\tau)\,d\tau. \tag{2.11}$$

Чрез граничен преход при N клонящо към безкрайност получаваме, че оптималното управление $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ за модела (2.1)-(2.5) е крайно, и ако е положително се определя чрез втория случай на формула (2.10).

В първоначалните координати оптималното управление $\hat{u}(t,a)$ за задачата (1.1)-(1.5) се определя чрез формулата:

$$\hat{u}(t,a) \;=\; \max\left\{\, 0\,,\;\; \left(\frac{\partial c}{\partial u}(a,\cdot)\right)^{-1}\left(\int\limits_a^{\omega} e^{\int_s^a \delta(\sigma)\,d\sigma}\, e^{\rho(a-s)}\,\pi(s)\,ds\right)\right\} \tag{2.12}$$

За оптималната фазова променлива (оптималната плътност на клиентелата) за разглежданата задача (1.1)-(1.5) получаваме следното представяне:

$$G(t,a) = g(a-t)\, e^{-\int_{a-t}^{a} \delta(\sigma)\, d\sigma} + \int\limits_{a-t}^{a} e^{-\int_{s}^{a} \delta(\sigma)\, d\sigma} \hat{u}(s-a+t,s)\, ds \tag{2.13}$$

при $(t,a) \in Q_1$ и

$$G(t,a) = \int\limits_{0}^{a} e^{-\int_{s}^{a} \delta(\sigma)\, d\sigma} \hat{u}(s-a+t,s)\, ds \tag{2.14}$$

при $(t,a) \in Q_2$.

Глава 3. Достатъчни условия за оптималност за възрастово-структурирани задачи без фазови ограничения

3.1. Основна задача и основни предположения. Дефиниции на хамилтонианите и на спрегнатите функции

В тази глава разглеждаме следната основна задача без фазови ограничения:

$$\begin{aligned} J(u,v,w) \,=\, & \int\limits_0^T \int\limits_0^\omega f_0\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a)\Big)\, da\, dt\, + \\ + & \int\limits_0^\omega \Big(\psi_0(a,w(a)) + l(a,y(T,a))\Big)\, da \,+\, \int\limits_0^T \varphi_0\Big(t,q(t),v(t)\Big)\, dt \,\longrightarrow\, max, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) y(t,a) = f\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a)\Big), \tag{1.2}$$

$$p(t,a) = \int\limits_0^\omega g\Big(t,a,a',y(t,a'),u(t,a')\Big)\, da', \tag{1.3}$$

$$q(t) = \int\limits_0^\omega h\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a)\Big)\, da, \tag{1.4}$$

$$y(0,a) = \psi(a,w(a)) \qquad \text{за } a \in [\,0,\omega], \tag{1.5}$$

$$y(t,0) = \varphi(t,q(t),v(t)) \qquad \text{за } t \in [\,0,T\rangle \tag{1.6}$$

$$u(t,a) \in U(t,a),\ v(t) \in V(t),\ w(a) \in W(a) \qquad \text{за } t \in [\,0,T\rangle \text{ и } a \in [\,0,\omega]. \tag{1.7}$$

Задачате е частен случай на общата задача (1.2.1)-(1.2.8) от глава 1. Тук не са наложени фазови ограничения. За тази основна задача са в сила направените в глава 1 предположения. При записването на целевия функционал (1.1) ние използвахме представянето на подинтегралната функция L, отразено чрез уравнението (1.2.9). Поотделно разглеждаме случаите, в които времевият интервал $[\,0,T\rangle$ е краен и безкраен.

Във формулировките на достатъчните условия за оптималност, които предлагаме в следващите секции, участват помощни функции, наричани хамилтониани и спрегнати функции (спрегнати променливи). Поради това тук даваме техните определения. За задачата (1.1)-(1.7) дефинираме разпределения хамилтониан

$$\begin{aligned} H(t,a,y,p,q,u,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta) \overset{def}{=} & \ f_0(t,a,y,p,q,u) + \xi\, f(t,a,y,p,q,u) + \\ + \int\limits_0^\omega \eta_t(a')g(t,a',a,y,u)\,da' + & \ \zeta\, h(t,a,y,p,q,u), \end{aligned} \tag{1.8}$$

граничния хамилтониан

$$H_b(t,q,v,\xi_t(\cdot)) \overset{def}{=} \varphi_0(t,q,v) + \xi_t(0)\,\varphi(t,q,v) \tag{1.9}$$

и началния хамилтониан

$$H_0(a,w,\xi_a(\cdot)) \overset{def}{=} \psi_0(a,w) + \xi_a(0)\,\psi(a,w). \tag{1.10}$$

Максимизираният разпределен хамилтониан е

$$\hat{H}(t,a,y,p,q,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta) \overset{def}{=} \max\{H(t,a,y,p,q,u,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta) \mid u \in U(t,a)\}. \tag{1.11}$$

Тези хамилтониани са функционали на функциите $\eta_t(\cdot) \in L^\infty_{loc}([0,\omega];\mathbb{R}^n)$, $\xi_t(\cdot) \in L^\infty_{loc}([0,\omega];\mathbb{R}^m)$ и $\xi_a(\cdot) \in L^\infty_{loc}([0,T\rangle\,;\mathbb{R}^m)$. Ние винаги използваме тези хамилтониани заедно с дефинираните долу спрегнати функции (променливи) $\xi(\cdot,\cdot) \in L^\infty_{loc}(Q;\mathbb{R}^m)$, $\eta(\cdot,\cdot) \in L^\infty_{loc}(Q;\mathbb{R}^n)$ и $\zeta(\cdot) \in L^\infty_{loc}([\,0,T\rangle\,;\mathbb{R}^r)$. При това за функциите, които отбелязахме като аргументи на хамилтонианите, винаги използваме $\eta_t(\cdot) = \eta(t,\cdot)$, $\xi_t(\cdot) = \xi(t,\cdot)$ и $\xi_a(\cdot) = \xi(\cdot,a)$. Въпросните спрегнати функции (променливи) са решение на въведената в [18] спрегната система уравнения:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)\xi(t,a) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}H\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a),\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\Big), \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\eta(t,a) = \frac{\partial}{\partial p}H\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a),\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\Big), \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial q}H_b\Big(t,q(t),v(t),\xi(t,\cdot)\Big) + \\ &+ \int\limits_0^\omega \frac{\partial}{\partial q}H\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a),\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\Big)\,da, \end{aligned} \tag{1.14}$$

за която дефиницията на понятието решение е подобна на дадената в глава 1 дефиниция 1.2.1 на понятието решение на системата (1.2.2)-(1.2.4).

В дефинициите (1.8)-(1.10), а също и навсякъде по-нататък, при записването на скаларно произведение на вектори пропускаме знака за транспониране. Освен това по-нататък за по-удобно пропускаме аргументите t и a във функциите, които зависят от тях. Такива функции са $s(t,a)$, $c(t,a)$, $y(t,a)$, $p(t,a)$, $u(t,a)$, $\xi(t,a)$, $\eta(t,a)$, $q(t)$, $v(t)$, $\zeta(t)$, $w(a)$ и съответстващите им функции, които означаваме с „шапки“. По този начин означаваме управляващите и фазовите функции (променливи), които изследваме за оптималност. За по-кратко записване използваме абревиатура, например $f^\wedge[t,a] \overset{def}{=} f\,(t,a,\hat{y},\hat{p},\hat{q},\hat{u})$ и $f[t,a] \overset{def}{=} f(t,a,y,p,q,u)$. За хамилтонианите от означените с „шапки“ променливи, тези абревиатури записани подробно са $H^\wedge[t,a] = H(t,a,\hat{y}(t,a),\hat{p}(t,a),\hat{q}(t),\hat{u}(t,a),\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t))$, $\hat{H}^\wedge[t,a] = \hat{H}(t,a,\hat{y}(t,a),\hat{p}(t,a),\hat{q}(t),\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t))$, $H_0^\wedge[a] = H_0(a,\hat{w}(a),\xi(\cdot,a))$ и $H_b^\wedge[t] = H_b(t,\hat{q}(t),\hat{v}(t),\xi(t,\cdot))$. Подобни са абревиатурите и за хамилтонианите от променливите, които не са означени с „шапки“.

3.2. Достатъчни условия за оптималност от типа на Ароу при краен времеви интервал

Разглеждаме задачата (1.1)-(1.7) при $T < \infty$. За да докажем основния резултат от секцията се нуждаем от следната лема

Лема 2.1. *Нека функцията $f(t,a) \in L^1(Q)$ е абсолютно непрекъсната по характеристичното направление и нека $\Big(\partial/\partial t + \partial/\partial a\Big) f(t,a) \in L^1(Q)$.*

Тогава е изпълнено следното равенство:

$$\int_0^T \int_0^\omega \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) f(t,a)\, da\, dt \;=\; \int_0^T f(t,a)\Big|_0^\omega dt \;+\; \int_0^\omega f(t,a)\Big|_0^T da. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Нека е дадена допустимата двойка $(\hat{s},\hat{c})$ от фазова и управляваща променливи и нека (ξ,η,ζ) е съответстващото на тази двойка решение на спрегнатата система* (1.12)-(1.14)*. Нека за тях са изпълнени следните четири условия:*

1. *Необходимите условия за локален максимум на страничните хамилтониани спрямо съответните им управления и условието за максимизиране на разпределения хамилтониан:*

$$\frac{\partial}{\partial v} H_b^\wedge[t]\Big(v - \hat{v}(t)\Big) \;\le\; 0 \qquad \text{за п. в. } t \in [0,T],\ v \in V(t), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} H_0^\wedge[a]\Big(w - \hat{w}(a)\Big) \;\le\; 0 \quad \text{за п. в. } a \in [0,\omega],\ w \in W(a), \tag{2.3}$$

$$\hat{H}^\wedge[t,a] \;=\; H^\wedge[t,a] \;\ge\; H\Big(t,a,\hat{y}(t,a),\hat{p}(t,a),\hat{q}(t),u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\Big) \quad \text{за п. в. } (t,a) \in Q,\ u \in U(t,a). \tag{2.4}$$

2. *Условията за трансверзалност:*

$$\xi(T,a) = \frac{\partial}{\partial y}\, l\Big(a, \hat{y}(T,a)\Big) \qquad \text{за п. в. } a \in [0,\omega], \tag{2.5}$$

$$\xi(t,\omega) = 0 \qquad \text{за п. в. } t \in [0,T]. \tag{2.6}$$

3. *При дадените спрегнати функции ξ, η и ζ, максимизираният разпределен хамилтониан $\hat{H}(t,a,y,p,q,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t))$ е вдлъбнат по (y,p,q), началният хамилтониан $H_0(a,w,\xi(\cdot,a))$ е вдлъбнат по w и граничният хамилтониан $H_b(t,q,v,\xi(t,\cdot))$ е вдлъбнат по (q,v). Множествата $U(t,a)$, $V(t)$ и $W(a)$ са изпъкнали съответно за п. в. $(t,a) \in Q$, $t \in [0,T]$ и $a \in [0,\omega]$.*

4. *Функцията $l(a,y)$ е вдлъбната по y.*

Тогава двойката $(\hat{s},\hat{c})$ е оптимална.

Бележки. Очевидно ако при дадените спрегнати функции някой от хамилтонианите $\hat{H}(t,a,y,p,q,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t))$, $H_0(a,w,\xi(\cdot,a))$ или $H_b(t,q,v,\xi(t,\cdot))$ е строго вдлъбнат съответно по (y,p,q), w или (q,v), то $(\hat{s},\hat{c})$ е единственото оптимално решение на разглежданата основна задача.

Теорема 2.1 дава достатъчни условия, когато търсим максимум на целевия функционал. Ако търсим минимум, трябва да заменим релациите „$\geq$“ и „$\leq$“ във формулите (2.2)-(2.4) с противоположните релации, изискванията за вдлъбнатост с изисквания за изпъкналост и максимизирането в (1.11) с минимизиране.

Нека да означим съответно с $\mathcal{H}_0(a,w)$, $\mathcal{H}_b(t,v)$ и $\mathcal{H}(t,a,u)$ въведените в [18] начален, граничен и разпределен хамилтониан. Тогава връзките с въведените тук хамилтониани са следните:

$$\mathcal{H}_0(a,w) \;=\; H_0(a,w,\xi(\cdot,a)) + C_0(a), \qquad \mathcal{H}_b(t,v) \;=\; H_b(t,\hat{q}(t),v,\xi(t,\cdot)) + C_b(t),$$
$$\mathcal{H}(t,a,u) \;=\; H(t,a,\hat{y}(t,a),\hat{p}(t,a),\hat{q}(t),u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)) + C(t,a),$$

като в тях функциите C_0, C_b и C не зависят от съответното управление w, v и u. Ако множествата $U(t,a)$, $V(t)$ и $W(a)$ не зависят от a и t, то условията на теорема 2.1 са необходими и достатъчни за оптималността на $(\hat{s},\hat{c})$.

3.3. Достатъчни условия за оптималност при безкраен времеви интервал

В тази секция разглеждаме основната задача (1.1)-(1.7), в случая $T = \infty$. Както вече отбелязахме, в този случай функцията $l(a,y)$ не участва в задачата. Една от основните концепции при дефинирането на оптималността за задачите с безкраен времеви интервал е наречена ограничаване на целевия функционал (limiting objective functional) (вижте в [9] или [10]). Тук ние разширяваме достатъчните условия от предната секция за някои от определенията за оптималност от тази концепция. Преди това ние формулираме определения за оптималност за възрастово-структурираното управление, аналогични на определенията от [41, стр 232]:

Дефиниции за оптималност.

Нека да означим с $(\hat{s},\hat{c})$ двойката от фазова и управляваща променливи, която проверяваме за оптималност, и нека (s,c) е произволна допустима двойка. Дефинираме отрязаната разлика

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) \overset{def}{=} \int_0^\tau \int_0^\omega \Big(f_0(t,a,\hat{y},\hat{p},\hat{q},\hat{u}) - f_0(t,a,y,p,q,u) \Big)\, da\, dt \; + \\ + \int_0^\omega \Big(\psi_0(a,\hat{w}) - \psi_0(a,w) \Big)\, da \; + \; \int_0^\tau \Big(\varphi_0(t,\hat{q},\hat{v}) - \varphi_0(t,q,v) \Big)\, dt.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Разглежданата двойка $(\hat{s},\hat{c})$ се нарича:

1. изпреварващо оптимална (overtaking optimal), ако за всяка допустима двойка (s,c) съществува число τ', евентуално зависещо от двойката (s,c), и за всяко число $\tau \geq \tau'$ е изпълнено неравенството $\Delta(\tau) \geq 0$;

2. настигащо оптимална (catching up optimal), ако $\liminf\limits_{\tau\to\infty} \Delta(\tau) \geq 0$ за всяка допустима двойка (s,c);

3. спорадично настигащо оптимална (sporadically catching up optimal), ако $\limsup\limits_{\tau\to\infty} \Delta(\tau) \geq 0$ за всяка допустима двойка (s,c).

Теорема 3.1. *Нека $(\hat{s},\hat{c})$ е допустима двойка от фазова и управляваща променливи. За тази двойка нека съществува решение (ξ,η,ζ) на спрегнатата система* (1.12)-(1.14) *при условието за трансверзалност* (2.6)*. При условията на теорема 2.1 двойката $(\hat{s},\hat{c})$ е:*

1. *изпреварващо оптимална, ако условието за трансверзалност* (2.5) *е заменено с предположението, че за всяка допустима двойка (s,c) съществува крайно число τ', евентуално зависещо от двойката (s,c), за което*
$$\xi(\tau,a)\Big(y(\tau,a)-\hat{y}(\tau,a)\Big) \geq 0 \qquad \text{за п. в. } a\in[0,\omega] \text{ и за всяко } \tau \geq \tau'; \tag{3.2}$$

2. *настигащо оптимална, ако* (2.5) *е заменено с условието*
$$\liminf_{\tau\to\infty} \int_0^\omega \xi(\tau,a)\Big(y(\tau,a)-\hat{y}(\tau,a)\Big)\, da \;\geq\; 0; \tag{3.3}$$

3. *спорадично настигащо оптимална, ако* (2.5) *е заменено с*
$$\limsup_{\tau\to\infty} \int_0^\omega \xi(\tau,a)\Big(y(\tau,a)-\hat{y}(\tau,a)\Big)\, da \;\geq\; 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.2. *Нека за двойката $(\hat{s},\hat{c})$ са изпълнени условията от теорема 3.1. Нека за всяка допустима фазова траектория y и за всяко $a\in[0,\omega]$ е изпълнено неравенството $\xi(\tau,a)y(\tau,a)\geq 0$ за всяко достатъчно голямо число τ. При това нека $\xi(\tau,a)\hat{y}(\tau,a)\to 0$ при $\tau\to\infty$ равномерно по $a\in[0,\omega]$.*

Тогава условието (3.3) *е изпълнено и следователно $(\hat{s},\hat{c})$ е настигащо оптимална двойка от фазова и управляваща променливи.*

3.4. Приложения

В първата подточка прилагаме теорема 2.1, за да докажем оптималността на управлението в частен случай на разгледания в [38] модел за определяне на оптимална норма на обучение при краен времеви интервал. Във втората подточка използваме теорема 3.1, за да докажем съществуването на настигащо оптимално решение за разгледания в [24] модел за намиране на оптимално противодействие на нарушения.

3.4.1. Задача за оптимално обучение

С цел да изследват на макро ниво оптималната образователна политика спрямо работниците, в [38] Пръскавец, Цачев и Вельов предлагат модел, в който съвкупният продукт зависи от предлагането на труда, разграничено по възрастта и по квалификацията на работниците. По отношение на втория признак работниците са разделени на две категории: ниско квалифицирани и високо квалифицирани. Броят на работниците на възраст a момента t от двете категории е съответно $L(t,a)$ и $H(t,a)$. Образователната политика се представя чрез управляващата функция $u(t,a)$, която е нормата (интензитета) на обучение на работниците на възраст a в момента t.

Тук показваме, че при съвършена заменяемост по възраст и квалификация, и при ограниченост на нормата на обучение, предложената в [38] норма на обучение удовлетворява условията на теорема 2.1, и следователно тя е оптимална.

Моделът е представен в следния вид в приложение B на статията [38]: Да се максимизира функционалът

$$J(u) = \int_0^T\int_0^\omega \frac{e^{-rt}}{\omega}\left\{\left[\vartheta_L(t)\left(\bar{L}(t)\right)^{\rho/\lambda_L} + \vartheta_H(t)\left(\bar{H}(t)\right)^{\rho/\lambda_H}\right]^{1/\rho} - P(t)\right\} da\, dt, \quad (4.1)$$

при условията

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) L(t,a) = \delta(t,a)H(t,a) - e(a)L(t,a) - l(t,a)u(t,a)L(t,a), \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) H(t,a) = -\delta(t,a)H(t,a) + e(a)L(t,a) + l(t,a)u(t,a)L(t,a), \quad (4.3)$$

$$\bar{L}(t) = \int_0^\omega \pi_L(a)\Big(L(t,a)\Big)^{\lambda_L} da, \quad (4.4)$$

$$\bar{H}(t) = \int_0^\omega \pi_H(a)\Big(H(t,a)\Big)^{\lambda_H} da, \quad (4.5)$$

$$P(t) = \int_0^\omega p\left(a, u(t,a)\right) L(t,a)\, da, \quad (4.6)$$

$$u(t,a) \geq 0 \qquad \text{за всяко } t \in [0,T] \text{ и за всяко } a \in [0,\omega]. \quad (4.7)$$

Като начални и гранични условия са зададени положителните функции $L(t,0)$, $H(t,0)$, $L(0,a)$ и $H(0,a)$. Локалните фазови променливи са $y = (L,H)$, а нелокалните са $q = (\bar{L}, \bar{H}, P)$. Да отбележим, че трябва $\rho \leq 1$, $\lambda_L \leq 1$, $\lambda_H \leq 1$, $\lambda_L \neq 0$ и $\lambda_H \neq 0$. Функциите ϑ_L, ϑ_H, π_L и π_H са строго положителни, а функциите e, l и δ - неотрицателни. Предполагаме, че функцията $p(a, u)$ е непрекъсната, монотонно растяща и строго изпъкнала по u. Нейната частна производна $p_u(a, u)$ съществува, непрекъсната е по a и е непрекъснато диференцируема по u.

От (4.2) и (4.3) е ясно, че $L(t, a) > 0$ и $H(t, a) > 0$ за всяка $(t, a) \in Q \stackrel{def}{=} [0, T] \times [0, \omega]$. От това на свой ред следва, че $\bar{L}(t)$, $\bar{H}(t)$ и $P(t)$ също са положителни.

Означаваме с ξ_L, ξ_H, $\zeta_{\bar{L}}$, $\zeta_{\bar{H}}$ и ζ_P спрегнатите променливи, които съответстват на фазовите променливи L, H, $\bar{L}$, $\bar{H}$ и P. Началния, граничния и разпределения хамилтониан за този модел означаваме съответно с $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_b}$ и $\boldsymbol{H}$.

Граничният хамилтониан при споменатите горе спрегнати променливи е $\boldsymbol{H_b}\left(t, \bar{L}, \bar{H}, P, \xi_L(t, \cdot), \xi_H(t, \cdot)\right) = \xi_L(t, 0)L(t, 0) + \xi_H(t, 0)H(t, 0)$. Разпределеният хамилтониан е

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}\left(t,\, a,\, L,\, H,\, \bar{L},\, \bar{H},\, P,\, u,\, \xi_L,\, \xi_H,\, \zeta_{\bar{L}},\, \zeta_{\bar{H}},\, \zeta_P\right) \;= \\ &\quad = \frac{e^{-rt}}{\omega}\left[\vartheta_L(t)\bar{L}^{\,\rho/\lambda_L} + \vartheta_H(t)\bar{H}^{\,\rho/\lambda_H}\right]^{1/\rho} - \frac{e^{-rt}}{\omega}P \;+ \\ &\quad + \xi_L\left[\delta(t, a)\, H - e(a)\, L - l(t, a)\, u\, L\right] \;+ \\ &\quad + \xi_H\left[-\delta(t, a)\, H + e(a)\, L + l(t, a)\, u\, L\right] \;+ \\ &\quad + \zeta_{\bar{L}}\, \pi_L(a)\, L^{\lambda_L} + \zeta_{\bar{H}}\, \pi_H(a)\, H^{\lambda_H} + \zeta_P\, p(a, u)\, L. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Максимизираният разпределен хамилтониан $\hat{\boldsymbol{H}}$ се получава чрез заместване на управлението u с максимизатора $\hat{u}$ в дясната страна на (4.8).

При несъвършена заменяемост по възрастови групи теорема 2.1 не е приложима, както се вижда от следното твърдение:

Твърдение 4.1. *Ако $\lambda_L<1$ или $\lambda_H<1$ то първото събираемо на максимизирания разпределен хамилтониан не е вдлъбнато по фазовите променливи.* (*Следователно същото важи и за целия максимизиран разпределен хамилтониан.*)

В случая $\lambda_L = \lambda_H = 1$ (съвършена заменяемост по възрастови групи) задачата (4.1)-(4.7) е еквивалентна на задача за намиране на допустимо управление $\hat{u}$ и съответстващите му фазови променливи и спрегнати променливи ξ_L, ξ_H, $\zeta_{\bar{L}}$, $\zeta_{\bar{H}}$, за които $\hat{u}$ максимизира съответстващия на променливите разпределен хамилтониан. Ние разглеждаме подслучая на съвършена заменяемост по възраст и квалификация ($\rho = \lambda_L = \lambda_H = 1$) и при ограниченост на нормата на обучение $u(t, a)$:

Нека вместо (4.7) е наложено условието

$$0 \leq u(t, a) \leq N \quad \text{за всяко } (t, a) \in Q. \tag{4.9}$$

Означаваме с $z \to p_u^{-1}(a, z)$ обратната на функцията $u \to p_u(a, u)$. Дефинираме функцията

$$\bar{p}_{u+}^{-1}(a,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} N, & \text{ако} \quad z \geq p_u(a,N), \\ p_u^{-1}(a,z), & \text{ако} \quad p_u(a,0) < z < p_u(a,N), \\ 0, & \text{ако} \quad z \leq p_u(a,0). \end{cases}$$

Както и в раздел 3 на [38] достигаме до извода, че единственият максимизатор на разпределения хамилтониан (4.8) по u при допълнителното условие (4.9) е

$$\hat{u}(t,a) = \bar{p}_{u+}^{-1}(a, l(t,a)\Delta(t,a)), \tag{4.10}$$

където $\Delta(t,a) \stackrel{def}{=} e^{rt}(\xi_H(t,a) - \xi_L(t,a))$. Спрегнатите променливи ξ_L и ξ_H са решение на задачата на Коши

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)\xi_L(t,a) \; &= \; \Big(e(a) + l(t,a)u(t,a)\Big)\Big(\xi_L(t,a) - \xi_H(t,a)\Big) - \\ &\quad - \; \zeta_{\bar{L}}(t)\,\pi_L(a) \; - \; \zeta_P(t)\,p\,(a,u), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)\xi_H(t,a) \; &= \; -\delta(t,a)\Big(\xi_L(t,a) - \xi_H(t,a)\Big) \; - \; \zeta_{\bar{H}}(t)\,\pi_H(a), \\ \xi_L(t,\omega) = 0, \quad \xi_L(T,a) = 0, &\quad \xi_H(t,\omega) = 0, \quad \xi_H(T,a) = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Твърдение 4.2. *При съвършена заместимост по възраст и квалификация* ($\rho = \lambda_L = \lambda_H = 1$) *определеното чрез уравнение* (4.10) *управление е оптимално за задачата* (4.1)-(4.6)*,* (4.9)*.*

3.4.2. Оптимално противодействие на нарушения

В статията [24] Хартл, Корт и Файхтингер изследват съгласуването на инструментите за противодействие на нарушения. Авторите търсят оптималното съгласуване между предотвратяването на нарушенията и третирането на нарушителите. За тази цел те предлагат модел, в който целта е да се минимизира дисконтирания поток от социални разходи, състоящи се от вредите, причинени от нарушителите, и разходите за предотвратяване на нарушенията и третиране на нарушителите. Предложеният модел е следния:

$$J(u,v) = \int_0^\infty \int_0^\omega e^{-rt}\left(k\,d(a)y(t,a) + c(u(t,a)) + v(t,a)\right) da\,dt \to \min, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) y(t,a) \; &= \; \Big(p\,(a) - y(t,a)\Big)\,\mu(a)\,\psi(v(t,a)) - \\ &\quad - \; \vartheta\big(u(t,a)/y(t,a)\big)\; y(t,a) - \delta\, y(t,a), \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$y(t,0) = Y_0, \qquad y(0,a) = Y_0(a), \tag{4.18}$$

$$u(t,a) \geq 0, \qquad v(t,a) \geq 0. \tag{4.19}$$

Управляващите променливи $u(t,a)$ и $v(t,a)$ са съответно нормата на третиране на нарушителите на възраст a и нормата на предотвратяване на нарушенията, причинени от нарушители на възраст a, в момента t. Фазовата променлива $y(t,a)$ е броя на нарушителите на възраст a в момента t. В нашето изследване предполагаме, че използваните функции са достатъчно гладки, а използваните техни производни - непрекъснати. В статията [24] функцията $c(u)$ отразява разходите за третиране на нарушителите. Върху тази функция са наложени условията $c(0)=0$, $c'(u)\geq 0$ и $c''(u)\geq 0$. Функцията $p\,(a)$ е броя на населението на възраст a. Функцията $\psi(v)$ измерва влиянието на усилията (на разходите) за предотвратяване на нарушения. Условията, наложени на тази функция, са $\psi(v)>0$, $\psi'(v)<0$, $\psi''(v)>0$ и $\lim_{v\to\infty}\psi(v)>0$. Функцията ϑ измерва влиянието на третирането на нарушителите върху броя на последните. Приемаме, че $\vartheta(0)=0$, $\vartheta\,'>0$ и $\vartheta\,''\leq 0$. Означаваме обратната на ϑ функция с η. Тогава $\eta'>0$ и $\eta''\geq 0$. Останалите функции са непрекъснати и положителни, а константите - положителни.

Приемаме още, че управляващите променливи u и v са ограничени, следователно за достатъчно голямо M са в сила ограниченията $0\leq u\leq M$ и $0\leq v\leq M$. За математическо удобство заменяме аргумента u/y на функцията ϑ с $u/(y+\varepsilon)$ за достатъчно малко $\varepsilon>0$, както това е направено в [7]. По-удобно е за управляваща променлива да използваме $w(\cdot,\cdot)\overset{def}{=}\vartheta\,[u(\cdot,\cdot)/\,(y(\cdot,\cdot)+\varepsilon)]$ вместо $u(\cdot,\cdot)$. Новата управляваща променлива w също е ограничена. Изразявайки u чрез w получаваме, че $u=\eta(w)(y+\varepsilon)$. Така, след тези промени получаваме следната модификация на модела (4.16)-(4.19): Да се минимизира функционалът

$$J(v,w)=\int_0^\infty\!\!\int_0^\omega e^{-rt}\Big\{k\,d(a)\,y(t,a)+c\Big[\eta(w(t,a))\Big(y(t,a)+\varepsilon\Big)\Big]+v(t,a)\Big\}\,da\,dt \tag{4.20}$$

при условията

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)y(t,a)=\Big(p(a)-y(t,a)\Big)\,\mu(a)\,\psi(v(t,a))-w(t,a)\,y(t,a)-\delta\,y(t,a), \tag{4.21}$$

$$y(t,0)=Y_0,\qquad y(0,a)=Y_0(a), \tag{4.22}$$

$$0\leq v(t,a)\leq M,\quad 0\leq w(t,a)\leq N. \tag{4.23}$$

Интервалът $[0,N\,]$ е образа на функцията $u\to\vartheta(u/\varepsilon)$ за $u\in[0,M\,]$.

Началният и граничният хамилтониани за новия модел (4.20)-(4.23) при спрегнатата променлива $\xi(t,a)$, която по-нататък ще въведем, са $H_0(a,\xi(\cdot,a))=\xi(0,a)Y_0(a)$ и $H_b(t,\xi(t,\cdot))=\xi(t,0)Y_0$. Ако преобразуваме модела (4.20)-(4.23) в модел, в който се търси максимум на целевия функционал, разпределеният хамилтониан при спрегнатата променлива $\xi(t,a)$ ще бъде

$$\begin{aligned}H(t,a,y,v,w,\xi)\;=\;&-e^{-rt}\Big[k\,d(a)\,y+c\Big(\eta(w)\,(y+\varepsilon)\Big)+v\Big]+\\&+\;\xi\,\Big[\Big(p\,(a)-y\Big)\,\mu(a)\,\psi(v)-w\,y-\delta\,y\Big].\end{aligned} \tag{4.24}$$

В дефинициите на хамилтонианите $\xi(t,a)$ е решение на задачата на Коши

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)\xi(t,a) \;=\; f(t,a)\,\xi(t,a) \,+\, g(t,a)\,e^{-rt}, \qquad \xi(t,\omega)=0, \tag{4.25}$$

където положителните ограничени функции f и g са

$$f(t,a)=\mu(a)\,\psi(v(t,a))+w(t,a)+\delta,$$

$$g(t,a)=k\,d(a)+c'\Big[\eta(w(t,a))\Big(y(t,a)+\varepsilon\Big)\Big]\,\eta(w(t,a)).$$

Решението на задачата (4.25) за спрегнатата променлива е

$$\xi(t,a)=-\int_a^\omega e^{-\int_a^\sigma f(s+t-a,s)\,ds}\,g(\sigma+t-a,\sigma)\,e^{-r(\sigma+t-a)}d\sigma. \tag{4.26}$$

От него доказваме, че $\xi(t,a)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно по $a\in[0,\omega]$.

Допустимите максимизатори $\hat{v}(t,a,y,\xi)$ и $\hat{w}(t,a,y,\xi)$ на хамилтониана H се определят неявно от уравненията:

$$\begin{aligned}&\hat{v}(t,a,y,\xi)=\{v(t,a,y,\xi)\}_{[0,\,M]} \quad \text{и}\\ &\xi\,\Big(p\,(a)-y\Big)\,\mu(a)\,\psi'(v(t,a,y,\xi))=e^{-rt},\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}&\hat{w}(t,a,y,\xi)=\{w(t,a,y,\xi)\}_{[0,\,N]} \quad \text{и}\\ &c'\,[\,\eta(w(t,a,y,\xi))\,(y+\varepsilon)]\,\eta'(w(t,a,y,\xi))\,(y+\varepsilon) \;=\; -e^{rt}\,\xi\,y.\end{aligned} \tag{4.29}$$

В тези уравнения ние използваме означението

$$\{f(x)\}_{[a,\,b]}=\begin{cases} b & \text{ако} \quad f(x)\ge b,\\ f(x) & \text{ако} \quad a<f(x)<b,\\ a & \text{ако} \quad f(x)\le a.\end{cases}$$

Твърдение 4.3. *Задачата* (4.20)-(4.23) *има настигащо оптимално решение. Последното е определено от уравненията* (4.21), (4.22), (4.25), (4.28) *и* (4.29).

Глава 4. Достатъчни условия за оптималност за възрастово-структурирани задачи с фазови ограничения

4.1. Основна задача и основни предположения. Дефиниции на хамилтонианите, лагранжианите и спрегнатите функции

Тук разглеждаме следната основна задача с фазови ограничения:

$$\begin{aligned}J(u,v,w) \;=\; &\int_0^T\!\!\int_0^\omega f_0\Big(t,a,y(t,a),p\,(t,a),q(t),u(t,a)\Big)\,da\,dt\,+\\ +\;&\int_0^\omega\Big(\psi_0(a,w(a))+l(a,y(T,a))\Big)\,da\;+\;\int_0^T\varphi_0\Big(t,q(t),v(t)\Big)\,dt\;\longrightarrow\; max,\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)y(t,a)=f\Big(t,a,y(t,a),p\,(t,a),q(t),u(t,a)\Big), \tag{1.2}$$

$$p(t,a)=\int\limits_0^{\omega} g\Big(t,a,a',y(t,a'),u(t,a')\Big)\,da', \tag{1.3}$$

$$q(t)=\int\limits_0^{\omega} h\Big(t,a,y(t,a),p(t,a),q(t),u(t,a)\Big)\,da, \tag{1.4}$$

$$y(0,a)=\psi(a,w(a)) \qquad \text{за } a\in[\,0,\omega], \tag{1.5}$$

$$y(t,0)=\varphi(t,q(t),v(t)) \qquad \text{за } t\in[\,0,T\,], \tag{1.6}$$

$$u(t,a)\in U,\quad v(t)\in V,\quad w(a)\in W \qquad \text{за } t\in[\,0,T]\ \text{ и } a\in[\,0,\omega], \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\Pi\Big(t,a,y(t,a),p\,(t,a),q(t),u(t,a)\Big)\geq 0,\ \ \Phi\Big(t,q(t),v(t)\Big)\geq 0,\\ \Psi\Big(a,w(a)\Big)\geq 0 \qquad \text{за } t\in[\,0,T]\ \text{и } a\in[\,0,\omega],\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\pi\Big(t,a,y(t,a)\Big)\geq 0 \qquad \text{за } t\in[\,0,T]\ \text{ и } a\in[\,0,\omega]. \tag{1.9}$$

Тази основна задача също е частен случай на формулираната в глава 1 обща задача (1.2.1)-(1.2.8). За задачата (1.1)-(1.9) също са в сила направените в глава 1 предположения. И тук подинтегралната функция L се представя чрез уравнението (1.2.9). В тази задача обаче множествата U, V и W не зависят от t и a. Функцията F, чрез която се задават фазовите ограничения (1.2.8) в общата задача от глава 1, тук се представя във вида $F=(\Pi,\Phi,\Psi,\pi)$. При това $\Pi\in\mathbb{R}^{l_1}$, $\Phi\in\mathbb{R}^{l_2}$, $\Psi\in\mathbb{R}^{l_3}$, $\pi\in\mathbb{R}^{l_4}$ и $l_1+l_2+l_3+l_4=l$. За основната задача (1.1)-(1.9) разглеждаме само случая на краен времеви интервал, т.е. приемаме, че $T<\infty$.

Новият елемент в разглежданата в тази глава основна задача е наличието на фазови ограничения, които ние разделяме на две групи – смесени и чисти локални. Ограниченията от първата група задаваме чрез неравенствата (1.8), а от втората група – чрез неравенствата (1.9).

Както и в предната глава, разпределеният, граничният и началният хамилтониан са съответно

$$\begin{aligned}&H(t,a,y,p,q,u,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta)\ \stackrel{def}{=}\ f_0(t,a,y,p,q,u)\ +\ \xi\, f(t,a,y,p,q,u)\ +\\ &+\ \int\limits_0^{\omega}\eta_t(a')g(t,a',a,y,u)\,da'\ +\ \zeta\, h(t,a,y,p,q,u),\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$H_b(t,q,v,\xi_t(\cdot))\stackrel{def}{=}\varphi_0(t,q,v)+\xi_t(0)\varphi(t,q,v). \tag{1.11}$$

$$H_0(a,w,\xi_a(\cdot))\stackrel{def}{=}\psi_0(a,w)+\xi_a(0)\psi(a,w), \tag{1.12}$$

И в тази глава хамилтонианите, които са функционали на функциите $\eta_t(\cdot) \in L^\infty\left([0,\omega];\mathbb{R}^n\right)$, $\xi_t(\cdot) \in L^\infty\left([0,\omega];\mathbb{R}^m\right)$ и $\xi_a(\cdot) \in L^\infty\left([0,T];\mathbb{R}^m\right)$, използваме винаги заедно със спрегнатите функции (променливи) $\xi(\cdot,\cdot) \in L^\infty\left(Q;\mathbb{R}^m\right)$, $\eta(\cdot,\cdot) \in L^\infty\left(Q;\mathbb{R}^n\right)$ и $\zeta(\cdot) \in L^\infty\left([0,T];\mathbb{R}^r\right)$. Последните въвеждаме по-долу като решение на спрегната система, различна от въведената в предната глава. За функциите, посочени като аргументи на хамилтонианите, винаги използваме $\eta_t(\cdot) = \eta(t,\cdot)$, $\xi_t(\cdot) = \xi(t,\cdot)$ и $\xi_a(\cdot) = \xi(\cdot,a)$.

За да боравим с фазовите ограничения на основната задача, въвеждаме следните разпределен, граничен и начален лагранжиан:

$$\begin{aligned} &L(t,a,y,p,q,u,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta,\lambda,\lambda') \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} H(t,a,y,p,q,u,\xi,\eta_t(\cdot),\zeta) + \lambda\,\Pi(t,a,y,p,q,u) + \lambda'\,\pi(t,a,y), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$L_b(t,q,v,\xi_t(\cdot),\mu) \stackrel{def}{=} H_b(t,q,v,\xi_t(\cdot)) + \mu\,\Phi(t,q,v). \tag{1.14}$$

$$L_0(a,w,\xi_a(\cdot),\nu) \stackrel{def}{=} H_0(a,w,\xi_a(\cdot)) + \nu\,\Psi(a,w), \tag{1.15}$$

В горните дефиниции приемаме, че множителите на Лагранж са $\lambda \in L^1\left(Q;\mathbb{R}^{l_1}\right)$, $\lambda' \in L^1\left(Q;\mathbb{R}^{l_4}\right)$, $\mu \in L^1\left([0,T];\mathbb{R}^{l_2}\right)$ и $\nu \in L^1\left([0,\omega];\mathbb{R}^{l_3}\right)$. Лагранжианите също са функционали на функциите $\eta_t(\cdot)$, $\xi_t(\cdot)$ и $\xi_a(\cdot)$, и ние винаги използваме същите съответни функции за тези аргументи.

Използваните в дефинициите на хамилтонианите (1.10)-(1.12) и на лагранжианите (1.13)-(1.15) спрегнати функции ξ, η и ζ са решение на следната спрегната система диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)\xi(t,a) = -\frac{\partial}{\partial y} L\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t),\lambda,\lambda'\right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} H\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\right) - \\ &- \lambda\,\frac{\partial}{\partial y}\Pi\left(t,a,y,p,q,u\right) - \lambda'\,\frac{\partial}{\partial y}\pi\left(t,a,y\right), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} &\eta(t,a) = \frac{\partial}{\partial p} L\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t),\lambda,\lambda'\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial p} H\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\right) + \lambda\,\frac{\partial}{\partial p}\Pi\left(t,a,y,p,q,u\right), \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} &\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial q} L_b\left(t,q,v,\xi(t,\cdot),\mu\right) + \\ &+ \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial q} L\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t),\lambda,\lambda'\right) da = \\ &= \frac{\partial}{\partial q} H_b\left(t,q,v,\xi(t,\cdot)\right) + \mu\,\frac{\partial}{\partial q}\Phi(t,q,v) + \\ &+ \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial q} H\left(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t)\right) da + \int_0^\omega \lambda\,\frac{\partial}{\partial q}\Pi(t,a,y,p,q,u) da. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Дефиницията на решението на тази спрегната система е аналогична на дефиницията 1.2.1 на решението на динамичната система (1.2.2)-(1.2.4). И в тази глава ние пропускаме аргументите t и a на управляващите, фазовите и спрегнатите променливи. Освен това пропускаме и аргументите (t, a) на множителите на Лагранж λ и λ', аргумента t на множителя μ и аргумента a на множителя ν. Продължаваме да използваме същата абревиатура, също и да означаваме с „шапки“ управляващите и фазовите променливи, които изследваме за оптималност.

4.2. Достатъчни условия за оптималност от типа на Мангасарян при краен времеви интервал

Разглеждаме задачите (1.1)-(1.8) и (1.1)-(1.9), които са съответно без и с чисти локални фазови ограничения. В следващата теорема предлагаме достатъчно условие за оптималност за задачата със смесени фазови ограничения (1.1)-(1.8).

Теорема 2.1. *Нека* $(\hat{s}, \hat{c}) = (\hat{y}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ *е допустима двойка от фазова и управляваща променливи за задачата* (1.1)-(1.8). *Нека съществуват множители на Лагранж* λ*,* μ *и* ν*, и абсолютно непрекъснато по характеристичното направление решение* (ξ, η, ζ) *на спрегнатата система* (1.16)-(1.18)*, съответстващо на разглежданата допустима двойка и на множителите на Лагранж. При това нека за тях са изпълнени следните шест условия:*

1. *Необходимите условия за локален максимум на лагранжианите:*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u} L^{\wedge}[t, a]\Big(u - \hat{u}(t, a)\Big) = \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial u} H^{\wedge}[t, a] + \lambda(t, a) \frac{\partial}{\partial u} \Pi^{\wedge}[t, a]\right\}\Big(u - \hat{u}(t, a)\Big) \leq 0\end{aligned} \tag{2.1}$$

за п. в. $(t, a) \in Q$ *и за п. в.* $u \in U$*;*

$$\frac{\partial}{\partial v} L_b^{\wedge}[t]\Big(v - \hat{v}(t)\Big) = \left\{\frac{\partial}{\partial v} H_b^{\wedge}[t] + \mu(t) \frac{\partial}{\partial v} \Phi^{\wedge}[t]\right\}\Big(v - \hat{v}(t)\Big) \leq 0 \tag{2.2}$$

за п. в. $t \in [0, T]$ *и за п. в.* $v \in V$*;*

$$\frac{\partial}{\partial w} L_0^{\wedge}[a]\Big(w - \hat{w}(a)\Big) = \left\{\frac{\partial}{\partial w} H_0^{\wedge}[a] + \nu(a) \frac{\partial}{\partial w} \Psi^{\wedge}[a]\right\}\Big(w - \hat{w}(a)\Big) \leq 0 \tag{2.3}$$

за п. в. $a \in [0, \omega]$ *и за п. в.* $w \in W$*.*

2. *Условията за неотрицателност на множителите на Лагранж и условията за допълваща нестрогост:*

$$\begin{aligned}&\lambda(t, a) \geq 0, \quad \lambda(t, a)\, \Pi^{\wedge}[t, a] = 0; \quad \mu(t) \geq 0, \quad \mu(t)\, \Phi^{\wedge}[t] = 0; \\ &\nu(a) \geq 0, \qquad \nu(a)\, \Psi^{\wedge}[a] = 0\end{aligned} \tag{2.4}$$

съответно за п. в. $(t, a) \in Q$*,* $t \in [0, T]$ *и* $a \in [0, \omega]$*.*

3. *Условията за трансверзалност:*

$$\xi(T,a) = \frac{\partial}{\partial y}\, l\Big(a, \hat{y}(T,a)\Big) \qquad \text{за п. в. } a \in [\,0,\omega], \tag{2.5}$$

$$\xi(t,\omega) = 0 \qquad \text{за п. в. } t \in [\,0,T]. \tag{2.6}$$

4. *Функцията* $\Pi(t,a,y,p,q,u)$ *е квазивдлъбната по* (y,p,q,u), $\Phi(t,q,v)$ *е квазивдлъбната по* (q,v) *и* $\Psi(a,w)$ *е квазивдлъбната по* w. *Множествата* U, V *и* W *са изпъкнали.*

5. *При дадените спрегнати функции* ξ, η *и* ζ, *разпределеният хамилтониан* $H(t,a,y,p,q,u,\xi(t,a),\eta(t,\cdot),\zeta(t))$ *е вдлъбнат по* (y,p,q,u), *граничният хамилтониан* $H_b(t,q,v,\xi(t,\cdot))$ *е вдлъбнат по* (q,v), *началният хамилтониан* $H_0(a,w,\xi(\cdot,a))$ *е вдлъбнат по* w.

6. *Функцията* $l(a,y)$ *е вдлъбната по* y.

Тогава двойката $(\hat{s},\hat{c}) = (\hat{y},\hat{p},\hat{q},\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ *е оптимална за задачата* (1.1) - (1.8).

Като релаксация на теорема 2.1, в следващата теорема предлагаме достатъчни условия за оптималност за задачата с чисти локални фазови ограничения (1.1)-(1.9):

Теорема 2.2. *Нека* $(\hat{s},\hat{c}) = (\hat{y},\hat{p},\hat{q},\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ *е допустима двойка от фазови и управляващи променливи за задачата* (1.1)-(1.9). *Нека съществуват множители на Лагранж* λ, λ', μ *и* ν, *и нека спрегнатата система* (1.16)-(1.18) *има абсолютно непрекъснато по характеристичното направление решение* (ξ,η,ζ), *съответстващо на двойката* $(\hat{s},\hat{c})$ *и на множителите на Лагранж. Освен това нека съществуват функции* $\alpha \in L^1([0,T];\mathbb{R}^m)$ *и* $\beta \in L^1([0,\omega];\mathbb{R}^m)$.

Нека са изпълнени шестте условия от теорема 2.1, като в тях множителят λ *е заместен с* (λ,λ'), *а функцията* Π *е заместена с* (Π,π). *Освен това нека са изпълнени следните три условия:*

1. *Функцията* $\pi(t,a,y)$ *е квазивдлъбната по* y;

2. *Спрегнатата променлива* $\xi(t,a)$ *може да е прекъсната в крайните точки* $a=\omega$. *В този случай е изпълнено следното условие за скок:*

$$\xi\left(t,\omega^-\right) - \xi(t,\omega) \;=\; \alpha(t)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\pi\Big(t,\omega,\hat{y}(t,\omega)\Big) \qquad \text{за п. в. } t \in [0,T] \tag{2.18}$$

заедно с условието за неотрицателност на функцията α *и с условието за допълваща нестрогост*

$$\alpha(t) \ge 0, \quad \alpha(t)\,\pi\Big(t,\omega,\hat{y}(t,\omega)\Big) \;=\; 0 \qquad \text{за п. в. } t \in [0,T]. \tag{2.19}$$

3. *Променливата* $\xi(t,a)$ *може да е прекъсната и да има скок при* $t=T$, *като в този случай*

$$\xi\left(T^-,a\right) - \xi(T,a) \;=\; \beta(a)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\pi\Big(T,a,\hat{y}(T,a)\Big) \quad \text{за п. в. } a \in [0,\omega] \tag{2.20}$$

заедно с условията

$$\beta(a) \geq 0, \quad \beta(a)\, \pi\Big(T, a, \hat{y}(T,a)\Big) \,=\, 0 \qquad\qquad \text{\textit{за п. в.}}\ a \in [0,\omega]. \tag{2.21}$$

При тези условия двойката $(\hat{s}, \hat{c})$ *е оптимална.*

В условията на тази теорема използвахме означенията

$$\xi\left(T^-, a\right) \overset{def}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \xi\left(T-\varepsilon,\, a-\varepsilon\right) \quad \text{и} \quad \xi\left(t, \omega^-\right) \overset{def}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \xi\left(t-\varepsilon,\, \omega-\varepsilon\right).$$

Бележки. При формулирането на условия 2 и 3 на горната теорема 2.2, вместо условията за скокове (2.18) и (2.20) може да приемем, че спрегнатата променлива $\xi(t,a)$ е непрекъсната по характеристичното направление в крайните точки $a=\omega$ и $t=T$, и вместо условията за трансверзалност (2.5) и (2.6) от теорема 2.1 са изпълнени следните условия за трансверзалност:

$$\xi(t,\omega) \,=\, \alpha(t)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\pi\left(t,\omega,\hat{y}(t,\omega)\right) \qquad \text{за п. в. } t\in[0,T], \tag{2.18'}$$

$$\xi(T,a) \,=\, \beta(a)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\pi\left(T,a,\hat{y}(T,a)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\,l\left(a,\hat{y}(T,a)\right) \quad \text{за п. в. } a\in[0,\omega]. \tag{2.20'}$$

Нека са изпълнени условията на теорема 2.1 или на теорема 2.2. Ако някой от хамилтонианите е строго вдлъбнат, то двойката $(\hat{s}, \hat{c})$ е единственото оптимално решение на съответната задача.

Ако търсим минимум на целевия функционал трябва да заменим всички изисквания за вдлъбнатост и квазивдлъбнатост съответно с изисквания за изпъкналост и квазиизпъкналост, релациите „$\leq$“ в (2.1)-(2.3) с противоположните релации, и условията за неотрицателност на функциите α, β и множителите на Лагранж с условия за неположителност.

4.3. Приложение в задача за оптимални инвестиции в средства за производство

В тази секция разглеждаме един възрастово-структуриран модел на новосъздадена фирма, която произвежда един продукт чрез използването на определени средства за производство (напр. машини). Последните могат да бъдат с различен винтидж (от различни поколения). За да осигури производствения процес фирмата трябва да инвестира в тези средства за производство. Предполагаме, че тя може да избира между континуум от поколения от тях. Целта на фирмата е да определи инвестиционна стратегия за период от T години, при която сегашната стойност на потока от печалбите да е максимален. Моделът е следния:

$$\begin{aligned} J\left(I, I_0, K_0\right) = \int_0^T\!\!\int_0^\omega e^{-rt}\Big(p\left(t-a\right)K(t,a) - b(t,a)\,I(t,a) - \frac{c}{2}\,I^2(t,a)\Big)\,da\,dt \,- \\ -\int_0^\omega \Big(b(0,a)K_0(a) + \frac{c}{2}\,K_0^2(a)\Big)\,da - \int_0^T e^{-rt}\Big(b(t,0)I_0(t) + \frac{c}{2}\,I_0^2(t)\Big)\,dt \,\to\, \max, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)K(t,a) \;=\; I(t,a) \;-\; \delta\, K(t,a) \qquad t\in[0,T],\;\; a\in[0,\omega], \tag{3.2}$$

$$K(t,0)=I_0(t) \qquad t\in[0,T], \tag{3.3}$$

$$K(0,a)=K_0(a) \qquad a\in[0,\omega] \tag{3.4}$$

$$K(t,a)\geq 0 \quad \text{за всяко } (t,a)\in Q=[0,T]\times[0,\omega]. \tag{3.5}$$

В модела с t означаваме момент от времето, а с a - възрастта на дадена машина (на дадено средство за производство). Разликата $x=t-a$ е винтиджа (поколението) на дадено средство за производство. Разглежданите средства за производство не могат да бъдат използвани повече от ω години след годината, в която са произведени, поради това $a\in[0,\omega]$. Както отбелязахме, фирмата иска да определи оптималната си инвестиционна стратегия за период от T години, следователно $t\in[0,T]$. Предполагаме, че този времеви период е достатъчно дълъг и $T>\omega$. Наличността (т.е. броя) $K(t,a)$ на средствата за производство на възраст a в момента t е фазовата променлива в модела. За да отразим факта, че наличността не може да бъде отрицателна, ние въвеждаме фазовото ограничение (3.5). Разпределената управляваща променлива $I(t,a)$ са направените от фирмата инвестиции в средствата за производство на възраст a в момента t. Тази променлива е броя на поръчаните единици средства за производство при $I(t,a)>0$ и е броя на продадените при $I(t,a)<0$. Понеже фирмата може да купува и да продава средства за производство, моделът не включва пряко ограничение върху тази управляваща променлива. Да отбележим обаче, че фазовото ограничение (3.5) ограничава непряко тази променлива: фирмата може да продава само ако има положителна наличност от средствата за производство. Отделно от разпределеното управление, ние разглеждаме инвестициите в нови средства за производство $I_0(t)$ като гранична управляваща променлива и избора на наличност от средствата за производство в момента на създаването на фирмата $K_0(a)$ като начална управляваща променлива. Предполагаме, че останалите функции са достатъчно гладки, а използваните константи са положителни.

За да намери оптималната инвестиционна стратегия, фирмата трябва да максимизира целевия функционал (3.1), който е дисконтирания поток от печалбите. Подинтегралната функция на двойния интеграл от (3.1) представя дисконтираната печалба от средствата за производство (машините) на възраст a в момента t като разлика между приходите от тяхната експлоатация $p\,(t-a)\,K(t,a)$ и инвестиционните разходи $b(t,a)\,I(t,a)+\frac{c}{2}\,I^2(t,a)$. Последните са разделени на разходи за придобиване $b(t,a)\,I(t,a)$ и разходи за реализиране на инвестициите $\frac{c}{2}\,I^2(t,a)$ (например разходи за инсталиране и за деинсталиране). Всъщност първото събираемо са приходи, когато фирмата продава разглежданите средства за производство. Описанията на останалите подинтегрални функции в (3.1) са аналогични: $b(0,a)\,K_0(a)+\frac{c}{2}\,K_0^2(a)$ са разходите за начален капитал (средства за производство) на възраст a, а $b(t,0)\,I_0(t)+\frac{c}{2}\,I_0^2(t)$ са инвестиционните разходи за най-новото поколение от средствата за производство в момента t.

Продуктивността на средствата за производство нараства с всяко следващо поколение (тя е растяща функция на винтиджа) и следователно $p'(x) \geq 0$. Цената на всяко фиксирано поколение от средствата за производство (средствата за производство с фиксиран винтидж, т.е. $x = t - a = const$) трябва да намалява с възрастта, следователно предполагаме, че $\frac{\partial}{\partial a} b(x + a, a) < 0$. Предполагаме още, че предвиждайки бъдещия технологичен прогрес, фирмата може да оцени продуктивността и цените на бъдещите поколения средства за производство. При това приемаме, че цената на всяко фиксирано поколение от средствата за производство може да бъде представена като затихваща експонента от възрастта a:

$$b(t, a) \,=\, b_0(t - a)\, e^{-\Delta(t-a)\, a} \tag{3.6}$$

където $b_0(x)$ и $\Delta(x)$ са положителни функции.

Разглеждания от нас модел е сходен на предложения от Файхтингер и др. модел в статията [15]. Подобни модели са изследвани и в статиите [4] и [16]. В настоящия модел динамиката на капитала (на средствата за производство), описана чрез формулите (3.2)-(3.4), е като в цитираните горе 3 статии. Описанието може да бъде намерено в [4]. Нашият модел не отразява някои от описаните в [15] особености, като нарастването на амортизационната норма с възрастта, ефекта на опита върху разходите на фирмата и насищането на пазара с продуктите на фирмата. От друга страна, чрез въвеждането на фазовото ограничение гарантираме, че оптималното решение за капитала (средствата за производство) е неотрицателно.

За решаването на модела (3.1)-(3.5) предлагаме основан на метода на стрелбите (виж например в [43, стр. 502]) числен метод, чрез който се генерира редица от двойки управления и фазови променливи. Показваме, че генерираната редица е сходяща към оптимална двойка, понеже последната удовлетворява условията на теорема 2.2. За целта първо въвеждаме хамилтонианите и лагранжианите за разглеждания модел. За спрегнатата променлива $\xi(t, a)$, която по-надолу въвеждаме, разпределения, граничния и началния хамилтониан са съответно

$$H(t, a, K, I, \xi) \,=\, e^{-r\,t} \left(p\,(t{-}a)\, K - b(t, a)\, I - \frac{c}{2}\, I^{\,2} \right) \,+\, \xi\, \left(I - \delta\, K\right), \tag{3.7}$$

$$H_b\,(t, I_0, \xi(t, \cdot)) \,=\, -e^{-r\,t} \left(b(t, 0)\, I_0 \,+\, \frac{c}{2}\, I_0^{\,2} \right) \,+\, \xi(t, 0)\, I_0, \tag{3.8}$$

$$H_0\,(a, K_0, \xi(\cdot, a)) \,=\, -\left(b(0, a)\, K_0 + \frac{c}{2}\, K_0^{\,2} \right) \,+\, \xi(0, a)\, K_0. \tag{3.9}$$

Страничните лагранжиани съвпадат със съответните странични хамилтониани, т.е. $L_b \equiv H_b$ и $L_0 \equiv H_0$, а разпределеният лагранжиан е

$$L(t, a, K, I, \xi, \lambda) \,=\, H(t, a, K, I, \xi) \,+\, \lambda\, K. \tag{3.10}$$

Максимизаторите на лагранжианите са

$$\hat{I}(t, a) \,=\, \frac{e^{r\,t}\xi(t, a) - b(t, a)}{c}, \tag{3.11}$$

$$\hat{I}_0(t) \;=\; \frac{e^{r\,t}\xi(t,0) - b(t,0)}{c}, \tag{3.12}$$

$$\hat{K}_0(a) \;=\; \frac{\xi(0,a) - b(0,a)}{c}. \tag{3.13}$$

Виждаме, че $\hat{I}_0(t) = \hat{I}(t,0)$ за всяко $t \in [0,T]$ и $\hat{K}_0(a) = \hat{I}(0,a)$ за всяко $a \in [0,\omega]$. За да приложим теорема 2.2 трябва да намерим абсолютно непрекъснато по характеристичното направление решение за спрегнатата променлива $\xi(t,a)$. Тя трябва да бъде решение на спрегнатото уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right)\xi(t,a) \;=\; -e^{-r\,t}\,p\,(t-a) \;+\; \delta\,\xi(t,a) \;-\; \lambda(t,a) \tag{3.14}$$

за почти всяко $(t,a) \in Q$ при терминални условия

$$\xi(t,\omega) = \alpha(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3.15}$$

$$\xi(T,a) = \beta(a), \qquad a \in [0,\omega], \tag{3.16}$$

за някакви функции $\alpha \in L^1([0,T])$ и $\beta \in L^1([0,\omega])$, удовлетворяващи условията

$$\alpha(t) \geq 0, \quad \beta(a) \geq 0, \quad \alpha(t)K(t,\omega) = \beta(a)K(T,a) = 0. \tag{3.17}$$

Множителят на Лагранж $\lambda(t,a)$ трябва да бъде интегруем в областта Q и за него трябва да бъдат изпълнени следните условия за неотрицателност и за допълваща нестрогост:

$$\lambda(t,a) \geq 0, \quad \lambda(t,a)K(t,a) = 0 \quad \text{за п. в. } (t,a) \in Q. \tag{3.18}$$

Виждаме, че условията на теорема 2.2 ще бъдат удовлетворени, ако докажем съществуването на абсолютно непрекъснато по характеристичното направление решение за двойката (K,ξ) от фазова и спрегната променливи на граничната задача диференциални уравнения (3.2) и (3.14) при условията (3.3)-(3.5), (3.11)-(3.13) и (3.15)-(3.18). При всеки фиксиран винтидж $x = t - a$, тази задача е двуточкова гранична задача за обикновени диференциални уравнения. В характеристичните координати (t,x) тази задача е

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t) = \boldsymbol{I}(t) - \delta\,\boldsymbol{K}(t), \tag{3.19}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \delta\,\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{p}\,e^{-r\,t} - \boldsymbol{\lambda}(t), \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{I}(t) = \frac{1}{c}\left(e^{r\,t}\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{b_0}\,e^{-\boldsymbol{\Delta}\,t}\right), \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{K}(t) \geq 0, \quad \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{t_0}\right) = \boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{t_0}\right), \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \overset{def}{=} \boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{t_1}\right) \geq 0, \quad \boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{t_1}\right) = 0, \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t)\,\boldsymbol{K}(t) = 0 \tag{3.24}$$

за някакви множител на Лагранж $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t, t-x) \in L^1(Q)$ и функция $\boldsymbol{\gamma} = \gamma(x) \in L^1([-\omega, T])$. При това решението за спрегнатата променлива $\boldsymbol{\xi}(t) = \xi(t, t-x)$ трябва да бъде измеримо и ограничено в областта Q.

В горната система (3.19)-(3.24) ние означихме зависещите от x функции с удебелен шрифт: $\boldsymbol{K}(t) \stackrel{def}{=} K(t, t-x)$, $\boldsymbol{I}(t) \stackrel{def}{=} I(t, t-x)$, $\boldsymbol{\xi}(t) \stackrel{def}{=} \xi(t, t-x)$, $\boldsymbol{\lambda}(t) \stackrel{def}{=} \lambda(t, t-x)$, $\boldsymbol{p} \stackrel{def}{=} p(x)$, $\boldsymbol{\Delta} \stackrel{def}{=} \Delta(x)$ и $\boldsymbol{b}(t) \stackrel{def}{=} \boldsymbol{b_0}\, e^{-\boldsymbol{\Delta}\, t} = b_0(x)\, e^{\Delta(x)\, x}\, e^{-\Delta(x)\, t}$. С $\boldsymbol{\gamma}$ ние означихме функцията $\boldsymbol{\gamma} \stackrel{def}{=} \alpha(\boldsymbol{t_1}) = \alpha(x+\omega)$ когато $x \le T - \omega$ и $\boldsymbol{\gamma} \stackrel{def}{=} \beta(\boldsymbol{t_1} - x) = \beta(T - x)$ когато $x \ge T - \omega$ във формулите (3.23). Освен това означихме с $\boldsymbol{t_0} \stackrel{def}{=} \max\{x, 0\}$ и с $\boldsymbol{t_1} \stackrel{def}{=} \min\{x+\omega, T\}$ краищата на характеристичната отсечка от областта Q, съответстваща на всяко фиксирано $x \in [-\omega, T]$.

В следващите две твърдения изследваме свойствата на решението на тази двуточкова гранична задача.

Твърдение 3.1. *Нека* $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\xi})$ *е решение на задачата* (3.19)-(3.24), *която съответства на фиксирано* $x \in [-\omega, T]$, *и нека* $\boldsymbol{I}$ *е управляващата променлива, която съответства на* $\boldsymbol{\xi}$. *Нека да дефинираме функцията*

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) \stackrel{def}{=} (r + \delta + \boldsymbol{\Delta})\, \boldsymbol{b_0}\, e^{-(r+\boldsymbol{\Delta})\, t} - \boldsymbol{p}\, e^{-r\, t}. \tag{3.25}$$

Единствената нула $\boldsymbol{l}$ *на тази функция е*

$$\boldsymbol{l} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}}\Big(\ln \boldsymbol{b_0} + \ln(r + \delta + \boldsymbol{\Delta}) - \ln \boldsymbol{p}\Big). \tag{3.26}$$

Следните три твърдения са в сила:

1. *Стойностите на въведената в* (3.23) *функция* $\boldsymbol{\gamma}$ *са ограничени в интервала* $\big[\,0,\, \boldsymbol{b_0}\, e^{-(r+\boldsymbol{\Delta})\, \boldsymbol{t_1}}\big]$;
2. *Ако* $[\tau_1, \tau_2]$ *е интервал с положителна дължина, в който фазовото ограничение е активно, то във вътрешността* (τ_1, τ_2) *на този интервал множителят на Лагранж е* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \boldsymbol{\Lambda}(t)$;
3. *Управляващата променлива* $\boldsymbol{I}(t)$ *е абсолютно непрекъснато решение на диференциалното уравнение*
$$\dot{\boldsymbol{I}}(t) = (r + \delta)\, \boldsymbol{I}(t) + \frac{e^{r\, t}}{c}\Big(\boldsymbol{\Lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)\Big) \tag{3.27}$$
при някое терминално условие $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t_1}) \in \left[-\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{t_1}},\, 0\right]$. *При това ако* $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t_1}) > 0$, *то терминалното условие е* $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t_1}) = -\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{t_1}}$.

Виждаме, че задачата (3.19) - (3.24) е еквивалентна на задачата (3.19), (3.21) - (3.24), (3.27). От друга страна вместо да търсим решение $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{I})$ на втората гранична задача, по-удобно е да търсим следните „олихвена“ фазова променлива и „дисконтирана“ управляваща променлива:

$$k(t) \stackrel{def}{=} e^{\delta\, t}\, \boldsymbol{K}(t), \quad i(t) \stackrel{def}{=} e^{-(r+\delta)\, t}\, \boldsymbol{I}(t). \tag{3.28}$$

За тези променливи граничната задача (3.19), (3.21)-(3.24), (3.27) добива вида:

$$\dot{k}(t) = e^{(r+2\delta)t}\, i(t), \qquad k(\boldsymbol{t_0}) = e^{(r+2\delta)\boldsymbol{t_0}}\, i(\boldsymbol{t_0}), \tag{3.29}$$

$$\dot{i}(t) = \frac{e^{-\delta t}}{c}\Big(\boldsymbol{\Lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)\Big), \qquad \eta \overset{def}{=} i(\boldsymbol{t_1}) \in \left[-\frac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-(r+\delta+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{t_1}},\, 0\right], \tag{3.30}$$

$$k(t) \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t)\, k(t) = 0. \tag{3.31}$$

При това ако $k(\boldsymbol{t_1}) > 0$, терминалното условие е $i(\boldsymbol{t_1}) = \eta_{min} \overset{def}{=} -\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-(r+\delta+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{t_1}}$.

Твърдение 3.2.

1. *Ако* $\boldsymbol{t_1} \leq \boldsymbol{l}$, *то* $\boldsymbol{K}(t) \equiv \boldsymbol{I}(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \boldsymbol{\Lambda}(t)$ *е решение на двуточковата гранична задача* (3.19), (3.21)-(3.24), (3.27)*;*

2. *Ако* $\boldsymbol{t_1} > \boldsymbol{l}$, *то в интервала* $[\boldsymbol{l}, \boldsymbol{t_1}]$ *няма подинтервал с ненулева дължина, в който фазовото ограничение да е активно за решението на задачата* (3.19), (3.21)-(3.24), (3.27)*. Освен това можем да приемем, че в интервала* $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{l}]$ *решението няма повече от един подинтервал на активност за фазовото ограничение, при това началото на този подинтервал е* $\boldsymbol{t_0}$*.*

След като намерихме решение на задачата (3.19)-(3.24) за характеристиките, за които $\boldsymbol{t_1} \leq \boldsymbol{l}$, трябва да намерим решение и за оставащите случаи. За целта предлагаме числен метод на основата на метода на стрелбите. Преди да го опишем дефинираме понятието изстрел.

Дефиниция на изстрел. *Избираме стойност за* $\eta \in \left[-\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-(r+\delta+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{t_1}},\, 0\right]$. *За избраната стойност намираме „дисконтираното“ управление* $i(t)$ *като решение на уравнението* (3.30) *при* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv 0$ *и терминално условие* $i(\boldsymbol{t_1}) = \eta$.

Въвеждаме кривата Γ, *която да е правата* $\Gamma \overset{def}{=} \{(\boldsymbol{t_0}, v) : v \in \mathbb{R}\}$ *в случая* $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{t_0}$, *и да е кривата* $\Gamma \overset{def}{=} \{(t,v)\} = \{(\boldsymbol{t_0}, v) : v \geq 0\} \cup \{(t, 0) : \boldsymbol{t_0} \leq t \leq \boldsymbol{l}\} \cup \{(\boldsymbol{l}, v) : v \leq 0\}$ *в случая* $\boldsymbol{t_0} < \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{t_1}$. *Графиката на управлението* $i(\cdot)$ (*при* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv 0$ *и* $i(\boldsymbol{t_1}) = \eta$) *пресича* Γ *в точката* $P(t_p, v_p)$.

След определянето на $P(t_p, v_p)$ *намираме променливата* $k(t)$ *за интервала* $[t_p, \boldsymbol{t_1}]$ *като решение на* (3.29) *при началното условие* $k(t_p) = e^{(r+2\delta)t_p}\, v_p$.

Асоциираме понятието изстрел с функцията $\Sigma(\eta) \overset{def}{=} k(\boldsymbol{t_1})$ *и следователно ще казваме, че на всяка стойност за* $\eta \in \left[-\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-(r+\delta+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{t_1}},\, 0\right]$ *се съпоставя съответна стойност за изстрела* $\Sigma(\eta)$.

Твърдение 3.3. *Дефинираната по-горе като изстрел функция* $\Sigma(\eta)$ *е непрекъсната и строго растяща.*

Алгоритъм за решаване на граничната задача. *За да намерим решение на граничната задача* (3.19)-(3.24) *за характеристиките, за които* $\boldsymbol{t_1} \geq \boldsymbol{l}$, *намираме решение* $(i(t), k(t))$ *на задачата* (3.29)-(3.31). *Етапите са следните:*

1. *Първо стреляме с минималната стойност за* η, *която е* $\eta = \eta_{min} \stackrel{def}{=} -\dfrac{\boldsymbol{b_0}}{c}\, e^{-(r+\delta+\boldsymbol{\Delta})\,\boldsymbol{t_1}}$. *Ако* $\Sigma\,(\eta_{min}) \geq 0$, *преминаваме към последния етап 3.*

2. *На предния етап сме получили, че* $\Sigma\,(\eta_{min}) < 0$. *Сега стреляме с максималната стойност за* η, *която е* $\eta_{max} \stackrel{def}{=} 0$. *При този изстрел* $i(t) \geq 0$ *за всяко* $t \in [t_p, \boldsymbol{t_1}]$ *и следователно* $\Sigma\,(\eta_{max}) \geq 0$. *Ако* $\Sigma\,(\eta_{max}) = 0$, *преминаваме към последния етап 3.*

   Нека $\Sigma\,(\eta_{max}) > 0$. *Тогава съществува* $\eta \in (\eta_{min}, \eta_{max})$, *за която* $\Sigma(\eta) = 0$. *За да получим тази стойност прилагаме метода на бисекцията: Разделяме текущия интервал* $[\eta_1, \eta_2]$, *за който* $\Sigma\,(\eta_1) < 0$ *и* $\Sigma\,(\eta_2) > 0$, *и стреляме с междинната стойност* $(\eta_1 + \eta_2)\,/2$. *От стойността на изстрела* $\Sigma\Big(\,(\eta_1 + \eta_2)\,/2\Big)$ *определяме следващия интервал и така нататък, докато апроксимираме стойността на* η, *за която* $\Sigma(\eta) = 0$.

3. *Додефинираме получените на последния изстрел управляваща и фазова променливи* ($i(t)$ *и* $k(t)$), *като полагаме* $i(t) \equiv k(t) \equiv 0$ *за* $t \in [\boldsymbol{t_0},\, t_p]$. *След това полагаме множителя на Лагранж да е* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \boldsymbol{\Lambda}(t)$ *за* $t \in [\boldsymbol{t_0},\, t_p]$ *и* $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv 0$ *за* $t \in (t_p\,, \boldsymbol{t_1}]$. *От определенията* (3.28) *намираме управляващата променлива* $\boldsymbol{I}(t)$ *и фазовата променлива* $\boldsymbol{K}(t)$. *Накрая от уравнението* (3.21) *намираме спрегнатата променлива* $\boldsymbol{\xi}(t)$.

От горния алгоритъм е ясно, че граничната задача (3.19)-(3.24) има решение за характеристиките, за които $\boldsymbol{t_1} \geq \boldsymbol{l}$. Обаче граничната задача има решение и за останалите характеристики. Останалите условия, доказващи приложимостта на теорема 2.2, следват от следващото твърдение:

Твърдение 3.4. *Функцията* $\xi(t,\, t-x)$ *е непрекъсната по* x. *Следователно тази функция е непрекъсната в компактното множество* Q, *а функцията* $\gamma(x)$ *е интегруема в интервала* $[-\omega, T]$. *Функцията* $\lambda(t,\, t-x)$ *е интегруема в множеството* Q.

От това твърдение следва, че намереното чрез алгоритъма и твърдение 3.2 решение на граничната задача (3.19)-(3.24) е оптимално за модела (3.1)-(3.5).

Апробация

Резултатите от дисертацията са публикувани в следните статии:

1. Krastev V., Arrow-type sufficient conditions for optimality of age-structured control problems, Cent. Eur. J. Math, June 2013, 11(6), 1094–1111;

2. Krastev V., Mangasarian-type sufficient optimality conditions for age-structured control problems with state constraints. An application to investment in vintage capital, Serdica Math. J. (to appear);

3. Krastev V., Optimal dynamic advertising strategy under age-specific market segmentation, Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11), Proceedings of the 37th International Conference, Sozopol, Bulgaria, June 8-13, 2011, 296–302.

Части от дисертацията са докладвани на:

– Международна конференция, организирана от ф-т „Приложна математика и информатика" към ТУ-София: AMEE '11, Созопол, юни, 2011;

– Семинар на секция „Изследване на операциите" – ИМИ – БАН, юни, 2012;

– Семинар на секция „Изследване на операциите" – ИМИ – БАН, декември, 2012.

Авторска справка

По мнение на автора основните приноси на дисертацията са следните:

1. Представен е метод за решаване на някои възрастово-структурирани задачи на оптималното управление чрез свеждане към задачи за ОДУ;

2. Получени са достатъчни условия за оптималност за един клас възрастово-структурирани задачи без фазови ограничения с краен времеви интервал;

3. За възрастово-структурираните задачи с безкраен времеви интервал са формулирани дефиниции за оптималност, аналогични на някои от дефинициите за задачи за ОДУ;

4. Получени са достатъчни условия за оптималност за един клас възрастово-структурирани задачи без фазови ограничения с безкраен времеви интервал;

5. Формулирани са класове от възрастово-структурирани задачи с фазови ограничения (смесени и чисти локални) и краен времеви интервал;

6. За формулираните възрастово-структурирани задачи с фазови ограничения са получени достатъчни условия за оптималност;

7. Съставен е модел за определяне на оптимални инвестиции в средства за производство. В модела е отразено условието за неотрицателност на наличните средства за производство чрез включването на чисто локално фазово ограничение;

8. Представен е числен алгоритъм за решаване на съставения модел;

9. На основата на представения алгоритъм и получените достатъчни условия за оптималност е доказано съществуването на решение на съставения модел.

Библиография

[1] Almeder C., Caulkins J.P., Feichtinger G., Tragler G., An age-structured single-state drug initiation model - cycles of drug epidemics and optimal prevention programs, Socio-Economic Planning Sciences, 2004, 38(1), 91–109

[2] Aniţa S., Analysis and control of age-dependent population dynamics, Kluwer, Dordrecht, 2000

[3] Aniţa S., Iannelli M., Kim M.-Y., Park E.-J., Optimal harvesting for periodic age-dependent population dynamics, SIAM J. Appl. Math., 1998, 58(5), 1648–1666

[4] Barucci E., Gozzi F., Technology adoption and accumulation in a vintage-capital model, Journal of Economics, 2001, 74(1), 1–38

[5] Bayus B., The dynamic pricing of next generation consumer durables, Marketing Science, 1992, 11(3), 251–265

[6] Bazaraa M., Shetty C., Nonlinear programming. Theory and algorithms, Mir, Moscow, 1982, (Russian translation)

[7] Behrens D.A., Caulkins J.P., Tragler G., Feichtinger G., Optimal control of drug epidemics: Prevent and treat - but not at the same time?, Management Science, 2000, 46(3), 333–347

[8] Brokate, M., Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics, J. Math. Biol., 1985, 23(1), 75–101

[9] Carlson D., Haurie A., Leizarowitz A., Infinite horizon optimal control: Deterministic and stochastic systems, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991

[10] Carlson D., Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: When optimal solutions are agreeable, J. Optim. Theory Appl., 1990, 64(1), 55–69

[11] Crampin M., Pirani F.A.E., Applicable differential geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[12] Derzko N., Sethi S., Thompson G., Distributed parameter systems approach to the optimal cattle ranching problem, Optimal Control Appl. Methods, 1980, 1, 3–10

[13] Faggian S., Applications of dynamic programming to economic problems with vintage capital, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, 2008, 15, 527–553

[14] Faggian S., Grosset L., Optimal investment in age-structured goodwill, preprint available at http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2097829

[15] Feichtinger G., Hartl R.F., Kort P.M., Veliov V.M., Anticipation effects of technological progress on capital accumulation: a vintage capital approach, J. Econom. Theory, 2006, 126(1), 143–164

[16] Feichtinger G., Hartl R.F., Kort P.M., Veliov V.M., Capital accumulation under technological progress and learning: A vintage capital approach, European J. Oper. Res., 2006, 172(1), 293–310

[17] Feichtinger G., Hartl R.F., Optimal control of economic processes. Applications of the maximum principle to economic sciences. Walter de Gruyter, Berlin, 1986 (in German)

[18] Feichtinger G., Tragler G., Veliov V.M., Optimality conditions for age-structured control systems, J. Math. Anal. Appl., 2003, 288(1), 47–68

[19] Fichtenholz G.M., A course of differential and integral calculus, Vol 1, 8th ed., Fizmatlit, Moscow, 2003, (in Russian)

[20] Gaimon C., Thompson G., A distributed parameter cohort personnel planning model that uses cross-sectional data, Management Science, 1984, 30(6), 750–764

[21] Grosset L., Viscolani B., Advertising for the introduction of an age-sensitive product, Optimal Control Appl. Methods, 2005, 26(3), 157–167

[22] Gurtin M.E., MacCamy R.C., Nonlinear age-dependent population dynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, 54, 281–300

[23] Hardy G., Littlewood J., Pólya G., Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934

[24] Hartl R.F., Kort P.M., Feichtinger G., Offence control taking into account heterogeneity of age, J. Optim. Theory Appl., 2003, 116(3), 591-620

[25] Hartl R.F., Sethi S., Vickson R., A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints, SIAM Rev., 1995, 37(2), 181–218

[26] Haurie A., Sethi S., Hartl R.F., Optimal control of an age-structured population model with applications to social services planning, Large Scale Systems, 1984, 6(2), 133–158

[27] Hoppensteadt F., Mathematical theories of populations: demographics, genetics and epidemics, SIAM, Philadelphia, 1975

[28] Ioffe A.D., Tikhomirov V.M., Theory of extremal problems, Nauka, Moscow, 1974, (in Russian)

[29] Kolmogorov A., Fomin S., Elements of the theory of functions and functional analysis, Nauka, Moscow, 1972 (in Russian)

[30] Krastev V., Arrow-type sufficient conditions for optimality of age-structured control problems, Cent. Eur. J. Math, June 2013, 11(6), 1094–1111

[31] Krastev V., Mangasarian-type sufficient optimality conditions for age-structured control problems with state constraints. An application to investment in vintage capital, Serdica Math. J. (to appear)

[32] Krastev V., Optimal dynamic advertising strategy under age-specific market segmentation, Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE '11), Proceedings of the 37th International Conference, Sozopol, Bulgaria, June 8-13, 2011, 296–302

[33] Lefkovitch L., A theoretical evaluation of population growth after removing individuals from some age groups, Bulletin of Entomological Research, 1967, 57(3), 437–445

[34] Lefkovitch L., The study of population growth in organisms grouped by stages, Biometrics, 1965, 21(1), 1–18

[35] McKendrick A.C., Applications of mathematics to medical problems, Proc. Edinburg Math. Soc., 1926, 44, 98–130

[36] Nerlove M., Arrow K., Optimal advertising policy under dynamic conditions, Economica, 1962, 29, 129–142

[37] Pontryagin L.S., Ordinary differential equations, 4th ed., Nauka, Moscow, 1974, (in Russian)

[38] Prskawetz A., Tsachev T., Veliov V.M., Optimal education in an age-structured model under changing labor demand and supply, Macroeconomic Dynamics, 2012, 16(2), 159–183

[39] Rorres C., Fair W., Optimal age specific harvesting policy for continuous-time population model, in Modeling and Differential Equations in Biology, edited by T.A. Burton, Marcel Dekker, New York, 1980

[40] Seierstad A., Sydsæter K., Sufficient conditions in optimal control theory, International Economic Review, 1977, 18(2), 367–391

[41] Seierstad A., Sydsæter K., Optimal control theory with economic applications, Elsevier, Amsterdam, 2002

[42] Sharpe F.R., Lotka A.J., A problem in age-distribution, Philosophical Magazine, 1911, 21, 435–438

[43] Stoer J., Bulirsch R., Introduction to numerical analysis, 2nd ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993

[44] Vasil'ev F.P., Numerical methods for solving extremal problems, Nauka, Moscow, 1980, (in Russian)

[45] Von Foerster H., Some remarks on changing populations, in The Kinetics of Cellular Proliferation, edited by F. Stohlman, Grune and Stratton, New York, 1959, 382–407

[46] Veliov V.M., Optimal control of heterogeneous systems: Basic theory, J. Math. Anal. Appl., 2008, 346, 227–242

[47] Webb G.F., Theory of nonlinear age-dependent population dynamics, Marcel Dekker, New York-Basel, 1985