БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по математика и информатика

Християна Николова Кулина

ДИЗАЙНИ В АНТИПОДАЛНИ ПОЛИНОМИАЛНИ МЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен

"доктор"

професионално направление 4.5. Математика

научна специалност 01.01.02 Алгебра и Теория на числата

Научен ръководител:
проф. дмн Петър Бойваленков

София, 2012 г.

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по математика и информатика

Христина Николова Кулина

ДИЗАЙНИ В АНТИПОДАЛНИ ПОЛИНОМИАЛНИ МЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен

"доктор"

професионално направление 4.5. Математика

научна специалност 01.01.02 Алгебра и Теория на числата

Научен ръководител: проф. дмн Петър Бойваленков

Рецензенти:

София, 2012 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на разширено звено към секция *Математически основи на информатиката*, назначено от директора на ИМИ-БАН със заповед 341/20.11.2012, състояло се на 30.11.2012 г.

Дисертационният труд е с общ обем от 130 страници, обособени в увод, четири глави, приложения и списък с използвана литература, състоящ се от 72 заглавия.

Дисертантът работи като главен асистент към катедра *Приложна математика и моделиране* към Факултета по математика и информатика при ПУ "П. Хилендарски".

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... часа в зала .... на ИМИ-БАН на открито заседание на научно жури в състав:

....

....

....

....

....

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ-БАН и на интернет страницата на ИМИ-БАН.

I. ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА

Актуалност на проблема

Настоящият дисертационен труд съдържа резултати, получени при изследването на дизайни в двоичното Хемингово пространство $H(n,2)$ и единичната сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ в n-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, които са класически примери съответно за крайно и безкрайно антиподално полиномиално метрично пространство (АПМП).

Дизайните в Хемингови пространства са разгледани за пръв път от Рао през 40-те години на XX век като комбинаторни структури с приложение в статистиката. Те се наричат още *ортогонални масиви* със сила τ [23] или τ- *независими множества* [3].

Ако C е τ-дизайн, $\tau \geq 1$, то C е τ'-дизайн за всяко $\tau' \in \{0, 1, \ldots, \tau-1\}$. Тъй като $H(n,2)$ е n-дизайн, то произволен τ-дизайн в $H(n,2)$ за $\tau < n$ е апроксимация на цялото пространство $H(n,2)$, като параметърът τ характеризира степента на апроксимация. Това обяснява успешното приложение на ортогоналните масиви в статистиката [46], в теорията на кодирането и криптографията [33].

Една връзка [23, 24, 42] между кодовете, коригиращи грешки, и τ-дизайните в $H(n,2)$ е следната: за всеки линеен код $C \subset H(n,2)$ е изпълнено равенството $\tau(C) = d'(C) - 1$, където $d'(C)$ е дуалното разстояние на C (тоест минималното разстояние на дуалния код).

В този смисъл задачата за изследване на минимални (по мощност) τ-дизайни е дуална на т.нар. основна задача на теорията на кодирането за изследване на максимални (по мощност) кодове с минимално разстояние поне d и дуално разстояние $d' = \tau + 1$.

В книгата "Ортогонални масиви: теория и приложения" [33], авторите Хедаят, Слоен и Стъфкен описват редица свойства и конструкции, показват връзките на ортогоналните масиви с комбинаториката, теорията на крайните полета, теорията на кодирането и криптографията. Поради широкото им приложение за τ-дизайните са създадени редица web-библиотеки като http://www2.research.att.com/ njas/oadir/index.html и http://support.sas.com/techsup/technote/ts723.html.

Сферичните дизайни са разгледани за пръв път като аналог на класическите комбинаторни дизайни от Делсарт-Гьоталс-Зайдел [25] през 1977г. В числените методи точките на сферичен дизайн със сила τ се разглеждат като върхове на квадратурна формула от Чебишев тип (т.е. с еднакви тегла) с алгебрична степен на точност τ (виж например [29, 30, 35, 36]). Този факт обяснява интереса на учени от други области [31, 41, 44, 45] (най-вече физици и астрономи) към сферичните дизайни.

Сферичните 1-дизайни са кодове, чийто център на тежестта съвпада с центъра на единичната сфера. Сферичните 2-дизайни съвпадат с конфигурациите, разглеждани от Шлефли и наричани от него *eutactic star* (виж [21, 25, 43, 49]). Всеки сферичен дизайн води до съществуването на тъждества от вида

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^r = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^{2r},$$

което (за рационални λ_i и цели a_{ij}) играе важна роля при решаването на проблема на Варинг. Връзката между сферичните дизайни и тъждества от горния вид е изследвана от Резник [47, 48].

Посочените факти подчертават, че въпросите за границите на параметрите, за които дизайни в $H(n,2)$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ съществуват, са от особена важност. Класическите резултати в тези задачи са получени чрез линейно програмиране, чрез изследване структурата на разглежданите обекти и чрез конструктивни подходи. Получаването на различни ограничения води до изводи за несъществуване или класификационни резултати.

Основни понятия и известни резултати

С $\mathcal{M}$ означаваме двоичното Хемингово пространство $H(n,2)$ или единичната сфера $\mathbb{S}^{n-1}$.

Дефиниция 1.2.1. Всяко крайно непразно подмножество $C \subset \mathcal{M}$ се нарича код (ако $\mathcal{M} = \mathbb{S}^{n-1}$, C се нарича сферичен код).

Кодът $C \subset \mathcal{M}$ се нарича *антиподален*, ако $C = -C$. Най-важните параметри на код $C \subset \mathcal{M}$ са: *размерност*; *мощност* $M = |C|$; *минимално разстояние* $d(C) = \min\{d(x,y) : x,y \in C, x \neq y\}$ и *максимално скаларно произведение* за сферичен код) $s = s(C) = \max\{\sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y)) : x,y \in C, x \neq y\}$, където $\sigma_{\mathcal{M}}$ е стандартната субституция за съответното антиподално полиномиално метрично пространство. Минималното разстояние и максималното скаларно произведение са свързани с равенството $s(C) = \sigma_{\mathcal{M}}(d(C))$. Код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с тези параметри означаваме като (n,M,s)-код. Друг параметър за сферичен код C е *минималното скаларно произведение* (или *минимален косинус*) $\ell(C) = \min\{\sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y)) : x,y \in C, x \neq y\}$.

Еквивалентна дефиниция за дизайни в двоичното Хемингово пространство $H(n,2)$ е следната.

Дефиниция 1.2.14. Код $C \subset H(n,2)$, за който всяка $M \times \tau$ подматрица на $M \times n$ матрицата на C съдържа всяка наредена τ-орка от $H(\tau,2)$ точно $\frac{|C|}{2^\tau}$ пъти като редове, се нарича τ-дизайн в $H(n,2)$. Максималното число τ, за което C е τ-дизайн се нарича *сила* на дизайна.

Дизайн $C \subset H(n,2)$ с мощност M и сила τ ще означаваме с τ-(n,M). Числото $\lambda = \frac{|C|}{2^\tau}$ се нарича индекс на C.

Дефиниция 1.2.22. (Делсарт-Гьоталс-Зайдел [25]) Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *сферичен τ-дизайн* ($\tau \geq 0$ е цяло число), ако равенството

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{|C|}\sum_{x\in C} f(x)$$

е изпълнено за всеки полином $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от степен, ненадминаваща τ.

Горната дефиниция дава връзка между численото пресмятане на интеграли върху $\mathbb{S}^{n-1}$ и сферичните дизайни и е една от мотивациите за изучаването на сферичните дизайни.

Следващата теорема е основен инструмент за изследване на параметрите на кодове и дизайни в АПМП.

Теорема 1.2.4. [37] За всеки полином $f(t) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i Q_i(t)$ и за всеки код $C \subset \mathcal{M}$ е в сила следното равенство:

$$| C \mid f(1) + \sum_{x,y\in C, x\neq y} f(\sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y))) = | C |^2 f_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} \Big| \sum_{x\in C} v_{ij}(x) \Big|^2, \qquad (0.0.1)$$

където $r_i = dim(V_i)$ и $\{v_{ij}(x) : 1 \leq j \leq r_i\}, i = 0,1,\ldots,$ е ортонормиран базис на взаимно ортогоналните крайномерни подпространства V_i, за които $\mathcal{L}_2(\mathcal{M}) = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$.

Една от основните техники за изследване на дизайни е т. нар. полиномиален подход. Този подход се основава на следното необходимо и достатъчно условие кодът $C \subset \mathcal{M}$ да е τ-дизайн в $\mathcal{M}$, използвано често като еквивалентна дефиниция (виж например Фазекаш-Левенщейн [28]) за дизайни.

Теорема 1.2.5. [37] Нека $\mathcal{M}$ е АПМП, $\tau \geq 1$. Код $C \subset \mathcal{M}$ е τ-дизайн в $\mathcal{M}$, тогава и само тогава, когато за всяко $y \in \mathcal{M}$ и за всеки реален полином от степен най-много τ е в сила:

$$\sum_{x\in C} f(\sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y))) = f_0|C|, \tag{0.0.2}$$

където f_0 е първият коефициент в разлагането $f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i Q_i(t)$ по ЗСФ на $\mathcal{M}$.

За дизайни в $\mathcal{M}$ се търсят граници на величината

$$B(n,\tau) = \min\{M = |C| : \text{ съществува } \tau\text{-дизайн } C \subset \mathcal{M}\}$$

при фиксирани n и τ. Граници за $B(n,\tau)$ в (крайното $H(n,2)$ и безкрайното $\mathbb{S}^{n-1}$) АПМП са получени в [8, 9, 17, 18, 22, 23, 25, 27].

В Хеминговото пространство границата на Делсарт за τ-дизайни и границата на Рао съвпадат. Добре известните граници на Rao [46] и Хеминг са универсални граници от вида

$$D(n,\tau) \le |C| \le \frac{2^n}{D(n,d(C)-1)}, \tag{0.0.3}$$

където за $D(n,\tau)$ имаме

$$D(n,\tau) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}, & \text{при } \tau = 2k, \\ 2\sum_{j=0}^{k} \binom{n-1}{j}, & \text{при } \tau = 2k-1. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Кодове, които достигат лявата или дясната страна на (0.0.4) се наричат съответно *плътни дизайни* и *съвършени кодове*.

Долна граница за $B(n,\tau)$ за сферични τ-дизайни е класическата граница на Делсарт-Гьоталс-Зайдел [25].

$$B(n,\tau) \ge \begin{cases} \binom{n+k-1}{n-1} + \binom{n+k-2}{n-1}, & \text{ако } \tau = 2k, \\ 2\binom{n+k-2}{n-1}, & \text{ако } \tau = 2k-1. \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Когато $\mathcal{M} = H(n,2)$ задачата за намиране на долна граница на $B(n,\tau)$ е еквивалентна на задачата за намиране на долна граница на

$$L(n,\tau) = \min\{\lambda : \text{ съществува } \tau\text{-дизайн } C \subset \mathcal{H}(n,2)\},$$

тъй като мощността $|C|$ при фиксирано τ е еднозначно определена от λ.

Известните граници за $L(n,\tau)$ са събрани от Хедаят, Слоен и Стъфкен в книгата [33]. В Таблица 1.1 представяме част от Таблица 12.1 от тази книга, която съдържа разглежданите от нас отворени случаи. За всяко n от 4 до 14 и всяко τ от 4 до 10 са дадени минималните възможни индекси $\lambda = \frac{|C|}{2^\tau}$, за които съществува τ-дизайн.

Означението $\lambda_0 - \lambda_1$ в Таблица 1.1 показва, че всеки τ-дизайн със съответните n и τ трябва да има индекс не по-малък от λ_0, а τ-дизайн с индекс λ_1 е известен.

Таблица 1.1: Долни граници за $L(n, \tau)$

n \ τ	4	5	6	7	8	9	10
4	1						
5	1	1					
6	2	1	1				
7	$^{sz}4$	2	1	1			
8	4^c	$^{sz}4$	2	1	1		
9	6–8	4^c	4	2	1	1	
10	6–8	6–8	$^{sz}6$–8	4	2	1	1
11	6–8	6–8	8^c	$^{sz}6$–8	4	2	1
12	7–8	6–8	12–16	8^c	6–8	4	2
13	8	7–8	16	12–16	10–16	6–8	4
14	8	8	16	16	16^c	10–16	6–8

Друг важен параметър на дизайни в $H(n,2)$ е техният радиус на покритие.

Дефиниция 3.1.1. Числото $\rho(C) = \max\limits_{y \in H(n,2)} \min\limits_{x \in C} d(x,y)$ се нарича радиус на покритие на C.

Ако работим със скаларните произведения, числото $t_c = 1 - \frac{2\rho(C)}{n} = \min\limits_{y \in H(n,2)} \max\limits_{x \in C} \langle x, y \rangle$ също наричаме радиус на покритие на C.

Фазекаш-Левенщейн [28, Теорема 2] получават следната долна граница за t_c (или горна за $\rho(C)$), която зависи само от размерността и силата на дизайна: ако C е $(2k-\varepsilon)$-дизайн, то

$$t_c \geq t_{FL} = t_k^{0,1-\varepsilon}, \tag{0.0.6}$$

където $t_k^{0,1-\varepsilon}$ е най-големият корен на съответния съседен полином. Те отбелязват също, че за всяко $\tau = 1, 2, \ldots$ съществуват плътни τ-дизайни, достигащи границата (0.0.6).

По аналогия със сферичните дизайни (вж. [2, 10]) въвеждаме нова числова характеристика на кодове и дизайни в $H(n,2)$ – техните моменти.

Дефиниция 3.2.1. За даден код $C \subset H(n,2)$ и за всяко $i \geq 1$, числото

$$M_i = \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} \Big(\sum_{x \in C} v_{ij}(x)\Big)^2,$$

се нарича i-ти момент на C.

Разглеждаме $(2k-1)$-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за параметрите и скаларните произведения на които са изпълнени условията:

$$2 \leq \rho_0 |C| < 3, \quad \text{и} \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1, \tag{0.0.7}$$

(ρ_0, α_0, α_{k-1} са параметри въведени от Левенщейн [38, 40]).

Байнок [5, 6] дава конструкции на сферични 3-дизайни за всички възможни четни мощности и всички нечетни мощности по-големи или равни на: $5n/2$ за $n \geq 6$; на 11 за $n = 3, 4$; на 15 за $n = 5, 6$. От друга страна Бойваленков-Данев-Никова [16] и Бойваленков-Бумова-Данев [12] доказват, че не съществуват 3-дизайни с нечетна мощност, за които $\rho_0|C| < 2$. По-късно Бойваленков-Бумова-Данев [13] доказват несъществуването на 3-дизайни с нечетна мощност в още 50 (за тях $\rho_0|C| \geq 2$) от всички 144 отворени дотогава случая за $3 \leq n \leq 50$, т.е. остават 94 отворени случая. За 47 от тях са изпълнени условията (0.0.7). Подобна е и ситуацията при $\tau = 5$.

Цели и задачи

Дисертационният труд е посветен на изследването на четири основни задачи.

Задача 1. *За фиксирани n и τ да се намери или оцени величината $L(n,\tau)$ в отворените случаи на Таблица 1.1 [33, Research Problem 12.4].*

Тази задача е разгледана и решена в няколко случая във втора глава. Част от резултатите са публикувани в [5], а получените нови точни стойности на $L(n,\tau)$ са предложени за публикуване в [2].

Задача 2. *Да се изследват и оценят радиусът на покритие и моментите на дизайни в $H(n,2)$.*

На тази задача е посветена трета глава. Получените резултати са публикувани в [4] и [6].

Задача 3. *За сферичен τ-дизайн при фиксирани n и τ и наложените ограничения (0.0.7) да се намери или оцени величината $B(n,\tau)$.*

Задача 4. *За фиксирани размерност $n \geq 3$, сила $\tau \geq 2$ и мощност M да се определи дали съществува сферичен τ-дизайн с M точки върху $\mathbb{S}^{n-1}$.*

На последните две задачи е посветена четвърта глава. Получените резултати за несъществуване на някои класове сферични дизайни и новите[1] долни граници за $B(n,\tau)$ са публикувани в [1], [3] и [7].

II. СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Глава 1. Кодове и дизайни в $H(n,2)$ и $\mathbb{S}^{n-1}$

Нека $\mathcal{M}$ е компактно метрично пространство с краен диаметър $D = D(\mathcal{M}) = \max\limits_{x,y\in\mathcal{M}} d(x,y)$ и крайна нормализирана мярка $\mu_{\mathcal{M}(.)}$ (за краткост $\mu(.)$). Нека мярката $\mu(.)$ притежава свойството $\mu(B_x(d)) = \mu(d), (0 \leq d \leq D)$, тоест не зависи от избора на точката $x \in \mathcal{M}$. Тук $B_x(d) = \{y \in \mathcal{M} | d(x,y) \leq d\}$ е затвореното кълбо в $\mathcal{M}$ с център точката x и радиус d. Нормализирането се изразява в това, че $\mu(D) = \mu(\mathcal{M}) = 1$.

С $\sigma_{\mathcal{M}}(d)$ означаваме непрекъснатата, строго намаляваща функция (наречена субституция) от множеството $\{d(x,y) \mid x,y \in \mathcal{M}\}$ в интервала $[-1,1]$, за която

$$\sigma_{\mathcal{M}}(D) = -1 \leq \sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y)) \leq \sigma_{\mathcal{M}}(0) = 1 \text{ за всяко } x,y \in \mathcal{M}.$$

Обратната функция означаваме $\sigma_{\mathcal{M}}^{-1}$, тоест $\sigma_{\mathcal{M}}^{-1}(t) = d \Leftrightarrow t = \sigma_{\mathcal{M}}(d)$.

Дефиниция 1.1.1. Нека хилбертовото пространство $\mathcal{L}_2(\mathcal{M})$ от комплекснозначни функции с интегрируем квадрат, снабдено със стандартно скаларно произведение

$$\langle u,v\rangle = \int\limits_{\mathcal{M}} u(x)\overline{v(x)}d\mu(x).$$

[1] Публикациите са през 2007 и 2009 г. По-късно Бойваленков и Стоянова подобряват долните граници за $B(n,5)$ в някои размерности [19, 20].

се разлага в крайна (с $D+1$ члена, когато $\mathcal{M}$ е крайно) или изброима (когато $\mathcal{M}$ е безкрайно) директна сума на взаимно ортогонални крайномерни подпространства $\mathcal{L}_2(\mathcal{M}) = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots$.

Пространството $\mathcal{M}$ се нарича **полиномиално метрично пространство (ПМП)**, ако съществуват:

а) редица от пространства $V_0, V_1 \ldots$ (V_0 е пространство от константни функции). Означаваме $r_i = dim(V_i)$ и нека $\{v_{ij}(x) : 1 \leq j \leq r_i\}, i = 0, 1, \ldots,$ е ортонормиран базис на V_i;

б) реалните полиноми $Q_i(t), i = 0, 1, 2, \ldots$ от степен i, наречени зонални сферични функции (ЗСФ),

такива че, за всяко $x, y \in \mathcal{M}$ е изпълнено:

$$Q_i(\sigma_{\mathcal{M}}(d(x,y))) = \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} v_{ij}(x) \overline{v_{ij}(y)}. \tag{0.0.8}$$

Крайните ПМП са $P-$ и $Q-$ полиномиални асоциативни схеми [22] и не са напълно класифицирани. Безкрайните ПМП са компактни, свързани, силно хомогенни пространства [25, 26, 34, 38, 53] и са напълно класифицирани от Wang [53].

Дефиниция 1.1.2. Полиномиалното метрично пространство $\mathcal{M}$ се нарича антиподално (съкратено АПМП), ако за всяка точка $x \in \mathcal{M}$ съществува точка $\overline{x} \in \mathcal{M}$, такава че $\sigma(d(x,y)) + \sigma(d(\overline{x}, y)) = 0$.

Най-важните примери на крайни АПМП са двоичното Хемингово пространство $H(n,2)$ и пространството на Джонсън $J(2w, w)$. Измежду безкрайните ПМП само Евклидовите сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ са антиподални.

Полиномите $\{Q_i(t), i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$ (където $N = D + 1$, ако $\mathcal{M}$ е крайно и $N = \infty$, ако $\mathcal{M}$ е безкрайно) образуват еднозначно определена ортогонална система в $[-1, 1]$ със съответни тегла. Всеки полином $f(t)$ от степен $k < N$ се записва по единствен начин във вида

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i Q_i(t). \tag{0.0.9}$$

Коефициентите f_i могат да бъдат намерени по няколко начина, в частност и от системата линейни уравнения, която се получава чрез сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на t.

Двоичното пространство на Хеминг $H(n,2)$ с метриката на Хеминг е крайно АПМП ([15, 22, 28, 39]) с диаметър $D(H(n,2)) = n$. Стандартната линейна субституция се задава чрез равенството

$$\langle x, y \rangle = \sigma(d(x,y)) = 1 - \frac{2d(x,y)}{n}. \tag{0.0.10}$$

Зоналните сферични функции за $H(n,2)$ са полиномите

$$Q_i^{(n)}(t) = Q_i^{(n)}(\sigma^{-1}(d(x,y))) = \frac{1}{r_i} K_i^{(n)}(\frac{n}{2}(1-t)),$$

където $K_i^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{z}{j} \binom{n-z}{i-j}$ са полиномите на Кравчук от степен i, а $r_i = \binom{n}{i}$.

Редица свойства на τ-дизайните в $H(n,2)$ [33] следват от Дефиниция 1.2.14, като следните две са особено важни за нас.

Свойство 1.2.18. За всяко естествено число $n' \leq \tau$, всяка $M \times n'$ подматрица на матрицата на τ-(n, M) дизайн е матрица на дизайн с параметри τ'-(n', M), където $\tau' = \min\{n', \tau\}$.

Свойство 1.2.19. Да пренаредим матрицата на C така че редовете, започващи с нули да са преди редовете, започващи с единици. При премахването на първия стълб на така наредената матрица се получават съответно две матрици T_1 и T_2 на дизайни с параметри $(\tau$-1)-(n-1, $\frac{M}{2}$).

От Свойства 1.2.18 и 1.2.19 лесно следва монотонност за функцията $L(n,\tau)$.

Теорема 1.2.21. За всяко n и τ са валидни следните неравенства:

а) $L(n+1,\tau) \geq L(n,\tau)$;

б) $L(n+1,\tau+1) \geq L(n,\tau)$.

В n-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ означаваме с $\mathbb{S}^{n-1}$ единичната сфера, т.е. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Използваме стандартната метрика и стандартното скаларно произведение.

В този случай мярката $\mu(.)$ е стандартната нормирана Лебегова мярка. Субституцията $\sigma(d(x,y))$ се задава с равенството $\sigma(d(x,y)) = 1 - \frac{d^2(x,y)}{2}$. Добре е известно [1, 52], че ЗСФ са полиномите на Гегенбауер $\{P_i^{(n)}(t)\}_{i=0}^{\infty}$ (наричани още *ултрасферични полиноми*) с нормализация $P_i^n(1) = 1$. Тричленната рекурентна връзка, която дефинира полиномите на Гегенбауер, е

$$(i+n-2)P_{i+1}^{(n)}(t) = (2i+n-2)tP_i^{(n)}(t) - iP_{i-1}^{(n)}(t) \tag{0.0.11}$$

за всяко $i \geq 1$, като $P_0^{(n)}(t) = 1$ и $P_1^{(n)}(t) = t$.

Следните означения улесняват описването на скаларните произведения на сферичните дизайни и на границите, получени за тях.

Дефиниция 1.2.6. Нека C е сферичен τ-дизайн. За произволна точка $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ с $I(x)$ разглеждаме мултимножеството $I(x) = \{\langle u, x\rangle : u \in C\}$.

Ясно е, че съществува наредба на точките в $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|C|}\}$ такава, че $-1 \leq \langle u_1, x\rangle \leq \langle u_2, x\rangle \leq \cdots \leq \langle u_{|C|}, x\rangle \leq 1$. Да означим $t_i(x) = \langle u_i, x\rangle$ за $i = 1, 2, \ldots, |C|$. Тогава можем да считаме, че имаме наредба в $I(x)$:

$$I(x) = \{t_1(x), t_2(x), \ldots, t_{|C|}(x)\},$$

където $-1 \leq t_1(x) \leq t_2(x) \leq \cdots \leq t_{|C|}(x) \leq 1$, като $t_{|C|}(x) = 1 \iff x \in C$.

Тези означения, приложени за $x \in C$ върху равенството (0.0.2) от Теорема 1.2.5, водят до

$$\sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(x)) = f_0|C| - f(1), \tag{0.0.12}$$

което е в сила за всяка точка $x \in C$ и за всеки полином $f(t)$ от степен $1, 2, \ldots, \tau$.

Дефиниция 1.2.7. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ-дизайн. За дадена точка $x \in C$, ще означаваме с $L_i(x)$ и $U_i(x)$ съответно всяка (нетривиална) долна и горна граници за скаларното произведение $t_i(x)$, т.е. $L_i(x) \leq t_i(x) \leq U_i(x)$.

При фиксирани n, τ и $|C|$, всеки дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е свързан [12] с еднозначно определени параметри, въведени от Левенщейн [38, 40]. В тази терминология, Бойваленков, Бумова и Данев [12] получават следните резултати.

Теорема 1.3.10. [12] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$-дизайн, то за всяка точка $x \in C$ са изпълнени неравенствата

$$t_1(x) \leq \alpha_0 = U_1 \tag{0.0.13}$$

и

$$t_{|C|-1}(x) \geq s = \alpha_{k-1} = L_{|C|-1}. \tag{0.0.14}$$

Ако в някой от тези два случая имаме равенство, то всички елементи на $I(x)$ са от множеството $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ (в частност, равенство има и в двата случая).

Теорема 1.3.12. [12] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$-дизайн с нечетна мощност, то

$$\rho_0|C| \geq 2. \tag{0.0.15}$$

Лема 1.3.13. [12] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$-дизайн с нечетна мощност, то съществуват три различни точки x, y и z от C, за които:

а) $\langle x,y\rangle = t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0$ и $\langle x,z\rangle = t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0$.

б) $t_{|C|-1}(z) \geq \max\{\alpha_{k-1}, 2\alpha_0^2 - 1\} = L_{|C|-1}(z)$.

Глава 2. Дизайни в $H(n,2)$

Във втора глава получаваме всички възможни спектри на свързани помежду си дизайни в $H(n,2)$ и изследваме зависимостите между спектрите, идващи от тези връзки. Този подход превръщаме в основен инструмент за решаване на Задача 1. В резултат получаваме нови точни стойности на $L(n,\tau)$ в някои от отворените случаи в Таблица 1.1.

В първата част на главата е предложен метод, аналогичен на използвания от Бойваленков в [14] за сферични дизайни, за намиране на всички възможни спектри на дизайни от $H(n,2)$.

Дефиниция 2.1.1. Ако $C \subset H(n,2)$ е τ-дизайн и $y \in H(n,2)$ е фиксирана точка, то $(n+1)$-орката

$$(q_0(y), q_1(y), \ldots, q_n(y))$$

където $q_k(y) = |\{x \in C : d(y,x) = k\}|$ за $k = 0, 1, \ldots, n$, се нарича спектър на C по отношение на y или спектър на y (в C).

Теорема 2.1.2. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-дизайн и $y \in H(n,2)$ е фиксирана точка.

а) Ако $y \in C$, то спектърът на C относно y удовлетворява

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(y)\left(1 - \frac{2i}{n}\right)^k = b_k|C|, \quad k = 0, 1, \ldots, \tau. \tag{0.0.16}$$

б) Ако $y \notin C$, то спектърът на C относно y удовлетворява

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(y)\left(1 - \frac{2i}{n}\right)^k = b_k|C|, \quad k = 0, 1, \ldots, \tau. \tag{0.0.17}$$

Теорема 2.1.2 свежда намирането на всички възможни спектри до решаване в цели неотрицателни числа на $\tau+1$ уравнения с $n+1$ (или n) неизвестни за вътрешна (или външна) за дизайна точка, т.е. до наличие на изчислителна мощност. Получаването на всички възможни спектри за произволни n, τ и λ е реализирано с код на система Mathematica 7.0 [54].

Без ограничение на общността можем да считаме, че точката $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ принадлежи на C. Всеки спектър на точката $\mathbf{0}$ означаваме с $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n)$, където $w_i = p_i(\mathbf{0})$. Ясно е, че w_i всъщност е броя на точките в C с тегло i (за всяко $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Можем да считаме, че всеки възможен спектър на вътрешна за C точка, е спектър на точката $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ и обратно.

Съгласно Свойство 1.2.18, всяка $(n-1) \times M$ подматрица на матрицата на C е матрица на дизайн C' с дължина $n-1$, същата сила τ, същата мощност M и същия индекс $\lambda = \frac{M}{2^\tau}$, т.е. C' е τ-$(n-1, M)$ дизайн. Нека дизайните C и C' имат спектри на точката

$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ съответно $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ и $(w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1})$. Тогава тези спектри са свързани по следния начин.

Теорема 2.2.2. Нека системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_i + y_i = w_i, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ x_i + y_{i-1} = w'_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n \\ y_0 = w_0 \\ x_n = w_n \\ x_i,\ y_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0,\ y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{0.0.18}$$

има s решения $(x_0^{(r)}, x_1^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}; y_0^{(r)}, y_1^{(r)}, \ldots, y_n^{(r)})$, $r = 1, 2, \ldots, s$. Тогава системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{s} k_j = n \\ k_1 x_1^{(1)} + k_2 x_1^{(2)} + \cdots + k_s x_1^{(s)} = w_1 \\ k_1 x_2^{(1)} + k_2 x_2^{(2)} + \cdots + k_s x_2^{(s)} = 2w_2 \\ \vdots \\ k_1 x_n^{(1)} + k_2 x_n^{(2)} + \cdots + k_s x_{(n}^{(s)} = nw_n \\ k_j \in \mathbb{Z}, k_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, s \end{array} \right. \tag{0.0.19}$$

с неизвестни $k_1, k_2, \ldots, k_s$ има решение.

Ако сме намерили с помощта на Теорема 2.1.2. всички възможни спектри на вътрешни точки за предполагаемите дизайни C и C' съответно с параметри τ-$(n, |C|)$ и τ-$(n-1, |C|)$, съгласно Теорема 2.2.2 можем за всеки (възможен) фиксиран спектър $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ и за всички възможни спектри $(w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1})$ да решим (0.0.18) и за всички нейни решения да проверим за наличие на решение на (0.0.19). Ако се окаже, че за нито един спектър на C' нямаме решение, то $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ не може да бъде спектър на вътрешна за C точка. Това приложение на Теорема 2.2.2. води до следния алгоритъм за изследване на възможните връзки между спектрите на даден дизайн и свързани с него дизайни.

Нека $C \subset H(n, 2)$ е τ-дизайн с $|C| = M$ точки. Да предположим, че сме намерили (с помощта на Теорема 2.1.2.) всички възможни спектри на вътрешна точка за всички дизайни с параметри τ-(τ, M), τ-$(\tau+1, M)$, ..., τ-$(n-1, M)$, τ-(n, M). Тогава Теорема 2.2.2. може да бъде последователно приложена за всяка двойка съседи в горната редица. Този подход може да започне от произволно място на списъка, но се оказва достатъчно удобно да тръгваме от началото му. Ще наричаме този метод **Теглови алгоритъм A (TAA)**.

За τ-(n, M) дизайна $C \subset H(n, 2)$ разглеждаме връзката между неговите спектри (на вътрешни точки), спектрите на точки от C с тегла τ_0, ненадминаващи силата му и спектрите на дизайн C' с параметри τ-$(n-\tau_0, M)$. В резултат ще получим ограничения върху спектрите на C'.

Отново $C \subset H(n, 2)$ е τ-(n, M) дизайн със спектър $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ на точката $\mathbf{0}$. Нека $x \in C$ е фиксирана точка с фиксирано тегло $wt(x) = \tau_0 \leq \tau$ и спектър

$$p(x) = (p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)).$$

Прилагаме Свойство 1.2.18. с $n' = n - \tau_0$, $4 \leq 2\tau_0 \leq n$.

Нека $p_{i,j}$ е броят на точките с тегло j в C, които са на разстояние i от x. Следващите две леми показва кои от числата $p_{i,j}$ са интересни, т.е. евентуално могат да бъдат различни от 0, и ги преброяват.

Лема 2.2.7. Нека $C \subset H(n, 2)$ е τ-(n, M) дизайн. Нека точката $x \in C$ и $wt(x) = \tau_0$, $\tau_0 < \tau$. Тогава $p_{i,j} = 0$, освен евентуално в случаите, когато индексите i и j са цели неотрицателни числа, за които $i + j + \tau_0 \equiv 0 \pmod 2$ (т.е. $i + j$ и τ_0 имат еднаква четност) и, по-точно, когато:

(1) при $j+\tau_0 \le n$ числото $i-j$ приема всички стойности от множеството $\{\tau_0, \tau_0 - 2, \dots, \tau_0 - 2\min\{j, \tau_0\}\}$.

(2) при $j+\tau_0 = n+k$, $1 \le k \le \tau_0$, числото $i-j$ приема всички стойности от множеството $\{\tau_0 - 2k, \tau_0 - 2(k+1), \dots, -\tau_0\}$.

Лема 2.2.8. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-(n,M) дизайн. Нека точката $x \in C$ и $wt(x) = \tau_0$, $\tau_0 < \tau$. Тогава броят на неизвестните $p_{i,j}$, релевантни на Лема , е

$$(\tau_0 + 1)(n - \tau_0 + 1).$$

Да означим с A_j (съответно B_i) множеството от индекси i (съответно j), които отговарят на Лема 2.2.7. при фиксирани j (съответно i), n и τ_0. Тогава са в сила следните две теореми, всяка от които дава по $n+1$ уравнения за числата $p_{i,j}$.

Теорема 2.2.9. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-(n,M) дизайн, $x \in C$ и $wt(x) = \tau_0 \le \tau$. Тогава за всяко фиксирано $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ е в сила равенството $\sum_{i \in A_j} p_{i,j} = w_j$.

Теорема 2.2.10. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-(n,M) дизайн, $x \in C$ и $wt(x) = \tau_0$. Тогава за всяко фиксирано $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ е в сила равенството $\sum_{j \in B_i} p_{i,j} = p_i$.

Следващите две теореми дават връзки между спектрите на оригиналния дизайн C и получени от него по Свойство 1.2.18. (при премахване на τ_0 стълба) дизайни. И в двата случая са много важни стълбовете от матрицата на C, определени от носителя на фиксирана точка x с тегло τ_0.

Теорема 2.2.11. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-(n,M) дизайн. Нека $\tau_0 \le \tau$ е фиксирано и да предположим, че съществува точка $x \in C$ с тегло τ_0. Тогава съществува спектър $(d_0, d_1, \dots, d_{n-\tau_0})$ на τ-$(n-\tau_0, M)$ дизайн, за който $\sum_{i,j,j+i-\tau_0=2\beta} p_{i,j} = d_\beta$ за всяко $\beta \in \{0, 1, \dots, n-\tau_0\}$.

Теорема 2.2.12. Нека $C \subset H(n,2)$ е τ-(n,M) дизайн. За всяко фиксирано $\tau_0 \le \tau$ и $\alpha \in \{0, 1, \dots, \tau_0\}$ е в сила равенството $\sum_{i,j,j-i+\tau_0=2\alpha} p_{i,j} = \frac{|C|}{2^{\tau_0}}\binom{\tau_0}{\alpha}$.

Теореми 2.2.11 и 2.2.12 дават съответно по $n-\tau_0+1$ и τ_0+1 уравнения за неизвестните $p_{i,j}$. Следователно от Теореми 2.2.9 - 2.2.12 имаме общо $3n+4$ (4 от тях са тривиално изпълнени) за $(\tau_0+1)(n-\tau_0+1)$ на брой неизвестни $p_{i,j}$. Ще използваме това по следния начин:

(1) За τ-(n,M) дизайна C избираме и фиксираме $\tau_0 \in \{2, 3, \dots, \tau\}$, така че $p_{\tau_0} \neq 0$ за всички решения за C на система (0.0.16) от Теорема 2.1.2.

(2) Определяме релевантните съгласно Лема 2.2.7. променливи $p_{i,j}$.

(3) За фиксиран спектър $(d_0, d_1, \dots, d_{n-\tau_0})$ на C', всеки спектър $(w_0, w_1, w_2, \dots, w_n)$ на $\mathbf{0} \in C$ и всеки спектър $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ на $x \in C$, разглеждаме (решаваме) системата, получена от уравненията от Теореми 2.2.9. - 2.2.12. с неизвестни $p_{i,j}$ в цели неотрицателни числа.

(4) Ако никоя от системите от (3) няма решение, то отстраняваме $(d_0, d_1, \dots, d_{n-\tau_0})$ от списъка с възможни спектри на τ-$(n-\tau_0, |C|)$.

Ще наричаме този подход **Теглови алгоритъм Б (ТАБ)** и ще го използваме, за да редуцираме броя на спектрите на C', след което да приложим отново ТАА.

След приключване на описаното по-горе приложение на ТАА и ТАВ, тези алгоритми могат да се приложат съвместно по следния начин.

(I) Прилагаме ТАА за редицата от дизайни τ-(τ, M), τ-$(\tau+1, M)$, $\dots$, τ-$(n-1, M)$, τ-(n, M).

(II) За избраното τ_0 прилагаме ТАБ за τ-$(n-\tau_0, M)$ от горната редица, взимайки предвид резултатите от (I).

(III) Прилагаме отново ТАА за подредицата τ-$(n-\tau_0, M)$, τ-$(n-\tau_0+1, M)$, ..., τ-(n, M) от (I) съобразно с резултатите от (II).

(IV) Продължаваме по този начин, докато е възможно – не остават спектри на τ-(n, M) дизайна или ТАА (или ТАБ) не отхвърля повече спектри.

Разбира се ТАБ, а оттам и ТАА зависят значително от избора на τ_0. Числените пресмятания показват, че най-добри резултати се получават при $\tau_0 = n - \tau - 2$.

Първите два отворени, съгласно Таблица 1.1, случаи са на 4-дизайни са за дължина $n = 9$ и индекси $\lambda = 6$ и $\lambda = 7$. В тези два случая горният подход води до резултат за несъществуване, което от своя страна води до резулати за нъществуване в още 12 отворени случаи в таблицата. С това определяме точна стойност на $L(n, \tau)$, т.е. $L(n, 4) = 8$ за $9 \leq n \leq 12$ и $L(n, 5) = 8$ за $10 \leq n \leq 13$.

Теорема 2.3.1. Не съществуват дизайни с параметри 4-$(9, 96)$, 4-$(10, 96)$ и 4-$(11, 96)$.

Теорема 2.3.2. Не съществуват дизайни с параметри 5-$(10, 192)$, 5-$(11, 192)$ и 5-$(12, 192)$.

Теорема 2.3.3. Не съществуват дизайни с параметри 4-$(9, 112)$, 4-$(10, 112)$, 4-$(11, 112)$, 4-$(12, 112)$.

Теорема 2.3.4. Не съществуват дизайни с параметри 5-$(10, 224)$, 5-$(11, 224)$, 5-$(12, 224)$ и 5-$(13, 224)$.

Долната граница $L(10, 6) \geq 6$ за 6-дизайни е доказана от Зайден и Земаш през 1966 г. [33, §2.5]. Ние доказваме несъществуването на 6-дизайни за $n = 10$, $\lambda = 6$ и $\lambda = 7$. Това влече несъществуване в още 8 отворени случая, с което намираме $L(n, \tau) = 8$ за $(\tau, n) = (6, 10), (7, 11), (8, 12), (9, 13), (10, 14)$ (Теорема 2.3.7).

Теорема 2.3.5. Не съществуват дизайни с индекс $\lambda = 6$ и параметри $(n, \tau) = (10 + k, 6 + k)$ за $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Теорема 2.3.6. Не съществуват дизайни с индекс $\lambda = 7$ и параметри $(n, \tau) = (10 + k, 6 + k)$, при $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Теорема 2.3.7. Имаме $L(n, \tau) = 8$ за $\tau = 4$ при $9 \leq n \leq 12$, за $\tau = 5$ при $10 \leq n \leq 13$, и за $(\tau, n) = (6, 10), (7, 11), (8, 12), (9, 13), (10, 14)$.

В следващата таблица (нова версия на Таблица 1) са показани минималните възможни стойности на λ за фиксирани дължина n и сила τ. Намерените като следствие от резултатите в тази глава точни стойности са удебелени.

n/τ	4	5	6	7	8	9	10
9	**8**	4	4	2	1	1	
10	**8**	**8**	**8**	4	2	1	1
11	**8**	**8**	8	**8**	4	2	1
12	**8**	**8**	12-16	8	**8**	2	2
13	8	**8**	16	12-16	10-16	**8**	4
14	8	8	16	16	16	10-16	**8**

Алгоритъмът за съвместно прилагане на ТАА и ТАБ може да бъде използван и за намаляване на броя на първоначално получените с Теорема 2.1.2 възможни спектри. Така например за 5-(10,256) дизайни, за които има известна конструкция, след съвместното прилагане на ТАА и ТАБ броят на първоначално намерените спектри се намалява с повече от половината.

Глава 3. Други параметри на дизайни в $H(n,2)$

Основен подход в при решаването на Задача 2 е използването на полиномни техники.

За всяко реално число a означаваме с $[a]^{(n)}$ (съответно $[a]_{(n)}$) най-малкото (най-голямото) число от вида $-1+\frac{2}{n}l, l \in \mathbb{N}_0$, не по-малко (по-голямо) от a. При тези означения границата на Фазекаш-Левенщейн се записва във вида $t_c \geq [t_{FL}]^{(n)}$.

Нека $P_\tau^+ = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : deg(f) \leq \tau, f(t) \geq 0 \ \forall t \in [-1,1], f(t)$ расте в $([t_{FL}]_{(n)}, 1)\}$. Следващата теорема дава горни граници за t_c.

Теорема 3.1.3. (Горни граници за радиуса на покритие на дизайни в $H(n,2)$) За всеки τ-дизайн $C \subset H(n,2)$ имаме $t_c \leq t_{up} = \inf\{m_f : f(t) \in P_\tau^+\}$, където m_f е най-големият корен на уравнението $f(t)+f(t-\frac{2}{n}) = f_0|C|$.

Следователно $[t_{FL}]^{(n)} \leq t_c \leq [t_{up}]_{(n)}$ и, ако $[t_{FL}]^{(n)} = [t_{up}]_{(n)}$, то сме намерили радиуса на покритие за разглеждания дизайн C.

В следващата теорема се определя вида на полиномите, които могат да се използват за получаване на горните граници от Теорема 3.1.3.

Отново с полиномен подход са получени тъждества и граници за моментите на дизайни в $H(n,2)$ и са изследвани връзките им със структурата на съответния дизайна.

От Дефиниция 3.2.1 се вижда, че за всеки код $C \subset H(n,2)$ и всеки полином $f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i Q_i(t)$ ($\deg(f) = k \leq n$) равенството (0.0.1) може да се запише във вида:

$$| C \mid f(1) + \sum_{x,y \in C, x \neq y} f(\langle x,y \rangle) = | C |^2 f_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i M_i.$$

Теорема 3.2.2. За моментите на всеки код $C \subset H(n,2)$ са валидни свойствата:

а) $M_j \geq 0$, за всяко $j = 1,2,\dots,n$;

б) $M_1 = M_2 = \cdots = M_\tau = 0$, тогава и само тогава, когато C е τ-дизайн;

в) за всяко $j = 1,2,\dots,n$ е изпълнено равенството

$$M_j = |C| + \sum_{x,y \in C, x \neq y} Q_j(\langle x,y \rangle); \tag{0.0.20}$$

Означаваме с k_i броя на наредените двойки в C на разстояние $n-i$, т.е.

$$k_i = |\{(x,y) \in C : \langle x,y \rangle = \sigma_i\}|, \ i = 0,\dots,n-1, \ k_n = |C|.$$

Лема 3.2.3. Ако $C \subset H(n,2)$ е τ-$(n,|C|)$-дизайн, то за всеки полином $f(t)$ от степен най-много n е в сила равенството

$$f(1)|C| + \sum_{i=0}^{n-1} k_i f(\sigma_i) = f_0|C|^2 + \sum_{i=\tau+1}^{deg(f)} f_i M_i. \tag{0.0.21}$$

Равенството от Лема 3.2.3 ни позволява да получим голям брой тъждества и неравенства за моментите на разглежданите дизайни и числата k_i. Прилагането на симплекс метода в тази ситуация води до получаване на ограничения върху тези параметри. Такова приложение е разгледано за 6-$(11,512)$ дизайни (известни са дизайни с такива параметри, получани от циклични кодове).

Стандартната трансформация на $H(n,2)$ към $\mathbb{S}^{n-1}$, зададена с $x = (x_1, \ldots, x_n) \to \overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \in \mathbb{S}^{n-1}$, където

$$\overline{x_i} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{n}}, & \text{ако } x_i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{ако } x_i = 1 \end{cases}, \; i = 1, 2, \ldots n,$$

предполага връзки между дизайните в $H(n,2)$ и $\mathbb{S}^{n-1}$. Тази връзка е разгледана в края на Глава 3.

Теорема 3.2.10. а) Ако $C \subset H(n,2)$ е дизайн със сила $\tau \geq 3$, то $\overline{C} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ има сила поне 3 като сферичен дизайн;

б) Всички моменти M_i, $i = 4, 5, \ldots, \tau$, на $\overline{C}$ като сферичен дизайн могат да бъдат пресметнати.

Глава 4. Сферични дизайни

В четвърта глава са разгледани Задача 3 и 4 за някои класове сферични дизайни. Резултатите от тази глава са получени съвместно със Бойваленков, Бумова и Стоянова и подробни доказателства на повечето от тях са публикувани в дисертацията на Стоянова [50].

В §4.1 са получени граници за скаларните произведения на някои класове сферични дизайни. Идеята за изследване структурата на сферичните дизайни с помощта на подходящи полиноми е използвана за пръв път от Фазекаш-Левенщейн [28]. Някои граници на Фазекаш-Левенщейн са подобрени и обобщени от Бойваленков-Данев-Никова [16], Юдин [55] и Бойваленков-Бумова-Данев [11, 12]. Изследванията в тази глава са продължение на получените в [11, 12] резултати (виж също [10]). Получени са нови граници за най-важните скаларните произведения на сферичните дизайни.

Теорема 4.1.3. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, то за всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_{|C|-1}(x) \leq \frac{2(\sqrt{(n-1)[(n+2)|C| - 3(n+3)]} + 3)}{n(n+2)} - 1.$$

Теорема 4.1.6. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Тогава за всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_1(x) \geq 1 - \frac{2}{n}(1 + \sqrt{\frac{(n-1)(|C|-2)}{n+2}}).$$

Намирането на граници за $t_1(x)$, $t_2(x)$ и $t_{|C|-1}(x)$ (т.е. за точките от C, които са най-отдалечени от x или най-близки до x) дава възможност за получаване на необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност.

В следващите параграфи на Глава 4 са разгледани $(2k-1)$-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за параметрите и скаларните произведения, на които са изпълнени условията:

$$2 \leq \rho_0|C| < 3, \quad \text{и} \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1, \tag{0.0.22}$$

(ρ_0, α_0, α_{k-1} са параметри въведени от Левенщейн [38, 40]). В такива дизайни съществуват специални тройки точки $\{x, y, z\} \subset C$, такива, че $\langle x, y \rangle = t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0$ и $\langle x, z \rangle = t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0$. Към всяка такава специална тройка добавяме точката $u \in C$, за която $\langle u, z \rangle = t_2(z)$.

Специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C наричаме "добра", ако $t_2(z) \leq \alpha_0$. Ясно е, че за C трябва да се разгледат две възможности: когато съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. $t_2(z) > \alpha_0$ и когато всички специални четворки са "добри", т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки. Оказва се, че във втория случай можем да отделим "добра" специална четворка с интересни свойства.

Теорема 4.2.3. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$-дизайн с нечетна мощност $|C|$, в който всички специални четворки са "добри". Тогава съществуват поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ и точка $v \in C \backslash \{x, y, z, u\}$, за които

$$\langle v, w\rangle \leq \alpha_0, \quad \text{за някое} \;\; w \in \{y, u\}.$$

Следствие 4.2.4. При условията на Теорема 4.2.3 съществува поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C, за която $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Теорема 4.2.3 и Следствие 4.2.4 показват, че във втория случай съществува поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C, за която $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

За всеки от двата основни случая е получено необходимо условие за съществуване на разглежданите дизайни.

В §4.3 са получени резултати за несъществуване на 3-дизайни. От всички 47 отворени случая, за скоито са изпълнени условията (0.0.22), несъществуване е доказано в 35 от тях. Описаният алгоритъм за изследване на сферичните 3-дизайни и приложим и за изледване на други сферични дизайни, които отговарят на поставените ограничения.

В §4.4 са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни. Прилагайки аналогичен на §4.3 алгоритъм са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни във всички 42 отворени случая. При необходимост алгоритъмът е усилен с по-прецизен анализ на разположението на изследваните скаларни произведения относно параметрите на разглежданите дизайни. Получените резултати са обобщени в следната теорема.

Теорема 4.1.4. За да съществуват 5-дизайни $C \in \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 25$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.

III. АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Списък на публикациите по дисертацията

[1] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *Polynomial techniques for investigation of spherical designs*, Designs, Codes and Cryptography, 2009, Vol. 51, Issue 3, pp. 275-288.

[2] P. Boyvalenkov, H. Kulina, Nonexistence of binary orthogonal arrays via their distance distributions, submitted.

[3] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *New nonexistence results for spherical 5-designs*, Scientific Research, a Journal of South-West University, Blagoevgrad, Bulgaria, 2007, (14 pages).

[4] P. Boyvalenkov, H. Kulina, *Moments of orthogonal arrays*, Proc. Intern. Workshop ACCT2012, ISSN 1313-423X, 117-120.

[5] P. Boyvalenkov, H. Kulina, *Computing distance distributions of orthogonal arrays*, Proc. Intern. Workshop ACCT2010, ISBN 978-5-86134-174-5, 85-85.

[6] P. Boyvalenkov, H. Kulina, *On the structure of binary orthogonal arrays with small covering radius*, Proc. Sixth International Workshop on Optimal Codes and Related Topics, ISSN 1313-1117, Varna, Bulgaria, June 2009, 44-48.

[7] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *New nonexistence results for spherical 5-designs*, Proc. Intern. Workshop OC'07, June 2007, White Lagoon, Bulgaria, 30-35.

Резултатите са докладвани на:

- Международните конференции по алгебрична и комбинаторна теория на кодирането: Новосибирск (2010) и Поморие (2012);

- Международните конференции по оптимални кодове: Бялата Лагуна (2007), Варна (2009);

- Националните семинари по теория на кодирането: Бачиново (2006, 2009), Габрово (2011).

IV. ОСНОВНИ ПРИНОСИ

Основните научни и научно-приложни приноси в дисертационната работа са следните.

1) Предложен е метод за пресмятане на всички възможни спектри на такива дизайни, относно вътрешни и външни за дизайна точки.

2) Изследвани са връзките между дизайни с различни параметри, като са получени резултати, свързващи спектрите на τ-$(n,|C|)$ и τ-$(n-\tau_0,|C|)$-дизайни, поотделно за случаите $\tau_0=1$ и $\tau_0\geq 2$.

3) Предложени са алгоритми, с които се изследват всички спектри на τ-$(n,|C|)$-дизайни на базата на резултатите от 2).

4) Доказани са резултати за несъществуване в четири случая, описани като отворени в таблица 12.1 от книгата [33]. Тези резултати водят до решаване на още 20 отворени случая, с което са определени точните стойности на функцията $L(n,\tau)$ за $\tau=4$ при $9\leq n\leq 12$, $\tau=5$ при $10\leq n\leq 13$ и за $(\tau,n)=(6,10),(7,11),(8,12),(9,13),(10,14)$.

5) Намерени са граници за радиуса на покритие на дизайни в $H(n,2)$, както и граници за случаите, когато съответният радиус на покритие се реализира.

6) Въведени са и са изследвани моменти на кодове и дизайни в $H(n,2)$.

7) Получени са граници за екстремални скаларни произведения на сферични дизайни.

8) Получени са необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност на базата на някои от границите от **7)**.

9) Получени са нови резултати за несъществуване на сферични 3 - и 5 -дизайни.

Благодарности

Бих искала да изразя своята благодарност към научния си ръководител проф. дмн Петър Бойваленков, който ме насочи в тази тематика. Благодаря му за многобройните дискусии и вдъхновяващи идеи, за критичните бележки и за безрезервната подкрепа.

Благодарна съм на всички колеги от секция Математически основи на информатиката за творческата атмосфера, за отзивчивостта и интереса към работа ми. Специално благодаря на моите съавтори Силвия Бумова и Мая Стоянова за колегиалното им отношение и полезното сътрудничество.

Искрено благодаря на бившият директор на ИМИ, покойния вече академик Стефан Додунеков, за всестранната му помощ и оказаното ми доверие.

Благодарна съм и на ръководството на Факултета по математика и информатика към Пловдивския университет, на всички колеги от катедра Приложна математика и моделиране и специално на проф. Снежана Гочева за съдействието и подкрепата.

Искам да благодаря и на моето семейство за търпението, за окуражителните думи и съпричастността към моята работа.

Библиография

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.

[2] K. Andreev, S. Boumova, P. Boyvalenkov, Moments of spherical codes and designs, Proc. Sixth Intern. Workshop ACCT, Bansko, Bulgaria, June 2000, 29-32.

[3] N. Alon, O. Goldreich, J. Hastad, R. Peralta, Simple construction of almost k-wise independent random variables, *Random Structions and Algoritms*, 3, 1992, 289-304. Regional Conf. Lect. Appl. Math., SIAM 21, 1975.

[4] B. Bajnok, Construction of spherical t-designs, *Geom. Dedicata* 43, 1992, 167-179.

[5] B. Bajnok, Construction of spherical 3-designs, *Graphs Combin.* 14, 1998, 97-107.

[6] B. Bajnok, Spherical Designs and Generalized Sum-Free Sets in Abelian Groups, *Des. Codes Crypt.* 21, 2000, 11-18.

[7] E. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs II, *J. London Math. Soc.* 21, 1980, 13-30.

[8] J. Bierbrauer, K. Gopalakrishan, D. R. Stinson, Bounds for ressilient functions and orthogonal arrays, *Lecture Notes in Computer Sciences*, 839, 1994, 247-256.

[9] J. Bierbrauer, K. Gopalakrishan, D. R. Stinson, Orthogonal arrays, ressilient functions, error-correcting codes and linear programming bounds, *SIAM J. Discrete Math.*,9, 1996, 424-452.

[10] S. P. Boumova, *Applications of polynomials to spherical codes and designs*, PhD Thesis, 2002.

[11] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Upper bounds on the minimum distance of spherical codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 41, 1996, 1576-1581.

[12] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Necessary conditionds for existence of some designs in polynomial metric spaces, *Europ. J. Combin.* 20, 1999, 213-225.

[13] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, New nonexistence results for spherical designs, in Constructive Theory of Sunctions (B. Bojanov, Ed.) Darba, Sofia 2003, 225-232.

[14] P. G. Boyvalenkov, Computing distance distributions of spherical designs, *Lin. Alg. Appl.*, 226/228, 1995, 277-286.

[15] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, Distance-regular graphs, Berlin, Germany: Spinger-Verlag, 1989.

[16] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, S. I. Nikova, Nonexistence of certain spherical designs of odd strengths and cardinalities, *Discr. Comp. Geom.* 21, 1999, 143-156.

[17] P. G. Boyvalenkov, S. I. Nikova, Improvements of the lower bounds for some spherical designs, *Math. Balk.* 12, 1998, 151-160.

[18] P. G. Boyvalenkov, S. I. Nikova, New lower bounds for some spherical designs, *Springer-Verlag Lect. Notes Comp. Science* 781, 1994, 207-216.

[19] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Improved approaches for investigation of small spherical designs, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 2012, Vol. 65, № 6, pp. 743-750.

[20] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Further nonexistence results for small spherical designs, Advances in Mathematics of Communications, 2012, submitted.

[21] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, Third Ed., New York, 1973.

[22] P.Delsarte, Bounds for Unrestricted Codes by Linear Programming, *Philips Research Reports*, 27, 1972, 272-289.

[23] P.Delsarte, Four fundamental parameters of a code and their combinatorial significance, *Inform. Contr.*, 23, 1973, 407-438.

[24] P.Delsarte, An Algebraic Approach to Association Schemes in Coding Theory, *Philips Research Report Suppl.*,10, 1993.

[25] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata* 6, 1977, 363-388.

[26] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials, *Philips Res. Reports*, 1975, 30:91*-105*.

[27] C.F. Dunkl, Discrete quadrature and bounds on t-designs, *Michigan Math. J.*, 26, 1979, 81-102.

[28] G. Fazekas, V. I. Levenshtein, On upper bounds for code distance and covering radius of designs in polynomial metric spaces, *J. Comb. Theory A*, 70, 1995, 267-288.

[29] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical designs, *Proc. Symp. Pure Math.* 34, 1979, 255-272.

[30] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Cubature formulae, polytopes, and spherical designs, in *The Geometric Vein*, The Coxeter, Festschrift (C. Davis, B. Grünbaum, F. A. Sherk, Eds.), Springer, Berlin, 1982, 203-218.

[31] P. J. Grabner, R. F. Tichy, Spherical designs, discrepancy and numerical integration, *Math. Comput.* 60, 1991, 327-360.

[32] R. H. Hardin, N. J. A. Sloane, McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions, *Discr. Comp. Geom.* 15, 1996, 429-441.

[33] A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane,John Stufken, Orthogonal arrays: Theory and Applications, *Spinger-Verlag New York, Inc.*, 1999.

[34] G. A. Kabatianskii, V. I. Levenshtein, Bounds for packings on a sphere and in space, *Probl. Inform. Transm.* 14, 1978, 1-17.

[35] J. Korevaar, J. L. H. Meyers, Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains, *J. Approx. Theory* 79, 1994, 144-164.

[36] V. I. Lebedev, Quadratures on the sphere, *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* 16, No. 2, 1976, 10-24.

[37] V. I. Levenshtein, Bounds for packings in metric spaces and certain applications, *Probl. Kibern.* 40, 1983, 44-110 (in Russian).

[38] V. I. Levenshtein, Designs as maximum codes in polynomial metric spaces, *Acta Appl. Math.* 25, 1992, 1-82.

[39] V. I. Levenshtein, Krawchouk Polynomials and Universal Bounds for Codes and Desingns in Hamming Spaces, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.41, No. 5, 1995, 1303-1321.

[40] V. I. Levenshtein, Universal bounds for codes and designs, chapter 6 in *Handbook of Coding Theory*, V. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier Science B.V., 1998.

[41] A. D. McLaren, Optimal numerical integration on the sphere, *Math. Comput.* 17, 1963, 361-383.

[42] F. J. MacWilliams, N. J. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, *Amsterdam, The Netherlands: North Holland*, 1977.

[43] A. Neumaier, J. J. Seidel, Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices, *Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 91 (*Indag. Math.* 50), 1988, 321-344.

[44] W. Neutch, Optimal spherical designs and numerical integrations on the sphere, *J. Comput. Phys.* 51, 1983, 313-325.

[45] W. Neutch, E. Schrüfer, A. Jessner, Efficient integration on the hypersphere, *J. Comput. Phys.* 59, 1985, 167-175.

[46] C. R. Rao, Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arraya, *J. Roy. Stat. Soc.* 89, 1947, 128-139.

[47] B. Reznick, Sums of even powers of real linear forms, *Mem. AMS*, No. 463, 1992.

[48] B. Reznick, Some constructions of spherical 5-designs, *Lin. Alg. Appl.* 226/228, 1995, 163-196.

[49] J. J. Seidel, Eutactic stars, *Collog. Math. Soc. János Bolyai* 18, 1976, 983-999.

[50] M. Stoyanova, Върху структурата на някои сферични кодове и дизайни, PhD Thesis, 2008.

[51] E.Seiden, R. Zemach, On orthogonal arrays, *Ann. Math. Statist.*, 37, 1966, 1355-1370.

[52] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS Col. Publ. Providence, RI, 1939.

[53] H.-C. Wang, *Two-point homogenious spaces*, Annals of Math. 55, 1952,177-191.

[54] St.Wolfram, *The Mathematica Book*, Fifth Edition, Wolfram Media, 2003.

[55] V. Yudin, Lower bounds for spherical designs, *Izv.: Math.* 3, 61, 1997, 673-683.