Българска Академия на Науките
Институт по Математика и Информатика

Величка Василева Милушева

ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА ПОЛУСИМЕТРИЧНИТЕ ХИПЕРПОВЪРХНИНИ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен

"ДОКТОР"

по научната специалност: 01.01.06 Геометрия и Топология

Научен консултант: ст. н. с. II ст. д-р Георги Тодоров Ганчев

София, 2006 г.

Въведение

Едно от основните понятия, играещи важна роля в диференциалната геометрия е понятието кривина. Основни обекти при изучаване на риманово многообразие (M^n, g) са свързаността ∇ на Levi-Civita на метриката g и нейният риманов тензор на кривина R. Затова естествено възниква въпросът за класификация на римановите многообразия, чиито тензори на кривина удовлетворяват определени условия.

Основополагащ обект в римановата геометрия са римановите многообразия с постоянна секционна кривина, които се характеризират [26] с тензор на кривина R, удовлетворяващ условието

$$R(X, Y, Z) = \frac{\tau}{n(n-1)} \left(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\right)$$

за всеки три гладки векторни полета X, Y, Z, където τ е скаларната кривина.

Всяко риманово многообразие с постоянна секционна кривина е локално симетрично. Локално симетричните многообразия се характеризират [27] с условието за тензора на кривина

$$\nabla R = 0.$$

Те се явяват обобщение на римановите многообразия с постоянна секционна кривина.

От своя страна, тензорът на кривина R на локално симетрично риманово многообразие удовлетворява условието

$$(SSS) \qquad R(X, Y) \cdot R = 0$$

за всеки две гладки векторни полета X, Y (линейният ендоморфизъм $R(X, Y)$ действа върху R като производна). Пространствата, удовлетворяващи условието (*SSS*) са изучавани първоначално от E. Cartan [13] във връзка с изследванията му върху локално симетричните пространства. Постепенно възниква въпросът: кои са римановите многообразия, за които във всяка точка тензорът на кривина удовлетворява равенството (*SSS*). Такива многообразия се наричат *полусиметрични пространства* (*semi-symmetric spaces*) и са естествено обобщение на локално симетричните пространства. Те предизвикват голям интерес у много геометри през 60-те и 70-те години на 20-ти век като A. Lichnerowicz [30], R. Couty [17], [18], Н. Синюков [4], [5], [6].

През 1968 година K. Nomizu [34] изказва хипотезата, че при размерност по-голяма или равна на 3 всяко неразложимо пълно риманово полусиметрично пространство е локално симетрично. Редица автори изучават полусиметрични пространства, удовлетворяващи допълнителни условия, които водят до локална симетричност на пространството ([35], [36], [41], [47], [48], [49], [50]), което подкрепя хипотезата на K. NOMIZU.

Но, през 1972 година H. TAKAGI [46] опровергава тази хипотеза, като конструира 3-мерна пълна неразложима полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{R}^4$, която не е локално симетрична, а K. SEKIGAWA [37] построява контра-пример на хипотезата на K. NOMIZU за произволна размерност. Така хипотезата на K. NOMIZU е отхвърлена. Тези резултати стават сериозно предизвикателство за по-нататъшни изследвания на полусиметричните пространства ([38], [39], [40]) и поставят въпроса за тяхната класификация.

Първият геометър, който изучава систематично полусиметричните пространства, е Z. SZABO ([43], [44]. [45]). През 1982 година той прави локална класификация на полусиметричните пространства, според която всяко неразложимо полусиметрично пространство принадлежи на един от следните класове [43]:

(1) **тривиален клас**, състоящ се от всички локално симетрични пространства и всички 2-мерни риманови многообразия;

(2) **специален клас**, съдържащ всички елиптични, хиперболични, евклидови и келерови конуси (дефинирани от Z. SZABO);

(3) **типичен клас**, състоящ се от римановите многообразия, които са фолиации от евклидови листове с коразмерност 2.

Тривиалният клас е добре известен, а специалният клас е описан експлицитно и изучен от Z. SZABO в [43, 44]. За класа на типичните полусиметрични пространства Z. SZABO извежда система нелинейни частни диференциални уравнения, които описват метриките им. Пълните полусиметрични хиперповърхнини в евклидово пространство са класифицирани от Z. SZABO в [45].

Типичните полусиметрични пространства са разглеждани и от E. BOECKX, O. KOWALSKI и L. VANHECKE [12] като риманови многообразия, за които нулевото пространство на тензора на кривина има коразмерност две (Riemannian manifolds of conullity two). Използвайки друг подход, те също извеждат система частни диференциални уравнения, чиито решения дават локално метриките на типичните полусиметрични пространства.

Изучавайки 3-мерните риманови многообразия с конулевост две, O. KOWALSKI [29] въвежда понятията *асимптотично разпределение* и *асимптотична фолиация* (като фолиация с коразмерност едно), които са обобщени от E. BOECKX [10] за произволна размерност. Римановите многообразия с конулевост две са разделени на планарни, хиперболични, параболични и елиптични според броя на асимптотичните фолиации, които допускат (съответно безбройно много, две, една или нито една). Съществуването на асимптотично разпределение дава възможност да се опрости съществено системата частни диференциални уравнения, описваща метриките. В [29] са описани метриките на 3-мерните асимптотично фолирани полусиметрични многообразия. В [10] са описани метриките на неелиптичните полусиметрични пространства от произволна размерност в случая, когато алгебричният ранг на системата частни диференциални уравнения, задаваща метриката, е едно и са дадени примери на асимптотично фолирани полусиметрични пространства в случай на по-висок алгебричен ранг.

В [11] е дадена конструкция на семейство примери на пълни полусиметрични хиперповърхнини в $\mathbb{R}^4$ от хиперболичен тип, които са обобщение на примера, даден от H. Takagi.

В настоящата дисертация изучаваме полусиметричните хиперповърхнини в евклидово пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ от типичния клас според класификацията на Z. Szabo (т. е. фолираните полусиметрични хиперповърхнини) по отношение на втората им фундаментална форма. Основно средство в нашите разглеждания е системата от уравненията на Codazzi на една такава хиперповърхнина, което ни дава нов подход за класификация, геометрично описание и геометрично конструиране на фолирани полусиметрични хиперповърхнини.

Дисертацията е структурирана в три глави.

В **Глава 1** изучаваме един специален клас полусиметрични хиперповърхнини - класа на праволинейните хиперповърхнини (ruled hypersurfaces) в $\mathbb{E}^{n+1}$ според втората им фундаментална форма.

В § 1.1 извеждаме вида на втората фундаментална форма на праволинейна хиперповърхнина и в частност получаваме вторите фундаментални форми на развиваема и на минимална праволинейна хиперповърхнина. Доказваме характеризационна теорема за праволинейните хиперповърхнини (Теорема 1.1.4) и като следствие получаваме характеризация на минималните такива (Следствие 1.1.5).

В § 1.2 доказваме характеризационна лема (Лема 1.2.1) за развиваемите праволинейни хиперповърхнини (торсовете) в термините на втората фундаментална форма h ($h = \nu\, \eta \otimes \eta$, където ν и η са съответно функция и 1-форма). Като използваме геометричната характеризация на торс в [20] като обвивка на еднопараметрично семейство от хиперравнини, получаваме геометрично описание на класовете торсове чрез вида на ортогоналната траектория на семейството хиперравнини, задаващо торса (Твърдение 1.2.3 и Твърдение 1.2.4). Даваме още едно геометрично описание и директен начин за конструиране на торсове, като доказваме, че всеки торс се поражда еднозначно от гладка крива $\boldsymbol{c}$ и единичен нормален вектор N_0 в точка от $\boldsymbol{c}$ (Теорема 1.2.6). Като използваме този начин за конструиране на торсове изразяваме инвариантата ν във втората фундаментална форма h на торс чрез кривината $\varkappa$ на кривата $\boldsymbol{c}$, която го поражда. В Твърдение 1.2.7 и Твърдение 1.2.8 даваме описание на класовете торсове чрез вида на пораждащата крива $\boldsymbol{c}$: ако $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива, то породеният от нея торс е цилиндричен; ако $\boldsymbol{c}$ е неравнинна сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$, то тя поражда коничен торс с $(n-2)$-мерен връх, а в останалите случаи за $\boldsymbol{c}$, породеният торс е тангентен торс, състоящ се от допирателните равнини към $(n-1)$-мерна праволинейна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$.

В § 1.3 даваме геометрична конструкция на минимални праволинейни хиперповърхнини и доказваме, че всяка минимална праволинейна хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 3-мерно или 4-мерно подпространство на $\mathbb{E}^{n+1}$ (Теорема 1.3.1). Така получаваме хеликоидалните хиперповърхнини (хеликоидите) от I и II тип. Хеликоид от I тип се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$, а хеликоид от II тип се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 4-мерно подпространство $\mathbb{E}^4$ на $\mathbb{E}^{n+1}$. Хеликоидите от I и II тип са единствените минимални праволинейни хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$. Този резултат е получен от G. AUMANN в [9]. Но, докато G. AUMANN получава двата типа хеликоиди чрез последователни подходящи параметрични трансформации на предварително избран т. н. естествен придружаващ базис на образуващите на една праволинейна хиперповърхнина, то ние получаваме двата типа хеликоиди директно от кривите с постоянни кривини в 3-мерно и 4-мерно пространство по дадения от нас геометричен начин.

В **Глава 2** изучаваме хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$, които са развиваеми двупараметрични системи от равнини с коразмерност 3, и ги наричаме *торсални хиперповърхнини от II тип*. Те са естествено обобщение на развиваемите праволинейни хиперповърхнини (торсовете).

В § 2.1 дефинираме торсални хиперповърхнини от II тип и получаваме вида на втората им фундаментална форма. Като използваме уравненията на Codazzi извеждаме условия за интегруемост, на чиято база доказваме характеризационна теорема за торсалните хиперповърхнини от II тип (Теорема 2.1.3). Неразвиваемите праволинейни хиперповърхнини, характеризирани с Теорема 1.1.4, са един специален подклас на торсалните хиперповърхнини от II тип. В Твърдение 2.1.6 даваме характеризация на римановите многообразия с конулевост две чрез оператора на кривина, а с Теорема 2.1.7 показваме, че торсалните хиперповърхнини от II тип са точно хиперповърхнините с конулевост две, т. е. фолираните полусиметрични хиперповърхнини. Геометричната интерпретация на фолираните полусиметрични хиперповърхнини като развиваеми двупараметрични системи от равнини с коразмерност 3 позволява изучаването им чрез техни хиперповърхнини и получаването на структурни теореми, които ги описват геометрично.

В § 2.2 изучаваме праволинейни повърхнини с коразмерност две. В Теорема 2.2.3 даваме геометрично описание и начин за конструиране на развиваема повърхнина с коразмерност две (всяка гладка крива $\boldsymbol{c}$ и ортонормирана двойка нормални вектори N_1^0, N_2^0 в точка от $\boldsymbol{c}$ определят еднозначно развиваема повърхнина с коразмерност две), който е обобщение на геометричната конструкция на торс, дадена в Теорема 1.2.6. Като обобщение на развиваемите повърхнини с коразмерност две дефинираме полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две. Доказваме характеризационни теореми за развиваемите и непланарните полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две в термините на втората фундаментална форма (Теорема 2.2.1 и Теорема 2.2.8). В частност, получаваме характеризация на планарните развиваеми и полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две (Лема 2.2.2 и Лема 2.2.6). В Твърдение 2.2.9 описваме плоските праволинейни повърхнини с коразмерност две.

В § 2.3 изучаваме интегралните многообразия на инволютивните разпределения с коразмерност едно на полусиметрична хиперповърхнина. На тази база, с помощта на характеризационните теореми за развиваемите и полуразвиваемите повърхнини с коразмерност две, получени в § 2.2, доказваме структурни теореми за полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен и от неомбиличен тип. Всяка полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип локално е еднопараметрична система от развиваеми повърхнини с коразмерност две (Теорема 2.3.3), а всяка полусиметрична хиперповърхнина от неомбиличен тип локално е еднопараметрична система от непланарни полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две (Теорема 2.3.4). В края на този параграф, като използваме понятията асимптотично разпределение и асимптотична фолиация, намираме нова интерпретация на класовете планарни, хиперболични, параболични и елиптични полусиметрични хиперповърхнини, дефинирани в [12] от E. Boeckx, O. Kowalski и L. Vanhecke. Използвайки терминологията в [12], ние получаваме, че едно интегруемо разпределение с коразмерност едно на полусиметрична хиперповърхнина е асимптотично тогава и само тогава, когато интегралните му многообразия са развиваеми повърхнини с коразмерност две. Като следствие от Теорема 2.3.3 получаваме, че всяка полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип е планарна (Следствие 2.3.5). За полусиметричните хиперповърхнини от неомбиличен тип намираме условията, при които една такава хиперповърхнина е съответно планарна, хиперболична, параболична или елиптична.

В § 2.4 прилагаме резултатите от § 2.3 за класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини. Получаваме, че съществуват два съществено различни класа минимални полусиметрични хиперповърхнини. Единият клас се състои от планарни минимални полусиметрични хиперповърхнини, които са фолиации от развиваеми повърхнини с коразмерност две, а другият клас се състои от елиптични минимални полусиметрични хиперповърхнини, които са фолиации от непланарни полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две. Първият клас е аналогичен на класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип. В края на параграфа намираме условията, при които една минимална полусиметрична хиперповърхнина е праволинейна.

Като обобщение на Лема 1.2.2 за развиваемите праволинейни хиперповърхнини (торсовете), в § 2.5 доказваме, че всяка полусиметрична хиперповърхнина може да се разглежда като обвивка на двупараметрично семейство от хиперравнини (Теорема 2.5.1). На тази база получаваме параметрично представяне на полусиметричните хиперповърхнини чрез управителна двумерна повърхнина (аналог на управителната крива при праволинейните хиперповърхнини), която се определя от единична векторна функция $l(u,v)$ и скаларна функция $r(u,v)$, задаващи семейството хиперравнини. От параметричното представяне извеждаме уравнението за собствените функции на оператора на втората фундаментална форма. Геометричната характеризация на полусиметричните хиперповърхнини като обвивки на двупараметрични семейства от хиперравнини ни позволява да получим аналитично описание на два техни основни класа - класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини и класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип чрез системи частни диференциални уравнения за геометричните функции $l(u,v)$ и $r(u,v)$, определящи двупараметричното семейство от хиперравнини, което задава хиперповърхнината (Теорема 2.5.2).

В **Глава 3** разглеждаме някои специални класове полусиметрични хиперповърхнини.

В § 3.1 изучаваме класа $\mathfrak{K}_o$ на полусиметричните хиперповърхнини с интегруемо геометрично двумерно разпределение. За полусиметричните хиперповърхнини от този клас съществуват 2-мерни повърхнини, ортогонални на образуващите, които са аналог на ортогоналните траектории на образуващите на една праволинейна хиперповърхнина. Но, докато за всяка праволинейна хиперповърхнина локално съществуват ортогонални траектории на образуващите, то 2-мерни повърхнини, ортогонални на образуващите на полусиметрична хиперповърхнина съществуват само за хиперповърхнините от класа $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$. Доказваме, че интегралните повърхнини на геометричното двумерно разпределение на полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$ са повърхнини с плоска нормална свързаност (Твърдение 3.1.2). Един подклас на 2-мерните повърхнини с плоска нормална свързаност са развиваемите 2-мерни повърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$, за които получаваме характеризация в Твърдение 3.1.7 и показваме, че интегралните повърхнини на геометричното двумерно разпределение на полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$ не са развиваеми повърхнини. Основният резултат в този параграф е формулиран в Теорема 3.1.8, според която всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, която не е развиваема повърхнина, поражда полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$. Полученото геометрично описание на полусиметричните хиперповърхнини от класа $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$ чрез двумерни повърхнини с плоска нормална свързаност, които не са развиваеми повърхнини, дава възможност теорията на полусиметричните хиперповърхнини с интегруемо геометрично двумерно разпределение да се свърже с теорията на 2-мерните повърхнини с плоска нормална свързаност. Описваме двата подкласа на $\mathfrak{K}_\mathrm{o}$ (планарни и хиперболични) чрез съответните класове 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност, които ги пораждат.

Подхода за изучаване на полусиметричните хиперповърхнини като обвивки на двупараметрични семейства от хиперравнини, разработен в § 2.5, прилагаме в § 3.2 за конструиране на полусиметрични хиперповърхнини в 4-мерното евклидово пространство $\mathbb{E}^4$. Полученото параметрично представяне на полусиметрична хиперповърхнина чрез управителна двумерна повърхнина позволява изследването на множеството от особени точки върху образуващите на хиперповърхнината. Изучаваме полусиметричните хиперповърхнини в $\mathbb{E}^4$, за които върху всяка образуваща има особена точка. В общия случай, 2-параметричната съвкупност от особени точки е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$. За двумерните повърхнини в $\mathbb{E}^4$ дефинираме понятието тангента от асимптотичен тип и доказваме, че образуващите на една полусиметрична хиперповърхнина M^3 в $\mathbb{E}^4$, която има 2-мерна повърхнина M_0^2 от особени точки, са тангенти от асимптотичен тип за повърхнината M_0^2 (Твърдение 3.2.1). Въвеждаме инварианта K на 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$ и с помощта на инвариантата K в Твърдение 3.2.4 характеризираме 2-мерните повърхнини в $\mathbb{E}^4$, които допускат тангенти от асимптотичен тип. Даваме геометрична конструкция на полусиметрични хиперповърхнини в $\mathbb{E}^4$ чрез 2-мерни повърхнини с неположителна инварианта K (Теорема 3.2.5).

Глава 1

Праволинейни хиперповърхнини в евклидово пространство

Хиперповърхнина M^n в евклидовото пространство $\mathbb{E}^{n+1}$, която е гладка еднопараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ от равнини с коразмерност 2, дефинирана в интервал $J \subset \mathbb{R}$, се нарича *праволинейна хиперповърхнина* [19]. Равнините $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ се наричат *образуващи* на M^n.

Една праволинейна хиперповърхнина M^n се нарича *развиваема* [8], ако допирателното пространство T_pM^n във всички точки p на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ е едно и също. С други думи, единичното нормално векторно поле N на M^n е постоянно по всяка фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, $s \in J$.

Теорията на праволинейните хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$ е обобщение на геометрията на праволинейните повърхнини в тримерното евклидово пространство $\mathbb{E}^3$, които са добре познатите еднопараметрични системи от прави (известни също като роеве прави [2]). Развиваемите праволинейни повърхнини в $\mathbb{E}^3$ локално са цилиндрични, конични или тангентни повърхнини.

В [19] и [8] се разглеждат обобщени праволинейни $(k+1)$-мерни повърхнини в $\mathbb{E}^n$, които са еднопараметрични системи от k-мерни равнини $\mathbb{E}^k$ в $\mathbb{E}^n$. Редица свойства на праволинейните повърхнини в $\mathbb{E}^3$ се обобщават за $(k+1)$-праволинейните повърхнини в $\mathbb{E}^n$.

В настоящата глава изучаваме праволинейни хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$ спрямо втората им фундаментална форма с цел да приложим основните ни методи за изследване на фолираните полусиметрични хиперповърхнини най-напред върху този специален клас.

В § 1.1 доказваме характеризационна теорема за праволинейните хиперповърхнини и в частност получаваме характеризация на минималните и на развиваемите такива. В § 1.2 даваме геометрично описание на развиваемите праволинейни хиперповърхнини (торсовете) и един начин за конструиране на торсове чрез гладка крива $\boldsymbol{c}$ и единично нормално векторно поле в точка от $\boldsymbol{c}$. В § 1.3 даваме геометрично описание на минималните праволинейни хиперповърхнини и доказваме, че всяка минимална праволинейна хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ се поражда от гладка крива с постоянни кривини, лежаща в 3-мерно или 4-мерно подпространство на $\mathbb{E}^{n+1}$.

1.1 Характеризация на праволинейните хиперповърхнини чрез втората им фундаментална форма

Нека ∇' е каноничната плоска свързаност в $\mathbb{E}^{n+1}$ на стандартната метрика g, а R' е съответният риманов тензор на кривина. Ако M е повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, означаваме с T_pM допирателното пространство към M в точка $p \in M$, а с $\mathfrak{X}M$ - алгебрата на Ли на гладките векторни полета, допирателни към M.

За равнините с коразмерност две доказваме следната характеризационна

Лема 1.1.1. *Нека M^{n-1} е повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с коразмерност две и нормална равнина* $\text{span}\{N_1, N_2\}$*. M^{n-1} локално е равнина $\mathbb{E}^{n-1}$ тогава и само тогава, когато*

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= \sigma(x) N_2; \\ \nabla'_x N_2 &= -\sigma(x) N_1; \end{aligned} \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{1.1.1}$$

където σ е 1-форма върху M^{n-1}.

Доказателство. I. Нека повърхнината M^{n-1} е равнина $\mathbb{E}^{n-1}$ с канонична нормална равнина $\text{span}\{l_1,\, l_2\}$, т. е.

$$\begin{aligned} \nabla'_x l_1 &= 0; \\ \nabla'_x l_2 &= 0; \end{aligned} \quad x \in \mathfrak{X}\mathbb{E}^{n-1}. \tag{1.1.2}$$

Произволна нормална равнина $\text{span}\{N_1, N_2\}$ на $\mathbb{E}^{n-1}$ се представя във вида

$$\begin{aligned} N_1 &= \cos\varphi\, l_1 + \sin\varphi\, l_2; \\ N_2 &= -\sin\varphi\, l_1 + \cos\varphi\, l_2, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

където $\varphi = \angle(l_1, N_1)$. Като използваме (1.1.2) и (1.1.3), получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= d\varphi(x) N_2; \\ \nabla'_x N_2 &= -d\varphi(x) N_1; \end{aligned} \quad x \in \mathfrak{X}\mathbb{E}^{n-1}.$$

Означаваме със σ 1-формата $d\varphi$ и получаваме (1.1.1).

II. Нека M^{n-1} е повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормална равнина $\text{span}\{N_1, N_2\}$, за която са в сила равенствата (1.1.1). Условията за интегруемост на (1.1.1) ни дават

$$\begin{aligned} R'(x,y) N_1 &= d\sigma(x,y) N_2; \\ R'(x,y) N_2 &= -d\sigma(x,y) N_1; \end{aligned} \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}. \tag{1.1.4}$$

Тъй като тензорът на кривина R' на каноничната свързаност ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$ е нула, то от (1.1.4) получаваме $d\sigma(x,y) = 0$. Следователно, локално съществува функция φ върху M^{n-1}, такава че $\sigma = d\varphi$. Полагаме

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos\varphi\, N_1 - \sin\varphi\, N_2; \\ l_2 &= \sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2 \end{aligned}$$

и като използваме (1.1.1) получаваме равенства (1.1.2). Следователно, M^{n-1} лежи върху равнина $\mathbb{E}^{n-1}$ с канонична нормала $\{l_1, l_2\}$. $\square$

Разглеждаме праволинейна хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}, s \in J$ в $\mathbb{E}^{n+1}$. Означаваме с ∇ индуцираната свързаност върху M^n. Нека N е единично нормално векторно поле на M^n, а ξ е единично векторно поле, ортогонално на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ (ξ е определено с точност до знак). Означаваме с Δ разпределението на M^n, ортогонално на ξ, т. е.

$$\Delta(p) = \{x \in T_pM^n \,|\, x \perp \xi\}, \quad p \in M^n.$$

Тъй като $\mathrm{span}\{\xi, N\}$ е нормална равнина за всяка образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, то според Лема 1.1.1 в сила са равенствата

$$\begin{aligned} \nabla'_x\xi &= \sigma(x)N; \\ \nabla'_x N &= -\sigma(x)\xi. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Означаваме с η единичната 1-форма, съответстваща на векторното поле ξ, т. е. $\eta(X) = g(X, \xi);\; X \in \mathfrak{X}M^n$, а с ω - единичната 1-форма, такава че

$$\sigma = \mu\omega, \quad \mu = \|\sigma\|. \tag{1.1.6}$$

Нека h е втората квадратична форма (фундаментална форма) на хиперповърхнината M^n, а A е съответният ѝ линеен оператор, т. е.

$$h(X, Y) = g(AX, Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}M^n.$$

Като използваме формулата на Weingarten

$$\nabla'_X N = -AX; \quad X \in \mathfrak{X}M^n,$$

от второто равенство на (1.1.5) и (1.1.6) получаваме

$$Ax = \mu\omega(x)\xi; \quad x \in \Delta.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} h(x, y) &= 0; \\ h(x, \xi) &= \mu\,\omega(x); \end{aligned} \quad x, y \in \Delta. \tag{1.1.7}$$

Нека X и Y са произволни векторни полета върху M^n. Като използваме еднозначното разлагане на X и Y във вида

$$\begin{aligned} X &= x + \eta(X)\xi; \quad x \in \Delta, \\ Y &= y + \eta(Y)\xi; \quad y \in \Delta, \end{aligned}$$

и равенства (1.1.7), за втората фундаментална форма h на M^n получаваме

$$h(X, Y) = \mu\left(\omega(X)\eta(Y) + \eta(X)\omega(Y)\right) + \nu\eta(X)\eta(Y), \tag{1.1.8}$$

където $\nu = h(\xi,\, \xi)$.

Така доказахме следното

Твърдение 1.1.2. *Втората фундаментална форма h на праволинейна хиперповърхнина M^n има вида*

$$h = \mu\,(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu\eta \otimes \eta,$$

където ω и η са подходящо избрани единични 1-форми, а μ и ν са функции върху M^n.

В частност получаваме вида на втората фундаментална форма на минимална и на развиваема праволинейна хиперповърхнина в

Следствие 1.1.3. (i) *Втората фундаментална форма h на минимална праволинейна хиперповърхнина има вида*

$$h = \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega).$$

(ii) *Втората фундаментална форма h на развиваема праволинейна хиперповърхнина има вида*

$$h = \nu\eta \otimes \eta.$$

Доказателство. (i) Означаваме с W единичното векторно поле съответстващо на 1-формата ω, т. е. $\omega(X) = g(X, W);\ X \in \mathfrak{X}M^n$. Нека Δ_0 е разпределението на M^n, ортогонално на W и ξ, т. е.

$$\Delta_0(p) = \{x_0 \in T_pM^n \,|\, x_0 \perp W,\, x_0 \perp \xi\}, \quad p \in M^n.$$

Като използваме вида (1.1.8) на h, намираме оператора A на втората фундаментална форма на M^n:

$$\begin{aligned} &Ax_0 = 0; \quad x_0 \in \Delta_0,\\ &AW = \mu\,\xi,\\ &A\xi = \mu\,W + \nu\,\xi, \end{aligned}$$

откъдето получаваме $trace\,A = \nu$. Следователно, една праволинейна хиперповърхнина M^n е минимална, тогава и само тогава, когато $\nu = 0$. И така, втората фундаментална форма h на минимална праволинейна хиперповърхнина има вида

$$h = \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega).$$

(ii) Праволинейната хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}, s \in J$ е развиваема, ако единичното нормално векторно поле N на M^n удовлетворява $\nabla'_x N = 0;\ x \in \Delta$. От второто равенство на (1.1.5) и (1.1.6) следва, че за развиваема праволинейна хиперповърхнина е в сила $\mu = 0$. Следователно, втората фундаментална форма h на развиваема праволинейна хиперповърхнина има вида $h = \nu\eta \otimes \eta$. $\square$

Видът на втората фундаментална форма h на развиваема праволинейна хиперповърхнина е получен и в [20], където произволна развиваема праволинейна хиперповърхнина е разгледана като обвивка на еднопараметрично семейство от хиперравнини. Тук ние го получаваме като следствие от вида на втората фундаментална форма на праволинейна хиперповърхнина.

Ще разгледаме по-подробно развиваемите праволинейни хиперповърхнини в § 1.2, където ще им дадем геометрично описание и един начин за геометрично конструиране. А сега ще се спрем на неразвиваемите праволинейни хиперповърхнини ($\mu \neq 0$) и ще докажем характеризационна теорема за тях.

Нека (M^n, g, W, ξ) е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с втора фундаментална форма

$$h = \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu \eta \otimes \eta, \quad \mu \neq 0 \tag{1.1.9}$$

и единични векторни полета W и ξ, съответстващи на 1-формите ω и η. Означаваме с Δ_0 разпределението на M^n, ортогонално на W и ξ .

Като използваме уравнението на Codazzi [25]

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z); \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}M^n,$$

от вида (1.1.9) на h получаваме следните условия за интегруемост на M^n:

$$\begin{aligned}
&1)\ \nabla_{x_0}\xi = \gamma(x_0)\, W;\\
&2)\ \nabla_{x_0}W = -\gamma(x_0)\, \xi;\\
&3)\ g(\nabla_\xi \xi, x_0) = \frac{d\mu(x_0)}{\mu} + \frac{\nu}{\mu}\,\gamma(x_0);\\
&4)\ g(\nabla_W W, x_0) = \frac{d\mu(x_0)}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}\,\gamma(x_0);\\
&5)\ g(\nabla_W \xi, x_0) = 2\,\gamma(x_0);\\
&6)\ g(\nabla_\xi W, x_0) = d\left(\frac{\nu}{\mu}\right)(x_0) - \frac{2\mu^2+\nu^2}{\mu^2}\,\gamma(x_0);\\
&7)\ g(\nabla_\xi \xi, W) = \frac{-\nu d\mu(\xi) + 2\mu d\mu(W) + \nu d\nu(W)}{(4\mu^2+\nu^2)};\\
&8)\ g(\nabla_W W, \xi) = \frac{2\mu d\mu(\xi) + \nu d\mu(W) - 2\mu d\nu(W)}{(4\mu^2+\nu^2)},
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

където $x_0 \in \Delta_0$, а γ е 1-форма върху Δ_0, дефинирана с равенството

$$\gamma(x_0) = g(\nabla_{x_0}\xi, W), \quad x_0 \in \Delta_0.$$

За праволинейните хиперповърхнини доказваме следната характеризационна

Теорема 1.1.4. *Нека (M^n, g, W, ξ) е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$. M^n локално е праволинейна хиперповърхнина тогава и само тогава, когато*

i) $h = \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu \eta \otimes \eta$;

ii) $\gamma = 0$;

iii) $div \xi = 0$.

Доказателство. I. Нека $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ е праволинейна хиперповърхнина, а ξ е единично векторно поле, ортогонално на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$. Според Твърдение 1.1.2 втората фундаментална форма h на M^n има вида *i)*.

Тъй като разпределението Δ, ортогонално на векторното поле ξ, е инволютивно (интегралните му многообразия са образуващите на M^n), то $d\eta(x,y) = 0;\ x, y \in \Delta$. От друга страна, от равенствата 1) и 5) на (1.1.10) получаваме

$$\begin{aligned} &d\eta(x_0, y_0) = 0; \\ &d\eta(x_0, W) = -\gamma(x_0); \end{aligned} \qquad x_0, y_0 \in \Delta_0.$$

Следователно, $\gamma(x_0) = 0;\ x_0 \in \Delta_0$, т. е. в сила е *ii)*.

Понеже интегралните многообразия на разпределението Δ са напълно геодезични подмногообразия за свързаността ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$, то

$$g(\nabla'_W W, \xi) = 0. \tag{1.1.11}$$

Ако $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ е локална ортонормирана база на разпределението Δ_0 в околност на точка $p \in M^n$, то от формулата

$$div\, \xi = \sum_{i=1}^{n-2} g(\nabla'_{e_i}\xi, e_i) + g(\nabla'_W \xi, W)$$

и $\nabla'_{x_0}\xi = 0,\ x_0 \in \Delta_0$ получаваме

$$div\, \xi = -g(\nabla'_W W, \xi). \tag{1.1.12}$$

Като използваме (1.1.11) и (1.1.12) заключаваме, че $div\, \xi = 0$, т. е. в сила е *iii)*.

II. Нека M^n е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, за която са в сила условията *i)*, *i)* и *iii)*. Като използваме, че $\gamma = 0$, от равенствата 2) и 5) на (1.1.10), получаваме

$$\begin{aligned} &d\eta(x_0, y_0) = 0; \\ &d\eta(x_0, W) = 0; \end{aligned} \qquad x_0, y_0 \in \Delta_0.$$

Следователно, разпределението Δ, определено от 1-формата η, е инволютивно и според теоремата на Фробениус [7] през всяка точка $p \in M^n$ минава единствено максимално интегрално многообразие S_p^{n-1} на $\Delta(p)$.

От условия *i)*, *ii)* и равенство (1.1.12) получаваме

$$\begin{aligned} &\nabla'_x \xi = div\, \xi\, \omega(x)\, W + \mu\omega(x)\, N; \\ &\nabla'_x N = -\mu\omega(x)\, \xi; \end{aligned} \qquad x \in \Delta. \tag{1.1.13}$$

При наличието на условие *iii)* равенствата (1.1.13) добиват вида

$$\begin{aligned} &\nabla'_x \xi = \sigma(x)\, N; \\ &\nabla'_x N = -\sigma(x)\, \xi; \end{aligned} \qquad x \in \Delta,$$

където сме означили $\sigma = \mu\omega$. Като приложим Лема 1.1.1 получаваме, че интегралните многообразия S_p^{n-1} на разпределението Δ локално са равнини $\mathbb{E}_p^{n-1}$. Следователно, M^n локално е праволинейна хиперповърхнина $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}, s \in J$. $\square$

Като следствие получаваме и характеризация на минималните праволинейни хиперповърхнини:

Следствие 1.1.5. *Нека (M^n, g, W, ξ) е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$. M^n локално е минимална праволинейна хиперповърхнина тогава и само тогава, когато*

i) $h = \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$;

ii) $\gamma = 0$;

iii) $d\mu(\xi) = 0$.

Доказателство. Като вземем предвид, че една праволинейна хиперповърхнина е минимална, тогава и само тогава, когато $\nu = 0$, то от равенство 8) на (1.1.10) и равенство (1.1.12) получаваме, че

$$div\xi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d\mu(\xi) = 0,$$

с което следствието е доказано. □

1.2 Геометрично описание на развиваемите праволинейни хиперповърхнини

Хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, която е развиваема еднопараметрична система от $(n-1)$-мерни равнини $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\},\ s \in J$ ще наричаме накратко *торс* (от английската дума *torse*). Торсовете се характеризират на езика на втората фундаментална форма чрез следната

Лема 1.2.1. *Хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ локално е торс тогава и само тогава, когато втората ѝ фундаментална форма h има вида*

$$h = \nu\eta \otimes \eta, \tag{1.2.1}$$

където ν и η са съответно функция и единична 1-форма върху M^n.

Доказателство. I. Нека M^n е торс $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\},\ s \in J$. Съгласно Следствие 1.1.3 (ii) втората фундаментална форма h на M^n има вида (1.2.1).

II. Нека M^n е хиперповърхнина с втора фундаментална форма (1.2.1). Означаваме с Δ разпределението

$$\Delta(p) = \{x \in T_pM^n \,|\, \eta(x) = 0\}, \quad p \in M^n.$$

Прилагайки уравнението на Codazzi за (1.2.1), получаваме

$$\nabla'_x\xi = 0; \quad x \in \Delta, \tag{1.2.2}$$

откъдето намираме $d\eta(x, y) = 0;\quad x, y \in \Delta$. Следователно, разпределението Δ е интегруемо и през всяка точка $p \in M^n$ минава единствено максимално интегрално многообразие S_p^{n-1} на $\Delta(p)$.

Като използваме (1.2.2), получаваме $\nabla'_x y \in \Delta;\ x, y \in \Delta$, откъдето следва, че S_p^{n-1} са напълно геодезични подмногообразия за свързаността ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$, т. е. S_p^{n-1} лежат върху равнини $\mathbb{E}_p^{n-1}$.

Следователно, M^n лежи върху еднопараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}, s \in J$ от равнини с коразмерност две, т. е. локално M^n е праволинейна хиперповърхнина. От вида (1.2.1) на h получаваме $\nabla'_x N = 0,\ x \in \Delta$. Следователно, M^n е развиваема. $\square$

Друго доказателство на тази лема може да се получи от Теорема 6 на [8], Твърдение 2 и Теорема 7 на [20].

И така, ако $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\},\ s \in J$ е торс с единично нормално векторно поле N, то от (1.2.1) получаваме

$$\nabla'_X N = -\nu\eta(X)\xi; \quad X \in \mathfrak{X}M^n,$$

където ξ е единично векторно поле, ортогонално на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ и съответстващо на 1-формата η. При това, образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ са интегрални многообразия на разпределението Δ, ортогонално на ξ и за оператора A на втората фундаментална форма е в сила

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \quad x \in \Delta; \\ A\xi &= \nu\xi. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Векторното поле ξ е определено с точност до знак и изборът му не променя функцията ν във втората фундаментална форма ($\nu = h(\xi,\xi) = h(-\xi,-\xi)$), т. е. ν е инварианта.

Забележка. Всяка хиперравнина $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ може да се разглежда като торс, за който $\nu = 0$, т. е. хиперравнините са тривиални торсове. Ние разглеждаме само нетривиални такива ($\nu \neq 0$).

За торсовете е в сила и следната геометрична характеризация [20]:

Лема 1.2.2. *Хиперповърхнина M^n в евклидово пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ е развиваема праволинейна хиперповърхнина тогава и само тогава, когато M^n е обвивка на еднопараметрично семейство от хиперравнини в $\mathbb{E}^{n+1}$.*

Ще разгледаме по-подробно торса като обвивка на семейство хиперравнини като използваме идеята в [20]. Нека $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(s)\}, s \in J$ е еднопараметрично семейство от хиперравнини $\mathbb{E}^n(s)$ в $\mathbb{E}^{n+1}$, а $\boldsymbol{c} :\ z = z(s),\ s \in J$ е ортогонална траектория на $\mathcal{F}$. Предполагаме, че $\boldsymbol{c}$ е гладка крива, параметризирана спрямо дължината на дъгата, така че са в сила формулите на Френе [3]:

$$\begin{aligned} z' &= t; \\ t' &= \varkappa\, n, \quad \varkappa > 0; \\ n' &= -\varkappa\, t + \tau\, b; \\ b' &= -\tau\, n + \tau_1\, b_1; \\ b_1' &= -\tau_1\, b + \tau_2\, b_2; \\ b_\alpha' &= -\tau_\alpha\, b_{\alpha-1} + \tau_{\alpha+1}\, b_{\alpha+1}, \quad \alpha = 2, \dots, n-3; \\ b_{n-2}' &= -\tau_{n-2}\, b_{n-3}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Векторите $t(s), n(s), b(s), b_1(s), \dots, b_{n-2}(s)$ образуват ортонормирана база на $\mathbb{E}^{n+1}$. Вектора $n(s)$ ще наричаме главна нормала, а векторите $b(s), b_1(s), \dots, b_{n-2}(s)$ - нормали на кривата $\boldsymbol{c}$. Ако $\tau = 0$, то $\tau_1 = \dots = \tau_{n-2} = 0$ и $b = const$, $b_\alpha = const$, $\alpha = 1, \dots, n-2$, откъдето следва, че кривата $\boldsymbol{c}$ лежи в 2-мерно подпространство $\mathbb{E}^2 = \mathrm{span}\{t, n\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$. Ако $\tau_\alpha = 0$ за някое $\alpha \in \{1, \dots, n-2\}$, то $\tau_{\alpha+1} = \dots = \tau_{n-2} = 0$ и $b_\beta = const$, $\beta = \alpha, \dots, n-2$, откъдето следва, че $\boldsymbol{c}$ лежи в $(\alpha+2)$-мерно подпространство $\mathbb{E}^{\alpha+2} = \mathrm{span}\{t, n, b, b_1, \dots, b_{\alpha-1}\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.

Нека M^n е обвивка на семейството $\mathcal{F}$. Според Лема 1.2.2 M^n е торс $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ и има локална параметризация [20]

$$X(s, u, v^1, \dots, v^{n-2}) = z(s) + \frac{1}{\varkappa(s)} n(s) + u\, b(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha\, b_\alpha(s), \quad s \in J;\ u,\ v^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.2.5}$$

Като диференцираме (1.2.5) последователно по s, u, v^α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ и вземем пред вид формули (1.2.4), намираме допирателните вектори на M^n:

$$\begin{aligned} X_s = \frac{\partial X}{\partial s} = &\left(-\frac{\varkappa'}{\varkappa^2} - \tau u\right) n + \left(\frac{\tau}{\varkappa} - \tau_1\, v^1\right) b + (u\tau_1 - v^2\tau_2)\, b_1 \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-3} \left(v^{\alpha-1}\,\tau_\alpha - v^{\alpha+1}\,\tau_{\alpha+1}\right) b_\alpha + v^{n-3}\tau_{n-2} b_{n-2}; \\ X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = &\ b; \\ X_\alpha = \frac{\partial X}{\partial v^\alpha} = &\ b_\alpha. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Тъй като допирателното пространство в произволна точка $p \in M^n$ с радиус-вектор $X(s, u, v^1, \dots, v^{n-2})$ е $T_pM^n = \mathrm{span}\{X_s,\, X_u,\, X_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$, то от равенства (1.2.6) получаваме, че $t \perp T_pM^n$, т. е. допирателният вектор t към ортогоналната траектория $\boldsymbol{c}$ на семейството $\mathcal{F}$ се явява нормала на хиперповърхнината M^n.

Ще изразим инварианта ν във втората фундаментална форма на M^n чрез кривините $\varkappa$ и τ на кривата $\boldsymbol{c}$ и ще направим класификация на торсовете според вида на $\boldsymbol{c}$.

Като използваме, че нормалата на M^n е $N = t$, намираме

$$\begin{aligned} \nabla'_{X_s} N &= \frac{\partial N}{\partial s} = t' = \varkappa n; \\ \nabla'_{X_u} N &= \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial u} = 0; \\ \nabla'_{X_\alpha} N &= \frac{\partial N}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial t}{\partial v^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Тогава, от формулата на Weingarten $\nabla'_X N = -AX;\ X \in \mathfrak{X}M^n$, получаваме

$$
\begin{aligned}
&AX_s = -\varkappa n;\\
&AX_u = 0;\\
&AX_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2.
\end{aligned} \tag{1.2.7}
$$

Нека $\Delta = \operatorname{span}\{b, b_1, \dots, b_{n-2}\}$. От второто и третото равенство на (1.2.7) следва, че

$$Ax = 0, \quad x \in \Delta. \tag{1.2.8}$$

За вектора X_s от (1.2.6) имаме

$$X_s = -\frac{\varkappa' + \varkappa^2 \tau u}{\varkappa^2}\, n + x, \quad x \in \Delta. \tag{1.2.9}$$

Ще разгледаме отделно случаите, когато кривата $\boldsymbol{c}$ е равнинна и когато не е равнинна.

I случай: Нека $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива, т. е. $\tau(s) = 0,\ s \in J$. Тогава, равенство (1.2.9) добива вида

$$X_s = -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2} n. \tag{1.2.10}$$

Ако $\varkappa' = 0,\ s \in J$, т. е. $\boldsymbol{c}$ е част от окръжност, то $X_s = 0$ и тогава равенството (1.2.5) задава една постоянна равнина $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, която минава през центъра на окръжността. Следователно, еднопараметричната система $\{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}, s \in J$ се състои само от една равнина с коразмерност 2 и не е хиперповърхнина. Затова считаме, че $\varkappa'(s) \neq 0$ в интервал $J_0 \subseteq J$. Тогава, от (1.2.7) и (1.2.10) намираме

$$An = \frac{\varkappa^3}{\varkappa'}\, n. \tag{1.2.11}$$

Тъй като $n \perp \operatorname{span}\{b, b_1, \dots, b_{n-2}\}$, т. е. $n \perp \Delta$ и е в сила (1.2.8), то векторно поле, ортогонално на образуващите на M^n, е $\xi = n$. Означаваме с η единичната 1-форма, съответстваща на ξ. Като използваме еднозначното разлагане на произволно векторно поле $X \in \mathfrak{X}M^n$ във вида $X = x + \eta(X)\xi;\quad x \in \Delta$, от (1.2.8) и (1.2.11) получаваме

$$AX = \frac{\varkappa^3}{\varkappa'}\, \eta(X)\xi.$$

Следователно, втората фундаментална форма h на M^n има вида

$$h = \frac{\varkappa^3}{\varkappa'}\, \eta \otimes \eta$$

и инвариантата във втората фундаментална форма е $\nu(s) = \dfrac{\varkappa^3}{\varkappa'}$.

И така, в случай, че $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива с непостоянна кривина, инвариантата ν е функция само на параметъра s. Следователно, $d\nu(x) = 0;\ x \in \Delta$, което означава, че ν е константа върху образуващите на торса.

Освен това, равнината $\mathrm{span}\{t, n\} = \mathrm{span}\{N, \xi\}$ е постоянна равнина (в която лежи кривата $\boldsymbol{c}$), а образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на M^n са ортогонални на нея. Следователно, M^n е цилиндричен торс.

Очевидно е вярно и обратното, а именно: ако $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ е цилиндричен торс, то $\mathrm{span}\{t, n\}$ е постоянна равнина, откъдето следва, че кривата $\boldsymbol{c}$ е равнинна.

Получените резултати ни дават

Твърдение 1.2.3. *Нека торсът M^n е обвивка на еднопараметрично семейство хиперравнини $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(s)\}, s \in J$, а $\boldsymbol{c}$ е ортогонална траектория на $\mathcal{F}$, за която $\varkappa \neq const$. M^n е цилиндричен торс тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива.*

<u>*II случай:*</u> Нека кривата $\boldsymbol{c}$ не е равнинна, т. е. съществува подинтервал $J_0 \subseteq J$, такъв че $\tau(s) \neq 0,\ s \in J_0$. За допирателното векторно поле X_s е в сила (1.2.9), откъдето следва, че при

$$u = -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\,\tau} \tag{1.2.12}$$

е изпълнено $X_s \in \Delta$, т. е. в точките на M^n, за които е в сила (1.2.12), хиперповърхнината M^n не е гладка ($dim\{X_s, X_u, X_1, \ldots, X_{n-2}\} = n-1$). Следователно, за всяка фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s_0)$, $s_0 \in J_0$ съществува едно подпространство $\mathbb{E}_0^{n-2}(s_0)$ от особени точки на M^n, определено с

$$Z(v^1, \ldots, v^{n-2}) = z(s_0) + \frac{1}{\varkappa(s_0)} n(s_0) - \frac{\varkappa'(s_0)}{\varkappa^2(s_0)\tau(s_0)} b(s_0) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha b_\alpha(s_0).$$

По аналогия с понятието централна точка при рой прави в тримерното пространство $\mathbb{E}^3$ наричаме $\mathbb{E}_0^{n-2}(s_0)$ *централна равнина*[1] на образуващата $\mathbb{E}^{n-1}(s_0)$.

Да разгледаме 1-параметричната съвкупност $M_0 = \{\mathbb{E}_0^{n-2}(s)\}$, $s \in J_0$ от централните равнини на M^n. Тя има параметрично представяне

$$Z(s, v^1, \ldots, v^{n-2}) = z(s) + \frac{1}{\varkappa(s)}\, n(s) - \frac{\varkappa'(s)}{\varkappa^2(s)\tau(s)}\, b(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha b_\alpha(s), \tag{1.2.13}$$

където $s \in J_0;\ v^\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 1, \ldots, n-2$.

Ще наричаме M_0 *централна повърхнина* на торса M^n (по аналогия с понятието централна крива на рой прави в $\mathbb{E}^3$).

От (1.2.7) и (1.2.9) получаваме, че извън точките на централната повърхнина M_0 втората фундаментална форма на M^n е

$$h = \frac{\varkappa^3}{\varkappa' + \varkappa^2 \tau\, u}\, \eta \otimes \eta.$$

[1] Според терминологията, използване в [8], подпространството $\mathbb{E}_0^{n-2}(s_0)$ на $\mathbb{E}^{n-1}(s_0)$ се нарича Kehlraum.

И така, в случай на неравнинна крива $\boldsymbol{c}$, инвариантата във втората фундаментална форма е

$$\nu(s,u) = \frac{\varkappa^3}{\varkappa' + \varkappa^2\tau\, u},$$

откъдето следва, че ν е функция на два геометрични параметъра: естествения параметър s на ортогоналната траектория $\boldsymbol{c}$ на семейството хиперравнини $\mathcal{F}$ и параметър u, който е геометрично свързан с кривата $\boldsymbol{c}$ (u е мярката на отклонението на локалния радиус-вектор $X - z$ от нормалата b на кривата).

Използвайки параметричното представяне (1.2.13) на централната повърхнина M_0 и формулите на Френе (1.2.4), получаваме допирателните вектори към M_0:

$$\begin{aligned} Z_s = &\left(\frac{\tau}{\varkappa} - \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)' - \tau_1 v^1\right) b + \left(-\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\,\tau_1 - \tau_2 v^2\right) b_1 \\ &+\sum_{\alpha=2}^{n-3}\left(\tau_\alpha v^{\alpha-1} - \tau_{\alpha+1}v^{\alpha+1}\right) b_\alpha + \tau_{n-2}v^{n-3}\, b_{n-2}; \\ Z_\alpha = &\; b_\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,n-2. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Имаме следните възможности за 1-параметричната съвкупност от $(n-2)$-мерни равнини M_0:

1. $Z_s = 0,\ s \in J_0$. Тогава, M_0 се състои само от една равнина $\mathbb{E}_0^{n-2}$. Следователно, за всяка стойност на $s \in J_0$ образуващата $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на M^n минава през една постоянна $(n-2)$-мерна равнина $\mathbb{E}_0^{n-2}$, т. е. M^n локално е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх $\mathbb{E}_0^{n-2}$.

От първото равенство на (1.2.14) получаваме, че $Z_s = 0,\ s \in J_0$ тогава и само тогава, когато са в сила условията

$$\begin{aligned} &\frac{\tau}{\varkappa} - \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)' - \tau_1 v^1 = 0; \\ &-\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\,\tau_1 - \tau_2 v^2 = 0; \\ &\tau_\alpha v^{\alpha-1} - \tau_{\alpha+1}v^{\alpha+1} = 0, \quad \alpha = 2,\dots,n-3; \\ &\tau_{n-2}v^{n-3} = 0. \end{aligned}$$

При фиксирана стойност на $s \in J_0$ левите страни на горните равенства са полиноми от I степен за променливите $v^1,\dots,v^{n-2}$. Следователно, горните равенства са в сила при произволни стойности на $v^\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 1,\dots,n-2$ тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned} &\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{n-2} = 0; \\ &\frac{\tau}{\varkappa} - \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)' = 0, \end{aligned}$$

т. е. кривата $\boldsymbol{c}$ е неравнинна сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ [2].

И така, M^n локално е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх тогава и само тогава, когато ортогоналната траектория $\boldsymbol{c}$ на $\mathcal{F}$ е неравнинна сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.

2. Съществува отворено подмножество $J' \subset J$, такова че $Z_s(s') \neq 0, \quad s' \in J'$. Тогава, $M_0' = \{\mathbb{E}_0^{n-2}(s')\}$, $s' \in J'$ е $(n-1)$-мерна праволинейна повърхнина, чиито допирателни равнини са $\mathrm{span}\{Z_s, Z_\alpha\} = \mathrm{span}\{b, b_\alpha\} = \Delta$. Следователно, M^n съдържа част $M' = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J'$, която е тангентен торс (състои се от допирателните равнини към повърхнината M_0').

Получените резултати формулираме в следното

Твърдение 1.2.4. *Нека торсът M^n е обвивка на еднопараметрично семейство хиперравнини $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(s)\}, s \in J$, а $\boldsymbol{c}$ е ортогонална траектория на $\mathcal{F}$, която не е равнинна крива. Тогава в сила е една от следните възможности:*

(i) *M^n е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх и $\boldsymbol{c}$ е сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.*

(ii) *M^n локално е тангентен торс, състоящ се от допирателните равнини към една $(n-1)$-мерна праволинейна повърхнина.*

Твърдения 1.2.3 и 1.2.4 ни дават локална класификация на торсовете, която съответства на класификацията на развиваемите роеве прави в тримерното пространство $\mathbb{E}^3$ (всеки торс локално е цилиндричен, коничен или тангентен). В [8] е направено разделяне на развиваемите $(k+1)$-повърхнини в $\mathbb{E}^n$ на цилиндрични, конични и тангентни според размерностите на т. н. асимптотичен и тангенциален сноп като се използва придружаващ ортонормиран базис на повърхнината, зададен със система диференциални уравнения. Докато ние получаваме геометрично описание на класовете торсове чрез вида на ортогоналната траектория $\boldsymbol{c}$ на семейството $\mathcal{F}$, пораждащо торса: ако $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива, то породеният торс е цилиндричен; ако $\boldsymbol{c}$ е неравнинна сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство на $\mathbb{E}^{n+1}$, то породеният торс е коничен, а в останалите случаи за $\boldsymbol{c}$ съответният торс е тангентен.

Ще дадем още едно геометрично описание на развиваемите праволинейни хиперповърхнини, което ни дава начин за геометрично конструиране на торсове. Разглеждаме отново торс $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ с втора фундаментална форма $h = \nu\eta \otimes \eta$. Допирателното пространство T_pM^n в произволна точка $p \in M^n$ се разлага във вида

$$T_pM^n = \Delta(p) + \mathrm{span}\{\xi_p\}.$$

При това, разпределението Δ е интегруемо (интегралните му многообразия са образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на торса), а ξ е специално векторно поле върху M^n, ортогонално на образуващите. Следователно, през всяка точка $p \in M^n$ минава едно интегрално многообразие $\mathbb{E}^{n-1}$ на разпределението Δ и една интегрална крива $\boldsymbol{c}$ на векторното поле ξ. Можем да разглеждаме торса M^n като еднопараметрична съвкупност от $(n-1)$-мерни нормални равнини на интегрална крива на ξ. Тогава, естествено е да си поставим въпроса: дали всеки торс може да бъде породен от една крива $\boldsymbol{c}$ по този начин. В Теорема 1.2.6 даваме отговор на този въпрос.

Лема 1.2.5. *Нека* $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ *е гладка крива в* $\mathbb{E}^{n+1}$ *с допирателен вектор* $t(s)$ *и* N_0 *е единичен вектор, ортогонален на* $\boldsymbol{c}$ *в точката* $z(s_0),\ s_0 \in J$. *Тогава, съществува еднозначно определен вектор* $N(s),\ s \in J$, *удовлетворяващ*

$$N' = f\,t; \quad g(N,t) = 0; \quad g(N,N) = 1; \quad N(s_0) = N_0,$$

където f *е функция на* s.

Доказателство. Можем да считаме, че кривата $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ е параметризирана спрямо естествен параметър s, така че са в сила първите две формули на Френе

$$\begin{aligned} z' &= t; \\ t' &= \varkappa\, n, \quad \varkappa > 0. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Нека $\mathbb{E}^n(s)$ е нормалната равнина на $\boldsymbol{c}$ в точката $z(s)$, т. е. $\mathbb{E}^n(s) \perp t(s)$. Избираме ортонормирана база $\{b_1(s), \dots, b_{n-1}(s)\}$, ортогонална на $\operatorname{span}\{t(s), n(s)\}$. Тъй като $N_0 \perp t(s_0)$, то съществуват числа $q_0, q_0^1, \dots, q_0^{n-1} \in \mathbb{R}$, такива че $N_0 = q_0\, n(s_0) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} q_0^\alpha\, b_\alpha(s_0)$. Произволен вектор $N(s) \in \mathbb{E}^n(s)$ се представя еднозначно във вида

$$N(s) = q(s)\, n(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} q^\alpha(s)\, b_\alpha(s). \tag{1.2.16}$$

За векторите $n'(s)$ и $b'_\alpha(s)$ са в сила следните разлагания:

$$\begin{aligned} n'(s) &= -\varkappa(s)\, t(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha(s)\, b_\alpha(s); \\ b'_\alpha(s) &= -c^\alpha(s)\, n(s) + \sum_{\beta=1}^{n-1} c_\alpha^\beta(s)\, b_\beta(s); \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

където $c^\alpha(s)$ и $c_\alpha^\beta(s)$ са функции, за които $c_\alpha^\alpha = 0;\ c_\alpha^\beta = -c_\beta^\alpha;\ \alpha, \beta = 1, \dots, n-1$.

Като диференцираме (1.2.16) по s и използваме формули (1.2.15) и (1.2.17), получаваме

$$N' = -\varkappa\, q\, t + \left(\frac{dq}{ds} - \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha q^\alpha \right) n + \sum_{\beta=1}^{n-1} \left(\frac{dq^\beta}{ds} + c^\beta q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c_\alpha^\beta\, q^\alpha \right) b_\beta. \tag{1.2.18}$$

Да разгледаме следната система обикновени диференциални уравнения за неизвестните функции $q(s), q^1(s), \dots, q^{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha q^\alpha; \\ \frac{dq^\beta}{ds} &= -c^\beta q - \sum_{\alpha=1}^{n-1} c_\alpha^\beta q^\alpha, \quad \beta = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

От теорията на диференциалните уравнения следва, че съществува единствено решение $q(s), q^1(s), \dots, q^{n-1}(s),\ s \in J$ на системата (1.2.19), такова че $q(s_0) = q_0;\ q^\alpha(s_0) = q_0^\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n-1$. Тогава, съгласно (1.2.18), векторът $N(s)$, дефиниран с равенство (1.2.16), където $q(s), q^1(s), \dots, q^{n-1}(s)$ е решението на (1.2.19), удовлетворява условията

$$N' = f\,t; \quad g(N, t) = 0; \quad N(s_0) = N_0, \tag{1.2.20}$$

където $f = -\varkappa\, q$.

Като използваме, че $g(N', N) = 0$, получаваме $\dfrac{d}{ds} g(N, N) = 0$, откъдето следва, че $g(N, N) = g(N_0, N_0) = 1$. □

Теорема 1.2.6. *Ако $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ е гладка крива в $\mathbb{E}^{n+1}$ и N_0 е единичен вектор, ортогонален на $\boldsymbol{c}$ в точката $z(s_0)$, $s_0 \in J$, то съществува еднозначно определен торс $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ с образуващи $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, ортогонални на кривата $\boldsymbol{c}$ и нормала N, за която $N(s_0) = N_0$.*

Доказателство. Нека за кривата $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ са в сила формули (1.2.15) и $N = N(s)$ е векторът, еднозначно определен от $\boldsymbol{c}$ и N_0 според Лема 1.2.5. Векторите $t(s)$ и $N(s)$ определят $(n-1)$-мерна равнина $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, ортогонална на $\operatorname{span}\{t(s), N(s)\}$. Разглеждаме еднопараметричната система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ от $(n-1)$-мерни нормални равнини $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на кривата $\boldsymbol{c}$. Ще докажем, че M^n е торс с нормала N.

Нека $X = X(s, u^1, \dots, u^{n-1}),\ s \in J,\ u^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \dots, n-1$ е локална параметризация на M^n. Тъй като образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на M^n са ортогонални на $t(s)$ и $N(s)$, то в сила са уравненията

$$\begin{aligned} t(X - z) &= 0; \\ N(X - z) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Диференцирайки (1.2.21) по u^α, $\alpha = 1, \dots, n-1$, получаваме

$$t\, X_\alpha = 0; \quad N\, X_\alpha = 0, \tag{1.2.22}$$

откъдето следва, че $X_\alpha \perp \operatorname{span}\{t, N\}$. Като диференцираме второто равенство на (1.2.21) по s и използваме формули (1.2.15) и (1.2.20), получаваме

$$N\, X_s = 0. \tag{1.2.23}$$

Равенства (1.2.22) и (1.2.23) показват, че векторът N е ортогонален на допирателното пространство $\operatorname{span}\{X_s, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ на M^n. Следователно, N е нормала на M^n. Освен това, тъй като $N = N(s)$, то допирателното пространство в точките на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ е едно и също, което означава, че M^n е развиваема праволинейна хиперповърхнина (торс). □

Векторно поле N по крива $\boldsymbol{c}$, за което е в сила $\nabla'_{\dot{\boldsymbol{c}}} N = f\,\dot{\boldsymbol{c}}$ за някаква функция f, се нарича *торсообразуващо* (*torse-forming*) векторно поле по кривата $\boldsymbol{c}$ [51]. Лема 1.2.5 показва, че за всяка гладка крива $\boldsymbol{c}$ съществуват торсообразуващи векторни полета по $\boldsymbol{c}$, при това, всяко такова векторно поле се определя от задаването си в една точка от кривата. Теорема 1.2.6 ни дава директен начин за геометрично конструиране на развиваеми праволинейни хиперповърхнини:

Всяка гладка крива $\boldsymbol{c}$ и единичен нормален вектор N_0 в точка от $\boldsymbol{c}$ определят еднозначно торс M^n.

Ще изведем вида на инвариантата ν във втората фундаментална форма h на торс M^n като използваме кривината $\varkappa$ на кривата $\boldsymbol{c}$, която го поражда.

От (1.2.16) и (1.2.20) намираме

$$N' = -\varkappa \cos\beta\, t, \tag{1.2.24}$$

където $\beta = \angle(N, n)$ (n е главната нормала на $\boldsymbol{c}$).

При $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ получаваме $N' = 0$. Следователно, N е постоянен вектор и породеният торс M^n е хиперравнина $\mathbb{E}^n$ (тривиален торс с $\nu = 0$).

При $\beta = 0$ или $\beta = \pi$, т. е. $N = \pm n$, от формули (1.2.15) и (1.2.24) получаваме, че кривата $\boldsymbol{c}$ е равнинна. Тогава, $\operatorname{span}\{t(s), n(s)\}$ е постоянна равнина и образуващите на торса са ортогонални на нея. Следователно, M^n е цилиндричен торс, чиито образуващи са $(n-1)$-мерни равнини, ортогонални на равнината, в която лежи кривата $\boldsymbol{c}$. Лесно се съобразява, че е вярно и обратното, а именно: ако M^n е цилиндричен торс (образуващите му $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ са успоредни помежду си), то $N = \pm n$ и кривата $\boldsymbol{c}$ е равнинна.

В случай на равнинна крива $\boldsymbol{c}$ векторите $b_1, \dots, b_{n-1}$, ортогонални на пространството $\operatorname{span}\{t(s), n(s)\}$ са постоянни ($b_\alpha = const$, $\alpha = 1, \dots, n-1$) и торсът M^n се представя спрямо базата $\{t(s), n(s), b_1, \dots, b_{n-1}\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ с уравнението

$$X(s, u^1, \dots, u^{n-1}) = z(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} u^\alpha b_\alpha,$$

откъдето намираме $X_s = t$.

Очевидно, единично векторно поле, ортогонално на образуващите на M^n, е $\xi = t$. Тогава, от формулата $\nabla'_{X_s} N = -\nu\, \eta(X_s)\xi$ и равенство (1.2.24) при $\cos\beta = \pm 1$, получаваме

$$\nu = \nu(s) = \pm\varkappa(s).$$

Следователно, при цилиндричен торс инвариантата ν зависи само от параметъра s на кривата $\boldsymbol{c}$, която го поражда, т. е. ν е константа върху образуващите на торса. При това, функцията ν е кривината $\varkappa$ на кривата $\boldsymbol{c}$, взета със знак $''+''$ при $N = n$ и със знак $''-''$ при $N = -n$.

Сега ще разгледаме общия случай, когато $\beta \neq 0; \dfrac{\pi}{2}; \pi$. Избираме вектор $e(s)$, ортогонален на $N(s)$ и $t(s)$, такъв, че $e \in \operatorname{span}\{N, n\}$ и е в сила

$$n = \cos\beta\, N + \sin\beta\, e \tag{1.2.25}$$

и го допълваме с вектори $e_1(s), \dots, e_{n-2}(s)$ до ортонормирана база на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, т. е. $\mathbb{E}^{n-1}(s) = \operatorname{span}\{e(s), e_1(s), \dots, e_{n-2}(s)\}$.

Спрямо базата $\{N, t, e, e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ торсът M^n се представя с уравнението

$$X(s, u, v^1, \ldots, v^{n-2}) = z(s) + u\, e(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha e_\alpha(s); \quad s \in J;\ u, v^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.2.26}$$

Като диференцираме (1.2.26) по s намираме

$$X_s = t + u\, e' + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha e'_\alpha.$$

Използвайки (1.2.25) и равенствата

$$g(e'_\alpha, t) = -g(e_\alpha, t') = -\varkappa g(e_\alpha, n) = 0;$$
$$g(e', t) = -\varkappa g(e, n) = -\varkappa \sin\beta,$$

получаваме

$$g(X_s, t) = 1 - u\varkappa \sin\beta. \tag{1.2.27}$$

Тъй като $t \perp \operatorname{span}\{e, e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ и $t \perp N$, то единично векторно поле, ортогонално на образуващите, е $\xi = t$. Допирателното пространство към M^n в точка $p \in M^n$ се разлага във вида

$$T_p M^n = \Delta(p) + \operatorname{span}\{\xi_p\}.$$

Следователно, за допирателния вектор X_s е в сила представянето

$$X_s = g(X_s, \xi)\, \xi + x, \quad x \in \Delta,$$

откъдето, като използваме (1.2.3) намираме

$$\nabla'_{X_s} N = -\nu\, g(X_s, \xi)\, \xi = -\nu\, g(X_s, t)\, t. \tag{1.2.28}$$

От друга страна, според (1.2.24) е в сила $\nabla'_{X_s} N = -\varkappa \cos\beta\, t$. Тогава, с помощта на (1.2.27) и (1.2.28) намираме

$$\nu = \nu(s, u) = \frac{\varkappa \cos\beta}{1 - u\varkappa \sin\beta}. \tag{1.2.29}$$

Окончателно получаваме, че при неравнинна крива $\boldsymbol{c}$ функцията ν зависи от два геометрични параметъра, свързани с кривата: естествения параметър s на $\boldsymbol{c}$ и параметър u, който задава мярката на отклонението на локалния радиус-вектор $X - z$ от един геометрично определен вектор $e = \operatorname{span}\{N, n\} \cap \mathbb{E}^{n-1}$.

Формула (1.2.29) е в сила и в случая на равнинна крива $\boldsymbol{c}$, при който $N = \pm n$ и $\sin\beta = 0$. Освен това, от (1.2.29) намираме:

$$\frac{\partial \nu}{\partial u} = 0 \iff \beta = 0; \frac{\pi}{2}; \pi.$$

Следователно, ν зависи само от параметъра s, тогава и само тогава, когато M^n е цилиндричен или тривиален торс.

Получените резултати формулираме в следното

Твърдение 1.2.7. *Инвариантата ν във втората фундаментална форма h на торс M^n, породен от крива $\boldsymbol{c}$, зависи от два геометрични параметъра, свързани с кривата $\boldsymbol{c}$ и се задава с формула* (1.2.29). *При това, следните условия са еквивалентни:*

(i) *M^n е цилиндричен торс;*

(ii) *$\boldsymbol{c}$ е равнинна крива;*

(iii) *ν е константа върху образуващите на торса.*

Ще отбележим, че при този подход на геометрично конструиране на торсове инвариантата ν във втората фундаментална форма се изразява само чрез кривината $\varkappa$ на кривата $\boldsymbol{c}$, която го поражда.

Да разгледаме отново случая на нецилиндричен торс M^n, т. е. кривата $\boldsymbol{c}$ е неравнинна. Тогава, M^n се представя параметрично с уравнението (1.2.26). Допирателното пространство към M^n в точка $p \in M^n$ е

$$T_pM^n = \operatorname{span}\{X_s, X_u, X_{v^1}, \dots, X_{v^{n-2}}\} = \operatorname{span}\{X_s, e, e_1, \dots, e_{n-2}\}.$$

От (1.2.27) следва, че в точките на M^n, за които е в сила

$$u = \frac{1}{\varkappa \sin\beta},$$

е изпълнено $X_s \in \operatorname{span}\{e, e_1, \dots, e_{n-2}\}$, т. е. M^n не е гладка хиперповърхнина. Следователно, за всяка фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s_0)$, $s_0 \in J$ съществува едно подпространство $\mathbb{E}_0^{n-2}(s_0)$ от особени точки на M^n, определено с

$$Z(v^1, \dots, v^{n-2}) = z(s_0) + \frac{1}{\varkappa \sin\beta}\, e(s_0) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha\, e_\alpha(s_0); \quad v^\alpha \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{E}_0^{n-2}(s_0)$ е централната равнина на образуващата $\mathbb{E}^{n-1}(s_0)$. Еднопараметричната съвкупност $M_0 = \{\mathbb{E}_0^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ от централните равнини на M^n има параметрично представяне

$$Z(s, v^1, \dots, v^{n-2}) = z(s) + \frac{1}{\varkappa \sin\beta}\, e(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha\, e_\alpha(s); \quad s \in J;\ v^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.2.30}$$

По същия начин, както в предишния подход, можем да отделим двата случая на тангентен и коничен торс.

Векторите $e'(s), e_1'(s), \dots, e_{n-2}'(s)$ се разлагат спрямо базата $\{N, t, e, e_1, \dots, e_{n-2}\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ еднозначно във вида

$$\begin{aligned} e' &= -\varkappa \sin\beta\, t + \sum_{\alpha=1}^{n-2} p^\alpha\, e_\alpha; \\ e_\alpha' &= -p^\alpha\, e + \sum_{\gamma=1}^{n-2} p_\alpha^\gamma\, e_\gamma, \quad \alpha = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

където p^α и p^γ_α, $\alpha, \gamma = 1, \dots, n-2$ са функции на s.

Като използваме параметричното представяне (1.2.30) на централната повърхнина M_0 и формули (1.2.31), получаваме допирателните вектори към M_0:

$$\begin{aligned} Z_s &= \left(\left(\frac{1}{\varkappa \sin\beta} \right)' - \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha p^\alpha \right) e + \sum_{\gamma=1}^{n-2} \left(\frac{p^\gamma}{\varkappa \sin\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha p^\gamma_\alpha \right) e_\gamma; \\ Z_\alpha &= e_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

Отново имаме два случая:

1. $Z_s = 0$, $s \in J$. Тогава, 1-параметричната съвкупност M_0 се състои само от една равнина $\mathbb{E}^{n-2}_0$ и M^n е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх $\mathbb{E}^{n-2}_0$.

От първото равенство на (1.2.32) получаваме, че $Z_s = 0$, $s \in J$ тогава и само тогава, когато са в сила условията

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varkappa \sin\beta} \right)' = 0; \\ &p^\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n-2; \\ &p^\gamma_\alpha = 0, \qquad \alpha, \gamma = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Следователно, ако M^n е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх, то от (1.2.31) и (1.2.33) получаваме

$$\begin{aligned} &e' = -\varkappa \sin\beta\, t; \\ &e'_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n-2; \\ &\frac{\varkappa'}{\varkappa} = -\beta' \cot\beta. \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Като използваме, че $N' = -\varkappa \cos\beta\, t$ и $e' = -\varkappa \sin\beta\, t$, от (1.2.25) намираме

$$n' = -\varkappa\, t + \beta'(-\sin\beta\, N + \cos\beta\, e). \tag{1.2.35}$$

Нека $\{t, n, b, b_1, \dots, b_{n-2}\}$ е ортонормиран придружаващ репер на Френе за кривата $\boldsymbol{c}$. От (1.2.35) и формулите на Френе получаваме

$$b = -\sin\beta\, N + \cos\beta\, e; \quad \tau = \beta'.$$

Тогава, $b' = -\tau\, n$, откъдето следва, че кривата $\boldsymbol{c}$ лежи в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3 = \operatorname{span}\{t, n, b\} = \operatorname{span}\{t, N, e\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.

От третото равенство на (1.2.34) и $\beta' = \tau$ получаваме $\beta = \arctan\left(-\frac{\varkappa\tau}{\varkappa'}\right)$. Като диференцираме последното равенство и преобразуваме, намираме, че за инвариантите на кривата $\boldsymbol{c}$ е в сила следното диференциално уравнение

$$\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} \right)' = \frac{\tau}{\varkappa},$$

откъдето следва, че $\boldsymbol{c}$ е неравнинна сферична крива.

Проверява се, че е в сила и обратното, а именно: ако $\boldsymbol{c}$ е неравнинна сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ и $N \in \operatorname{span}\{n, b\}$ е нормално векторно поле на $\boldsymbol{c}$, такова, че $N' = -\varkappa \cos\beta\, t$, то породеният от $\boldsymbol{c}$ и N торс M^n е коничен с $(n-2)$-мерен връх.

2. Съществува отворено подмножество $J' \subset J$, такова че $Z_s(s') \neq 0,\ s' \in J'$. Тогава, 1-параметричната съвкупност $M'_0 = \{E_0^{n-2}(s')\}$, $s' \in J'$ е $(n-1)$-мерна праволинейна повърхнина, чиито допирателни равнини са образуващи на M^n. Следователно, M^n локално е тангентен торс.

Така получаваме

Твърдение 1.2.8. *Нека M^n е торс, породен от гладка крива $\boldsymbol{c}$. Ако $\boldsymbol{c}$ е неравнинна крива, то е в сила една от следните възможности:*

(i) *M^n е коничен торс с $(n-2)$-мерен връх и $\boldsymbol{c}$ е сферична крива, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.*

(ii) *M^n локално е тангентен торс, състоящ се от допирателните равнини към $(n-1)$-мерна праволинейна повърхнина.*

1.3 Геометрично конструиране на минимални праволинейни хиперповърхнини

Ще използваме идеята от Теорема 1.2.6 за развиваемите праволинейни хиперповърхнини, за да дадем начин за геометрично конструиране на минималните праволинейни хиперповърхнини.

Нека $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ е минимална праволинейна хиперповърхнина с единично нормално векторно поле N. През всяка точка $p \in M^n$ минава интегрална крива $\boldsymbol{c}$ на векторното поле ξ, ортогонално на образуващите на M^n. Според Следствие 1.1.3 (i), за оператора A на втората фундаментална форма на M^n е в сила

$$A(X) = \mu\,\omega(X)\xi + \mu\,\eta(X)W, \quad X \in \mathfrak{X}M^n.$$

Следователно, $\nabla'_\xi N = -\mu W$. И така, нормалното векторно поле N на M^n удовлетворява

$$\nabla'_\xi N \perp N, \xi.$$

Тогава, в точките на кривата $\boldsymbol{c}$ имаме $\nabla'_{\dot{\boldsymbol{c}}} N \perp \dot{\boldsymbol{c}}$. Нека $\{t, n, b, b_1, \dots, b_{n-2}\}$ е ортонормираният придружаващ репер на Френе на кривата $\boldsymbol{c}$. От $g(\nabla'_{\dot{\boldsymbol{c}}} N, \dot{\boldsymbol{c}}) = 0$ и $g(N, \dot{\boldsymbol{c}}) = 0$, следва $g(\nabla'_{\dot{\boldsymbol{c}}} \dot{\boldsymbol{c}}, N) = 0$, т. е. $g(t', N) = 0$. Като използваме, че $t' = \varkappa n$, получаваме, че в точките на кривата $\boldsymbol{c}$ е в сила

$$N \perp \operatorname{span}\{t, n\}.$$

Следователно, при минимална праволинейна хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ главната нормала $n(s)$ на ортогоналната траектория на образуващите лежи в $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, $s \in J$.

Всяка праволинейна хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ се представя параметрично във вида [19]

$$X(s, u^1, \dots, u^{n-1}) = z(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} u^\alpha e_\alpha(s); \quad s \in J;\ u^\alpha \in \mathbb{R},$$

където $\{e_1(s), \dots, e_{n-1}(s)\}$ е ортонормирана база на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, а $\boldsymbol{c} : z = z(s)$, $s \in J$ е гладка крива в $\mathbb{E}^{n+1}$, която се нарича *управителна крива* на M^n. Пространството $\operatorname{span}\{e_1(s), \dots, e_{n-1}(s)\}$ се нарича *пораждащо пространство* на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ [19]. При конструиране на минимални праволинейни хиперповърхнини ние избираме за удобство управителната крива $\boldsymbol{c}$ да бъде ортогонална траектория на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$. Тогава, един от пораждащите вектори на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ ще бъде главната нормала $n(s)$ на c.

И така, нека $\boldsymbol{c} : z = z(s)$, $s \in J$ е гладка крива в $\mathbb{E}^{n+1}$, параметризирана спрямо естествен параметър s, а $\{t(s), n(s), b(s), b_1(s), \dots, b_{n-2}(s)\}$ е ортонормиран придружаващ репер на Френе на кривата $\boldsymbol{c}$. В сила са формулите на Френе (1.2.4). Нека $\widetilde{N}(s)$ е единично векторно поле по кривата $\boldsymbol{c}$, ортогонално на $\operatorname{span}\{t, n\}$. Тогава $\widetilde{N}(s)$ се представя еднозначно във вида

$$\widetilde{N}(s) = p(s)\, b(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} p^\alpha(s)\, b_\alpha(s), \tag{1.3.1}$$

където $p(s)$ и $p^\alpha(s)$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ са функции, за които $p^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-2} (p^\alpha)^2 = 1$.

Като диференцираме (1.3.1) по s и използваме формули (1.2.4), получаваме

$$\widetilde{N}' = -\tau p\, n + \left(p' - \tau_1 p^1\right) b + \sum_{\alpha=1}^{n-2} q^\alpha b_\alpha, \tag{1.3.2}$$

където сме означили $q^\alpha = (p^\alpha)' + \tau_\alpha p^{\alpha-1} - \tau_{\alpha+1} p^{\alpha+1}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$. [2]

За всяка стойност на $s \in J$ разглеждаме $(n-1)$-мерната равнина $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, ортогонална на $\operatorname{span}\{t(s), \widetilde{N}(s)\}$ и получаваме праволинейна хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$ в $\mathbb{E}^{n+1}$. Ще намерим условията върху кривата $\boldsymbol{c}$, при които M^n е минимална.

Тъй като главната нормала $n(s)$ на $\boldsymbol{c}$ е ортогонална на $\operatorname{span}\{t(s), \widetilde{N}(s)\}$, то $n(s) \in \mathbb{E}^{n-1}(s)$. Избираме вектори $e_1(s), \dots, e_{n-2}(s)$, такива, че $\operatorname{span}\{n(s), e_1(s), \dots, e_{n-2}(s)\}$ да бъде пораждащо пространство на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$. Тогава, праволинейната хиперповърхнина M^n се представя параметрично във вида

$$X(s, u, v^1, \dots, v^{n-2}) = z(s) + u\, n(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha e_\alpha(s); \quad s \in J;\ u, v^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.3.3}$$

Ще намерим нормалата $N = N(s, u, v^\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ на хиперповърхнината M^n. Допирателното пространство T_pM^n в точка $p \in M^n$ с радиус-вектор $X(s, u, v^\alpha)$

[2] Тук считаме, че $p^0 = p$.

е $T_pM^n = \operatorname{span}\{X_s, X_u, X_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$. От параметричното представяне (1.3.3) на M^n намираме

$$X_s = t + u\,n' + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha e'_\alpha;$$
$$X_u = n; \tag{1.3.4}$$
$$X_\alpha = e_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2.$$

Векторите e_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ се представят спрямо базата $\{t, n, b, b_1, \dots, b_{n-2}\}$ еднозначно във вида

$$e_\alpha(s) = c_\alpha(s)\,b(s) + c_\alpha^\gamma(s)\,b_\gamma(s),^3 \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

където $c_\alpha(s)$, $c_\alpha^\gamma(s)$, $\alpha, \gamma = 1, \dots, n-2$ са функции, удовлетворяващи $p\,c_\alpha + p^\gamma\,c_\alpha^\gamma = 0$ и $c_\alpha\,c_\beta + c_\alpha^\gamma\,c_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-2$ (δ_α^β са символите на Кронекер). За производните на векторите e_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ намираме

$$e'_\alpha = -\tau\,c_\alpha\,n + (c'_\alpha - \tau_1\,c_\alpha^1)\,b + ((c_\alpha^\gamma)' + \tau_\gamma\,c_\alpha^{\gamma-1} - \tau_{\gamma+1}\,c_\alpha^{\gamma+1})\,b_\gamma,^4 \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{1.3.5}$$

Като използваме (1.2.4), (1.3.4) и (1.3.5) получаваме компонентите на допирателния вектор X_s:

$$g(X_s, t) = 1 - \varkappa\,u;$$
$$g(X_s, \widetilde{N}) = \tau p\,u - m_\alpha\,v^\alpha;$$
$$g(X_s, n) = -\tau c_\alpha\,v^\alpha; \tag{1.3.6}$$
$$g(X_s, e_\alpha) = \tau c_\alpha\,u - Q_{\alpha\beta}\,v^\beta,$$

където сме означили

$$m_\alpha(s) = c_\alpha\,(p' - \tau_1\,p^1) + c_\alpha^\gamma\,q^\gamma, \quad \alpha = 1, \dots, n-2;$$
$$Q_{\alpha\beta}(s) = c_\beta\,(c'_\alpha - \tau_1\,c_\alpha^1) + c_\beta^\gamma\,((c_\alpha^\gamma)' + \tau_\gamma\,c_\alpha^{\gamma-1} - \tau_{\gamma+1}\,c_\alpha^{\gamma+1}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-2.$$

Тъй като нормалата N на M^n е ортогонална на $\operatorname{span}\{X_s, n, e_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ и $\operatorname{span}\{t, \widetilde{N}\} \perp \operatorname{span}\{n, e_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$, то $N \in \operatorname{span}\{t, \widetilde{N}\}$. Като използваме, че $g(N, X_s) = 0$, с помощта на равенства (1.3.6) намираме

$$N(s, u, v^\alpha) = \frac{(1 - \varkappa u)\,\widetilde{N} - (\tau p\,u - m_\alpha\,v^\alpha)\,t}{\sqrt{(1 - \varkappa u)^2 + (\tau p\,u - m_\alpha\,v^\alpha)^2}}.$$

Забележка. Точките на M^n, за които $u = \dfrac{1}{\varkappa}$ и $v^\alpha = \dfrac{\tau p}{\varkappa m^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ са особени точки на M^n. Ние правим разглежданията извън тези особени точки, където съществува нормала на M^n.

[3] Повтарящите се индекси γ означават сумиране по $\gamma = 1, \dots, n-2$.

[4] Тук считаме, че $c_\alpha^0 = c_\alpha$.

Означаваме

$$\sin\theta = \frac{\tau p\, u - m_\alpha\, v^\alpha}{\sqrt{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha\, v^\alpha)^2}}; \quad \cos\theta = \frac{1-\varkappa u}{\sqrt{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha\, v^\alpha)^2}},$$

$\theta = \theta(s, u, v^\alpha),\ \alpha = 1, \dots, n-2$. Тогава, нормалата N на M^n се записва във вида

$$N = \cos\theta\, \widetilde{N} - \sin\theta\, t. \tag{1.3.7}$$

Ще отбележим, че в точките на кривата $\boldsymbol{c}$ (при $u = 0,\ v^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-2$) нормалата N на M^n съвпада с $\widetilde{N}(s)$.

Ще намерим оператора A на втората фундаментална форма на M^n. Разглеждаме векторното поле $\xi = \sin\theta\, \widetilde{N} + \cos\theta\, t$, което е ортогонално на нормалата N и на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ на M^n. Формули (1.3.6) ни дават следното представяне на допирателния вектор X_s:

$$X_s = \sqrt{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha\, v^\alpha)^2}\, \xi - \tau c_\alpha\, v^\alpha\, n + (\tau c_\alpha u - Q_{\alpha\beta}\, v^\beta)\, e_\alpha. \tag{1.3.8}$$

За частните производни на функцията θ намираме

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{(\varkappa'\tau p - \varkappa(\tau p)')\, u^2 + (\varkappa m'_\alpha - \varkappa' m_\alpha)\, u v^\alpha + (\tau p)'\, u - m'_\alpha\, v^\alpha}{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha v^\alpha)^2}; \\ \theta_u &= \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\tau\, p - \varkappa m_\alpha v^\alpha}{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha v^\alpha)^2}; \\ \theta_\alpha &= \frac{\partial\theta}{\partial v^\alpha} = \frac{-m_\alpha(1-\varkappa u)}{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha v^\alpha)^2}, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Като използваме (1.3.2) и (1.3.7) получаваме производните на $N(s, u, v^\alpha)$:

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{\partial N}{\partial s} = -\theta_s \xi - (\tau p \cos\theta + \varkappa \sin\theta)\, n + \cos\theta (p' - \tau_1 p^1)\, b + \cos\theta\, q^\alpha\, b_\alpha; \\ N_u &= \frac{\partial N}{\partial u} = -\theta_u \xi; \\ N_\alpha &= \frac{\partial N}{\partial v^\alpha} = -\theta_\alpha \xi, \quad \alpha = 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

откъдето, с помощта на (1.3.8), след пресмятане намираме

$$\begin{aligned} A(n) &= \theta_u \xi; \\ A(e_\alpha) &= \theta_\alpha \xi, \quad \alpha = 1, \dots, n-2; \\ A(\xi) &= \frac{\theta_s + \theta_u \tau c_\alpha\, v^\alpha - \theta_\alpha(\tau c_\alpha\, u - Q_{\alpha\beta}\, v^\beta)}{\sqrt{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha v^\alpha)^2}}\, \xi + \theta_u\, n + \theta_\alpha\, e_\alpha. \end{aligned}$$

Означаваме $a = \dfrac{\theta_s + \theta_u \tau c_\alpha\, v^\alpha - \theta_\alpha(\tau c_\alpha\, u - Q_{\alpha\beta}\, v^\beta)}{\sqrt{(1-\varkappa u)^2 + (\tau p\, u - m_\alpha v^\alpha)^2}}$. Тогава, операторът A на втората фундаментална форма на M^n се задава спрямо ортонормираната база $\{n, e_\alpha, \xi\},\ \alpha =$

$1, \ldots, n-2$ с матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \theta_u \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \theta_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \theta_{n-2} \\ \theta_u & \theta_1 & \ldots & \theta_{n-2} & a \end{pmatrix},$$

откъдето получаваме $trace\, A = a$.

Като използваме, че M^n е минимална хиперповърхнина тогава и само тогава, когато $trace\, A = 0$, с помощта на равенства (1.3.9) получаваме следното условие за минималност на M^n:

$$\begin{aligned} &(\varkappa'\tau p - \varkappa(\tau p)' - \varkappa\tau c_\alpha m_\alpha)\, u^2 + (\varkappa m'_\alpha - \varkappa' m_\alpha + \varkappa m_\beta Q_{\beta\alpha})\, uv^\alpha \\ &-\varkappa\tau c_\alpha m_\beta\, v^\alpha v^\beta + ((\tau p)' + \tau c_\alpha m_\alpha)\, u + (\tau^2 p\, c_\alpha - m'_\alpha - m_\beta Q_{\beta\alpha})\, v^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

При фиксирана стойност на $s \in J$ лявата страна на равенство (1.3.10) е полином от II степен за променливите $u, v^1, \ldots, v^{n-2}$. Следователно, за да е в сила (1.3.10) за всички стойности на $u, v^\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 1, \ldots, n-2$, коефициентите пред променливите в полинома трябва да са нули, т. е. да са в сила равенствата

$$\begin{aligned} &\varkappa\tau c_\alpha m_\beta = 0; \\ &\varkappa'\tau p - \varkappa\tau' p - \varkappa\tau p' - \varkappa\tau c_\alpha m_\alpha = 0; \\ &\varkappa m'_\alpha - \varkappa' m_\alpha + \varkappa m_\beta Q_{\beta\alpha} = 0; \qquad\qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-2. \\ &\tau' p + \tau p' + \tau c_\alpha m_\alpha = 0; \\ &\tau^2 p\, c_\alpha - m'_\alpha - m_\beta Q_{\beta\alpha} = 0; \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Тъй като при $\tau = 0$ (когато $\boldsymbol{c}$ е равнинна крива), породената по горния начин праволинейна хиперповърхнина M^n има нормала $N = \widetilde{N} = const$, то M^n локално е хиперравнина $\mathbb{E}^n$. Затова считаме, че $\tau \neq 0$. Тогава, от първото равенство на (1.3.11) получаваме

$$c_\alpha m_\beta = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-2.$$

Допускаме, че съществува индекс $\alpha \in \{1, \ldots, n-2\}$, такъв че $c_\alpha \neq 0$. Тогава, $m_\beta = 0,\ \beta = 1, \ldots, n-2$. В този случай системата (1.3.11) добива вида

$$\begin{aligned} &\varkappa'\tau p - \varkappa\tau' p - \varkappa\tau p' = 0; \\ &\tau' p + \tau p' = 0; \\ &p\, c_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

Тъй като съществува индекс α, такъв, че $c_\alpha \neq 0$, то получаваме $p = 0$. Тогава, от формули (1.3.9) намираме

$$\theta_s = 0; \quad \theta_u = 0; \quad \theta_\alpha = 0,\ \alpha = 1, \ldots, n-2.$$

Следователно, втората фундаментална форма на хиперповърхнината M^n има вида $h = 0$, т. е. M^n локално е хиперравнина $\mathbb{E}^n$ (тривиален случай).

И така, в нетривиалния случай е изпълнено $c_\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-2$. Тогава, за векторите e_α е в сила $e_\alpha = c_\alpha^\gamma\, b_\gamma,\ \alpha = 1, \dots, n-2$, т. е. $\operatorname{span}\{e_\alpha\} = \operatorname{span}\{b_\alpha\},\ \alpha = 1, \dots, n-2$. Следователно, образуващите на M^n са $\mathbb{E}^{n-1}(s) = \operatorname{span}\{n(s), b_\alpha(s)\},\ \alpha = 1, \dots, n-2$, а $\widetilde{N}(s) = \pm b(s)$. Можем да считаме, че $e_\alpha = b_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n-2$, т. е. $c_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$. Тогава, за функциите $m_\alpha(s)$ получаваме

$$m_\alpha = \delta_\alpha^\gamma\, q^\gamma = q^\alpha = (p^\alpha)' + \tau_\alpha\, p^{\alpha-1} - \tau_{\alpha+1}\, p^{\alpha+1}.$$

От $\widetilde{N} = \pm b$ следва $p = \pm 1;\ p^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-2$. Следователно, намираме

$$m_1 = \pm\tau_1; \quad m_\alpha = 0,\ \alpha = 2, \dots, n-2.$$

Системата (1.3.11) добива вида

$$\begin{aligned}
&\varkappa' = 0;\\
&\tau' = 0;\\
&\tau_1' + \tau_1 Q_{11} = 0;\\
&\tau_1 Q_{1\alpha} = 0, \quad \alpha > 1.
\end{aligned}$$

Пресмятаме функциите $Q_{1\alpha}$:

$$Q_{1\alpha} = \tau_\alpha\, c_1^{\alpha-1} - \tau_{\alpha+1}\, c_1^{\alpha+1} = \begin{cases} \tau_2, & \alpha = 2;\\ 0, & \alpha \neq 2.\end{cases}$$

Окончателно получаваме системата (1.3.11) във вида

$$\begin{aligned}
&\varkappa' = 0;\\
&\tau' = 0;\\
&\tau_1' = 0;\\
&\tau_1\tau_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

От (1.3.12) следва, че са възможни следните два случая:

1. Кривата $\boldsymbol{c}$ лежи в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ $(\tau_1 = 0)$ и има постоянни кривини $\varkappa = const$, $\tau = const$.

2. Кривата $\boldsymbol{c}$ лежи в 4-мерно подпространство $\mathbb{E}^4$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ $(\tau_1 \neq 0,\ \tau_2 = 0)$ и има постоянни кривини $\varkappa = const$, $\tau = const$, $\tau_1 = const$.

И така, ако M^n е праволинейна хиперповърхнина, породена от управителна крива $\boldsymbol{c}$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ по горната конструкция, то M^n е минимална тогава и само тогава, когато кривата $\boldsymbol{c}$ лежи в 3-мерно или 4-мерно подпространство на $\mathbb{E}^{n+1}$ и има постоянни кривини. При това, образуващите на M^n са

$$\mathbb{E}^{n-1}(s) = \operatorname{span}\{n(s), b_1(s), \dots, b_{n-2}(s)\},$$

където n, b_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ са векторите от придружаващия репер на Френе на кривата $\boldsymbol{c}$. В точките на $\boldsymbol{c}$ нормалата на M^n е $N(s) = \pm b(s)$. M^n се представя параметрично с

$$X(s, u, v^\alpha) = z(s) + u\, n(s) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha b_\alpha(s); \quad s \in J;\ u, v^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.3.13}$$

Получените резултати формулираме в следната

Теорема 1.3.1. *Всяка минимална праволинейна хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 3-мерно или 4-мерно подпространство на $\mathbb{E}^{n+1}$.*

Крива $\boldsymbol{c}$ в $\mathbb{E}^3$ с постоянни кривини $\varkappa = const$ и $\tau = const$ е обикновената витлова линия, която спрямо естествен параметър s има параметрично представяне

$$z(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_1 + a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_2 + b \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_3, \tag{1.3.14}$$

където a и b са константи, а l_i, $i = 1, 2, 3$ е i-тият вектор в стандартната база на $\mathbb{E}^3$.

Ще намерим общия вид на крива $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ в $\mathbb{E}^4$ с постоянни кривини $\varkappa = const$, $\tau = const$, $\tau_1 = const$ $(\varkappa\tau\tau_1 \neq 0.)$ От формулите на Френе

$$\begin{aligned} t' &= \varkappa\, n; \\ n' &= -\varkappa\, t + \tau\, b; \\ b' &= -\tau\, n + \tau_1\, b_1; \\ b_1' &= -\tau_1\, b, \end{aligned}$$

след последователно диференциране намираме

$$\begin{aligned} t'' &= -\varkappa^2\, t + \varkappa\tau\, b; \\ t''' &= -(\varkappa^2 + \tau^2)\, t' + \varkappa\tau\tau_1\, b_1; \\ t^{(4)} &= -(\varkappa^2 + \tau^2 + \tau_1^2)\, t'' - \varkappa^2\tau_1^2\, t. \end{aligned}$$

Следователно, векторната функция $t = t(s)$ удовлетворява следното линейно диференциално уравнение:

$$t^{(4)} + a_1\, t'' + a_2\, t = 0, \tag{1.3.15}$$

където $a_1 = \varkappa^2 + \tau^2 + \tau_1^2,\ a_2 = \varkappa^2\tau_1^2$ $(a_1 > 0,\ a_2 > 0)$.

Означаваме с μ_1 и μ_2 корените на квадратното уравнение $\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0$ $(\mu_1 < 0,\ \mu_2 < 0)$ и полагаме $\alpha = \sqrt{-\mu_1}$, $\beta = \sqrt{-\mu_2}$. Тогава, общото решение на диференциалното уравнение (1.3.15) е

$$t(s) = c_1 \sin \alpha s + \widetilde{c_1} \cos \alpha s + c_2 \sin \beta s + \widetilde{c_2} \cos \beta s,$$

където c_1, $\widetilde{c_1}$, c_2, $\widetilde{c_2}$ са постоянни вектори в $\mathbb{E}^4$. Като използваме, че $z'(s) = t(s)$, намираме общия вид на крива в $\mathbb{E}^4$ с постоянни кривини:

$$z(s) = -\frac{c_1}{\alpha}\cos\alpha s + \frac{\widetilde{c_1}}{\alpha}\sin\alpha s - \frac{c_2}{\beta}\cos\beta s + \frac{\widetilde{c_2}}{\beta}\sin\beta s + c_0,$$

където $c_0 = const$, $c_0 \in \mathbb{E}^4$. Ако изберем постоянните вектори в $\mathbb{E}^4$ по следния начин:

$$c_0 = (0,0,0,0); \quad c_1 = (-a,0,0,0); \quad \widetilde{c_1} = (0,a,0,0); \quad c_2 = (0,0,-b,0); \quad \widetilde{c_2} = (0,0,0,b),$$

където $a, b \in \mathbb{R}$, то получаваме кривата

$$z(s) = \left(\frac{a}{\alpha}\cos\alpha s, \frac{a}{\alpha}\sin\alpha s, \frac{b}{\beta}\cos\beta s, \frac{b}{\beta}\sin\beta s\right), \tag{1.3.16}$$

която е аналог на витловата линия в $\mathbb{E}^3$, зададена с (1.3.14).

Параметърът s на кривата, зададена с (1.3.16) не е естествен параметър. Спрямо естествен параметър s общият вид на крива $\boldsymbol{c}$ в $\mathbb{E}^4$ с постоянни кривини е

$$\begin{aligned} z(s) = \quad & a\cos\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_1 + a\sin\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_2 \\ & + b\cos\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_3 + b\sin\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_4, \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

където $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а l_i, $i = 1,2,3,4$ е i-тият вектор в стандартната база на $\mathbb{E}^4$.

Ще приложим дадената по-горе конструкция за получаване на минимални праволинейни хиперповърхнини за кривите от вида (1.3.14) и (1.3.17). Нека $\{l_1, \dots, l_{n+1}\}$ е стандартната база на $\mathbb{E}^{n+1}$. В подпространството $\mathbb{E}^3 = \operatorname{span}\{l_1, l_2, l_{n+1}\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ разглеждаме обикновената витлова линия $\boldsymbol{c} : z = z(s)$, зададена с

$$z(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_1 + a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_2 + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_{n+1}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Главната ѝ нормала е

$$n(s) = -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_1 - \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_2.$$

Ортонормираният придружаващ репер на Френе за $\boldsymbol{c}$ е $\{t(s), n(s), b(s), b_1, \dots, b_{n-2}\}$, където $b_\alpha = l_{\alpha+2}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$. Разглеждаме минималната праволинейна хиперповърхнина M^n, породената от витловата линия $\boldsymbol{c}$ по формула (1.3.13). Следователно, M^n има параметрично представяне

$$\begin{aligned} X(s, u, v^\alpha) = \quad & (a-u)\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_1 + (a-u)\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_2 \\ & + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha l_{\alpha+2} + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l_{n+1}. \end{aligned}$$

Правим смяна на параметрите

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad v = a - u$$

и получаваме

$$X(t,v,v^\alpha) = v\,(\cos t\, l_1 + \sin t\, l_2) + \sum_{\alpha=1}^{n-2} v^\alpha l_{\alpha+2} + b\,t\,l_{n+1}. \tag{1.3.18}$$

Хиперповърхнината M^n, зададена с радиус-вектор $X = X(t,v,v^\alpha)$ по формула (1.3.18), е обобщената витлова хиперповърхнина (verallgemeinerte Wendelfläche), получена от G. Aumann в Теорема 4 на [9]. Тя е обобщение на правия хеликоид в $\mathbb{E}^3$, който има параметрично представяне

$$X(t,v) = v\,(\cos t\, l_1 + \sin t\, l_2) + a\,t\,l_3, \quad a = const.$$

Да разгледаме сега в 4-мерното подпространство $\mathbb{E}^4 = \operatorname{span}\{l_1,l_2,l_3,l_4\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ крива $\boldsymbol{c} : z = z(s)$ с постоянни кривини, зададена с (1.3.17). Ортонормираният придружаващ репер на Френе за кривата $\boldsymbol{c}$ е $\{t(s), n(s), b(s), b_1(s), b_2, \dots, b_{n-2}\}$, където $b_\alpha = l_{\alpha+3},\ \alpha = 2,\dots,n-2$. Тогава, породената от $\boldsymbol{c}$ по формула (1.3.13) минимална праволинейна хиперповърхнина M^n се представя параметрично с

$$X(s,u,v^\alpha) = z(s) + u\,n(s) + v^1\, b_1(s) + \sum_{\alpha=2}^{n-2} v^\alpha l_{\alpha+3}. \tag{1.3.19}$$

Като използваме формулите на Френе за кривата, зададена с (1.3.17), намираме векторите $n(s)$ и $b_1(s)$:

$$\begin{aligned}
n(s) = \quad & -\frac{a\alpha^2}{k}\left(\cos\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_1 + \sin\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_2\right)\\
& -\frac{b\beta^2}{k}\left(\cos\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_3 + \sin\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_4\right);\\
b_1(s) = \quad & \frac{b\beta^2}{k}\left(\cos\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_1 + \sin\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_2\right)\\
& -\frac{a\alpha^2}{k}\left(\cos\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_3 + \sin\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_4\right),
\end{aligned}$$

където сме означили $k = \sqrt{a^2\alpha^4 + b^2\beta^4}$. След заместване на получените изрази за $n(s)$ и $b_1(s)$ в (1.3.19) получаваме

$$\begin{aligned}
X(s,u,v^\alpha) = \quad & \left(a - u\frac{a\alpha^2}{k} + v^1\frac{b\beta^2}{k}\right)\left(\cos\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_1 + \sin\frac{\alpha s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_2\right)\\
& +\left(b - u\frac{b\beta^2}{k} - v^1\frac{a\alpha^2}{k}\right)\left(\cos\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_3 + \sin\frac{\beta s}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\, l_4\right)\\
& +\sum_{\alpha=2}^{n-2} v^\alpha l_{\alpha+3}.
\end{aligned}$$

Правим смяна на параметрите

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}; \quad u_1 = a - u\frac{a\alpha^2}{k} + v^1\frac{b\beta^2}{k}; \quad u_2 = b - u\frac{b\beta^2}{k} - v^1\frac{a\alpha^2}{k}$$

и намираме следното параметрично представяне на минималната праволинейна хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, породена от кривата (1.3.17):

$$\begin{aligned} X(t, u^1, u^2, v^2, \dots, v^{n-2}) = \ & u^1 (\cos\alpha\, t\, l_1 + \sin\alpha\, t\, l_2) \\ & + u^2 (\cos\beta\, t\, l_3 + \sin\beta\, t\, l_4) + \sum_{\alpha=2}^{n-2} v^\alpha l_{\alpha+3}. \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Хиперповърхнината M^n, зададена с радиус-вектор $X = X(t, u^1, u^2, v^2, \dots, v^{n-2})$ по формула (1.3.20), е минималната праволинейна хиперповърхнина, получена в Теорема 1 на [9].

Хиперповърхнина с параметрично представяне от вида (1.3.18) се нарича *хеликоидална хиперповърхнина (хеликоид) от I тип*, а хиперповърхнина с параметрично представяне от вида (1.3.20) се нарича *хеликоидална хиперповърхнина (хеликоид) от II тип*. Хеликоид от I тип се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 3-мерно подпространство $\mathbb{E}^3$ на $\mathbb{E}^{n+1}$, а хеликоид от II тип се поражда от крива с постоянни кривини, лежаща в 4-мерно подпространство $\mathbb{E}^4$ на $\mathbb{E}^{n+1}$.

Хеликоидите от I и II тип са единствените минимални праволинейни хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$. Този резултат е получен от G. Aumann в [9]. Там параметричното представяне на двата типа хеликоиди е получено след последователни подходящи параметрични трансформации на първоначално избран т. н. *естествен придружаващ базис* $\{e_1(s), \dots, e_{n-1}(s)\}$ на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, получен от H. Frank и O. Giering в [19]. Естественият придружаващ базис на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ се задава със система от вида

$$\begin{aligned} e'_i &= \nu_i^\beta\, e_\beta + k^i\, a_{n-1+i}, \quad i = 1, \dots, m; \ \beta = 1, \dots, n-1; \\ e'_{m+j} &= \nu_{m+j}^\beta\, e_\beta, \quad j = 1, \dots, n-1-m, \end{aligned}$$

където a_{n-1+i}, $i = 1, \dots, m$ са вектори, допълващи $e_1, \dots, e_{n-1}$ до база на пространството $A(s) = \operatorname{span}\{e_1(s), \dots, e_{n-1}(s), e'_1(s), \dots, e'_{n-1}(s)\}$, наречено *асимптотичен сноп* на M^n и имащо размерност $\dim A(s) = n-1+m$, а ν_α^β, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$, k^i, $i = 1, \dots, m$ са функции на s. В [19] H. Frank и O. Giering разделят праволинейните хиперповърхнини M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ на два класа според това дали размерността на асимптотичния сноп $A(s)$ е равна на или различна от размерността на векторното пространство $T(s) = \operatorname{span}\{z', e_1, \dots, e_{n-1}, e'_1, \dots, e'_{n-1}\}$, наречено *тангенциален сноп* на M^n (тук $z = z(s)$ е управителна крива, която в общия случай не е ортогонална траектория на образуващите). В случая, когато $\dim T(s) = \dim A(s) = n-1+m$, във всяка образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ има едно $(n-1-m)$-мерно подпространство $K_{n-1-m}(s) \subset \mathbb{E}^{n-1}(s)$ от особени точки, което се нарича *Kehlraum*. В случая, когато $\dim T(s) = \dim A(s) + 1 = n + m$, във всяка образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ има едно $(n-1-m)$-мерно подпространство $Z_{n-1-m}(s)$ на $\mathbb{E}^{n-1}(s)$, наречено *Zentralraum*.

Използвайки понятията Kehlraum и Zentralraum, G. Aumann получава двата типа хеликоиди съответно от двата класа праволинейни хиперповърхнини - хеликоид от I тип е минимална праволинейна хиперповърхнина, за която във всяка образуваща $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ има Zentralraum $Z_{n-2}(s) \subset \mathbb{E}^{n-1}(s)$, а хеликоид от II тип е минимална праволинейна хиперповърхнина, за която във всяка образуваща има Kehlraum $K_{n-3}(s) \subset \mathbb{E}^{n-1}(s)$.

Тук ние получаваме двата типа хеликоиди директно от двата вида криви с постоянни кривини, които пораждат минимални праволинейни хиперповърхнини по дадения чрез формула (1.3.13) геометричен начин.

Глава 2

Торсални хиперповърхнини от II тип

Естествено обобщение на праволинейните хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$ (еднопараметричните системи от равнини с коразмерност 2) са двупараметричните системи от равнини с коразмерност 3. В § 2.1 дефинираме развиваеми двупараметрични системи от равнини с коразмерност 3, които наричаме торсални хиперповърхнини от II тип. Доказваме характеризационна теорема за тях в термините на втората фундаментална форма (Теорема 2.1.3) и показваме, че торсалните хиперповърхнини от II тип са точно фолираните полусиметрични хиперповърхнини. В § 2.2 изучаваме развиваеми и полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две и доказваме характеризационни теореми за тях, с помощта на които в § 2.3 получаваме структурни теореми за полусиметричните хиперповърхнини (Теорема 2.3.3 и Теорема 2.3.4). В § 2.4 прилагаме структурните теореми за класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини. В § 2.5 даваме характеризация на полусиметричните хиперповърхнини като обвивки на двупараметрични семейства от хиперравнини и на тази база получаваме описание чрез система частни диференциални уравнения на два техни основни класа - класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини и класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип (Теорема 2.5.2).

2.1 Развиваеми двупараметрични системи от равнини с коразмерност три

В евклидовото пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ разглеждаме хиперповърхнина M^n, която е гладка двупараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3, дефинирана в двумерна област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Равнините $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$ наричаме *образуващи* на M^n.

Нека N е единично нормално векторно поле на M^n, а h е втората ѝ фундаментална форма. Тогава, според формулата на Gauss, е в сила

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N; \quad X, Y \in \mathfrak{X}M^n. \tag{2.1.1}$$

Нека $p \in M^n$ е произволна точка и $\mathbb{E}^{n-2}_p(u,v)$ е образуващата на M^n, която минава през p. Означаваме с $\Delta_0(p)$ подпространството на T_pM^n, допирателно към $\mathbb{E}^{n-2}_p(u,v)$, а с Δ_0 - разпределението $\Delta_0 : p \to \Delta_0(p)$. Нека $\Delta_0^{\perp}$ е ортогоналното разпределение на Δ_0. Избираме локална ортонормирана база $\{W, \xi\}$ на $\Delta_0^\perp$. Ако D е индуцираната свързаност върху $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$, а l_1 и l_2 са съответните на W и ξ втори фундаментални форми, то е в сила

$$\nabla_{x_0} y_0 = D_{x_0} y_0 + l_1(x_0, y_0)W + l_2(x_0, y_0)\xi; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.1.2}$$

От равенства (2.1.1) и (2.1.2) следва

$$\nabla'_{x_0} y_0 = D_{x_0} y_0 + l_1(x_0, y_0)W + l_2(x_0, y_0)\xi + h(x_0, y_0)N; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.1.3}$$

Тъй като интегралните подмногообразия $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$ на разпределението Δ_0 са автопаралелни, то $\nabla'_{x_0} y_0 \in \Delta_0;\ x_0, y_0 \in \Delta_0$, откъдето с помощта на (2.1.3) получаваме

$$\begin{array}{l} l_1(x_0, y_0) = 0; \\ l_2(x_0, y_0) = 0; \\ h(x_0, y_0) = 0; \end{array} \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.1.4}$$

Означаваме с ω и η единичните 1-форми, съответстващи на векторните полета W и ξ, т. е.

$$\omega(X) = g(X, W); \quad \eta(X) = g(X, \xi); \quad X \in \mathfrak{X}M^n.$$

Произволни векторни полета X и Y върху M^n се разлагат еднозначно във вида

$$\begin{aligned} X &= x_0 + \omega(X)W + \eta(X)\xi; \quad x_0 \in \Delta_0, \\ Y &= y_0 + \omega(Y)W + \eta(Y)\xi; \quad y_0 \in \Delta_0. \end{aligned}$$

Тогава, от третото равенство на (2.1.4) намираме втората фундаментална форма h на M^n:

$$\begin{aligned} h(X,Y) = \ & \alpha(X)\omega(Y) + \omega(X)\alpha(Y) + \beta(X)\eta(Y) + \eta(X)\beta(Y) \\ & + \lambda\omega(X)\omega(Y) + \mu\left(\omega(X)\eta(Y) + \eta(X)\omega(Y)\right) + \nu\eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

където α и β са 1-форми върху M^n (ортогонални на 1-формите ω и η), дефинирани по следния начин:

$$\begin{array}{l} \alpha(x_0) = h(x_0, W); \quad \alpha(W) = \alpha(\xi) = 0; \\ \beta(x_0) = h(x_0, \xi); \quad \beta(W) = \beta(\xi) = 0; \end{array} \quad x_0 \in \Delta_0,$$

а λ, μ и ν са функции върху M^n, определени чрез равенствата

$$\lambda = h(W, W), \quad \mu = h(W, \xi), \quad \nu = h(\xi, \xi).$$

Така получаваме

Твърдение 2.1.1. *Втората фундаментална форма h на хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$, която е гладка двупараметрична система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3, има вида*

$$h = \alpha \otimes \omega + \omega \otimes \alpha + \beta \otimes \eta + \eta \otimes \beta + \lambda\omega \otimes \omega + \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu\eta \otimes \eta, \tag{2.1.5}$$

където α, β, ω и η са 1-форми (α и β са ортогонални на ω и η), а λ, μ и ν са функции върху M^n.

По аналогия с дефиницията на развиваема еднопараметрична система от равнини с коразмерност 2 (развиваема праволинейна хиперповърхнина) даваме следната

Дефиниция 2.1.2. Една двупараметрична система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3 се нарича *развиваема,* ако допирателното пространство T_pM^n във всички точки p на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$ е едно и също.

Нека $A : T_pM^n \longrightarrow T_pM^n$ е операторът на втората фундаментална форма на двупараметричната система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$. Като използваме вида (2.1.5) на h получаваме

$$Ax_0 = \alpha(x_0)W + \beta(x_0)\xi; \quad x_0 \in \Delta_0.$$

Тогава, за единичното нормално векторно поле N на M^n е в сила

$$\nabla'_{x_0}N = -\alpha(x_0)W - \beta(x_0)\xi; \quad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.1.6}$$

От Дефиниция 2.1.2 и равенство (2.1.6) следва, че двупараметричната система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ е развиваема, тогава и само тогава, когато $\alpha = 0$; $\beta = 0$.

Развиваемите двупараметрични системи от равнини с коразмерност 3 ще наричаме *торсални хиперповърхнини от II тип.* Те са обобщение на торсовете.

И така, втората фундаментална форма h на торсална хиперповърхнина от II тип има вида

$$h = \lambda\omega \otimes \omega + \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu\eta \otimes \eta. \tag{2.1.7}$$

Обратно, нека (M^n, g, W, ξ) е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с втора фундаментална форма от вида (2.1.7) и единични векторни полета W и ξ, съответстващи на 1-формите ω и η. Ако $\lambda\nu - \mu^2 = 0$, след диагонализиране втората фундаментална форма добива вида $h = \nu'\eta' \otimes \eta'$ (където ν' и η' са съответно функция и 1-форма), откъдето съгласно Лема 1.2.1 следва, че M^n е торс. Торсовете са тривиален случай на хиперповърхнина с втора фундаментална форма от вида (2.1.7). Затова ще разгледаме нетривиалния случай $\lambda\nu - \mu^2 \neq 0$.

Означаваме с W и ξ единичните векторни полета, съответстващи на 1-формите ω и η, а с Δ_0 - разпределението на M^n, ортогонално на W и ξ, т. е.

$$\Delta_0(p) = \{x_0 \in T_pM^n \,|\, x_0 \perp W,\, x_0 \perp \xi\}, \quad p \in M^n.$$

Дефинираме 1-форма γ върху разпределението Δ_0 с равенството

$$\gamma(x_0) = g(\nabla_{x_0}\xi, W), \quad x_0 \in \Delta_0.$$

Като използваме уравнението на Codazzi, от (2.1.7) получаваме следните условия за интегруемост на M^n:

$$(2.1.8)\qquad \begin{aligned}
&1)\ \nabla_{x_0}\xi = \gamma(x_0)\, W;\\
&2)\ \nabla_{x_0}W = -\gamma(x_0)\, \xi;\\
&3)\ g(\nabla_\xi \xi, x_0) = \frac{\lambda d\nu(x_0) - \mu d\mu(x_0)}{\lambda\nu - \mu^2} - \frac{\mu(\lambda+\nu)}{\lambda\nu - \mu^2}\,\gamma(x_0);\\
&4)\ g(\nabla_W W, x_0) = \frac{\nu d\lambda(x_0) - \mu d\mu(x_0)}{\lambda\nu - \mu^2} + \frac{\mu(\lambda+\nu)}{\lambda\nu - \mu^2}\,\gamma(x_0);\\
&5)\ g(\nabla_W \xi, x_0) = \frac{\lambda d\mu(x_0) - \mu d\lambda(x_0)}{\lambda\nu - \mu^2} - \frac{\lambda^2 + 2\mu^2 - \lambda\nu}{\lambda\nu - \mu^2}\,\gamma(x_0);\\
&6)\ g(\nabla_\xi W, x_0) = \frac{\nu d\mu(x_0) - \mu d\nu(x_0)}{\lambda\nu - \mu^2} + \frac{2\mu^2 + \nu^2 - \lambda\nu}{\lambda\nu - \mu^2}\,\gamma(x_0);\\
&7)\ \ ((\lambda-\nu)^2 + 4\mu^2)\, g(\nabla_\xi \xi, W) =\\
&\qquad\qquad = (\lambda-\nu)d\mu(\xi) + 2\mu d\mu(W) - (\lambda-\nu)d\nu(W) - 2\mu d\lambda(\xi);\\
&8)\ \ ((\lambda-\nu)^2 + 4\mu^2)\, g(\nabla_W W, \xi) =\\
&\qquad\qquad = 2\mu d\mu(\xi) - (\lambda-\nu)d\mu(W) - 2\mu d\nu(W) + (\lambda-\nu)d\lambda(\xi),
\end{aligned}$$

където $x_0 \in \Delta_0$.

За торсалните хиперповърхнини от II тип доказваме следната характеризационна теорема:

Теорема 2.1.3. *Хиперповърхнина (M^n, g, W, ξ) в $\mathbb{E}^{n+1}$ локално е торсална хиперповърхнина от II тип тогава и само тогава, когато втората й фундаментална форма h има вида*

$$h = \lambda\omega\otimes\omega + \mu(\omega\otimes\eta + \eta\otimes\omega) + \nu\eta\otimes\eta,$$

където ω и η са единични 1-форми, съответстващи на W и ξ, а λ, μ и ν са функции върху M^n.

Доказателство. I. Ако M^n е торсална хиперповърхнина от II тип, видяхме, че е в сила (2.1.7).

II. Нека M^n има втора фундаментална форма h от вида (2.1.7). Като използваме равенства 1) и 2) на (2.1.8) получаваме

$$d\omega(x_0, y_0) = 0; \quad d\eta(x_0, y_0) = 0; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0.$$

Следователно, разпределението Δ_0 е инволютивно и според теоремата на Frobenius през всяка точка $p \in M^n$ минава единствено максимално интегрално многообразие S_p^{n-2} на $\Delta_0(p)$.

Нека N е единично нормално векторно поле на M^n. Тогава, от формулата

$$\nabla'_{x_0} y_0 = \nabla_{x_0} y_0 + h(x_0, y_0)N; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0$$

и вида (2.1.7) на h, намираме $\nabla'_{x_0} y_0 = \nabla_{x_0} y_0$; $x_0, y_0 \in \Delta_0$. Като вземем предвид равенства 1) и 2) на (2.1.8), получаваме

$$\nabla'_{x_0} y_0 \in \Delta_0; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0,$$

откъдето следва, че S_p^{n-2} е напълно геодезично подмногообразие за свързаността ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$. Следователно, S_p^{n-2} лежи върху равнина $\mathbb{E}_p^{n-2}$ с коразмерност 3.

И така, хиперповърхнината M^n лежи върху съвкупност от равнини с коразмерност 3. От доказателството на теоремата на Frobenius (Δ_0 - инволютивно разпределение $\Rightarrow \Delta_0$ - напълно интегруемо) получаваме, че за всяка точка $p \in M^n$ съществува околност U на p, в която могат да се въведат параметри $(u, v, w^1, \dots, w^{n-2})$, такива, че $\Delta_0 = \text{span}\{\dfrac{\partial}{\partial w^\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$. Следователно, M^n има локална параметризация $X = X(u, v, w^1, \dots, w^{n-2})$, където параметрите w^α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ описват равнините $\mathbb{E}^{n-2}(u, v)$. Така получаваме, че M^n локално е двупараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-2}(u, v)\}$ от равнини с коразмерност 3. При това, от вида (2.1.7) на h намираме $Ax_0 = 0$, $x_0 \in \Delta_0$, откъдето следва, че двупараметричната системата $\{\mathbb{E}^{n-2}(u, v)\}$ е развиваема, т. е. M^n локално е торсална хиперповърхнина от II тип. $\square$

Забележка. Разгледаните в § 1.1 неразвиваеми праволинейни хиперповърхнини са един специален клас торсални хиперповърхнини от II тип, при които $\lambda = 0$ и са в сила условията $\gamma = 0$, $div\, \xi = 0$ (Теорема 1.1.4). И така, торсалните хиперповърхнини от II тип имат един забележителен подклас, който е изучаван от редица автори в различни аспекти. Условията за интегруемост (2.1.8) ни дават нов подход за намиране и геометрично характеризиране и на други интересни класове торсални хиперповърхнини от II тип чрез изследване на втората им фундаментална форма, както и за получаване на структурни теореми за торсалните хиперповърхнини от II тип.

Ще покажем, че разглежданите от нас торсални хиперповърхнини от II тип са точно полусиметричните хиперповърхнини от типичния клас според класификацията на Z. Szabo [43]. Ще използваме интерпретацията на типичните полусиметрични многообразия като риманови многообразия, за които нулевото пространство на тензора на кривина има коразмерност две, дадена от E. Boeckx, O. Kowalski и L. Vanhecke в [12].

Нека (M^n, g) е n-мерно риманово многообразие и ∇ е свързаността на Levi-Civita за метриката g. Римановият тензор на кривина R от тип $(1, 3)$ се дава с равенството

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z; \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}M^n,$$

а асоциираният с него тензор от тип $(0,4)$, който също се означава с R, се дава с

$$R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U); \quad X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}M^n.$$

Използваме следната дефиниция, дадена в [43]:

Дефиниция 2.1.4. *Нулево пространство на тензора на кривина* в точката $p \in M^n$ наричаме

$$V_p^{(0)} = \{X \in T_pM^n \mid R(X,Y)Z = 0; \quad Y,Z \in T_pM^n\}.$$

Числото $\nu(p) = \dim V_p^{(0)}$ се нарича *индекс на нулевост* в точката p, а числото $u(p) = n - \nu(p)$ се нарича *индекс на конулевост* в точката p.

Ако (M^n, g) е риманово многообразие с индекс на нулевост $\nu(p) = n-2$ (т. е. индекс на конулевост $u(p) = 2$) за всяка точка $p \in M^n$, то допирателното пространство T_pM^n във всяка точка $p \in M^n$ се разлага във вида

$$T_pM^n = \Delta_0(p) + \Delta_0^\perp(p),$$

където $\dim \Delta_0(p) = n-2$, $\dim \Delta_0^\perp(p) = 2$, $p \in M^n$ и $\Delta_0(p)$ е нулевото пространство на тензора на кривина в точката p. Z. Szabo [43] доказва, че за такова многообразие $(n-2)$-мерното разпределение $\Delta_0 : p \to \Delta_0(p)$ е инволютивно и неговите интегрални подмногообразия са напълно геодезични и локално евклидови. Това му дава основание да нарече тези многообразия *фолиации от евклидови листове с коразмерност две*. E. Boeckx, O. Kowalski и L. Vanhecke наричат такива многообразия *риманови многообразия с конулевост две* (*Rietannian manifolds of conullity two*) [12].

Контра-примерите на хипотезата на K. Nomizu, конструирани от H. Takagi [46] и K. Sekigawa [37] са риманови многообразия от този вид.

В [43] е доказана следната

Теорема 2.1.5. (Local structure theorem) *За всяко полусиметрично риманово многообразие съществува отворено гъсто подмножество U, такова, че в околност на всяка точка от U многообразието е локално изометрично на директно произведение от симетрични пространства, 2-мерни риманови многообразия, фолиации от евклидови листове с коразмерност две, елиптични конуси, хиперболични конуси, евклидови конуси и Келерови конуси.*

Полусиметричните конуси, споменати в горната теорема, са конструирани и описани експлицитно от Z. Szabo. Елиптичните, хиперболичните и евклидовите конуси са полусиметрични риманови многообразия, които във всяка точка p имат индекс на нулевост $\nu(p) = 1$ и индекс на конулевост $u(p) > 2$, а Келеровите конуси са полусиметрични риманови многообразия, за които $\nu(p) = 2$ и $u(p) > 2$ във всяка точка p.

Римановите многообразия с конулевост 2 могат да се характеризират и по следния начин: риманово многообразие (M^n, g) с тензор на кривина R е с конулевост две, тогава и само тогава, когато за всяка точка $p \in M^n$ съществува ортонормирана база $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ на допирателното пространство T_pM^n, такава че

$$\begin{aligned} &i)\ R(e_1,e_2,e_2,e_1) &&= -R(e_2,e_1,e_2,e_1) = -R(e_1,e_2,e_1,e_2) = R(e_2,e_1,e_1,e_2) \\ &&&= k(p) \neq 0; \\ &ii)\ R(e_i,e_j,e_k,e_m) &&= 0 \quad \text{за всички останали четворки } (e_i,e_j,e_k,e_m), \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

където k е функция върху M^n.

Разглеждаме риманово многообразие $(M^n, g, \overline{\Delta})$ с двумерно разпределение $\overline{\Delta}$. Локално съществува ортонормирана двойка векторни полета $\{W, \xi\}$, такава че $\overline{\Delta} = \text{span}\{W, \xi\}$. Означаваме с ω и η 1-формите, съответстващи на W и ξ. Нека Λ^2_p е векторното пространство на 2-векторите на T_pM^n, $p \in M^n$. В Λ^2_p се дефинира [42] скаларно произведение $<,>$ по следния начин:

$$< X \wedge Y, Z \wedge U >= g(X,Z)g(Y,U) - g(Y,Z)g(X,U); \quad X \wedge Y, Z \wedge U \in \Lambda^2_p.$$

Операторът на кривина $\widehat{R}$, действащ в Λ^2_p, се дава с равенството

$$< \widehat{R}(X \wedge Y), Z \wedge U >= -R(X,Y,Z,U); \quad X \wedge Y,\, Z \wedge U \in \Lambda^2_p.$$

Твърдение 2.1.6. *Риманово многообразие $(M^n, g, \overline{\Delta})$ е с конулевост две, тогава и само тогава, когато*

$$\widehat{R}(X \wedge Y) = k\,(\omega \wedge \eta)(X,Y)\,W \wedge \xi; \quad X \wedge Y \in \Lambda^2_p,$$

където k е функция върху M^n.

Доказателство. Нека $(M^n, g, \overline{\Delta})$ е риманово многообразие с конулевост две и $\{e_1 = W, e_2 = \xi, e_3, ..., e_n\}$ е ортонормирана база на допирателното пространство T_pM^n в точка $p \in M^n$, удовлетворяваща (2.1.9). Тогава,

$$\begin{aligned} &\widehat{R}(W \wedge \xi) = k\,W \wedge \xi; \\ &\widehat{R}(e_i \wedge e_j) = 0, \quad e_i \wedge e_j \perp W \wedge \xi, \end{aligned}$$

откъдето получаваме

$$\widehat{R}(X \wedge Y) = 0; \quad X \wedge Y \perp W \wedge \xi. \tag{2.1.10}$$

Ако $X \wedge Y$ е произволен 2-вектор от Λ^2_p, то 2-векторът

$$X \wedge Y - < X \wedge Y, W \wedge \xi > W \wedge \xi$$

е ортогонален на $W \wedge \xi$ и от равенство (2.1.10) следва

$$\widehat{R}(X \wedge Y) = k < X \wedge Y, W \wedge \xi > W \wedge \xi,$$

т. е.

$$\widehat{R}(X \wedge Y) = k\,(\omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X))\,W \wedge \xi = k\,(\omega \wedge \eta)(X,Y)\,W \wedge \xi.$$

В обратната посока твърдението е очевидно. □

Връзката между торсалните хиперповърхнини от II тип и хиперповърхнините с конулевост две даваме в следната

Теорема 2.1.7. *Една хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ локално е торсална хиперповърхнина от II тип, тогава и само тогава, когато M^n е хиперповърхнина с конулевост две.*

Доказателство. I. Нека M^n е торсална хиперповърхнина от II тип. Тогава, съгласно Теорема 2.1.3, втората й фундаментална форма h има вида (2.1.7). Според уравнението на Gauss тензорът на кривина на хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ е

$$R(X,Y,Z,U) = h(Y,Z)\,h(X,U) - h(X,Z)\,h(Y,U); \quad X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}M^n.$$

Като използваме вида (2.1.7) на h, за тензора на кривина на M^n намираме

$$R(X,Y,Z,U) = (\mu^2 - \lambda\nu)(\omega \wedge \eta)(X,Y)\,(\omega \wedge \eta)(Z,U); \quad X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}M^n.$$

Тогава, операторът на кривина $\widehat{R}$ има вида

$$\widehat{R}(X \wedge Y) = (\lambda\nu - \mu^2)(\omega \wedge \eta)(X,Y)\,W \wedge \xi.$$

Следователно, според Твърдение 2.1.6, M^n е хиперповърхнина с конулевост две.

II. Нека $(M^n, g, \overline{\Delta})$ е хиперповърхнина с конулевост две и $e_1, \dots, e_n$ са собствени вектори на оператора A на втората фундаментална форма на M^n със съответни собствени стойности λ_i, $i = 1, \dots, n$, т. е.

$$Ae_i = \lambda_i\, e_i; \quad i = 1, \dots, n.$$

Разглеждаме базата $\{e_i \wedge e_j\}$, $i < j$ на пространството от 2-векторите Λ^2_p. От равенството

$$\widehat{R}(e_i \wedge e_j) = \lambda_i \lambda_j\, e_i \wedge e_j; \quad i \neq j$$

и Твърдение 2.1.6 получаваме (с точност до номерация), че

$$e_1 \wedge e_2 = W \wedge \xi; \quad \lambda_1\lambda_2 = k; \quad \lambda_i\lambda_j = 0, \quad i,j \neq 1,2.$$

Следователно,

$$Ax_0 = 0; \quad x_0 \perp \overline{\Delta} \tag{2.1.11}$$

и $\overline{\Delta}$ е собствено подпространство на A. Тогава, съществуват функции λ, μ и ν, такива, че $\lambda\nu - \mu^2 = k$ и е в сила

$$\begin{aligned} AW &= \lambda\, W + \mu\, \xi; \\ A\xi &= \mu\, W + \nu\, \xi. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Като използваме еднозначното разлагане на произволно векторно поле $X \in \mathfrak{X}M^n$ във вида $X = x_0 + \omega(X)W + \eta(X)\xi$, $x_0 \perp \overline{\Delta}$, от равенства (2.1.11) и (2.1.12) намираме

$$AX = \lambda\omega(X)W + \mu\,(\omega(X)\xi + \eta(X)W) + \nu\eta(X)\xi,$$

т. е.

$$h = \lambda\omega \otimes \omega + \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu\eta \otimes \eta.$$

Съгласно Теорема 2.1.3, M^n локално е торсална хиперповърхнина от II тип. $\square$

Доказаната Теорема 2.1.7 показва, че полусиметричните хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$ от типичния клас (фолиациите от евклидови листове с коразмерност две) могат да се разглеждат като развиваеми 2-параметрични системи от равнини с коразмерност 3 (торсални хиперповърхнини от II тип). Тази интерпретация ни позволява да получим геометрично описание на фолираните полусиметрични хиперповърхнини, както и да дадем характеризация на два техни основни класа (в § 2.5). Понататък в работата разглеждаме фолирани полусиметрични хиперповърхнини, които за краткост ще наричаме само полусиметрични хиперповърхнини.

2.2 Развиваеми и полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две

Праволинейна повърхнина с коразмерност две в евклидовото пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ е гладка еднопараметрична система $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ от равнини с коразмерност 3, дефинирана в интервал $J \subset \mathbb{R}$ [8]. Нека $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ е нормална равнина на M^{n-1}, състояща се от единични ортогонални векторни полета N_1 и N_2. Означаваме с h_1 и h_2 вторите фундаментални форми на M^{n-1}, съответстващи на N_1 и N_2, а с A_1 и A_2 - съответните им оператори, т. е.

$$h_1(x, y) = g(A_1x, y); \quad h_2(x, y) = g(A_2x, y); \quad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Според формулите на Gauss и Weingarten в сила са равенствата

$$\begin{aligned} \nabla'_x y &= \nabla_x y + h_1(x, y)N_1 + h_2(x, y)N_2; \quad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1}; \\ \nabla'_x N_1 &= -A_1(x) + D_x N_1; \\ \nabla'_x N_2 &= -A_2(x) + D_x N_2. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Нека $p \in M^{n-1}$ е произволна точка и $\mathbb{E}^{n-2}_p(s)$ е образуващата на M^{n-1}, която минава през p. Означаваме с $\Delta_0(p)$ подпространството на T_pM^{n-1}, допирателно към $\mathbb{E}^{n-2}_p(s)$, а с Δ_0 - разпределението $\Delta_0 : p \to \Delta_0(p)$. Нека W е единично векторно поле, ортогонално на Δ_0 (W е определено с точност до знак), а ω е съответната му 1-форма.

Тъй като интегралните подмногообразия $\mathbb{E}^{n-2}(s)$ на разпределението Δ_0 са автопаралелни, то $\nabla'_{x_0} y_0 \in \Delta_0$; $x_0, y_0 \in \Delta_0$. Тогава, от първото равенство на (2.2.1) намираме

$$h_1(x_0, y_0) = 0; \quad h_2(x_0, y_0) = 0; \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.2}$$

Нека x и y са произволни векторни полета върху M^{n-1}. Като използваме еднозначното им разлагане във вида

$$x = x_0 + \omega(x)\, W; \quad x_0 \in \Delta_0,$$
$$y = y_0 + \omega(y)\, W; \quad y_0 \in \Delta_0,$$

от (2.2.2) получаваме

$$h_1(x,y) = \omega(x)\, h_1(y_0, W) + \omega(y)\, h_1(x_0, W) + p\,\omega(x)\,\omega(y);$$
$$h_2(x,y) = \omega(x)\, h_2(y_0, W) + \omega(y)\, h_2(x_0, W) + q\,\omega(x)\,\omega(y), \tag{2.2.3}$$

където $p = h_1(W,W)$, $q = h_2(W,W)$.

Нека $\overline{\beta_1}$ и $\overline{\beta_2}$ са 1-форми върху M^{n-1}, дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} \overline{\beta_1}(x_0) &= h_1(x_0, W); & \overline{\beta_1}(W) &= 0; \\ \overline{\beta_2}(x_0) &= h_2(x_0, W); & \overline{\beta_2}(W) &= 0; \end{aligned} \qquad x_0 \in \Delta_0.$$

Означаваме с β_1 и β_2 съответните им единични 1-форми, т. е.

$$\begin{aligned} \overline{\beta_1} &= b_1\,\beta_1; & b_1 &= \|\overline{\beta_1}\|; \\ \overline{\beta_2} &= b_2\,\beta_2; & b_2 &= \|\overline{\beta_2}\|. \end{aligned}$$

Тогава, от равенства (2.2.3) намираме вторите фундаментални форми h_1 и h_2 на праволинейната повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$:

$$h_1 = b_1(\omega \otimes \beta_1 + \beta_1 \otimes \omega) + p\,\omega \otimes \omega;$$
$$h_2 = b_2(\omega \otimes \beta_2 + \beta_2 \otimes \omega) + q\,\omega \otimes \omega. \tag{2.2.4}$$

Нека B_1 и B_2 са единични векторни полета върху M^{n-1}, съответстващи на 1-формите β_1 и β_2, т. е.

$$\beta_1(x) = g(B_1, x); \quad \beta_2(x) = g(B_2, x); \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Тъй като $\beta_1(W) = 0$; $\beta_2(W) = 0$, то $B_1, B_2 \in \Delta_0$. Означаваме с θ 1-формата върху M^{n-1}, дефинирана с равенството

$$\theta(x) = g(\nabla'_x N_2, N_1); \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Тъй като $g(\nabla'_x N_1, N_1) = 0$; $g(\nabla'_x N_2, N_2) = 0$; $x \in \mathfrak{X}M^{n-1}$, то

$$\begin{aligned} D_x N_1 &= -\theta(x)\, N_2; \\ D_x N_2 &= \theta(x)\, N_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Тогава, от формулите на Weingarten и равенства (2.2.4) намираме

$$\nabla'_x N_1 = -b_1\omega(x)\, B_1 - b_1\beta_1(x)\, W - p\,\omega(x)\, W - \theta(x)\, N_2;$$
$$\nabla'_x N_2 = -b_2\omega(x)\, B_2 - b_2\beta_2(x)\, W - q\,\omega(x)\, W + \theta(x)\, N_1. \tag{2.2.5}$$

Една праволинейна повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ с коразмерност две се нарича *развиваема* [8], ако допирателното пространство T_pM^{n-1} във всички точки p на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(s)$ е едно и също, т. е.

$$\nabla'_{x_0} N_1 = 0; \quad \nabla'_{x_0} N_2 = 0; \quad x_0 \in \Delta_0.$$

Като вземем предвид (2.2.5) получаваме, че M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две, тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned} &b_1 = b_2 = 0; \\ &\theta(x_0) = 0; \quad x_0 \in \Delta_0. \end{aligned}$$

Следователно, вторите фундаментални форми h_1 и h_2 на развиваема повърхнина с коразмерност две имат вида

$$\begin{aligned} h_1 &= p\,\omega \otimes \omega; \\ h_2 &= q\,\omega \otimes \omega, \end{aligned}$$

а съответните им оператори A_1 и A_2 са

$$\begin{aligned} A_1 x &= p\,\omega(x)W; \\ A_2 x &= q\,\omega(x)W; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Тъй като за 1-формата ω е в сила $\omega(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$, то от $\theta(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$ следва, че $\theta = \mu\,\omega$, където $\mu = \theta(W)$.

И така, формулите на Weingarten за развиваема повърхнина с коразмерност две имат вида

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= -p\,\omega(x)W - \mu\,\omega(x)N_2; \\ \nabla'_x N_2 &= -q\,\omega(x)W + \mu\,\omega(x)N_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Ще докажем характеризационна теорема за развиваемите повърхнини с коразмерност две.

Нека (M^{n-1}, g, W) е повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с коразмерност 2, W е единично векторно поле на M^{n-1}, а ω е съответната му 1-форма. В сила е следната

Теорема 2.2.1. *Нека (M^{n-1}, g, W) е повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормална равнина* $\mathrm{span}\{N_1, N_2\}$. *$M^{n-1}$ локално е развиваема повърхнина с коразмерност две тогава и само тогава, когато*

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= -p\,\omega(x)W - \mu\,\omega(x)N_2; \\ \nabla'_x N_2 &= -q\,\omega(x)W + \mu\,\omega(x)N_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{2.2.6}$$

където μ, p и q са функции върху M^{n-1}, за които $p^2 + q^2 > 0$.

Доказателство. I. Ако M^{n-1} е развиваема повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\},\ s \in J$, то видяхме, че са в сила формули (2.2.6).

II. Нека M^{n-1} е повърхнина с коразмерност 2, за която са в сила равенства (2.2.6). Тъй като тензорът на кривина R' на каноничната свързаност ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$ е

$R' = 0$, то като пресметнем $R'(x,y)N_1$ и $R'(x,y)N_2$ от (2.2.6), получаваме

$$
\begin{array}{rrcl}
& (\mu\, d\omega(x,y) - (\omega\wedge d\mu)(x,y))\, N_2 + (p\, d\omega(x,y) - (\omega\wedge dp)(x,y))\, W & & \\
& -p\,\omega(x)\nabla'_y W + p\,\omega(y)\nabla'_x W & = & 0, \\
(2.2.7) & (\mu\, d\omega(x,y) - (\omega\wedge d\mu)(x,y))\, N_1 - (q\, d\omega(x,y) - (\omega\wedge dq)(x,y))\, W & & \\
& +q\,\omega(x)\nabla'_y W - q\,\omega(y)\nabla'_x W & = & 0.
\end{array}
$$

От (2.2.7) за $x_0, y_0 \in \Delta_0$ намираме

$$
d\omega(x_0,y_0) = 0; \quad \nabla'_{x_0} W = 0. \tag{2.2.8}
$$

От първото равенство на (2.2.8) следва, че разпределението Δ_0 е инволютивно. Следователно, през всяка точка $p \in M^{n-1}$ минава единствено максимално интегрално многообразие S_p^{n-2} на Δ_0. От (2.2.6) и второто равенство на (2.2.8) получаваме

$$
\nabla'_{x_0} N_1 = 0; \quad \nabla'_{x_0} N_2 = 0; \quad \nabla'_{x_0} W = 0; \quad x_0 \in \Delta_0,
$$

откъдето следва, че S_p^{n-2} лежи върху $(n-2)$-мерна равнина $\mathbb{E}_p^{n-2}$ с канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2, W\}$. Следователно, M^{n-1} лежи върху еднопараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ от равнини с коразмерност 3.

Освен това, тъй като $\nabla'_{x_0} N_1 = 0$, $\nabla'_{x_0} N_2 = 0$, то нормалната равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ на M^{n-1} е постоянна в точките на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(s)$, откъдето следва, че M^{n-1} локално е развиваема повърхнина с коразмерност две. $\square$

Забележка. Равнините $\mathbb{E}^{n-1}$ с коразмерност две могат да се разглеждат като тривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две, при които $p = q = 0$ (Лема 1.1.1).

Нека M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две. Тогава, спрямо произволна нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ на M^{n-1} са в сила формули (2.2.6). Нека $\operatorname{span}\{\overline{N}_1, \overline{N}_2\}$ е друга нормална равнина на M^{n-1}, за която

$$
\begin{aligned}
\overline{N}_1 &= \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2; \\
\overline{N}_2 &= -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2,
\end{aligned}
$$

където $\varphi = \angle(N_1, \overline{N}_1)$. Тогава, спрямо нормалната равнина $\operatorname{span}\{\overline{N}_1, \overline{N}_2\}$ са в сила формулите

$$
\begin{aligned}
\nabla'_x \overline{N}_1 &= -\overline{p}\,\omega(x) W - \overline{\mu}\,\omega(x)\overline{N}_2; \\
\nabla'_x \overline{N}_2 &= -\overline{q}\,\omega(x) W + \overline{\mu}\,\omega(x)\overline{N}_1;
\end{aligned}
\qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1},
$$

където

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= p\cos\varphi + q\sin\varphi; \\
\overline{q} &= -p\sin\varphi + q\cos\varphi; \\
\overline{\mu} &= \mu - d\varphi(W).
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

Тъй като $p^2+q^2 \neq 0$; $\overline{p}^2+\overline{q}^2 \neq 0$, то без ограничение на общността можем да считаме, че $p \neq 0$, $\overline{p} \neq 0$. Тогава, в сила е равенството

$$\frac{\overline{q}}{\overline{p}} = \frac{\dfrac{q}{p} - \tan\varphi}{1 + \dfrac{q}{p}\tan\varphi},$$

откъдето намираме

$$d\arctan\frac{\overline{q}}{\overline{p}} = d\arctan\frac{q}{p} - d\varphi. \tag{2.2.10}$$

От (2.2.10) и третото равенство на (2.2.9) получаваме

$$\overline{\mu} - d\arctan\frac{\overline{q}}{\overline{p}}(W) = \mu - d\arctan\frac{q}{p}(W).$$

Следователно, функцията $\kappa = \mu - d\arctan\dfrac{q}{p}(W)$ не зависи от избора на нормална равнина $\mathrm{span}\{N_1, N_2\}$ на M^{n-1}.

Една развиваема праволинейна повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ е *планарна*, ако съществува хиперравнина $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^{n+1}$, такава, че M^{n-1} лежи в $\mathbb{E}^n$.

Планарните развиваеми повърхнини с коразмерност две се характеризират със следната

Лема 2.2.2. *Една развиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две е планарна, тогава и само тогава, когато $\kappa = 0$.*

Доказателство. I. Нека M^{n-1} е планарна развиваема повърхнина с коразмерност две и $\mathrm{span}\{N_1, N_2\}$ е произволна нейна нормална равнина, спрямо която са в сила формули (2.2.6). Тъй като M^{n-1} е планарна, то съществува хиперравнина $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормала l, така, че е в сила

$$\nabla'_x l = 0; \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}. \tag{2.2.11}$$

От $l \in \mathrm{span}\{N_1, N_2\}$ следва, че

$$l = \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2,$$

където $\varphi = \angle(N_1, l)$. Полагаме $n = -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2$ и като използваме (2.2.6) намираме

$$\nabla'_x l = -(p\cos\varphi + q\sin\varphi)\,\omega(x)W - (\mu\,\omega(x) - d\varphi(x))\,n. \tag{2.2.12}$$

От равенства (2.2.11) и (2.2.12) следва

$$\begin{aligned} &p\cos\varphi + q\sin\varphi = 0;\\ &d\varphi(x) = \mu\,\omega(x); \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме $\mu = d\varphi(W) = d\arctan\dfrac{q}{p}(W)$. Следователно, $\kappa = 0$.

II. Нека M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две, за която $\kappa = 0$. Разглеждаме произволна нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ на M^{n-1}, спрямо която са в сила формули (2.2.6). Следователно, в сила са равенства (2.2.7), откъдето намираме

$$\begin{aligned} &p\, d\omega(x_0, W) + dp(x_0) = 0;\\ &q\, d\omega(x_0, W) + dq(x_0) = 0; \end{aligned} \qquad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.13}$$

Тъй като $p^2 + q^2 \neq 0$, то без ограничение на общността считаме, че $p \neq 0$. Тогава, от (2.2.13) получаваме

$$d\left(\frac{q}{p}\right)(x_0) = 0, \quad x_0 \in \Delta_0.$$

Означаваме $\varphi = \arctan\dfrac{q}{p}$. Тъй като $\kappa = 0$, то $\mu = d\varphi(W)$. Следователно, $d\varphi(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$. Като използваме, че $\omega(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$, получаваме $d\varphi = d\varphi(W)\omega = \mu\,\omega$. Тогава, формули (2.2.6) добиват вида

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= -p\,\omega(x)W - d\varphi(x)N_2;\\ \nabla'_x N_2 &= -q\,\omega(x)W + d\varphi(x)N_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}. \tag{2.2.14}$$

Полагаме

$$\begin{aligned} l &= -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2;\\ n &= \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2 \end{aligned}$$

и от (2.2.14), като използваме, че $\tan\varphi = \dfrac{q}{p}$, намираме

$$\begin{aligned} \nabla'_x l &= 0;\\ \nabla'_x n &= -\nu\,\omega(x)W; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{2.2.15}$$

където $\nu^2 = p^2 + q^2$.

От първото равенство на (2.2.15) следва, че M^{n-1} лежи в хиперравнина $\mathbb{E}^n$ с нормала l. Следователно, развиваемата повърхнина M^{n-1} е планарна. $\square$

Забележка. Ако M^{n-1} е планарна развиваема повърхнина с коразмерност две, лежаща в хиперравнина $\mathbb{E}^n$, и разгледаме M^{n-1} като хиперповърхнина в $\mathbb{E}^n$, то от второто равенство на (2.2.15), съгласно Лема 1.2.1, следва, че M^{n-1} локално е торс в $\mathbb{E}^n$ с нормала n.

Нека M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две и $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ е произволна нейна нормална равнина, спрямо която са в сила формули (2.2.6). От равенства (2.2.7) следва, че $d(\mu\,\omega) = 0$, т. е. 1-формата $\mu\,\omega$ е затворена. Тогава, локално съществува гладка функция φ, такава, че $\mu\,\omega = d\varphi$. Разглеждаме нормалната равнина

$\mathrm{span}\{l_1, l_2\}$ на M^{n-1}, определена по следния начин:

$$l_1 = \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2;$$
$$l_2 = -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2.$$

Като използваме, че $\mu\,\omega = d\varphi$, от (2.2.6) получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x l_1 &= -\nu_1\,\omega(x) W; \\ \nabla'_x l_2 &= -\nu_2\,\omega(x) W; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{2.2.16}$$

където $\nu_1 = p\,\cos\varphi + q\,\sin\varphi;\ \nu_2 = -p\,\sin\varphi + q\,\cos\varphi$.

Нормална равнина $\mathrm{span}\{l_1, l_2\}$ на M^{n-1}, спрямо която са в сила равенства (2.2.16), ще наричаме *канонична нормална равнина* на M^{n-1}. Тя е определена с точност до постоянна ортогонална матрица, т. е. ако $\mathrm{span}\{l_1, l_2\}$ и $\mathrm{span}\{\bar{l}_1, \bar{l}_2\}$ са две канонични нормални равнини на M^{n-1}, то

$$\bar{l}_1 = \cos\varphi_0\, l_1 + \sin\varphi_0\, l_2;$$
$$\bar{l}_2 = -\sin\varphi_0\, l_1 + \cos\varphi_0\, l_2;$$

където $\varphi_0 = const$. Спрямо канонична нормална равнина $\mathrm{span}\{l_1, l_2\}$ функцията κ има вида

$$\kappa = d\arctan\frac{\nu_1}{\nu_2}(W).$$

Ще дадем начин за геометрично конструиране на развиваеми повърхнини с коразмерност две, който е обобщение на геометричната конструкция на торс, дадена в Теорема 1.2.6.

Теорема 2.2.3. *Ако* $\boldsymbol{c} : z = z(s),\ s \in J$ *е гладка крива в* $\mathbb{E}^{n+1}$ *и* $\{N_1^0, N_2^0\}$ *е ортонормирана двойка вектори, ортогонални на* $\boldsymbol{c}$ *в точката* $z(s_0),\ s_0 \in J$, *то съществува еднозначно определена развиваема повърхнина* $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ *с коразмерност две с образуващи* $\mathbb{E}^{n-2}(s)$, *ортогонални на кривата* $\boldsymbol{c}$ *и нормална равнина* $\mathrm{span}\{N_1, N_2\}$, *за която* $N_1(s_0) = N_1^0$, $N_2(s_0) = N_2^0$.

Доказателство. Нека кривата $\boldsymbol{c} : z = z(s)$, $s \in J$ е параметризирана спрямо естествен параметър s и са в сила формули (1.2.15). Съгласно Лема 1.2.5, векторите N_1^0 и N_2^0 определят еднозначно вектори $N_1 = N_1(s)$ и $N_2 = N_2(s)$, $s \in J$, такива, че

$$N_i' = -\varkappa\cos\beta_i\, t; \quad g(N_i, t) = 0; \quad g(N_i, N_i) = 1; \quad N_i(s_0) = N_i^0; \quad i = 1, 2,$$

където $\beta_i = \angle(N_i, n)$, $i = 1, 2$. Тъй като $\dfrac{d}{ds} g(N_1, N_2) = g(N_1', N_2) + g(N_1, N_2')$ и $N_i' \parallel t$, $i = 1, 2$, то $\dfrac{d}{ds} g(N_1, N_2) = 0$, откъдето следва, че $g(N_1, N_2) = g(N_1^0, N_2^0) = 0$. Следователно, $\{N_1(s), N_2(s)\}$ е ортонормирана двойка векторни полета, ортогонални на кривата $\boldsymbol{c}$. За всяка стойност на $s \in J$ еднозначно е определена $(n-2)$-мерна равнина $\mathbb{E}^{n-2}(s)$, ортогонална на $\operatorname{span}\{t(s), N_1(s), N_2(s)\}$. Разглеждаме еднопараметричната система $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ от $(n-2)$-мерни нормални равнини $\mathbb{E}^{n-2}(s)$ на кривата $\boldsymbol{c}$. Ще докажем, че M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две и нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1(s), N_2(s)\}$.

Нека $X = X(s, w^1, \dots, w^{n-2})$, $s \in J$; $w^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ е локална параметризация на M^{n-1}. Тъй като образуващите $\mathbb{E}^{n-2}(s)$ на M^{n-1} са ортогонални на $t(s)$, $N_1(s)$ и $N_2(s)$, то в сила са уравненията

$$\begin{aligned} & t(X - z) = 0; \\ & N_1(X - z) = 0; \\ & N_2(X - z) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Като диференцираме (2.2.17) по w^α, $\alpha = 1, \dots, n-2$, получаваме

$$t\, X_\alpha = 0; \quad N_1\, X_\alpha = 0; \quad N_2\, X_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

откъдето следва, че $X_\alpha \perp \operatorname{span}\{t, N_1, N_2\}$. Като използваме, че $N_i' \parallel t$, $i = 1, 2$, от (2.2.17), след диференциране по s, получаваме

$$N_1\, X_s = 0; \quad N_2\, X_s = 0.$$

Следователно, векторите N_1 и N_2 са ортогонални на допирателното пространство $\operatorname{span}\{X_s, X_1, \dots, X_{n-2}\}$ на M^{n-1}, т. е. $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ е нормална равнина на повърхнината M^{n-1}. Тъй като $N_1 = N_1(s)$, $N_2 = N_2(s)$, то допирателното пространство в точките на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(s)$ е едно и също, което означава, че M^{n-1} е развиваема повърхнина с коразмерност две. $\square$

Теорема 2.2.3 ни дава начин за геометрично конструиране на развиваеми повърхнини с коразмерност две:

Всяка гладка крива $\boldsymbol{c}$ *и ортонормирана двойка нормални вектори* N_1^0, N_2^0 *в точка от* $\boldsymbol{c}$ *определят еднозначно развиваема повърхнина с коразмерност две.*

А сега да разгледаме неразвиваема праволинейна повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ с коразмерност две. За произволна нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ на M^{n-1} са в сила формули (2.2.5). Като обобщение на понятието развиваема повърхнина с коразмерност две даваме следната

Дефиниция 2.2.4. Една праволинейна повърхнина $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ с коразмерност две се нарича *полуразвиваема*, ако съществува единично нормално векторно поле N на M^{n-1}, което е постоянно в точките на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(s)$, $s \in J$, т. е. $\nabla'_{x_0} N = 0$, $x_0 \in \Delta_0$.

В сила е следната

Теорема 2.2.5. *Нека* M^{n-1} *е неразвиваема праволинейна повърхнина в* $\mathbb{E}^{n+1}$ *с нормална равнина* $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$, *удовлетворяваща* (2.2.5). *Тогава,* M^{n-1} *е полуразвиваема тогава и само тогава, когато*

$$\theta(x_0) = \varepsilon\, d \arctan \frac{b_2}{b_1}(x_0), \ x_0 \in \Delta_0; \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0,$$

където $\varepsilon = \pm 1$.

Доказателство. I. Нека M^{n-1} е полуразвиваема повърхнина и N е единично нормално векторно поле, такова, че $\nabla'_{x_0}N = 0,\ x_0 \in \Delta_0$. Тъй като $N \in \mathrm{span}\{N_1, N_2\}$, то $N = \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2$, където $\varphi = \angle(N_1, N)$. Разглеждаме векторното поле $N^\perp = -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2$. Тогава, $\mathrm{span}\{N, N^\perp\}$ е нормална равнина на M^{n-1}, за която от формули (2.2.5) получаваме

$$\begin{aligned}
\nabla'_x N = \quad & -b_1\cos\varphi\omega(x)\,B_1 - b_2\sin\varphi\omega(x)\,B_2 - (b_1\cos\varphi\beta_1(x) + b_2\sin\varphi\beta_2(x))\,W \\
& -(p\cos\varphi + q\sin\varphi)\,\omega(x)\,W - (\theta(x) - d\varphi(x))\,N^\perp; \\
\nabla'_x N^\perp = \quad & b_1\sin\varphi\omega(x)\,B_1 - b_2\cos\varphi\omega(x)\,B_2 - (-b_1\sin\varphi\beta_1(x) + b_2\cos\varphi\beta_2(x)\,W \\
& -(-p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\omega(x)\,W + (\theta(x) - d\varphi(x))\,N.
\end{aligned}$$

Тъй като $\nabla'_{x_0}N = 0,\ x_0 \in \Delta_0$, то от горните равенства следва, че

$$(2.2.18) \qquad \begin{aligned} & b_1\cos\varphi\beta_1(x_0) + b_2\sin\varphi\beta_2(x_0) = 0; \\ & \theta(x_0) - d\varphi(x_0) = 0; \end{aligned} \qquad x_0 \in \Delta_0.$$

Ако допуснем, че $b_1 = b_2 = 0$, то от второто равенство на (2.2.18), като използваме, че $\omega(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$, получаваме $\theta(x) - d\varphi(x) = \mu\omega(x)$, където $\mu = \theta(W) - d\varphi(W)$. Тогава, в сила са следните равенства:

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\widetilde{p}\,\omega(x)W - \mu\,\omega(x)N^\perp; \\ \nabla'_x N^\perp &= -\widetilde{q}\,\omega(x)W + \mu\,\omega(x)N; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1},$$

където $\widetilde{p} = p\cos\varphi + q\sin\varphi$; $\widetilde{q} = -p\sin\varphi + q\cos\varphi$. Съгласно Теорема 2.2.1, M^{n-1} локално е развиваема повърхнина, което противоречи на условието на теоремата. Следователно, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Възможни са следните два случая:

<u>*I случай:*</u> $b_1 b_2 = 0$. Разглеждаме само подслучая $b_2 = 0,\ b_1 \neq 0$ (подслучаят $b_1 = 0,\ b_2 \neq 0$ е аналогичен). От равенства (2.2.18) получаваме

$$\cos\varphi = 0; \quad \theta(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0.$$

Следователно, условието $\theta(x_0) = \varepsilon\, d\arctan\dfrac{b_2}{b_1}(x_0),\ x_0 \in \Delta_0$ е изпълнено.

<u>*II случай:*</u> $b_1 b_2 \neq 0$. Тогава, от първото равенство на (2.2.18) намираме

$$(2.2.19) \qquad \beta_1(x_0) = -\frac{b_2}{b_1}\,\tan\varphi\,\beta_2(x_0),$$

което показва, че 1-формите β_1 и β_2 са колинеарни (съответните им векторни полета B_1 и B_2 са колинеарни). Тъй като β_1 и β_2 са единични 1-форми, то $\beta_1 = \varepsilon\beta_2$, където $\varepsilon = 1$ когато β_1 и β_2 са еднопосочни и $\varepsilon = -1$ когато β_1 и β_2 са противопосочни. Тогава, от (2.2.19) следва

$$\tan\varphi = -\varepsilon\,\frac{b_1}{b_2},$$

откъдето, като използваме второто равенство на (2.2.18), намираме

$$\theta(x_0) = -\varepsilon\, d \arctan \frac{b_1}{b_2}(x_0) = \varepsilon\, d \arctan \frac{b_2}{b_1}(x_0), \quad x_0 \in \Delta_0.$$

II. Нека M^{n-1} е неразвиваема праволинейна повърхнина с нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$, за която е в сила $\theta(x_0) = \varepsilon\, d \arctan \dfrac{b_2}{b_1}(x_0)$, $x_0 \in \Delta_0$; $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$. Следователно,

$$d\theta(x_0, y_0) = 0, \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.20}$$

Нека R' е тензорът на кривина на каноничната свързаност ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$. Като използваме (2.2.5), след пресмятане, получаваме

$$\begin{aligned} R'(x, y, N_1, N_2) = & -d\theta(x, y) + b_1\, b_2(\beta_1 \wedge \beta_2)(x, y) \\ & + b_1\, q(\beta_1 \wedge \omega)(x, y) - b_2\, p(\beta_2 \wedge \omega)(x, y), \end{aligned} \qquad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1}. \tag{2.2.21}$$

Тъй като $R' = 0$, то от (2.2.20) и (2.2.21) следва, че

$$b_1\, b_2(\beta_1 \wedge \beta_2)(x_0, y_0) = 0, \quad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.22}$$

Разглеждаме двата възможни случая:

I случай: $b_1\, b_2 = 0$. Отново разглеждаме само единия подслучай: $b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$. Тогава, $\theta(x_0) = 0$, $x_0 \in \Delta_0$ и от $\omega(x_0) = 0$, $x_0 \in \Delta_0$ следва, че $\theta = \mu\, \omega$, където $\mu = \theta(W)$. Следователно, за нормалното векторно поле N_2 на M^{n-1} от (2.2.5) получаваме

$$\nabla'_x N_2 = -q\, \omega(x) W + \mu\, \omega(x) N_1; \quad x \in \mathfrak{X}M^{n-1},$$

откъдето намираме $\nabla'_{x_0} N_2 = 0$, $x_0 \in \Delta_0$. Следователно, M^{n-1} е полуразвиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две.

II случай: $b_1\, b_2 \neq 0$. Тогава, от (2.2.22) следва, че

$$(\beta_1 \wedge \beta_2)(x_0, y_0) = 0, \quad x_0, y_0 \in \Delta_0,$$

т. е. единичните 1-форми β_1 и β_2 са колинеарни ($\beta_1 = \varepsilon \beta_2$). Полагаме $\varphi = -\varepsilon \arctan \dfrac{b_1}{b_2}$ и разглеждаме нормалната равнина $\operatorname{span}\{N, N^\perp\}$ на M^{n-1}, определена с

$$\begin{aligned} N &= \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2; \\ N^\perp &= -\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2. \end{aligned}$$

От $d\varphi(x_0) = \varepsilon\, d \arctan \dfrac{b_2}{b_1}(x_0) = \theta(x_0)$, $x_0 \in \Delta_0$, следва, че $\theta(x) - d\varphi(x) = \mu\, \omega(x)$, където $\mu = \theta(W) - d\varphi(W)$. Тогава, за нормалната равнина $\operatorname{span}\{N, N^\perp\}$ на M^{n-1} получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\widetilde{p}\, \omega(x)\, W - \mu\, \omega(x)\, N^\perp; \\ \nabla'_x N^\perp &= -b\, \omega(x)\, B - b\, \beta(x)\, W - \widetilde{q}\, \omega(x)\, W + \mu\, \omega(x)\, N; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{2.2.23}$$

където $\beta = \beta_1 = \varepsilon\beta_2$; $B = B_1 = \varepsilon B_2$; $\widetilde{p} = p\,\cos\varphi + q\,\sin\varphi$; $\widetilde{q} = -p\,\sin\varphi + q\,\cos\varphi$; $b^2 = b_1^2 + b_2^2$. Следователно, $\nabla'_{x_0} N = 0,\ x_0 \in \Delta_0$, т. е. M^{n-1} е полуразвиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две. $\square$

В доказателството на Теорема 2.2.5 получихме, че ако M^{n-1} е полуразвиваема повърхнина с нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$, удовлетворяваща (2.2.5), то 1-формите β_1 и β_2 са колинеарни ($\beta_1 = \varepsilon\beta_2;\ B_1 = \varepsilon B_2$) и $\theta(x_0) = \varepsilon\, d\arctan\dfrac{b_2}{b_1}(x_0),\ x_0 \in \Delta_0$.

Означаваме $B = B_1;\ \beta = \beta_1$. Тогава, $B_2 = \varepsilon B_1;\ \beta_2 = \varepsilon\beta_1$ и формули (2.2.5) добиват вида:

$$\nabla'_x N_1 = -b_1\omega(x)\,B - b_1\beta(x)\,W - p\,\omega(x)\,W - \theta(x)\,N_2;$$
$$\nabla'_x N_2 = -\varepsilon b_2\omega(x)\,B - \varepsilon b_2\beta(x)\,W - q\,\omega(x)\,W + \theta(x)\,N_1.$$

Нека $\operatorname{span}\{\overline{N}_1, \overline{N}_2\}$ е друга нормална равнина на M^{n-1}, за която

$$\begin{aligned}\overline{N}_1 &= \cos\varphi\,N_1 + \sin\varphi\,N_2;\\ \overline{N}_2 &= -\sin\varphi\,N_1 + \cos\varphi\,N_2;\end{aligned}\qquad \varphi = \angle(N_1, \overline{N}_1).$$

Тогава, в сила са равенствата

$$\nabla'_x \overline{N}_1 = -\overline{b}_1\omega(x)\,B - \overline{b}_1\beta(x)\,W - \overline{p}\,\omega(x)\,W - \overline{\theta}(x)\,\overline{N}_2;$$
$$\nabla'_x \overline{N}_2 = -\varepsilon\overline{b}_2\omega(x)\,B - \varepsilon\overline{b}_2\beta(x)\,W - \overline{q}\,\omega(x)\,W + \overline{\theta}(x)\,\overline{N}_1,$$

където сме означили

$$\begin{aligned}\overline{p} &= p\cos\varphi + q\sin\varphi; & \overline{b}_1 &= b_1\cos\varphi + \varepsilon b_2\sin\varphi;\\ \overline{q} &= -p\sin\varphi + q\cos\varphi; & \varepsilon\overline{b}_2 &= -b_1\sin\varphi + \varepsilon b_2\cos\varphi;\\ \overline{\theta} &= \theta - d\varphi. & &\end{aligned}$$

От горните равенства получаваме, че $\overline{p}\,\varepsilon\overline{b}_2 - \overline{q}\,\overline{b}_1 = p\,\varepsilon b_2 - q\,b_1$.

Следователно, за полуразвиваемата повърхнина M^{n-1} функцията $k = p\,\varepsilon b_2 - q\,b_1$ не зависи от избора на нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$.

В доказателството на Теорема 2.2.5 видяхме също, че за всяка полуразвиваема повърхнина M^{n-1} с коразмерност две съществува нормална равнина $\operatorname{span}\{N, N^{\perp}\}$, такава че са в сила формули (2.2.23). Такава нормална равнина наричаме *канонична нормална равнина* на M^{n-1}. Векторното поле N наричаме *главно нормално векторно поле* на M^{n-1}. То е определено с точност до знак.

Една полуразвиваема праволинейна повърхнина M^{n-1} в $\mathbb{E}^{n+1}$ е *планарна*, ако съществува хиперравнина $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^{n+1}$, такава, че M^{n-1} лежи в $\mathbb{E}^n$, т. е. съществува нормално векторно поле N на M^{n-1}, такова, че $\nabla'_x N = 0,\ x \in \mathfrak{X}M^{n-1}$.

Ясно е, че ако M^{n-1} е планарна полуразвиваема повърхнина, лежаща в хиперравнина $\mathbb{E}^n$ с нормала N, то N е главно нормално векторно поле на M^{n-1}.

Планарните полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две се характеризират със следната

Лема 2.2.6. *Една полуразвиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две е планарна, тогава и само тогава, когато* $k = 0$.

Доказателство. Нека M^{n-1} е полуразвиваема праволинейна повърхнина с нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$, удовлетворяваща (2.2.5). Преминаваме към канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N, N^{\perp}\}$, спрямо която са в сила равенства (2.2.23). Като използваме, че $\widetilde{p} = p\cos\varphi + q\sin\varphi$ и $\varphi = -\varepsilon \arctan\dfrac{b_1}{b_2}$, получаваме $(\widetilde{p})^2 = \dfrac{(p\,\varepsilon\, b_2 - q\, b_1)^2}{b_1^2 + b_2^2}$, т.е.

$$(\widetilde{p})^2 = \frac{k^2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

I. Нека M^{n-1} е планарна. Тогава, M^{n-1} лежи в хиперравнина с нормала N. От $\nabla'_x N = 0$, $x \in \mathfrak{X}M^{n-1}$ и първото равенство на (2.2.23) следва, че $\widetilde{p} = 0$, $\mu = 0$. Следователно, $k = 0$.

II. Нека за M^{n-1} е в сила $k = 0$. Тогава, $\widetilde{p} = 0$ и от (2.2.23), след пресмятане, получаваме

$$R'(x, y, N, W) = b\,\mu(\beta \wedge \omega)(x, y); \quad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1},$$

където R' е тензорът на кривина на каноничната свързаност ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$. Тъй като $R' = 0$, то от горното равенство следва, че

$$b\,\mu(\beta \wedge \omega)(x, y) = 0; \quad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Понеже M^{n-1} е полуразвиваема повърхнина, то $b \neq 0$ и $\beta \wedge \omega \neq 0$. Следователно, $\mu = 0$. Тогава, за главната нормала N на M^{n-1} е в сила $\nabla'_x N = 0$, $x \in \mathfrak{X}M^{n-1}$, откъдето следва, че M^{n-1} е планарна. □

Очевидно е следното

Следствие 2.2.7. *Една полуразвиваема праволинейна повърхнина* M^{n-1} *с канонична нормална равнина* $\operatorname{span}\{N, N^{\perp}\}$, *удовлетворяваща* (2.2.23), *е планарна тогава и само тогава, когато* $\widetilde{p} = 0$.

Непланарните полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две се характеризират със следната

Теорема 2.2.8. *Нека* (M^{n-1}, g, W) *е повърхнина в* $\mathbb{E}^{n+1}$ *с нормална равнина* $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$. M^{n-1} *локално е непланарна полуразвиваема повърхнина с канонична нормална равнина* $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ *тогава и само тогава, когато*

$$\begin{aligned} &\nabla'_x N_1 = -p\,\omega(x) W - \mu\,\omega(x) N_2; \\ &\nabla'_x N_2 = -b\,\omega(x)\, B - b\,\beta(x)\, W - q\,\omega(x) W + \mu\,\omega(x) N_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}, \tag{2.2.24}$$

където b, p, q *и* μ *са функции върху* M^{n-1}, *за които* $b \neq 0$, $p \neq 0$.

Доказателство. I. От горните разглеждания видяхме, че за непланарна полуразвиваема повърхнина M^{n-1} с канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N_1, N_2\}$ са в сила равенства (2.2.24), при това $b \neq 0$, $p \neq 0$.

II. Нека M^{n-1} е повърхнина с коразмерност две и нормална равнина span$\{N_1, N_2\}$, за която са в сила равенства (2.2.24), като $b \neq 0$, $p \neq 0$. От (2.2.24), като използваме, че $R'(x, y, N_1) = 0$, получаваме

$$\begin{gathered} p\,\omega(x)\nabla'_y W - p\,\omega(y)\nabla'_x W + b\,\mu(\beta \wedge \omega)(x,y)\,W \\ -\,d(p\,\omega)(x,y)\,W - \,d(\mu\,\omega)(x,y)\,N_2 = 0; \end{gathered} \qquad x, y \in \mathfrak{X}M^{n-1}. \tag{2.2.25}$$

Тогава, от (2.2.25) намираме $d\omega(x_0, y_0) = 0$; $x_0, y_0 \in \Delta_0$, откъдето следва, че разпределението Δ_0 е инволютивно. Следователно, през всяка точка $p \in M^{n-1}$ минава единствено максимално итегрално многообразие S_p^{n-2} на Δ_0. От равенства (2.2.24) получаваме

$$\nabla'_{x_0} N_1 = 0; \quad \nabla'_{x_0} N_2 = -b\,\beta(x_0) W; \quad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.26}$$

Тогава,

$$\begin{gathered} g(\nabla'_{x_0} y_0, N_1) = -g(\nabla'_{x_0} N_1, y_0) = 0; \\ g(\nabla'_{x_0} y_0, N_2) = -g(\nabla'_{x_0} N_2, y_0) = 0; \end{gathered} \qquad x_0, y_0 \in \Delta_0. \tag{2.2.27}$$

Като използваме (2.2.26) и разлагането на $\nabla'_{x_0} W$ във вида

$$\nabla'_{x_0} W = \nabla_{x_0} W + h_1(x_0, W) N_1 + h_2(x_0, W) N_2, \quad x_0 \in \Delta_0,$$

получаваме

$$\nabla'_{x_0} W = \nabla_{x_0} W + b\,\beta(x_0) N_2, \quad x_0 \in \Delta_0, \tag{2.2.28}$$

където $\nabla_{x_0} W \in \Delta_0$.

Записваме равенство (2.2.25) за $x = x_0,\ y = W$ и с помощта на (2.2.28) намираме $\nabla_{x_0} W = 0,\ x_0 \in \Delta_0$. Следователно, $\nabla'_{x_0} W = b\,\beta(x_0) N_2$, откъдето получаваме

$$g(\nabla'_{x_0} y_0, W) = -g(\nabla'_{x_0} W, y_0) = 0. \tag{2.2.29}$$

Равенства (2.2.27) и (2.2.29) показват, че $\nabla'_{x_0} y_0 \in \Delta_0$; $x_0, y_0 \in \Delta_0$, т. е. интегралните подмногообразия на разпределението Δ_0 са напълно геодезични. Следователно, S_p^{n-2} лежи върху $(n-2)$-мерна равнина $\mathbb{E}_p^{n-2}$, откъдето получаваме, че M^{n-1} локално е еднопараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ от равнини с коразмерност 3. Освен това, от $\nabla'_{x_0} N_1 = 0,\ x_0 \in \Delta_0$ следва, че M^{n-1} локално е полуразвиваема повърхнина с коразмерност две и главна нормала N_1. □

В края на този параграф ще намерим плоските праволинейни повърхнини с коразмерност две. Нека $M^{n-1} = \{\mathbb{E}^{n-2}(s)\}$, $s \in J$ е праволинейна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормална равнина span$\{N_1, N_2\}$. Ако h_1 и h_2 са вторите фундаментални форми на M^{n-1}, съответстващи на N_1 и N_2, то в сила са формули (2.2.4). Ще намерим тензора на кривина R на M^{n-1}. Тъй като тензорът на кривина R' на каноничната свързаност ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$ е $R' = 0$, то от уравнението на Gauss

$$R'(x, y, z, u) = R(x, y, z, u) + \,h_i(x, z) h_i(y, u) - \,h_i(y, z) h_i(x, u), \quad x, y, z, u \in \mathfrak{X}M^{n-1},$$

където $i = 1, 2$, получаваме

$$R(x,y,z,u) = h_i(y,z)h_i(x,u) - h_i(x,z)h_i(y,u), \quad x,y,z,u \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Като използваме, че за h_1 и h_2 са в сила формули (2.2.4), намираме

$$\begin{aligned} R(x,y,z,u) = \ & (b_1)^2 \, (\omega \wedge \beta_1)\,(x,y)\,(\omega \wedge \beta_1)\,(z,u) \\ & + (b_2)^2 \, (\omega \wedge \beta_2)\,(x,y)\,(\omega \wedge \beta_2)\,(z,u), \end{aligned} \qquad x,y,z,u \in \mathfrak{X}M^{n-1}.$$

Тогава,

$$\begin{aligned} & R(x_0,y_0,z_0,u_0) = 0, \quad x_0,y_0,z_0,u_0 \in \Delta_0; \\ & R(W,x_0,W,y_0) = (b_1)^2 \, \beta_1(x_0)\,\beta_1(y_0) + (b_2)^2 \, \beta_2(x_0)\,\beta_2(y_0), \quad x_0,y_0 \in \Delta_0. \end{aligned}$$

И така, тензорът на кривина R на праволинейна повърхнина с коразмерност две удовлетворява

$$\begin{aligned} & R(W,B_1,W,B_1) = (b_1)^2\,; \\ & R(W,B_2,W,B_2) = (b_2)^2\,; \\ & R(x,y,z,u) = 0 \quad \text{за всички останали четворки вектори } (x,y,z,u). \end{aligned}$$

Следователно, M^{n-1} е плоска повърхнина ($R = 0$) тогава и само тогава, когато $b_1 = 0$; $b_2 = 0$. Формулите на Weingarten за плоска праволинейна повърхнина с коразмерност две имат вида

$$\begin{aligned} \nabla'_x N_1 &= -p\,\omega(x)\,W - \theta(x)\,N_2; \\ \nabla'_x N_2 &= -q\,\omega(x)\,W + \theta(x)\,N_1. \end{aligned}$$

Получените резултати ни дават

Твърдение 2.2.9. *Нека M^{n-1} е праволинейна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормална равнина* $\mathrm{span}\{N_1, N_2\}$*, удовлетворяваща* (2.2.5)*. M^{n-1} е плоска тогава и само тогава, когато* $b_1 = 0$; $b_2 = 0$.

2.3 Структура на полусиметричните хиперповърхнини

В § 2.1 видяхме, че всяка полусиметрична хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ се характеризира с втора фундаментална форма h от вида

$$h = \lambda\omega \otimes \omega + \mu(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega) + \nu\eta \otimes \eta, \quad \lambda\nu - \mu^2 \neq 0,$$

където ω и η са единични 1-форми, съответстващи на произволна ортонормирана база $\{W, \xi\}$ на разпределението $\Delta_0^\perp$. Ако $\{\overline{W}, \overline{\xi}\}$ е друга ортонормирана база на разпределението $\Delta_0^\perp$, за която

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \cos\varphi\, W + \sin\varphi\, \xi; \\ \overline{\xi} &= -\sin\varphi\, W + \cos\varphi\, \xi; \end{aligned} \qquad \varphi = \angle(W, \overline{W}),$$

то спрямо базата $\{\overline{W}, \overline{\xi}\}$ втората фундаментална форма h има вида

$$h = \overline{\lambda}\overline{\omega} \otimes \overline{\omega} + \overline{\mu}(\overline{\omega} \otimes \overline{\eta} + \overline{\eta} \otimes \overline{\omega}) + \overline{\nu}\overline{\eta} \otimes \overline{\eta},$$

където $\overline{\omega}$ и $\overline{\eta}$ са 1-форми, съответстващи на векторните полета $\overline{W}$ и $\overline{\xi}$, а $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ и $\overline{\nu}$ са следните функции:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} &= \lambda \cos^2\varphi + 2\mu \sin\varphi \cos\varphi + \nu \sin^2\varphi; \\ \overline{\mu} &= -\lambda \sin\varphi \cos\varphi + \mu(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \nu \sin\varphi \cos\varphi; \\ \overline{\nu} &= \lambda \sin^2\varphi - 2\mu \sin\varphi \cos\varphi + \nu \cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Следователно, $\overline{\lambda}\overline{\nu} - \overline{\mu}^2 = \lambda\nu - \mu^2$, т. е. функцията $\lambda\nu - \mu^2$ е инварианта на полусиметричната хиперповърхнина M^n (не зависи от избора на база на разпределението $\Delta_0^\perp$).

Тъй като втората фундаментална форма h е симетрична, то може да се избере ортонормирана двойка векторни полета $\xi_1, \xi_2 \in \Delta_0^\perp$ със съответни единични 1-форми η_1 и η_2, спрямо която h е в диагонален вид, т. е.

$$h = \nu_1\, \eta_1 \otimes \eta_1 + \nu_2\, \eta_2 \otimes \eta_2, \quad \nu_1\nu_2 \neq 0.$$

Векторните полета ξ_1 и ξ_2 са собствени векторни полета за оператора A на втората фундаментална форма и определят главни направления на хиперповърхнината M^n. Спрямо главни направления операторът A има вида

$$AX = \nu_1\, \eta_1(X)\xi_1 + \nu_2\, \eta_2(X)\xi_2, \quad X \in \mathfrak{X}M^n,$$

откъдето следва, че

$$\begin{aligned} &A\xi_1 = \nu_1\xi_1; \\ &A\xi_2 = \nu_2\xi_2; \\ &Ax_0 = 0, \quad x_0 \in \Delta_0. \end{aligned}$$

Означаваме с γ^0 1-формата върху Δ_0, зададена с равенството

$$\gamma^0(x_0) = g(\nabla_{x_0}\xi_2, \xi_1),\ x_0 \in \Delta_0.$$

Тогава условията за интегруемост на хиперповърхнината M^n се записват във вида:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \nabla_{x_0}\xi_1 = -\gamma^0(x_0)\,\xi_2;\\
&2)\ \nabla_{x_0}\xi_2 = \gamma^0(x_0)\,\xi_1;\\
&3)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, x_0) = d\ln\nu_1(x_0);\\
&4)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, x_0) = d\ln\nu_2(x_0);\\
&5)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, x_0) = \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_2}\,\gamma^0(x_0);\\
&6)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, x_0) = \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\,\gamma^0(x_0);\\
&7)\ (\nu_1-\nu_2)^2 g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_2) = (\nu_1-\nu_2)d\nu_1(\xi_2);\\
&8)\ (\nu_1-\nu_2)^2 g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, \xi_1) = -(\nu_1-\nu_2)d\nu_2(\xi_1),
\end{aligned}
\tag{2.3.1}
$$

където $x_0 \in \Delta_0$.

Означаваме с Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2} $(n-1)$-мерните разпределения на M^n, ортогонални съответно на векторните полета ξ_1 и ξ_2, т. е.

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\xi_1}(p) &= \{x \in T_pM^n \mid \eta_1(x) = 0\} = \Delta_0(p) \oplus \mathrm{span}\{\xi_2\}, \quad p \in M^n;\\
\Delta_{\xi_2}(p) &= \{x \in T_pM^n \mid \eta_2(x) = 0\} = \Delta_0(p) \oplus \mathrm{span}\{\xi_1\}, \quad p \in M^n.
\end{aligned}
$$

В общия случай разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2} не са инволютивни. Ще намерим инволютивните $(n-1)$-мерни разпределения на M^n, съдържащи Δ_0. Произволно единично векторно поле $\xi \in \Delta_0^\perp$ се представя във вида

$$\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2,$$

където $\varphi = \angle(\xi_1, \xi)$. Означаваме $\xi^\perp = -\sin\varphi\,\xi_1 + \cos\varphi\,\xi_2$. Тогава разпределението Δ_ξ, ортогонално на векторното поле ξ, се задава с

$$\Delta_\xi(p) = \{x \in T_pM^n \mid g(\xi, x) = 0\} = \Delta_0(p) \oplus \mathrm{span}\{\xi^\perp\}, \quad p \in M^n.$$

Тъй като Δ_0 е инволютивно разпределение (лесно се проверява, че $[x_0, y_0] \in \Delta_0;\ x_0, y_0 \in \Delta_0$), то разпределението Δ_ξ е инволютивно тогава и само тогава, когато $[x_0, \xi^\perp] \in \Delta_\xi;\ x_0 \in \Delta_0$. Като използваме, че $[x_0, \xi^\perp] = \nabla'_{x_0}\xi^\perp - \nabla'_{\xi^\perp}x_0$, получаваме, че Δ_ξ е инволютивно разпределение тогава и само тогава, когато

$$g(\nabla'_{x_0}\xi^\perp, \xi) + g(\nabla'_{\xi^\perp}\xi, x_0) = 0, \quad x_0 \in \Delta_0.$$

Тъй като $\nabla'_{x_0}\xi^\perp = \nabla_{x_0}\xi^\perp + h(x_0, \xi^\perp)\,N;\quad \nabla'_{\xi^\perp}\xi = \nabla_{\xi^\perp}\xi + h(\xi^\perp, \xi)\,N$, където N е единично нормално векторно поле на M^n, то горното равенство е еквивалентно на

$$g(\nabla_{x_0}\xi^\perp, \xi) + g(\nabla_{\xi^\perp}\xi, x_0) = 0, \quad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.3.2}$$

За векторните полета $\nabla_{x_0}\xi^\perp$ и $\nabla_{\xi^\perp}\xi$ намираме:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_0}\xi^\perp = &\ (\gamma^0(x_0) - d\varphi(x_0))\ \xi;\\
\nabla_{\xi^\perp}\xi = &\ \sin\varphi\cos\varphi\,(\nabla_{\xi_2}\xi_2 - \nabla_{\xi_1}\xi_1) - \sin^2\varphi\,\nabla_{\xi_1}\xi_2 + \cos^2\varphi\,\nabla_{\xi_2}\xi_1\\
&+ (\cos\varphi\,d\varphi(\xi_2) - \sin\varphi\,d\varphi(\xi_1))\ \xi^\perp.
\end{aligned}
$$

Означаваме $k = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$. Като заместим горните равенства в (2.3.2) и използваме формули (2.3.1), получаваме

Твърдение 2.3.1. *Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с главни направления ξ_1, ξ_2 и $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$ е произволно единично векторно поле от $\Delta_0^{\perp}$. Тогава разпределението Δ_ξ, ортогонално на ξ, е инволютивно тогава и само тогава, когато функцията φ удовлетворява*

$$d\varphi(x_0) = \left(\frac{1}{k}\cos^2\varphi + k\sin^2\varphi\right)\gamma^0(x_0) - \frac{1}{k}\sin\varphi\cos\varphi\, dk(x_0), \quad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.3.3}$$

От Твърдение 2.3.1 се получава

Следствие 2.3.2. *Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с главни направления ξ_1 и ξ_2. Разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, ортогонални съответно на ξ_1 и ξ_2, са инволютивни тогава и само тогава, когато $\gamma^0 = 0$.*

Тъй като разпределението Δ_0 е инволютивно, то локално могат да се въведат параметри $(u, v, w^1, \dots, w^{n-2})$ на M^n, такива, че $\Delta_0 = \operatorname{span}\{\dfrac{\partial}{\partial w^\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$. Въвеждаме следните означения:

$$\varphi_\alpha = d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial w^\alpha}; \quad k_\alpha = dk\left(\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\right) = \frac{\partial k}{\partial w^\alpha}; \quad \gamma^0_\alpha = \gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\right).$$

Тогава равенствата (2.3.3) се записват във вида

$$\varphi_\alpha = \left(\frac{1}{k}\cos^2\varphi + k\sin^2\varphi\right)\gamma^0_\alpha - \frac{1}{k}\sin\varphi\cos\varphi\, k_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

който е еквивалентен на

$$\varphi_\alpha = \frac{1-k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha\cos 2\varphi - \frac{k_\alpha}{2k}\sin 2\varphi + \frac{1+k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{2.3.4}$$

Означаваме

$$a_\alpha = \frac{1-k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha; \quad b_\alpha = -\frac{k_\alpha}{2k}; \quad c_\alpha = \frac{1+k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n-2$$

и записваме равенствата (2.3.4) във вида

$$\varphi_\alpha = a_\alpha\cos 2\varphi + b_\alpha\sin 2\varphi + c_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{2.3.5}$$

Фиксираме (u, v) и разглеждаме системата (2.3.5) като система за неизвестната функция $\varphi(w^1, \dots, w^{n-2}, u, v)$, където u и v са параметри. Ще проверим, че условията за интегруемост

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-2$$

на системата (2.3.5) са изпълнени.

От (2.3.5) пресмятаме:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\beta} - \varphi_{\beta\alpha} = \; & (a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} + 2b_\alpha c_\beta - 2b_\beta c_\alpha)\cos 2\varphi \\
& +(b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha} + 2c_\alpha a_\beta - 2c_\beta a_\alpha)\sin 2\varphi \\
& +(c_{\alpha\beta} - c_{\beta\alpha} + 2b_\alpha a_\beta - 2b_\beta a_\alpha),
\end{aligned} \tag{2.3.6}
$$

където

$$
\begin{aligned}
& a_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial w^\beta}\left(\frac{1-k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha\right) = -\frac{k^2+1}{2k^2}\,k_\beta\,\gamma^0_\alpha + \frac{1-k^2}{2k}\,\gamma^0_{\alpha\beta}; \\
& b_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial w^\beta}\left(-\frac{k_\alpha}{2k}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w^\beta}\,(\ln k)_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\,(\ln k)_\beta = b_{\beta\alpha}; \\
& c_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial w^\beta}\left(\frac{1+k^2}{2k}\,\gamma^0_\alpha\right) = \frac{k^2-1}{2k^2}\,k_\beta\,\gamma^0_\alpha + \frac{1+k^2}{2k}\,\gamma^0_{\alpha\beta}; \\
& \gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial w^\beta}\,(\gamma^0_\alpha).
\end{aligned} \tag{2.3.7}
$$

Като използваме, че тензорът на кривина R' на каноничната свързаност в $\mathbb{E}^{n+1}$ е нула, от 1) и 2) на (2.3.1) получаваме, че 1-формата γ^0 е затворена. Тогава, от $d\gamma^0\left(\dfrac{\partial}{\partial w^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial w^\beta}\right) = 0$ и $\left[\dfrac{\partial}{\partial w^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial w^\beta}\right] = 0$ следва $\gamma^0_{\alpha\beta} = \gamma^0_{\beta\alpha}$. Като заместим (2.3.7) в равенство (2.3.6), намираме

$$\varphi_{\alpha\beta} - \varphi_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-2.$$

И така, условията за интегруемост на системата (2.3.5) са изпълнени. Следователно, при зададено начално условие $\varphi_0(u,v)$, съществува единствено решение $\varphi(w^1, \dots, w^{n-2}, u, v)$ на системата (2.3.5), дефинирано при $|w^\alpha| < \varepsilon$; $(u,v) \in \mathcal{D}_0$, където $\varepsilon > 0$; $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$, което зависи гладко от параметрите u, v и от променливите w^α, $\alpha = 1, \dots, n-2$ и удовлетворява $\varphi(0, \dots, 0, u, v) = \varphi_0(u,v)$.

Следователно, локално съществува гладко векторно поле $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$, чието ортогонално разпределение Δ_ξ е инволютивно. Тогава, като приложим теоремата на Frobenius, получаваме, че полусиметричната хиперповърхнина M^n локално е еднопараметрична система от $(n-1)$-мерни повърхнини (фолиация от $(n-1)$-мерни повърхнини), които са интегрални многообразия на Δ_ξ. При това, всяко задаване на начално условие $\varphi_0(u,v)$ определя интегруемо разпределение Δ_ξ, което поражда съответна фолиация на M^n.

Ще докажем, че интегралните многообразия M^{n-1}_ξ на всяко инволютивно $(n-1)$-мерно разпределение Δ_ξ на M^n са развиваеми или полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две.

Разглеждаме първо случая $\nu_1 = \nu_2$. Полусиметрична хиперповърхнина M^n, за която $\nu_1 = \nu_2$ наричаме *полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип*. Втората фундаментална форма h на полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип има вида

$$h = \nu\,(\eta_1 \otimes \eta_1 + \eta_2 \otimes \eta_2)\,, \quad \nu \neq 0,$$

а съответният й оператор A се задава с

$$AX = \nu\left(\eta_1(X)\xi_1 + \eta_2(X)\xi_2\right), \quad X \in \mathfrak{X}M^n,$$

т. е.

$$\begin{aligned} A\xi_1 &= \nu\xi_1; \\ A\xi_2 &= \nu\xi_2; \\ Ax_0 &= 0, \quad x_0 \in \Delta_0. \end{aligned}$$

Ясно е, че в този случай всяко векторно поле $\xi \in \Delta_0^\perp$ е главно направление на M^n $(A\xi = \nu\xi)$. От условията за интегруемост на полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип получаваме равенствата:

$$\begin{aligned} &1)\ \nabla_{x_0}\xi_1 = -\gamma^0(x_0)\,\xi_2; \\ &2)\ \nabla_{x_0}\xi_2 = \gamma^0(x_0)\,\xi_1; \\ &3)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, x_0) = d\ln\nu(x_0); \\ &4)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, x_0) = d\ln\nu(x_0); \\ &5)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, x_0) = 0; \\ &6)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, x_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Означаваме $p = g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_2);\ q = g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, \xi_1)$.

Според Твърдение 2.3.1, приложено за полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип, векторното поле $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$ определя инволютивно разпределение Δ_ξ тогава и само тогава, когато $d\varphi(x_0) = \gamma^0(x_0)$, $x_0 \in \Delta_0$. Нека N е единично нормално векторно поле на M^n. Тогава, всяко интегрално многообразие M_ξ^{n-1} на инволютивно разпределение Δ_ξ е $(n-1)$-мерна повърхнина с нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi\}$. Означаваме $\xi^\perp = -\sin\varphi\,\xi_1 + \cos\varphi\,\xi_2$; $\omega = -\sin\varphi\,\eta_1 + \cos\varphi\,\eta_2$. Като използваме формули (2.3.8) получаваме

$$\begin{aligned} &\nabla'_{x_0}N = 0, \quad x_0 \in \Delta_0; \\ &\nabla'_{x_0}\xi = 0, \quad x_0 \in \Delta_0; \\ &\nabla'_{\xi^\perp}N = -\nu\,\xi^\perp; \\ &\nabla'_{\xi^\perp}\xi = -\left(p\ \sin\varphi + q\ \cos\varphi + \sin\varphi\,d\varphi(\xi_1) - \cos\varphi\,d\varphi(\xi_2)\right)\,\xi^\perp. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Означаваме $\overline{q} = p\sin\varphi + q\cos\varphi + \sin\varphi\,d\varphi(\xi_1) - \cos\varphi\,d\varphi(\xi_2)$. Произволно векторно поле $x \in \mathfrak{X}M_\xi^{n-1}$ се представя еднозначно във вида $x = x_0 + \omega(x)\,\xi^\perp$, $x_0 \in \Delta_0$. Тогава, от (2.3.9) намираме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\nu\,\omega(x)\,\xi^\perp; \\ \nabla'_x\xi &= -\overline{q}\,\omega(x)\,\xi^\perp; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M_\xi^{n-1},$$

откъдето, съгласно Теорема 2.2.1, получаваме, че M_ξ^{n-1} локално е развиваема повърхнина с коразмерност две и канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi\}$. При това, тъй като $\nu \neq 0$, то M_ξ^{n-1} е нетривиална ($M_\xi^{n-1} \neq \mathbb{E}^{n-1}$). В частност, ако $d\left(\dfrac{\overline{q}}{\nu}\right)(\xi^\perp) = 0$, то M_ξ^{n-1} е планарна.

И така, интегралните многообразия на всяко $(n-1)$-мерно инволютивно разпределение на полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две.

Получените резултати ни дават следната

Теорема 2.3.3. (Структурна теорема 1) *Всяка полусиметрична хиперповърхнина в* $\mathbb{E}^{n+1}$ *от омбиличен тип локално е еднопараметрична система (фолиация) от развиваеми повърхнини с коразмерност две.*

Да разгледаме сега полусиметрична хиперповърхнина M^n от неомбиличен тип $(\nu_1 \neq \nu_2)$ с главни направления ξ_1 и ξ_2 и единично нормално векторно поле N. Нека Δ_ξ е инволютивно разпределение на M^n, където $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$. Тогава, според Твърдение 2.3.1, функцията φ удовлетворява (2.3.3). Всяко интегрално многообразие M_ξ^{n-1} на Δ_ξ е $(n-1)$-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi\}$. Ще докажем, че в общия случай M_ξ^{n-1} локално е полуразвиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две.

Означаваме отново $\xi^\perp = -\sin\varphi\,\xi_1 + \cos\varphi\,\xi_2$; $\omega = -\sin\varphi\,\eta_1 + \cos\varphi\,\eta_2$. Тогава, $\Delta_\xi = \Delta_0 \oplus \operatorname{span}\{\xi^\perp\}$. Избираме локална ортонормирана база $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ на Δ_0. От равенствата (2.3.1) получаваме

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\xi_1}\xi_1 &= d\ln\nu_1(e_\alpha)\,e_\alpha + \frac{d\nu_1(\xi_2)}{\nu_1-\nu_2}\,\xi_2 + \nu_1\,N;\\
\nabla'_{\xi_2}\xi_2 &= d\ln\nu_2(e_\alpha)\,e_\alpha - \frac{d\nu_2(\xi_1)}{\nu_1-\nu_2}\,\xi_1 + \nu_2\,N;\\
\nabla'_{\xi_1}\xi_2 &= \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_2}\,\gamma^0(e_\alpha)\,e_\alpha - \frac{d\nu_1(\xi_2)}{\nu_1-\nu_2}\,\xi_1;\\
\nabla'_{\xi_2}\xi_1 &= \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\,\gamma^0(e_\alpha)\,e_\alpha + \frac{d\nu_2(\xi_1)}{\nu_1-\nu_2}\,\xi_2.
\end{aligned}$$

Като използваме, че функцията φ удовлетворява (2.3.3), от горните равенства намираме

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\xi^\perp}\xi = {} & (d\varphi(e_\alpha) - \gamma^0(e_\alpha))\ e_\alpha\\
& -\left(\sin\varphi\,d\varphi(\xi_1) - \cos\varphi\,d\varphi(\xi_2) + \sin\varphi\,\frac{d\nu_1(\xi_2)}{\nu_1-\nu_2} - \cos\varphi\,\frac{d\nu_2(\xi_1)}{\nu_1-\nu_2}\right)\,\xi^\perp\\
& +(\nu_2-\nu_1)\sin\varphi\cos\varphi\,N.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

От друга страна, с помощта на (2.3.1) пресмятаме:

$$\nabla'_{e_\alpha}\xi = \big(d\varphi(e_\alpha) - \gamma^0(e_\alpha)\big)\ \xi^\perp, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{2.3.11}$$

Означаваме

$$\begin{aligned}
& q = \sin\varphi\,d\varphi(\xi_1) - \cos\varphi\,d\varphi(\xi_2) + \sin\varphi\,\frac{d\nu_1(\xi_2)}{\nu_1-\nu_2} - \cos\varphi\,\frac{d\nu_2(\xi_1)}{\nu_1-\nu_2};\\
& \varphi_\alpha = d\varphi(e_\alpha); \quad \gamma^0_\alpha = \gamma^0(e_\alpha); \quad \alpha = 1, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Тогава, като използваме, че произволно векторно поле $x \in \Delta_\xi$ се представя еднозначно във вида $x = g(x, e_\alpha)\, e_\alpha + \omega(x)\, \xi^\perp$, от (2.3.10) и (2.3.11) получаваме

$$\begin{array}{lll} (2.3.12) & \nabla'_x \xi = (\varphi_\alpha - \gamma^0_\alpha)\, \omega(x)\, e_\alpha + g(x, e_\alpha)(\varphi_\alpha - \gamma^0_\alpha)\, \xi^\perp \\ & \qquad -q\, \omega(x)\, \xi^\perp + (\nu_2 - \nu_1) \sin\varphi \cos\varphi\, \omega(x)\, N, & x \in \mathfrak{X} M^{n-1}_\xi. \end{array}$$

Освен това, за $\nabla'_{e_\alpha} N$ и $\nabla'_{\xi^\perp} N$ от вида на втората фундаментална форма на M^n имаме

$$\begin{aligned} &\nabla'_{e_\alpha} N = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2; \\ &\nabla'_{\xi^\perp} N = -(\nu_1 \sin^2\varphi + \nu_2 \cos^2\varphi)\, \xi^\perp - (\nu_2 - \nu_1) \sin\varphi \cos\varphi\, \xi, \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$(2.3.13) \qquad \nabla'_x N = -(\nu_1 \sin^2\varphi + \nu_2 \cos^2\varphi)\, \omega(x)\, \xi^\perp - (\nu_2 - \nu_1) \sin\varphi \cos\varphi\, \omega(x)\, \xi.$$

Означаваме $\overline{B} = (\gamma^0_\alpha - \varphi_\alpha)\, e_\alpha \quad (\overline{B} \in \Delta_0)$. Нека B е единично векторно поле в Δ_0, колинеарно с $\overline{B}$, т. е. $\overline{B} = b\, B,\ b = |\overline{B}|$. Ако β е единичната 1-форма, съответна на векторното поле B, то

$$b\, \beta(x) = b\, g(x, B) = (\gamma^0_\alpha - \varphi_\alpha) g(x, e_\alpha).$$

Тогава, като положим $p = \nu_1 \sin^2\varphi + \nu_2 \cos^2\varphi;\ \mu = (\nu_2 - \nu_1) \sin\varphi \cos\varphi$ и използваме равенствата (2.3.12) и (2.3.13), получаваме

$$\begin{array}{lll} (2.3.14) & \nabla'_x N = -p\, \omega(x)\, \xi^\perp - \mu\, \omega(x)\, \xi; \\ & \nabla'_x \xi = -b\, \omega(x)\, B - b\, \beta(x)\, \xi^\perp - q\, \omega(x)\, \xi^\perp + \mu\, \omega(x)\, N; & x \in \mathfrak{X} M^{n-1}_\xi, \end{array}$$

където $p \neq 0$. В общия случай (при $b \neq 0$) от Теорема 2.2.8 следва, че M^{n-1}_ξ локално е непланарна полуразвиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две и главно нормално векторно поле N. В частност (при $b = 0$) M^{n-1}_ξ локално е развиваема праволинейна повърхнина с коразмерност две.

И така, в общия случай[1], интегралните многообразия на $(n-1)$-мерните инволютивни разпределения на полусиметрична хиперповърхнина M^n от неомбиличен тип са непланарни полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две. При това, нормалата N на M^n е главно нормално векторно поле на всяка от полуразвиваемите повърхнини с коразмерност две.

Получените резултати формулираме в следната

Теорема 2.3.4. (Структурна теорема 2) *Всяка полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ от неомбиличен тип локално е еднопараметрична система (фолиация) от непланарни полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две.*

[1]Частните случаи (при допълнителни условия за γ^0 и k), при които интегралните многообразия са развиваеми повърхнини с коразмерност две, ще бъдат разгледани по-долу.

Ще разгледаме частните случаи, при които интегралните многообразия на някои инволютивни $(n-1)$-мерни разпределения на полусиметрична хиперповърхнина M^n от неомбиличен тип са развиваеми повърхнини с коразмерност две. Ще използваме понятията асимптотично разпределение и асимптотична фолиация, въведени в [12].

Нека (M^n, g) е полусиметрично риманово многообразие от типичния клас според класификацията на Z. Szabo. Едно $(n-1)$-мерно разпределение Δ^{n-1} на (M^n, g) се нарича *асимптотично* [12], ако е интегруемо и интегралните му многообразия M^{n-1} се състоят от $(n-2)$-мерни евклидови листове на M^n, така че допирателните пространства на M^{n-1} са паралелни по всеки евклидов лист (по отношение на свързаността на Levi-Civita ∇ на (M^n, g)). Интегралните многообразия на асимптотично разпределение Δ^{n-1} определят фолиация на M^n, която се нарича *асимптотична фолиация.* Такава фолиация не винаги съществува. Полусиметрично риманово многообразие (M^n, g) се нарича *асимптотично фолирано* (*asymptotically foliated*), ако допуска поне една асимптотична фолиация. В [12] полусиметричните пространства са разделени на четири типа според броя на асимптотичните фолиации, които допускат. Полусиметрично риманово многообразие (M^n, g) се нарича *планарно*, ако допуска безбройно много асимптотични фолиации; (M^n, g) се нарича *хиперболично* (съответно *параболично* или *елиптично*), ако допуска две (съответно една или нито една) асимптотични фолиации.

Като използваме тази терминология за полусиметрична хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$, получаваме, че едно интегруемо $(n-1)$-мерно разпределение Δ_ξ на M^n е асимптотично, тогава и само тогава, когато интегралните му многообразия са развиваеми повърхнини с коразмерност две. Тогава, съгласно горната терминология, от Структурна теорема 1 следва

Следствие 2.3.5. *Всяка полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ от омбиличен тип е планарна.*

За полусиметричните хиперповърхнини от неомбиличен тип ще разгледаме поотделно следните два възможни случая:

I случай: Нека $\gamma^0 = 0$. Според Следствие 2.3.2, разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, ортогонални съответно на ξ_1 и ξ_2, са инволютивни. Нека $M^{n-1}_{\xi_1}$ е интегрално многообразие на разпределението Δ_{ξ_1}. Като използваме (2.3.1) при $\gamma^0 = 0$, получаваме следните формули:

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\nu_2\, \eta_2(x)\, \xi_2; \\ \nabla'_x \xi_1 &= -\frac{d\nu_2(\xi_1)}{\nu_2 - \nu_1}\, \eta_2(x)\, \xi_2; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X} M^{n-1}_{\xi_1}.$$

Следователно, съгласно Теорема 2.2.1, $M^{n-1}_{\xi_1}$ локално е развиваема повърхнина с коразмерност две и канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi_1\}$. При това, тъй като $\nu_2 \neq 0$, то $M^{n-1}_{\xi_1}$ е нетривиална $(M^{n-1}_{\xi_1} \neq \mathbb{E}^{n-1})$.

Аналогично, за интегралните многообразия $M^{n-1}_{\xi_2}$ на разпределението Δ_{ξ_2} получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\nu_1\, \eta_1(x)\, \xi_1; \\ \nabla'_x \xi_2 &= -\frac{d\nu_1(\xi_2)}{\nu_1-\nu_2}\, \eta_1(x)\, \xi_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X} M^{n-1}_{\xi_2},$$

откъдето следва, че $M^{n-1}_{\xi_2}$ локално са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две и канонична нормална равнина $\mathrm{span}\{N, \xi_2\}$.

И така, ако M^n е полусиметрична хиперповърхнина от неомбиличен тип, за която $\gamma^0 = 0$, то главните направления ξ_1 и ξ_2 определят инволютивни разпределения Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, чиито интегрални многообразия са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две, т. е. разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2} са асимптотични.

Съгласно Твърдение 2.3.1, при $\gamma^0 = 0$, ако векторното поле $\xi = \cos\varphi\, \xi_1 + \sin\varphi\, \xi_2$ (където $\sin\varphi \cos\varphi \neq 0$) определя инволютивно разпределение Δ_ξ, то функцията φ удовлетворява

$$\varphi_\alpha = -\frac{k_\alpha}{k}\, \sin\varphi \cos\varphi, \quad \alpha = 1, \dots, n-2.$$

За интегралните многообразия M^{n-1}_ξ на Δ_ξ са в сила формули (2.3.14), където в случая

$$b\, B = -\varphi_\alpha\, e_\alpha = \frac{k_\alpha}{k}\, \sin\varphi \cos\varphi\, e_\alpha.$$

Тогава, тъй като $\sin\varphi \cos\varphi \neq 0$ и векторните полета $e_1, \dots, e_{n-2}$ са линейно независими, то съгласно Теорема 2.2.1, M^{n-1}_ξ са развиваеми повърхнини, тогава и само тогава, когато $k_\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-2$, т. е. $dk(x_0) = 0,\ x_0 \in \Delta_0$.

Така получаваме следните два подслучая:

1. Ако $dk_{|\Delta_0} = 0$, то всяко инволютивно $(n-1)$-мерно разпределение Δ_ξ на M^n е асимптотично. Следователно, M^n е планарна полусиметрична хиперповърхнина.

2. Ако $dk_{|\Delta_0} \neq 0$, то единствените асимптотични разпределения на M^n са разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, определени от главните направления ξ_1 и ξ_2. По отношение на всяко друго векторно поле ξ, определящо инволютивно разпределение Δ_ξ, M^n локално е фолиация от полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две. Следователно, в този случай M^n е хиперболична полусиметрична хиперповърхнина.

II случай: Нека $\gamma^0 \neq 0$. Съгласно Следствие 2.3.2, разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, ортогонални на главните направления ξ_1 и ξ_2, не са инволютивни. Ако векторното поле $\xi = \cos\varphi\, \xi_1 + \sin\varphi\, \xi_2$ (където $\sin\varphi \cos\varphi \neq 0$) определя инволютивно разпределение Δ_ξ, то интегралните му многообразия M^{n-1}_ξ са полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две, за които са в сила формули (2.3.14). Търсим условия, при които M^{n-1}_ξ са развиваеми.

Тъй като $e_1, \dots, e_{n-2}$ са линейно независими и $b\, B = (\gamma^0_\alpha - \varphi_\alpha)\, e_\alpha$, то съгласно Теорема 2.2.1, M^{n-1}_ξ са развиваеми повърхнини тогава и само тогава, когато

$$\gamma^0_\alpha - \varphi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2.$$

Като използваме, че функцията φ удовлетворява (2.3.3), получаваме, че векторното поле $\xi = \cos\varphi\, \xi_1 + \sin\varphi\, \xi_2$ определя асимптотично разпределение Δ_ξ тогава и само тогава, когато φ удовлетворява

$$k(k-1)\,\gamma_\alpha^0 \sin^2\varphi - k_\alpha \sin\varphi\cos\varphi + (1-k)\,\gamma_\alpha^0 \cos^2\varphi = 0, \quad \alpha = 1,\dots,n-2. \tag{2.3.15}$$

Разграничаваме следните подслучаи:

1. Съществуват две решения φ_1 и φ_2 на (2.3.15), които определят съответно две асимптотични разпределения Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}. Следователно, M^n е хиперболична полусиметрична хиперповърхнина.

2. Съществува едно решение φ на (2.3.15), определящо едно асимптотично разпределение Δ_ξ на M^n. Следователно, M^n е параболична полусиметрична хиперповърхнина.

3. Не съществува решение на (2.3.15), т. е. M^n няма асимптотични разпределения. В този случай, M^n е елиптична полусиметрична хиперповърхнина.

2.4 Минимални полусиметрични хиперповърхнини

Ще приложим резултатите от § 2.3 за класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини ($\nu_1 + \nu_2 = 0$). Втората фундаментална форма h на минимална полусиметрична хиперповърхнина M^n има вида

$$h = \nu\,(\eta_1 \otimes \eta_1 - \eta_2 \otimes \eta_2)\,, \quad \nu \neq 0.$$

От условията за интегруемост на M^n получаваме равенствата

$$\begin{aligned}
&1)\ \nabla_{x_0}\xi_1 = -\gamma^0(x_0)\,\xi_2;\\
&2)\ \nabla_{x_0}\xi_2 = \gamma^0(x_0)\,\xi_1;\\
&3)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, x_0) = d\ln\nu(x_0);\\
&4)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, x_0) = d\ln\nu(x_0);\\
&5)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, x_0) = 2\,\gamma^0(x_0);\\
&6)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, x_0) = -2\,\gamma^0(x_0);\\
&7)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\,d\ln\nu(\xi_2);\\
&8)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, \xi_1) = \frac{1}{2}\,d\ln\nu(\xi_1),
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

където $x_0 \in \Delta_0$.

Тъй като $k = -1$, то съгласно Твърдение 2.3.1, векторното поле $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$ определя инволютивно разпределение Δ_ξ тогава и само тогава, когато функцията φ удовлетворява

$$d\varphi(x_0) = -\,\gamma^0(x_0), \quad x_0 \in \Delta_0. \tag{2.4.2}$$

Разглеждаме поотделно двата основни случая $\gamma^0 = 0$ и $\gamma^0 \neq 0$.

I случай: Нека $\gamma^0 = 0$. Тогава, според Следствие 2.3.2, разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, ортогонални съответно на ξ_1 и ξ_2, са инволютивни. Като използваме равенства (2.4.1) получаваме, че ако $M^{n-1}_{\xi_1}$ е интегрално многообразие на разпределението Δ_{ξ_1}, то в сила са формулите

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= \nu\, \eta_2(x)\, \xi_2; \\ \nabla'_x \xi_1 &= -\frac{1}{2}\, d\ln\nu(\xi_1)\, \eta_2(x)\, \xi_2; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}_{\xi_1}.$$

Следователно, съгласно Теорема 2.2.1, $M^{n-1}_{\xi_1}$ локално е развиваема повърхнина с коразмерност две и канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi_1\}$. При това, тъй като $\nu \neq 0$, то $M^{n-1}_{\xi_1}$ е нетривиална.

Аналогично, за интегралните многообразия $M^{n-1}_{\xi_2}$ на разпределението Δ_{ξ_2} получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\nu\, \eta_1(x)\, \xi_1; \\ \nabla'_x \xi_2 &= -\frac{1}{2}\, d\ln\nu(\xi_2)\, \eta_1(x)\, \xi_1; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}_{\xi_2},$$

откъдето следва, че $M^{n-1}_{\xi_2}$ локално са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две и канонична нормална равнина $\operatorname{span}\{N, \xi_2\}$.

И така, разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, определени от главните направления ξ_1 и ξ_2, са асимптотични.

Тъй като $\gamma^0 = 0$, то от (2.4.2) следва, че всяка функция $\varphi = \varphi(u, v)$ определя векторно поле $\xi = \cos\varphi\, \xi_1 + \sin\varphi\, \xi_2$, чието ортогонално разпределение Δ_ξ е инволютивно. Освен това, понеже $dk_{|\Delta_0} = 0$, то интегралните многообразия на Δ_ξ са развиваеми повърхнини с коразмерност две. Следователно, всяко инволютивно $(n-1)$-мерно разпределение Δ_ξ на M^n е асимптотично. Така получаваме

Твърдение 2.4.1. *Всяка минимална полусиметрична хиперповърхнина, за която $\gamma^0 = 0$, е планарна.*

II случай: Нека $\gamma^0 \neq 0$. Тогава, съгласно Следствие 2.3.2, разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, определени от главните направления ξ_1 и ξ_2, не са инволютивни. Всяко векторно поле $\xi = \cos\varphi\, \xi_1 + \sin\varphi\, \xi_2$, за което функцията φ удовлетворява (2.4.2), определя инволютивно разпределение Δ_ξ. Тъй като $k = -1$, то не съществува решение на (2.3.15). Следователно, всички инволютивни разпределения на M^n са неасимптотични. Така получаваме

Твърдение 2.4.2. *Всяка минимална полусиметрична хиперповърхнина, за която $\gamma^0 \neq 0$, е елиптична.*

От горните разглеждания видяхме, че според 1-формата γ^0 съществуват два съществено различни класа минимални полусиметрични хиперповърхнини. В I клас, при който $\gamma^0 = 0$, M^n е фолиация от развиваеми повърхнини с коразмерност две по отношение на всяко векторно поле ξ, определящо инволютивно разпределение Δ_ξ. Във II клас, при който $\gamma^0 \neq 0$, всяко векторно поле, задаващо инволютивно разпределение, определя M^n като фолиация от непланарни полуразвиваеми повърхнини с коразмерност две.

Първият клас ($\gamma^0 = 0$) е аналогичен на класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип, които също са фолиации от развиваеми повърхнини с коразмерност две по отношение на всяко инволютивно разпределение. Главните направления ξ_1 и ξ_2 и на минимална полусиметрична хиперповърхнина от I клас и на полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип определят асимптотични разпределения Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, чиито интегрални многообразия са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две ($\nu \neq 0$). Но, докато при полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип всяко интегруемо разпределение Δ_ξ има интегрални многообразия, които са нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две, то при минималните полусиметрични хиперповърхнини от I клас има случаи, при които интегралните многообразия на някои специални разпределения са тривиални, т. е. равнини с коразмерност две. В тези случаи минималната полусиметрична хиперповърхнина е праволинейна (ruled hypersurface). Ще разгледаме тези частни случаи.

Нека M^n е минимална полусиметрична хиперповърхнина от I клас ($\gamma^0 = 0$) с главни направления ξ_1 и ξ_2. Всяко векторно поле $\xi = \cos\varphi\,\xi_1 + \sin\varphi\,\xi_2$, за което $\varphi = \varphi(u, v)$, определя инволютивно разпределение Δ_ξ. Нека M^{n-1}_ξ е интегрално многообразие на Δ_ξ. От (2.4.1) получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -p\,\omega(x)\,\xi^\perp - \mu\,\omega(x)\,\xi; \\ \nabla'_x \xi &= -q\,\omega(x)\,\xi^\perp + \mu\,\omega(x)\,N; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}_\xi,$$

където $\xi^\perp = -\sin\varphi\,\xi_1 + \cos\varphi\,\xi_2$; $\omega = -\sin\varphi\,\eta_1 + \cos\varphi\,\eta_2$, а μ, p и q са следните функции:

$$\begin{aligned} \mu &= -\nu\,\sin 2\varphi; \\ p &= -\nu\,\cos 2\varphi; \\ q &= \sin\varphi\,d\varphi(\xi_1) - \cos\varphi\,d\varphi(\xi_2) + \frac{1}{2}\,d\ln\nu(\xi_2)\sin\varphi + \frac{1}{2}\,d\ln\nu(\xi_1)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Съгласно Лема 1.1.1, повърхнината M^{n-1}_ξ локално е равнина $\mathbb{E}^{n-1}$ с коразмерност две, тогава и само тогава, когато $p = 0$, $q = 0$. Като използваме горните изрази за p и q, получаваме, че M^{n-1}_ξ локално е равнина, тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm\frac{\pi}{4}; \\ d\nu(\xi_1) &\pm d\nu(\xi_2) = 0. \end{aligned}$$

Ако $d\nu(\xi_1) = -\,d\nu(\xi_2)$, то векторното поле $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1 + \xi_2)$ определя инволютивно разпределение Δ_ξ, за чиито интегрални многообразия M^{n-1}_ξ са в сила равенствата

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= \nu\,\omega(x)\,\xi; \\ \nabla'_x \xi &= -\nu\,\omega(x)\,N; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M^{n-1}_\xi,$$

т. е. M_ξ^{n-1} локално са равнини с коразмерност две. Следователно, по отношение на векторното поле ξ, M^n е фолиация от равнини с коразмерност две, т. е. M^n е минимална праволинейна хиперповърхнина. По отношение на всяко друго векторно поле, определящо инволютивно разпредение, M^n е фолиация от нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две.

Аналогично, ако $d\nu(\xi_1) = d\nu(\xi_2)$, то векторното поле $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1 - \xi_2)$ определя инволютивно разпределение Δ_ξ, за чиито интегрални многообразия M_ξ^{n-1} са в сила равенствата

$$\begin{aligned} \nabla'_x N &= -\nu\,\omega(x)\,\xi; \\ \nabla'_x \xi &= \nu\,\omega(x)\,N; \end{aligned} \qquad x \in \mathfrak{X}M_\xi^{n-1},$$

т. е. M_ξ^{n-1} локално са равнини с коразмерност две. Следователно, по отношение на векторното поле ξ, M^n е фолиация от равнини с коразмерност две, т. е. M^n е минимална праволинейна хиперповърхнина. По отношение на всяко друго векторно поле, определящо инволютивно разпредение, M^n е фолиация от нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две.

В частност, ако $d\nu(\xi_1) = 0;\ d\nu(\xi_2) = 0$, то векторните полета $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1 + \xi_2)$ и $\xi^\perp = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1 - \xi_2)$, които са ъглополовящи на главните направления ξ_1 и ξ_2, определят инволютивни разпределения Δ_ξ и $\Delta_{\xi^\perp}$, чиито интегрални многообразия са равнини с коразмерност две. Следователно, в този случай, M^n е фолиация от равнини с коразмерност две както по отношение на векторното поле ξ, така и по отношение на $\xi^\perp$. По отношение на главните направления ξ_1 и ξ_2, M^n е фолиация от планарни развиваеми повърхнини с коразмерност две, а по отношение на всяко друго векторно поле, M^n е фолиация от нетривиални развиваеми повърхнини с коразмерност две.

В общия случай, когато $d\nu(\xi_1) \pm d\nu(\xi_2) \neq 0$, не съществуват направления, по които M^n да е фолиация от равнини с коразмерност две, т. е. M^n не е праволинейна хиперповърхнина.

2.5 Геометрична характеризация на полусиметричните хиперповърхнини

Като обобщение на Лема 1.2.2 за развиваемите праволинейни хиперповърхнини (торсовете) ще докажем, че всяка полусиметрична хиперповърхнина може да се разглежда като обвивка на двупараметрично семейство от хиперравнини. Тази геометрична характеризация на полусиметричните хиперповърхнини ни позволява да получим аналитично описание на два техни основни класа - класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини и класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип (Теорема 2.5.2), както и да конструираме полусиметрични хиперповърхнини в 4-мерно евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ (в § 3.2).

Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$. Съгласно Теорема 2.1.7, можем да разглеждаме M^n като развиваема двупараметрична система от равнини с коразмерност 3, т. е. $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$. Нека N е единично нормално векторно поле на M^n (N е определено с точност до знак) и $X = X(u,v,w^1,\dots,w^{n-2})$ е локална параметризация на M^n, такава, че параметрите w^α, $\alpha = 1,\dots,n-2$ описват образуващите $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$. Според Дефиниция 2.1.2, като фиксираме $(u,v) \in \mathcal{D}$, получаваме еднозначно определена хиперравнина $\mathbb{E}^n(u,v)$ - допирателната равнина към M^n в точките на фиксираната образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$, чиято нормала е $N = N(u,v)$. Така получаваме двупараметрично семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от хиперравнини в $\mathbb{E}^{n+1}$. Хиперравнината $\mathbb{E}^n(u,v)$ се определя от единичната векторна функция $N = N(u,v)$ и скаларна функция $r = r(u,v)$, задаваща ориентираното разстояние от началото O на $\mathbb{E}^{n+1}$ до хиперравнината $\mathbb{E}^n(u,v)$. Следователно, радиус-векторът $X = X(u,v,w^1,\dots,w^{n-2})$ на произволна точка от M^n удовлетворява равенството

$$N\,X - r = 0.$$

Като диференцираме горното равенство съответно по u и v и използваме, че нормалата N е ортогонална на допирателното пространство $\operatorname{span}\{X_u, X_v, X_\alpha\},\ \alpha = 1,\dots,n-2$ на M^n, получаваме, че X удовлетворява равенствата

$$\begin{aligned} &N\,X - r = 0;\\ &N_u\,X - r_u = 0;\\ &N_v\,X - r_v = 0, \end{aligned}$$

откъдето следва, че хиперповърхнината M^n е обвивка на двупараметричното семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от хиперравнини.

Обратно, нека M^n е хиперповърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, която е обвивка на двупараметрично семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от хиперравнини. Означаваме с $l = l(u,v)$ единичната нормала на $\mathbb{E}^n(u,v)$ (l е определена с точност до знак), а с $r = r(u,v)$ - ориентираното разстояние от началото O на $\mathbb{E}^{n+1}$ до хиперравнината $\mathbb{E}^n(u,v)$. Тогава, радиус-векторът $X = X(u,v,w^\alpha)$, $\alpha = 1,\dots,n-2$ на произволна точка от обвивката M^n удовлетворява системата

$$\begin{aligned} &l\,X - r = 0;\\ &l_u\,X - r_u = 0;\\ &l_v\,X - r_v = 0. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Ако векторите l_u и l_v са линейно зависими, то равенствата (2.5.1) определят развиваема праволинейна хиперповърхнина (торс). Торсовете са описани геометрично в Лема 1.2.2. Затова, считаме, че векторите l_u и l_v са линейно независими. Тогава, при фиксирана стойност на $(u,v) \in \mathcal{D}$ равенствата (2.5.1) определят $(n-2)$-мерна равнина $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$, ортогонална на $\operatorname{span}\{l, l_u, l_v\}$. Следователно, през всяка точка $p \in M^n$ минава една равнина $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$, т. е. M^n лежи върху двупараметрична система $\{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3.

Като диференцираме първото равенство на (2.5.1) по w^α, $\alpha = 1,\dots,n-2$, получаваме

$$l\,X_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,\dots,n-2,$$

откъдето следва, че $l \perp \text{span}\{X_1, \dots, X_{n-2}\}$. След диференциране на първото равенство на (2.5.1) съответно по u и v, с помощта на второто и третото равенство на (2.5.1), намираме

$$l\, X_u = 0; \quad l\, X_v = 0.$$

Следователно, единичното векторно поле $l = l(u,v)$ е ортогонално на допирателното пространство $\text{span}\{X_u, X_v, X_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ на M^n, т. е. $l(u,v)$ е нормала на хиперповърхнината M^n. Тъй като нормалата $l(u,v)$ е постоянна в точките на произволна фиксирана образуваща, то двупараметричната система $\{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}$, $(u,v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3 е развиваема.

И така, обвивката M^n на двупараметрично семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от хиперравнини локално е полусиметрична хиперповърхнина.

Получените резултати ни дават

Теорема 2.5.1. *Хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ локално е полусиметрична хиперповърхнина, тогава и само тогава, когато M^n е обвивка на двупараметрично семейство от хиперравнини.*

Като използваме геометричната характеризация на полусиметрична хиперповърхнина M^n като обвивка на двупараметрично семейство $\mathcal{F}$ от хиперравнини, ще изведем уравнението за собствените функции на оператора A на втората фундаментална форма на M^n чрез векторната функция $l(u,v)$ и скаларната функция $r(u,v)$, определящи хиперравнините от семейството $\mathcal{F}$.

Нека хиперповърхнината M^n е обвивка на двупараметричното семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^n(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от хиперравнини, определени с единичната векторна функция $l = l(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}$ и скаларната функция $r = r(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}$. Считаме, че векторите l, l_u и l_v са линейно независими. Тогава локално можем да изберем ортонормирани вектори $b_1(u,v), \dots, b_{n-2}(u,v)$, ортогонални на $\text{span}\{l, l_u, l_v\}$. Означаваме

$$E(u,v) = g(l_u, l_u); \quad F(u,v) = g(l_u, l_v); \quad G(u,v) = g(l_v, l_v).$$

В сила са неравенствата $E > 0$; $G > 0$; $E\,G - F^2 > 0$. Полагаме $W = \sqrt{E\,G - F^2}$.

Като използваме, че радиус-векторът $X = X(u,v,w^\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, n-2$ на произволна точка от M^n удовлетворява системата (2.5.1), след пресмятания получаваме следното параметрично представяне на M^n:

$$X(u,v,w^\alpha) = r\,l + \frac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2}\; l_u + \frac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2}\; l_v + w^\alpha\, b_\alpha; \quad (u,v) \in \mathcal{D},\ w^\alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.5.2}$$

Означаваме $z^r(u,v) = r\,l + \dfrac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2}\; l_u + \dfrac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2}\; l_v$. Тогава, (2.5.2) се записва във вида

$$X(u,v,w^\alpha) = z^r(u,v) + w^\alpha\, b_\alpha(u,v); \quad (u,v) \in \mathcal{D},\ w^\alpha \in \mathbb{R}.$$

Двумерната повърхнина M^2_r, зададена със $z^r = z^r(u,v), (u,v) \in \mathcal{D}$, наричаме *управителна повърхнина* на M^n (по аналогия с понятието управителна крива на праволинейна хиперповърхнина, използвано в Глава 1).

Забележка. При смяна на началото O на $\mathbb{E}^{n+1}$ с друга точка O', такава, че $\overrightarrow{O'O} = c$ (където c е постоянен вектор), векторната функция $l = l(u,v)$ не се променя, а ориентираното разстояние $r'(u,v)$ от O' до хиперравнината $\mathbb{E}^n(u,v)$ се изразява чрез ориентираното разстояние $r(u,v)$ от O до $\mathbb{E}^n(u,v)$ по формулата

$$r'(u,v) = r(u,v) + g(c,l).$$

Тогава управителната повърхнина $M^2_{r'}$, съответстваща на r', се задава с $z^{r'} = z^{r'}(u,v)$, където

$$z^{r'}(u,v) = z^r(u,v) + g(c,l)\,l + \frac{Gg(c,l_u) - Fg(c,l_v)}{W^2}\;l_u + \frac{Eg(c,l_v) - Fg(c,l_u)}{W^2}\;l_v.$$

От друга страна, векторът c се представя спрямо базата $\{l, l_u, l_v, b_\alpha\}$, $\alpha = 1,\dots,n-2$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ във вида

$$c = g(c,l)\,l + \frac{Gg(c,l_u) - Fg(c,l_v)}{W^2}\;l_u + \frac{Eg(c,l_v) - Fg(c,l_u)}{W^2}\;l_v + g(c,b_\alpha)\,b_\alpha.$$

Ако означим проекцията на c върху $\operatorname{span}\{l, l_u, l_v\}$ с c_{pr}, то връзката между управителните повърхнини $M^2_{r'}$ и M^2_r е $z^{r'}(u,v) = z^r(u,v) + c_{pr}$.

Производните от втори ред на векторната функция $l(u,v)$ се разлагат спрямо базата $\{l, l_u, l_v, b_\alpha\}$, $\alpha = 1,\dots,n-2$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ по следния начин:

$$\begin{aligned}
l_{uu} &= \Gamma^1_{11}\,l_u + \Gamma^2_{11}\,l_v - E\,l + c^\alpha_{11}\,b_\alpha;\\
l_{uv} &= \Gamma^1_{12}\,l_u + \Gamma^2_{12}\,l_v - F\,l + c^\alpha_{12}\,b_\alpha;\\
l_{vv} &= \Gamma^1_{22}\,l_u + \Gamma^2_{22}\,l_v - G\,l + c^\alpha_{22}\,b_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

където Γ^k_{ij} и c^α_{ij}, $i,j,k = 1,2$; $\alpha = 1,\dots,n-2$ са функциите:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{G\,E_u - 2F\,F_u + F\,E_v}{2W^2}; & \Gamma^2_{11} &= \frac{-F\,E_u + 2E\,F_u - E\,E_v}{2W^2};\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{G\,E_v - F\,G_u}{2W^2}; & \Gamma^2_{12} &= \frac{E\,G_u - F\,E_v}{2W^2};\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{2G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2W^2}; & \Gamma^2_{22} &= \frac{E\,G_v - 2F\,F_v + F\,G_u}{2W^2};
\end{aligned}$$

$$c^\alpha_{11} = g(l_{uu}, b_\alpha); \quad c^\alpha_{12} = g(l_{uv}, b_\alpha); \quad c^\alpha_{22} = g(l_{vv}, b_\alpha), \quad \alpha = 1,\dots,n-2.$$

Допирателното пространство в точка $p \in M^n$ с радиус-вектор $X(u,v,w^\alpha)$ е $\operatorname{span}\{X_u, X_v, X_\alpha\}$, $\alpha = 1,\dots,n-2$. Като използваме (2.5.2) и (2.5.3) получаваме, че допирателните векторни полета на M^n се представят във вида:

$$\begin{aligned}
X_u &= -a_{11}\,l_u - a_{12}\,l_v + p^\alpha\,b_\alpha;\\
X_v &= -a_{21}\,l_u - a_{22}\,l_v + q^\alpha\,b_\alpha;\\
X_\alpha &= b_\alpha, \qquad \alpha = 1,\dots,n-2,
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

където $a_{ij},\ i,j = 1,2$ и $p^\alpha,\ q^\alpha,\ \alpha = 1,\dots,n-2$ са следните функции:

$$\begin{aligned}
a_{11} = {}& -r - \frac{G}{W^2}\,r_{uu} + \frac{F}{W^2}\,r_{uv} + \frac{1}{W^2}\left(G(\ln W)_u - \frac{1}{2}G_u\right) r_u \\
& + \frac{1}{W^2}\left(-F(\ln W)_u + F_u - \frac{1}{2}E_v\right) r_v + w^\alpha\,(Gc^\alpha_{11} - Fc^\alpha_{12}); \\
a_{12} = {}& \frac{F}{W^2}\,r_{uu} - \frac{E}{W^2}\,r_{uv} + \frac{1}{W^2}\left(-F(\ln W)_u + \frac{1}{2}E_v\right) r_u \\
& + \frac{1}{W^2}\left(E(\ln W)_u - \frac{1}{2}E_u\right) r_v + w^\alpha\,(Ec^\alpha_{12} - Fc^\alpha_{11}); \\
a_{21} = {}& -\frac{G}{W^2}\,r_{uv} + \frac{F}{W^2}\,r_{vv} + \frac{1}{W^2}\left(G(\ln W)_v - \frac{1}{2}G_v\right) r_u \\
& + \frac{1}{W^2}\left(-F(\ln W)_v + \frac{1}{2}G_u\right) r_v + w^\alpha\,(Gc^\alpha_{12} - Fc^\alpha_{22}); \\
a_{22} = {}& -r + \frac{F}{W^2}\,r_{uv} - \frac{E}{W^2}\,r_{vv} + \frac{1}{W^2}\left(-F(\ln W)_v + F_v - \frac{1}{2}G_u\right) r_u \\
& + \frac{1}{W^2}\left(E(\ln W)_v - \frac{1}{2}E_v\right) r_v + w^\alpha\,(Ec^\alpha_{22} - Fc^\alpha_{12}); \\
p^\alpha = {}& c^\alpha_{11}\,\frac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2} + c^\alpha_{12}\,\frac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2} + w^\beta g\,((b_\alpha)_u, b_\beta); \\
q^\alpha = {}& c^\alpha_{12}\,\frac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2} + c^\alpha_{22}\,\frac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2} + w^\beta g\,((b_\alpha)_v, b_\beta).
\end{aligned}$$

Тъй като нормалата на хиперповърхнината M^n е $l(u,v)$, то като приложим формулата на Weingarten, получаваме

$$\begin{aligned}
A(X_u) &= -\,l_u; \\
A(X_v) &= -\,l_v; \\
A(X_\alpha) &= 0, \quad \alpha = 1,\dots,n-2.
\end{aligned}$$

Тогава, с помощта на равенства (2.5.4), намираме

$$\begin{aligned}
&a_{11}\,A(l_u) + a_{12}\,A(l_v) = l_u; \\
&a_{21}\,A(l_u) + a_{22}\,A(l_v) = l_v; \\
&A(b_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1,\dots,n-2.
\end{aligned}$$

Разглеждаме само регулярните точки на M^n, в които $X_u, X_v, X_\alpha, \alpha = 1,\dots,n-2$ са линейно независими. Затова считаме, че $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$. Тогава, матрицата $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ е обратима и като означим с $\widetilde{a}_{ij},\ i,j = 1,2$ елементите на обратната ѝ матрица, от горните равенства получаваме

$$\begin{aligned}
A(l_u) &= \widetilde{a}_{11}\, l_u + \widetilde{a}_{12}\, l_v;\\
A(l_v) &= \widetilde{a}_{21}\, l_u + \widetilde{a}_{22}\, l_v;\\
A(b_\alpha) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Следователно, собствените функции ν_1 и ν_2 на оператора A на втората фундаментална форма са решенията на уравнението

$$\nu^2 - (\widetilde{a}_{11} + \widetilde{a}_{22})\, \nu + \widetilde{a}_{11}\, \widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{12}\, \widetilde{a}_{21} = 0. \tag{2.5.5}$$

Ще намерим условията върху векторната функция $l(u,v)$ и скаларната функция $r(u,v)$, при които M^n е минимална полусиметрична хиперповърхнина или полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип.

M^n е минимална полусиметрична хиперповърхнина, ако решенията ν_1 и ν_2 на уравнението (2.5.5) удовлетворяват $\nu_1 + \nu_2 = 0$. Следователно, M^n е минимална тогава и само тогава, когато $\widetilde{a}_{11} + \widetilde{a}_{22} = 0$, т. е. $a_{11} + a_{22} = 0$.

M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип, ако $\nu_1 = \nu_2$. Тъй като уравнението (2.5.5) има равни решения тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{11} &= \widetilde{a}_{22};\\
\widetilde{a}_{12} &= \widetilde{a}_{21} = 0,
\end{aligned}$$

то получаваме, че M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22};\\
a_{12} &= a_{21} = 0.
\end{aligned}$$

Означаваме

$$\begin{aligned}
m_1(u,v) &= -G(\ln W)_u + F(\ln W)_v + G_u - F_v;\\
m_2(u,v) &= F(\ln W)_u - E(\ln W)_v - F_u + E_v;\\
n_1(u,v) &= -G(\ln W)_u - F(\ln W)_v + F_v;\\
n_2(u,v) &= F(\ln W)_u + E(\ln W)_v - F_u;\\
k_1(u,v) &= -F(\ln W)_u + \frac{1}{2} E_v;\\
k_2(u,v) &= E(\ln W)_u - \frac{1}{2} E_u.
\end{aligned}$$

Като използваме дадените по-горе изрази за функциите $a_{ij},\ ij = 1,2$, получаваме:

$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} G\, r_{uu} - 2F\, r_{uv} + E\, r_{vv} + m_1\, r_u + m_2\, r_v + 2W^2\, r = 0;\\ G\, c^\alpha_{11} - 2F\, c^\alpha_{12} + E\, c^\alpha_{22} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{array} \right.$$

Аналогично,

$$\left|\begin{array}{l} a_{11} - a_{22} = 0; \\ a_{12} = a_{21} = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} G\, r_{uu} - E\, r_{vv} + n_1\, r_u + n_2\, r_v = 0; \\ G\, c^\alpha_{11} - E\, c^\alpha_{22} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2; \\ F\, r_{uu} - E\, r_{uv} + k_1\, r_u + k_2\, r_v = 0; \\ F\, c^\alpha_{11} - E\, c^\alpha_{12} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{array}\right.$$

От друга страна, като използваме (2.5.3) и изразите за функциите $\Gamma^k_{ij},\ i, j, k = 1, 2$, след пресмятания намираме

$$\begin{aligned} &G\, l_{uu} - 2F\, l_{uv} + E\, l_{vv} + m_1\, l_u + m_2\, l_v + 2W^2\, l = (G\, c^\alpha_{11} - 2F\, c^\alpha_{12} + E\, c^\alpha_{22})\, b_\alpha; \\ &G\, l_{uu} - E\, l_{vv} + n_1\, l_u + n_2\, l_v = (G\, c^\alpha_{11} - E\, c^\alpha_{22})\, b_\alpha; \\ &F\, l_{uu} - E\, l_{uv} + k_1\, l_u + k_2\, l_v = (F\, c^\alpha_{11} - E\, c^\alpha_{12})\, b_\alpha. \end{aligned}$$

И така, от направените разглеждания получаваме, че полусиметричната хиперповърхнина M^n е минимална тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват равенствата

$$\begin{aligned} &G\, r_{uu} - 2F\, r_{uv} + E\, r_{vv} + m_1\, r_u + m_2\, r_v + 2W^2\, r = 0; \\ &G\, l_{uu} - 2F\, l_{uv} + E\, l_{vv} + m_1\, l_u + m_2\, l_v + 2W^2\, l = 0. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват равенствата

$$\begin{aligned} &G\, r_{uu} - E\, r_{vv} + n_1\, r_u + n_2\, r_v = 0; \\ &G\, l_{uu} - E\, l_{vv} + n_1\, l_u + n_2\, l_v = 0; \\ &F\, r_{uu} - E\, r_{uv} + k_1\, r_u + k_2\, r_v = 0; \\ &F\, l_{uu} - E\, l_{uv} + k_1\, l_u + k_2\, l_v = 0. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Забележка. Проверява се, че равенствата (2.5.6) и (2.5.7) не зависят от избора на начало O на $\mathbb{E}^{n+1}$, т. е. те са инвариантни при смяната $r'(u, v) = r(u, v) + g(c, l)$.

Получените резултати формулираме в следната

Теорема 2.5.2. *Нека хиперповърхнината M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$ е обвивка на двупараметрично семейство от хиперравнини, определени от единичната векторна функция $l(u, v)$ и скаларната функция $r(u, v)$. Тогава:*

(i) *M^n е минимална полусиметрична хиперповърхнина тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват* (2.5.6).

(ii) *M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват* (2.5.7).

Така получаваме аналитично описание на класа на минималните полусиметрични хиперповърхнини и на класа на полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип чрез системи частни диференциални уравнения за единичната векторна функция $l(u,v)$ и скаларната функция $r(u,v)$.

Тъй като векторите l_u и l_v са линейно независими, то векторната функция $l = l(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}$ определя гладка 2-мерна повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^{n+1}$. Функциите $E(u,v)$, $F(u,v)$ и $G(u,v)$ са коефициентите на първата фундаментална форма на M^2.

Параметри (u,v) на повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^{n+1}$ се наричат *изотермични* (*конформни*) [16], ако $E(u,v) = G(u,v)$; $F(u,v) = 0$, т. е. първата фундаментална форма на M^2 се записва във вида

$$ds^2 = E(u,v)\left(du^2 + dv^2\right), \quad E(u,v) > 0.$$

Изотермичните параметри са инвариантни при конформна трансформация. Най-слабите условия, при които върху 2-мерна повърхнина могат да се въведат изотермични параметри, са намерени от A. Korn [28] и L. Lichtenstein [31]. За да формулираме тяхната теорема, ще използваме понятието условие на Hölder. Казваме, че реалната функция $f(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *удовлетворява условието на Hölder от ред* α $(0 < \alpha \leq 1)$, ако за всеки две точки (u,v), $(u',v') \in \mathcal{D}$ е в сила неравенството

$$|f(u,v) - f(u',v')| < C\, \boldsymbol{r}^{\alpha}$$

където $C = const$, а $\boldsymbol{r}$ е евклидовото разстояние между точките. Теоремата на Korn - Lichtenstein, формулирана в [16], гласи следното:

Ако в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *функциите* E, F *и* G *удовлетворяват условието на Hölder от ред* α $(0 < \alpha < 1)$, *то всяка точка от* $\mathcal{D}$ *има околност, в която могат да се въведат изотермични параметри.*

Следователно, в околност на всяка точка от 2-мерна повърхнина от клас $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ могат да се въведат изотермични параметри. Тъй като ние разглеждаме повърхнини от клас C^{∞} и изследванията ни са локални, то можем да считаме, че векторната функция $l(u,v)$ е параметризирана спрямо изотермични параметри. Формулите (2.5.3) за производните от втори ред на $l(u,v)$, записани спрямо изотермични параметри, са

$$\begin{aligned}
l_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\, l_u - \frac{E_v}{2E}\, l_v - E\, l + c_{11}^{\alpha}\, b_{\alpha};\\
l_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\, l_u + \frac{E_u}{2E}\, l_v + c_{12}^{\alpha}\, b_{\alpha};\\
l_{vv} &= -\frac{E_u}{2E}\, l_u + \frac{E_v}{2E}\, l_v - E\, l + c_{22}^{\alpha}\, b_{\alpha}.
\end{aligned}$$

Параметричното представяне (2.5.2) на M^n приема вида:

$$X(u,v,w^{\alpha}) = r\, l + \frac{r_u}{E}\; l_u + \frac{r_v}{E}\; l_v + w^{\alpha}\, b_{\alpha}.$$

Функциите a_{ij} се записват значително по-кратко така:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\,r - \frac{r_{uu}}{E} + \frac{r_u\,E_u - r_v\,E_v}{2E^2} + w^\alpha \frac{c_{11}^\alpha}{E};\\
a_{12} = a_{21} &= -\frac{r_{uv}}{E} + \frac{r_u\,E_v + r_v\,E_u}{2E^2} + w^\alpha \frac{c_{12}^\alpha}{E};\\
a_{22} &= -\,r - \frac{r_{vv}}{E} - \frac{r_u\,E_u - r_v\,E_v}{2E^2} + w^\alpha \frac{c_{22}^\alpha}{E},
\end{aligned}
$$

а функциите $m_i,\ n_i,\ k_i,\ i = 1, 2$ при изотермични параметри имат съвсем прост вид:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 0; & m_2 &= 0;\\
n_1 &= -E_u; & n_2 &= E_v;\\
k_1 &= \frac{1}{2}E_v; & k_2 &= \frac{1}{2}E_u.
\end{aligned}
$$

Тогава, условията M^n да бъде минимална полусиметрична хиперповърхнина или полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип се записват в доста по-удобен вид, а именно:

M^n е минимална, тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват

$$
\begin{aligned}
&r_{uu} + r_{vv} + 2E\,r = 0;\\
&l_{uu} + l_{vv} + 2E\,l = 0.
\end{aligned}
$$

M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип, тогава и само тогава, когато $l(u, v)$ и $r(u, v)$ удовлетворяват

$$
\begin{aligned}
r_{uu} - r_{vv} &= \frac{E_u\,r_u - E_v\,r_v}{E};\\
l_{uu} - l_{vv} &= \frac{E_u\,l_u - E_v\,l_v}{E};\\
2r_{uv} &= \frac{E_v\,r_u + E_u\,r_v}{E};\\
2l_{uv} &= \frac{E_v\,l_u + E_u\,l_v}{E}.
\end{aligned}
$$

Глава 3

Специални класове полусиметрични хиперповърхнини

В настоящата глава разглеждаме някои специални класове полусиметрични хиперповърхнини. В § 3.1 изучаваме класа на полусиметричните хиперповърхнини в $\mathbb{E}^{n+1}$ с инволютивно геометрично двумерно разпределение и доказваме, че интегралните повърхнини на това разпределение са 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност (Твърдение 3.1.2). Обратно, доказваме, че всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, която не е развиваема повърхнина, поражда полусиметрична хиперповърхнина с интегруемо геометрично 2-мерно разпределение (Теорема 3.1.8).

В § 3.2 изучаваме полусиметрични хиперповърхнини в 4-мерното евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ като обвивки на двупараметрични семейства от хиперравнини. Въвеждаме инварианта K на 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$ и доказваме, че всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$ с неположителна инварианта K поражда полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$ (Теорема 3.2.5).

3.1 Полусиметрични хиперповърхнини с интегруемо геометрично двумерно разпределение

В § 2.3 видяхме, че втората фундаментална форма h на полусиметрична хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ се записва във вида

$$h = \nu_1\, \eta_1 \otimes \eta_1 + \nu_2\, \eta_2 \otimes \eta_2, \quad \nu_1\, \nu_2 \neq 0, \tag{3.1.1}$$

където η_1 и η_2 са 1-форми, съответстващи на главните направления ξ_1 и ξ_2. Разпределението $\Delta_0^\perp = \mathrm{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ е ортогонално на образуващите на M^n. В общия случай, $\Delta_0^\perp$ е неинволютивно разпределение. В случаите, когато $\Delta_0^\perp$ е инволютивно разпределение, през всяка точка $p \in M^n$ минава една 2-мерна повърхнина M_p^2, която е интегрално многообразие на $\Delta_0^\perp(p)$. Следователно, за полусиметричните хиперповърхнини, за които геометричното разпределение $\Delta_0^\perp$ е инволютивно, локално съществуват 2-мерни повърхнини, ортогонални на образуващите на M^n. Тези повърхнини са аналог на ортогоналните траектории на образуващите на една праволинейна хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-1}(s)\}$, $s \in J$. Но, докато за всяка праволинейна хиперповърхнина съществуват ортогонални траектории на образуващите $\mathbb{E}^{n-1}(s)$ (съществуват интегрални линии на векторното поле, ортогонално на образуващите), то 2-мерни повърхнини, ортогонални на образуващите $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$ на полусиметрична хиперповърхнина $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$, съществуват само в класа на онези полусиметрични хиперповърхнини, за които геометричното 2-мерно разпределение $\Delta_0^{\perp}$ е инволютивно. Този клас полусиметрични хиперповърхнини означаваме с $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$.

От условията за интегруемост (2.3.8) на полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип ($\nu_1 = \nu_2$) се получава, че

$$[\xi_1, \xi_2] \in \operatorname{span}\{\xi_1, \xi_2\},$$

откъдето следва, че разпределението $\Delta_0^{\perp}$ е инволютивно. Следователно, полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип са от класа $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$.

За полусиметрична хиперповърхнина от неомбиличен тип ($\nu_1 \neq \nu_2$), от условията за интегруемост (2.3.1), след пресмятане се получава

$$\gamma^0(x_0) = -\frac{\nu_1\,\nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)^2}\; g([\xi_1, \xi_2], x_0), \quad x_0 \in \Delta_0.$$

От горното равенство следва

Лема 3.1.1. *Една полусиметрична хиперповърхнина от неомбиличен тип принадлежи на класа $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$, тогава и само тогава, когато $\gamma^0 = 0$.*

И така, класът $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$ се състои от всички полусиметрични хиперповърхнини от омбиличен тип и онези полусиметрични хиперповърхнини от неомбиличен тип, за които $\gamma^0 = 0$.

Забележка. Тъй като за полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип всяко векторно поле $\xi \in \Delta_0^{\perp}$ определя главно направление, то винаги можем да изберем ортонормирана двойка векторни полета $\xi_1, \xi_2 \in \Delta_0^{\perp}$, такива че $g(\nabla_{x_0}\xi_2, \xi_1) = 0$, $x_0 \in \Delta_0$, т. е. $\gamma^0 = 0$. Затова, за полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип също можем да считаме, че $\gamma^0 = 0$.

Ще докажем

Твърдение 3.1.2. *Интегралните повърхнини на геометричното двумерно разпределение на полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$ са повърхнини с плоска нормална свързаност.*

Доказателство. Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}}$ с нормала

N и главни направления ξ_1, ξ_2. При $\gamma^0 = 0$ от равенства (2.3.1) получаваме

$$\begin{aligned}
&1)\ \nabla_{x_0}\xi_1 = 0;\\
&2)\ \nabla_{x_0}\xi_2 = 0;\\
&3)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, x_0) = d\ln\nu_1(x_0);\\
&4)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, x_0) = d\ln\nu_2(x_0);\\
&5)\ g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, x_0) = 0;\\
&6)\ g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, x_0) = 0;\\
&7)\ (\nu_1-\nu_2)^2 g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_2) = (\nu_1-\nu_2)d\nu_1(\xi_2);\\
&8)\ (\nu_1-\nu_2)^2 g(\nabla_{\xi_2}\xi_2, \xi_1) = -(\nu_1-\nu_2)d\nu_2(\xi_1).
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Нека M^2 е интегрална повърхнина на разпределението $\Delta_0^\perp$. Допирателното пространство към M^2 е $\mathrm{span}\{\xi_1, \xi_2\}$, а нормалното пространство е $\mathrm{span}\{N, b_1, \dots, b_{n-2}\}$, където $b_1, \dots, b_{n-2}$ е локална ортонормирана база на Δ_0. Ще намерим нормалните кривини R_N и $R_{b_\alpha},\ \alpha = 1, \dots, n-2$ на M^2, съответстващи на нормалните векторни полета N и b_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$. Според формулата на Weingarten, в сила са равенствата

$$\begin{aligned}
\nabla'_X N &= -A_N(X) + D_X N;\\
\nabla'_X b_\alpha &= -A_{b_\alpha}(X) + D_X b_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-2;
\end{aligned} \qquad X \in \mathfrak{X}M^2,$$

където A_N и $A_{b_\alpha},\ \alpha = 1, \dots, n-2$ са операторите на вторите фундаментални форми, съответстващи на N и b_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$, а D е нормалната свързаност на M^2 (свързаността в нормалното разслоение).

Означаваме $p_\alpha^\beta = g(\nabla'_{\xi_1} b_\alpha, b_\beta)$; $q_\alpha^\beta = g(\nabla'_{\xi_2} b_\alpha, b_\beta)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-2$. Тъй като свързаността ∇' в $\mathbb{E}^{n+1}$ е риманова свързаност, то за функциите p_α^β и q_α^β са в сила равенствата $p_\alpha^\beta = -p_\beta^\alpha$; $q_\alpha^\beta = -q_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-2$. Тогава, като използваме вида (3.1.1) на h и формули (3.1.2), получаваме

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\xi_1} N &= -\nu_1\, \xi_1;\\
\nabla'_{\xi_2} N &= -\nu_2\, \xi_2;\\
\nabla'_{\xi_1} b_\alpha &= -d\ln\nu_1(b_\alpha)\,\xi_1 + p_\alpha^\beta\, b_\beta;\\
\nabla'_{\xi_2} b_\alpha &= -d\ln\nu_2(b_\alpha)\,\xi_2 + q_\alpha^\beta\, b_\beta;
\end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-2, \tag{3.1.3}$$

откъдето намираме

$$\begin{aligned}
D_{\xi_1} N &= 0; \qquad D_{\xi_1} b_\alpha = p_\alpha^\beta\, b_\beta;\\
D_{\xi_2} N &= 0; \qquad D_{\xi_2} b_\alpha = q_\alpha^\beta\, b_\beta;
\end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{3.1.4}$$

Нормалните кривини R_N и $R_{b_\alpha},\ \alpha = 1, \dots, n-2$ на повърхнината M^2 се дефинират с равенствата

$$\begin{aligned}
R_N(\xi_1, \xi_2) &= D_{\xi_1} D_{\xi_2} N - D_{\xi_2} D_{\xi_1} N - D_{[\xi_1, \xi_2]} N;\\
R_{b_\alpha}(\xi_1, \xi_2) &= D_{\xi_1} D_{\xi_2} b_\alpha - D_{\xi_2} D_{\xi_1} b_\alpha - D_{[\xi_1, \xi_2]} b_\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Тъй като $[\xi_1, \xi_2] \in \text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$, то от (3.1.4) непосредствено следва, че

$$R_N(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Като използваме, че ∇' е риманова свързаност и че съответният й тензор на кривина е $R' = 0$, т. е.

$$\nabla'_{\xi_1} \nabla'_{\xi_2} b_\alpha - \nabla'_{\xi_2} \nabla'_{\xi_1} b_\alpha = \nabla'_{[\xi_1, \xi_2]} b_\alpha,$$

с помощта на равенства (3.1.3) и (3.1.4), след пресмятане получаваме

$$R_{b_\alpha}(\xi_1, \xi_2) = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n-2.$$

Следователно, нормалните кривини на M^2 са

$$R_N = 0; \quad R_{b_\alpha} = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

т. е. M^2 е повърхнина с плоска нормална свързаност. $\square$

И така, през всяка точка p на полусиметрична хиперповърхнина M^n от класа $\mathfrak{K}_0$ минава 2-мерна повърхнина M^2_p с плоска нормална свързаност. Ако разгледаме M^n локално като развиваема двупараметрична система $M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u, v)\}$, $(u, v) \in \mathcal{D}$ от равнини с коразмерност 3, то от равенства (3.1.2) следва, че разпределението $\Delta_0^\perp$ е паралелно по образуващите $\mathbb{E}^{n-2}(u, v)$ на M^n. Тогава, за всеки две точки p и q на фиксирана образуваща $\mathbb{E}^{n-2}(u, v)$ интегралните повърхнини M^2_p и M^2_q се пренасят паралелно по $(n-2)$-мерното пространство $\Delta_0 = \text{span}\{b_1, \dots, b_{n-2}\}$. Следователно, можем да разглеждаме M^n като хиперповърхнина, получена от 2-мерна повърхнина M^2 с плоска нормална свързаност, пренесена паралелно по $(n-2)$-мерно нормално пространство $\text{span}\{b_1, \dots, b_{n-2}\}$ на M^2. Ще докажем, че всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, която не е развиваема повърхнина, поражда по такъв начин полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_0$.

Нека M^2 е гладка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$, дефинирана в област $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ чрез векторната функция

$$z = z(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

Предполагаме, че M^2 е регулярна в $\mathcal{D}$, т. е векторите $z_u(u, v)$ и $z_v(u, v)$ са линейно независими във всяка точка на M^2. Ако M^2 е повърхнина с плоска нормална свързаност, то според [14], локално съществуват $n-1$ взаимно ортогонални единични нормални векторни полета $b_1, \dots, b_{n-1}$ на M^2, които са паралелни по отношение на свързаността D в нормалното разслоение, т. е.

$$D b_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1.$$

Освен това, съществуват взаимно ортогонални единични допирателни векторни полета ξ_1 и ξ_2 на M^2, такива, че спрямо базата $\xi_1, \xi_2, b_1, \dots, b_{n-1}$ операторите A_{b_α}, $\alpha = 1, \dots, n-1$ на вторите фундаменатни форми, съответсващи на нормалните векторни полета b_α, $\alpha = 1, \dots, n-2$, се задават с [15]

$$A_{b_\alpha} = \begin{pmatrix} \varkappa_1^\alpha & 0 \\ 0 & \varkappa_2^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

където $\varkappa_1^\alpha$ и $\varkappa_2^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n-1$ са функции върху M^2. Векторните полета ξ_1 и ξ_2 определят главните направления на M^2. Спрямо базата $\xi_1, \xi_2, b_1, \dots, b_{n-1}$ деривационните формули за повърхнината M^2 са

$$\begin{aligned} \nabla'_{\xi_1}\xi_1 &= \qquad f_1\,\xi_2 + \varkappa_1^\alpha\, b_\alpha; \\ \nabla'_{\xi_1}\xi_2 &= -f_1\,\xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2}\xi_1 &= \qquad -f_2\,\xi_2; \\ \nabla'_{\xi_2}\xi_2 &= f_2\,\xi_1 \qquad + \varkappa_2^\alpha\, b_\alpha, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

където $f_1 = g(\nabla'_{\xi_1}\xi_1, \xi_2)$; $f_2 = g(\nabla'_{\xi_2}\xi_2, \xi_1)$ и

$$\begin{aligned} \nabla'_{\xi_1} b_\alpha &= -\varkappa_1^\alpha\,\xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2} b_\alpha &= -\varkappa_2^\alpha \xi_2; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{3.1.6}$$

Ако $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}$ е друга ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета на M^2, то $b_1, \dots, b_{n-1}$ и $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}$ са свързани с постоянна ортогонална матрица [14]. Нека $\bar{b}_\alpha = \sigma_\alpha^\beta\, b_\beta,\ \alpha = 1, \dots, n-1$, където $\sigma_\alpha^\beta = const,\ \alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. За паралелните нормални векторни полета $\bar{b}_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n-1$ са в сила формулите

$$\begin{aligned} \nabla'_{\xi_1} \bar{b}_\alpha &= -\bar{\varkappa}_1^\alpha\,\xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2} \bar{b}_\alpha &= -\bar{\varkappa}_2^\alpha \xi_2; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

където

$$\bar{\varkappa}_1^\alpha = \sigma_\alpha^\beta\,\varkappa_1^\beta; \quad \bar{\varkappa}_2^\alpha = \sigma_\alpha^\beta\,\varkappa_2^\beta; \quad \alpha = 1, \dots, n-1.$$

От формули (3.1.5) и (3.1.6) директно следва

Лема 3.1.3. *Нека M^2 е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност. M^2 локално е част от равнина $\mathbb{E}^2$ тогава и само тогава, когато $\varkappa_i^\alpha = 0$, $i = 1, 2$, $\alpha = 1, \dots, n-1$.*

Ще опишем 2-мерните повърхнини с плоска нормална свързаност, за които $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета.

Лема 3.1.4. *Всяка развиваема 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ е повърхнина с плоска нормална свързаност, за която $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета.*

Доказателство. Нека $M^2 = \{\mathbb{E}^1(v)\}, v \in J\ (J \subset \mathbb{R})$ е развиваема повърхнина (развиваема 1-параметрична система от прави) в $\mathbb{E}^{n+1}$. Тогава M^2 може да се параметризира по следния начин:

$$z(u, v) = x(v) + u\, e(v), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in J,$$

където $x(v)$ и $e(v)$ са векторни функции, дефинирани в J, такива, че $e(v)$, $e'(v)$ и $x'(v)$ са линейно зависими. Допирателното пространство към M^2 се определя от векторите

$$\begin{aligned} z_u &= e(v); \\ z_v &= x'(v) + u\, e'(v). \end{aligned}$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $e^2(v) = 1,\ v \in J$. Тогава, $e(v)$ и $e'(v)$ са ортогонални векторни полета и допирателното пространство към M^2 е $\operatorname{span}\{e(v), e'(v)\}$. Тъй като $x'(v) \in \operatorname{span}\{e(v), e'(v)\}$, то $x'(v)$ се представя във вида

$$x'(v) = p(v)\, e(v) + q(v)\, e'(v).$$

където $p(v)$ и $q(v)$ са функции върху M^2. Следователно, допирателното пространство към M^2 се определя от векторите

$$\begin{aligned} z_u &= e; \\ z_v &= p\, e + (u+q)\, e'. \end{aligned}$$

Разглеждайки само неособените точки на M^2 (където $u \neq -q$), избираме ортонормирана двойка допирателни векторни полета ξ_1, ξ_2 по следния начин:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = e = z_u; \\ &\xi_2 = \frac{e'}{\sqrt{(e')^2}} = -\frac{p}{(u+q)\sqrt{(e')^2}}\, z_u + \frac{1}{(u+q)\sqrt{(e')^2}}\, z_v. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Тъй като M^2 е развиваема повърхнина, то допирателното пространство към M^2 не зависи от параметъра u и следователно, нормалното праваснтво на M^2 се определя от векторни полета $N_1(v), \dots, N_{n-1}(v),\ v \in J$. Производните от първи ред на векторните полета $N_\alpha(v)$ се разлагат спрямо базата $\{e(v), e'(v), N_1(v), \dots, N_{n-1}(v)\}$ на $\mathbb{E}^{n+1}$ във вида

$$N'_\alpha(v) = c_\alpha(v)\, e'(v) + c_\alpha^\beta(v)\, N_\beta(v), \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \tag{3.1.8}$$

където $c_\alpha(v)$ и $c_\alpha^\beta(v),\ \alpha, \beta = 1, \dots, n-1$ са функции на v.

Нека ∇' е свързаността на Levi-Civita на стандартната метрика в $\mathbb{E}^{n+1}$, а D е нормалната свързаност на M^2. Като използваме равенствата (3.1.7) и (3.1.8) получаваме

$$\begin{aligned} &\nabla'_{\xi_1} N_\alpha = 0; \\ &\nabla'_{\xi_2} N_\alpha = \frac{c_\alpha}{u+q}\, \xi_2 + \frac{c_\alpha^\beta}{(u+q)\sqrt{(e')^2}}\, N_\beta; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{3.1.9}$$

Тогава, прилагайки формулата на Weingarten, намираме

$$\begin{aligned} &D_{\xi_1} N_\alpha = 0; \\ &D_{\xi_2} N_\alpha = \frac{c_\alpha^\beta}{(u+q)\sqrt{(e')^2}}\, N_\beta; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-1. \tag{3.1.10}$$

От равенства (3.1.7) пресмятаме $[\xi_1, \xi_2] = -\dfrac{1}{u+q}\, \xi_2$, откъдето с помощта на (3.1.10), за нормалните кривини $R_{N_\alpha},\ \alpha = 1, \dots, n-1$ на M^2, съответстващи на нормалните векторни полета $N_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n-1$, получаваме

$$R_{N_\alpha}(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1.$$

Следователно, M^2 е повърхнина с плоска нормална свързаност.

От равенства (3.1.10) следва, че нормалните векторни полета $N_1, \dots, N_{n-1}$ не са паралелни по отношение на нормалната свързаност D на M^2. Нека $b_1, \dots, b_{n-1}$ е произволна ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета на M^2. Тогава, от (3.1.9) получаваме

$$\begin{aligned} &\nabla'_{\xi_1} b_\alpha = 0; \\ &\nabla'_{\xi_2} b_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^\beta c_\beta}{u+q}\,\xi_2; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

където $\sigma_\alpha^\beta = g(b_\alpha, N_\beta);\ \alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Следователно,

$$\varkappa_1^\alpha = 0; \quad \varkappa_2^\alpha = -\frac{\sigma_\alpha^\beta c_\beta}{u+q}; \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

откъдето намираме $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$. □

Забележка: Всяка 2-мерна равнина $\mathbb{E}^2$ в $\mathbb{E}^{n+1}$ може да се разглежда като тривиална развиваема повърхнина.

Лема 3.1.5. *Нека M^2 е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност и $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета. Тогава съществува околност $U \subset M^2$, такава, че $\varkappa^\alpha_{1\,|U} = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$ или $\varkappa^\alpha_{2\,|U} = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$.*

Доказателство. Нека M^2 е 2-мерна повърхнина с плоска нормална свързаност и $\xi_1, \xi_2, b_1, \dots, b_{n-1}$ са векторни полета, удовлетворяващи (3.1.6), където $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$.

Ако $\varkappa_1^\alpha(p) = 0,\ \alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка точка $p \in M^2$, то лемата е доказана. Нека съществуват точка $p \in M^2$ и индекс $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$, такива, че $\varkappa_1^\alpha(p) \neq 0$. Тогава, съществува околност U на p, в която $\varkappa_1^\alpha \neq 0$. Следователно, $\varkappa^\alpha_{2\,|U} = 0$. Ще докажем, че за всеки индекс $\beta = 1, \dots, n-1$ е в сила $\varkappa^\beta_{2\,|U} = 0$. Допускаме, че съществуват точка $q \in U$ и индекс $\beta \neq \alpha$, такива, че $\varkappa_2^\beta(q) \neq 0$. Тогава, съществува околност $U_1 \subset U,\ q \in U_1$, в която $\varkappa_2^\beta \neq 0$. Следователно, $\varkappa^\beta_{1\,|U_1} = 0$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\alpha = 1,\ \beta = 2$ (с точност до номерация).

Разглеждаме ортонормираната база от паралелни нормални векторни полета $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, b_3, \dots, b_{n-1}\}$, където

$$\bar{b}_1 = \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}; \quad \bar{b}_2 = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{2}}.$$

За $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ имаме съответно

$$\begin{aligned} \bar{\varkappa}_1^1 &= \frac{\varkappa_1^1 + \varkappa_1^2}{\sqrt{2}}; & \bar{\varkappa}_2^1 &= \frac{\varkappa_2^1 + \varkappa_2^2}{\sqrt{2}}; \\ \bar{\varkappa}_1^2 &= \frac{\varkappa_1^1 - \varkappa_1^2}{\sqrt{2}}; & \bar{\varkappa}_2^2 &= \frac{\varkappa_2^1 - \varkappa_2^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Тогава, $\overline{\varkappa}_1^\alpha \overline{\varkappa}_2^\alpha{}_{|U_1} \neq 0, \ \alpha = 1, 2$, което противоречи на условието на лемата.

Следователно, $\varkappa_2^\beta{}_{|U} = 0, \ \beta = 1, \dots, n-1$. □

Лема 3.1.6. *Нека M^2 е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, за която $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0, \ \alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета. Тогава M^2 локално е част от развиваема повърхнина.*

Доказателство. Нека M^2 е 2-мерна повърхнина с плоска нормална свързаност и $\xi_1, \xi_2, b_1, \dots, b_{n-1}$ са векторни полета, удовлетворяващи (3.1.5) и (3.1.6), където $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0, \ \alpha = 1, \dots, n-1$. Ще докажем, че M^2 локално е или част от равнина или част от нетривиална развиваема повърхнина.

Според Лема 3.1.5, съществува околност $U \subset M^2$, в която $\varkappa_2^\alpha = 0, \ \alpha = 1, \dots, n-1$. Нека p е произволна точка от U и c_2 е интегралната крива на векторното поле ξ_2, минаваща през p. От $\nabla'_{\xi_2} b_\alpha = 0, \ \alpha = 1, \dots, n-1$ следва, че нормалното пространство $\text{span}\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ на M^2 е постоянно в точките на c_2 и следователно, допирателното пространство $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ на M^2 е постоянно в точките на кривата c_2. От деривационните формули (3.1.5) получаваме

$$\begin{aligned} \nabla'_{\xi_2}\xi_2 &= f_2\,\xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2}\xi_1 &= -f_2\,\xi_2. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Нека кривата c_2 е параметризирана спрямо естествен параметър с $x = x(v), \ v \in J$, т. е. $x'(v) = t = \xi_2$. Тогава, от формулите на Frenet и равенствата (3.1.11) следва, че кривината на c_2 е $\varkappa = \pm f_2$, а главната ѝ нормала е $n = \pm\xi_1$.

Ако $f_2 = 0$, т. е. $\varkappa = 0$, то c_2 е част от права. Следователно, през всяка точка $p \in U$ минава една права, т. е. M^2 локално е част от праволинейна повърхнина. Освен това, тъй като допирателното пространство към M^2 в точките на всяка фиксирана права е едно и също, то M^2 локално е част от развиваема повърхнина.

Ако съществува точка $q \in U$, такава, че $f_2(q) \neq 0$, то съществува околност $\widetilde{U} \subset U, \ q \in \widetilde{U}$, такава, че $f_2{}_{|\widetilde{U}} \neq 0$. От равенства (3.1.11) получаваме

$$\begin{aligned} t' &= \varkappa\, n; \\ n' &= -\varkappa\, t, \end{aligned}$$

откъдето следва, че c_2 е равнинна крива. Следователно, c_2 лежи в оскулачната си равнина $\text{span}\{t, n\} = \text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$. И така, през всяка точка $p \in U$ минава една равнинна крива, т. е. M^2 локално е 1-параметрична система $\{c_2(u)\}, u \in I$ от равнинни криви $c_2(u)$, дефинирана в интервал $I \subset \mathbb{R}$. Нека за фиксирана стойност на $u \in I$ кривата $c_2(u)$ лежи в равнина $\mathbb{E}^2(u)$, определена от вектори $e_1(u)$ и $e_2(u)$, т. е. $\mathbb{E}^2(u) = \text{span}\{e_1(u), e_2(u)\}$. Следователно, съществуват функции $a_1(v)$ и $a_2(v)$, такива, че повърхнината M^2 има локална параметризация

$$z(u, v) = a_1(v)\, e_1(u) + a_2(v)\, e_2(u), \quad u \in I, \ v \in J. \tag{3.1.12}$$

Тогава, допирателното пространство към M^2 се определя от векторите

$$\begin{aligned} z_u &= a_1(v)\, e_1'(u) + a_2(v)\, e_2'(u); \\ z_v &= a_1'(v)\, e_1(u) + a_2'(v)\, e_2(u). \end{aligned}$$

Но, допирателното пространство към M^2 е $\operatorname{span}\{\xi_1, \xi_2\} = \operatorname{span}\{e_1(u), e_2(u)\}$. Следователно, $e_1'(u), e_2'(u) \in \operatorname{span}\{e_1(u), e_2(u)\}$, т. е. $\mathbb{E}^2(u)$ е постоянна равнина $\mathbb{E}^2_0$. Нека $\{e_1^0 = const,\ e_2^0 = const\}$ е ортонормирана база на $\mathbb{E}^2_0$. Тогава, съществува функция $\varphi(u)$, такава че

$$\begin{aligned} e_1(u) &= \cos\varphi(u)\, e_1^0 + \sin\varphi(u)\, e_2^0; \\ e_2(u) &= -\sin\varphi(u)\, e_1^0 + \cos\varphi(u)\, e_2^0. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Полагаме

$$\begin{aligned} z^1(u,v) &= a_1(v)\cos\varphi(u) - a_2(v)\sin\varphi(u); \\ z^2(u,v) &= a_1(v)\sin\varphi(u) + a_2(v)\cos\varphi(u) \end{aligned}$$

и от равенствата (3.1.12) и (3.1.13) получаваме следната локална параметризация на M^2:

$$z(u,v) = z^1(u,v)\, e_1^0 + z^2(u,v)\, e_2^0.$$

Следователно, M^2 лежи в равнината $\mathbb{E}^2_0$, т. е. M^2 локално е част от равнина. □

От Лема 3.1.4, Лема 3.1.5 и Лема 3.1.6 получаваме

Твърдение 3.1.7. *Нека M^2 е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност. M^2 локално е част от развиваема повърхнина тогава и само тогава, когато $\varkappa_1^\alpha \varkappa_2^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n-1$ за всяка ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета.*

Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_o$. Тогава, от $\nu_1\,\nu_2 \neq 0$ и първите две равенства на (3.1.3), съгласно Твърдение 3.1.7, следва, че интегралните повърхнини на геометричното 2-мерно разпределение $\Delta_0^\perp$ на M^n не са развиваеми повърхнини.

Ще докажем следната основна

Теорема 3.1.8. *Всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, която не е развиваема повърхнина, поражда полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_o$.*

Доказателство. Нека $M^2 : z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$) е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, която не е развиваема. Тъй като разглежданията ни са локални, можем да считаме, че M^2 е параметризирана спрямо главни направления, т. е. $\xi_1 = \dfrac{z_u}{\sqrt{z_u^2}}$ и $\xi_2 = \dfrac{z_v}{\sqrt{z_v^2}}$. Понеже M^2 не е развиваема повърхнина, то съществува ортонормирана база от паралелни нормални векторни полета $\{b_1(u,v), \dots, b_{n-2}(u,v), N(u,v)\}$, дефинирана в подобласт $\mathcal{D}_0 \in \mathcal{D}$, спрямо която са в сила формулите

$$\begin{aligned} \nabla'_{\xi_1} b_\alpha &= -\varkappa_1^\alpha\, \xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2} b_\alpha &= -\varkappa_2^\alpha \xi_2; \end{aligned} \qquad \alpha = 1, \dots, n-2, \qquad \begin{aligned} \nabla'_{\xi_1} N &= -\varkappa_1\, \xi_1; \\ \nabla'_{\xi_2} N &= -\varkappa_2 \xi_2, \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

където $\varkappa_1 \varkappa_2 \neq 0$.

Разглеждаме хиперповърхнина M^n в $\mathbb{E}^{n+1}$, зададена с

$$X(u,v,w^1,\dots,w^{n-2}) = z(u,v) + w^\alpha\, b_\alpha(u,v), \tag{3.1.15}$$

където $(u,v)\in\mathcal{D}_0;\ w^\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha=1,\dots,n-2$. От параметричното представяне (3.1.15) следва, че M^n се получава от 2-мерната повърхнина M^2 чрез паралелно пренасяне по $(n-2)$-мерното нормално пространство $\operatorname{span}\{b_1,\dots,b_{n-2}\}$ на M^2. Ще докажем, че M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_\mathfrak{o}$ с нормално векторно поле $N=N(u,v)$.

Означаваме $\mathbb{E}^{n-2}(u,v) = \operatorname{span}\{b_1(u,v),\dots,b_{n-2}(u,v)\},\ (u,v)\in\mathcal{D}_0$. M^n може да се разглежда като двупараметрична система от равнини с коразмерност 3:

$$M^n = \{\mathbb{E}^{n-2}(u,v)\}, (u,v)\in\mathcal{D}_0.$$

Тъй като равнините $\mathbb{E}^{n-2}(u,v)$ са ортогонални на $\operatorname{span}\{z_u,z_v,N\}$, то в сила са равенствата

$$\begin{aligned} N(X-z) &= 0;\\ z_u(X-z) &= 0;\\ z_v(X-z) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Като използваме, че $N_u, N_v\in\operatorname{span}\{z_u,z_v\}$, от (3.1.16) получаваме

$$\begin{aligned} N\,X_u &= 0;\\ N\,X_v &= 0;\\ N\,X_\alpha &= 0;\quad \alpha=1,\dots,n-2, \end{aligned}$$

т. е. паралелното нормално векторно поле $N(u,v)$ на M^2 е ортогонално на допирателното пространство $\operatorname{span}\{X_u,X_v,X_\alpha\},\ \alpha=1,\dots,n-2$ на хиперповърхнината M^n. Следователно, $N(u,v)$ е нормално векторно поле на M^n.

От (3.1.14) и (3.1.15) получаваме, че допирателните векторни полета на M^n се изразяват по следния начин:

$$\begin{aligned} X_u &= \sqrt{z_u^2}\,(1-\varkappa_1^\alpha\, w^\alpha)\ \xi_1;\\ X_v &= \sqrt{z_v^2}\,(1-\varkappa_2^\alpha\, w^\alpha)\ \xi_2;\\ X_\alpha &= b_\alpha;\quad \alpha=1,\dots,n-2. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Точките от M^n, за които $w^\alpha = \dfrac{1}{\varkappa_1^\alpha},\ \alpha=1,\dots,n-2$ или $w^\alpha=\dfrac{1}{\varkappa_2^\alpha},\ \alpha=1,\dots,n-2$ са особени точки на M^n.

От (3.1.14) намираме производните на нормалното векторно поле $N(u,v)$:

$$\begin{aligned} N_u &= -\sqrt{z_u^2}\,\varkappa_1\,\xi_1;\\ N_v &= -\sqrt{z_v^2}\,\varkappa_2\,\xi_2;\\ N_\alpha &= 0;\quad \alpha=1,\dots,n-2. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Нека A е операторът на втората фундаментална форма на M^n. Тогава, съгласно формулата на Weingarten, в сила са равенствата

$$\begin{aligned} &N_u = -A(X_u);\\ &N_v = -A(X_v);\\ &N_\alpha = -A(X_\alpha); \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Като използваме (3.1.17) и (3.1.18), получаваме, че извън особените точки на M^n, операторът A се задава с

$$\begin{aligned} &A(\xi_1) = \frac{\varkappa_1}{1 - \varkappa_1^\alpha\, w^\alpha}\,\xi_1;\\ &A(\xi_2) = \frac{\varkappa_2}{1 - \varkappa_2^\alpha\, w^\alpha}\,\xi_2;\\ &A(b_\alpha) = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Нека η_1 и η_2 са единични 1-форми, съответстващи на векторните полета ξ_1 и ξ_2. Тогава, втората фундаментална форма на M^n има вида

$$h = \nu_1 \eta_1 \otimes \eta_1 + \nu_2 \eta_2 \otimes \eta_2,$$

където

$$\nu_1 = \frac{\varkappa_1}{1 - \varkappa_1^\alpha\, w^\alpha}; \quad \nu_2 = \frac{\varkappa_2}{1 - \varkappa_2^\alpha\, w^\alpha}. \tag{3.1.19}$$

Тъй като $\varkappa_1 \varkappa_2 \neq 0$, то $\nu_1 \nu_2 \neq 0$. Следователно, M^n е полусиметрична хиперповърхнина. При това, главните направления (определени от векторните полета ξ_1 и ξ_2) на пораждащата я 2-мерна повърхнина M^2 са главни направления и на хиперповърхнината M^n. Геометричното 2-мерно разпределение $\Delta_0^\perp = \operatorname{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ на M^n е интегруемо. Следователно, M^n е от класа $\mathfrak{K}_o$. □

Твърдение 3.1.2 и Теорема 3.1.8 дават връзка между теорията на полусиметричните хиперповърхнини с интегруемо геометрично 2-мерно разпределение и теорията на 2-мерните повърхнини с плоска нормална свързаност, които не са развиваеми повърхнини. Всеки забележителен клас повърхнини с плоска нормална свързаност поражда съответен подклас на $\mathfrak{K}_o$, и обратно, всеки интересен подклас на $\mathfrak{K}_o$ съответства на специален клас повърхнини с плоска нормална свързаност.

Полусиметричните хиперповърхнини от класа $\mathfrak{K}_o$ се характеризират с $\gamma^0 = 0$. Съгласно изследванията в § 2.3, съществуват два подкласа на $\mathfrak{K}_o$:

1. $d\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)|_{\Delta_0} = 0$, при който всяко $(n-1)$-мерно инволютивно разпределение на M^n е асимптотично;

2. $d\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)|_{\Delta_0} \neq 0$, при който асимптотични разпределения на M^n са само разпределенията Δ_{ξ_1} и Δ_{ξ_2}, ортогонални съответно на главните направления ξ_1 и ξ_2.

Полусиметричните хиперповърхнини от първия подклас са планарни, а полусиметричните хиперповърхнини от втория подклас са хиперболични според терминологията в [12]. Ще намерим съответните класове 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност, които пораждат тези два подкласа на $\mathfrak{K}_0$.

Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина, породена от 2-мерна повърхнина M^2 с плоска нормална свързаност, за която са в сила равенствата (3.1.14). Тогава инвариантите ν_1 и ν_2 във втората фундаментална форма на M^n се изразяват по формули (3.1.19). Следователно,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_1\, \varkappa_2^\alpha\, w^\alpha}{\varkappa_2 - \varkappa_2\, \varkappa_1^\alpha\, w^\alpha}.$$

Тъй като $d\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)|_{\Delta_0} = 0$, тогава и само тогава, когато $\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right) = 0,\ \alpha = 1,\dots,n-2$, то от горното равенство намираме

$$d\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)|_{\Delta_0} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varkappa_1^\alpha = \varkappa_2^\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,n-2.$$

Двумерна повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^{n+1}$ с плоска нормална свързаност, за която съществува база от паралелни нормални векторни полета $b_1,\dots,b_{n-1}$, такава, че $\varkappa_1^\alpha = \varkappa_2^\alpha$, $\alpha = 1,\dots,n-2$, наричаме *почти омбилична.* С други думи, M^2 е почти омбилична, ако всеки от операторите на вторите фундаментални форми $A_{b_1},\dots,A_{b_{n-2}}$, съответстващи на $n-2$ паралелни нормални векторни полета $b_1,\dots,b_{n-2}$, има равни собствени стойности, а само за едно паралелно нормално векторно поле b_{n-1} собствените стойности на съответния му оператор $A_{b_{n-1}}$ са различни.

И така, получаваме, че планарните полусиметрични хиперповърхнини от класа $\mathfrak{K}_0$ се пораждат от почти омбилични 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност, а хиперболичните полусиметрични хиперповърхнини от класа $\mathfrak{K}_0$ се пораждат от 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност, които не са почти омбилични.

Получения резултат формулираме в

Твърдение 3.1.9. *Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_0$, породена от 2-мерна повърхнина M^2 с плоска нормална свързаност. Хиперповърхнината M^n е планарна тогава и само тогава, когато повърхнината M^2 е почти омбилична.*

Два интересни подкласа на планарните полусиметрични хиперповърхнини са полусиметричните хиперповърхнини от омбиличен тип ($\nu_1 = \nu_2$) и минималните полусиметрични хиперповърхнини от класа $\mathfrak{K}_0$ ($\nu_1 = -\nu_2$). Като използваме формулите (3.1.19) за ν_1 и ν_2, получаваме, че

$$\nu_1 - \nu_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \varkappa_1 = \varkappa_2; \\ \varkappa_1^\alpha = \varkappa_2^\alpha; \quad \alpha = 1,\dots,n-2. \end{array}$$

Следователно, M^n е полусиметрична хиперповърхнина от омбиличен тип тогава и само тогава, когато се поражда от 2-мерна повърхнина с плоска нормална свързаност, за която всеки от операторите на вторите фундаментални форми, съответстващи на паралелни нормални векторни полета, има равни собствени стойности. Такива 2-мерни повърхнини с плоска нормална свързаност наричаме повърхнини от *омбиличен тип*.

Аналогично, от (3.1.19) намираме, че

$$\nu_1 + \nu_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \varkappa_1 = -\varkappa_2; \\ \varkappa_1^\alpha = \varkappa_2^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n-2. \end{array}$$

Следователно, M^n е минимална полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_0$ тогава и само тогава, когато се поражда от почти омбилична 2-мерна повърхнина, за която $\varkappa_1 = -\varkappa_2$. Такива почти омбилични 2-мерни повърхнини наричаме почти омбилични повърхнини от *минимален тип*.

Така получаваме

Следствие 3.1.10. *Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_0$, породена от 2-мерна повърхнина M^2 с плоска нормална свързаност. M^n е от омбиличен тип тогава и само тогава, когато M^2 е от омбиличен тип.*

Следствие 3.1.11. *Нека M^n е полусиметрична хиперповърхнина от класа $\mathfrak{K}_0$, породена от 2-мерна повърхнина M^2 с плоска нормална свързаност. M^n е минимална тогава и само тогава, когато M^2 е почти омбилична от минимален тип.*

3.2 Полусиметрични хиперповърхнини в 4-мерното евклидово пространство

В настоящия параграф ще конструираме полусиметрични хиперповърхнини в 4-мерното евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ като използваме, че съгласно Теорема 2.5.1, всяка полусиметрична хиперповърхнина може да се разглежда като обвивка на двупараметрично семейство от хиперравнини.

Разглеждаме 3-мерна полусиметрична хиперповърхнина M^3 в $\mathbb{E}^4$, която е обвивка на двупараметрично семейство $\mathcal{F} = \{\mathbb{E}^3(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ $(\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2)$ от хиперравнини. Нека $l = l(u,v), (u,v) \in \mathcal{D}$ и $r = r(u,v), (u,v) \in \mathcal{D}$ са съответно векторна и скаларна функция, определящи хиперравнината $\mathbb{E}^3(u,v), (u,v) \in \mathcal{D}$. Предполагаме, че l, l_u и l_v са линейно независими. Тогава, съгласно разглежданията ни в § 2.5, M^3 се представя параметрично по следния начин:

$$X(u,v,w) = r\,l + \frac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2}\; l_u + \frac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2}\; l_v + w\,b; \quad (u,v) \in \mathcal{D},\ w \in \mathbb{R}, \tag{3.2.1}$$

където $b = b(u,v)$ е единично векторно поле, ортогонално на $\operatorname{span}\{l, l_u, l_v\}$. M^3 е развиваема 2-параметрична система $M^3 = \{\mathbb{E}^1(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от прави $\mathbb{E}^1(u,v) = \operatorname{span}\{b(u,v)\}$.

За l_{uu}, l_{uv} и l_{vv} са в сила равенствата (2.5.3), където вместо $c^{\alpha}_{ij}\, b_{\alpha},\ i,j = 1,2,\ \alpha = 1,\dots,n-2$ имаме $c_{ij}\, b,\ i,j = 1,2$, а функциите $c_{ij}(u,v),\ i,j = 1,2$ се задават с

$$c_{11} = g(l_{uu}, b); \qquad c_{12} = g(l_{uv}, b); \qquad c_{22} = g(l_{vv}, b).$$

Тогава производните от първи ред на векторното поле $b(u,v)$ се разлагат по следния начин:

$$\begin{aligned} b_u &= -\frac{c_{11}G - c_{12}F}{W^2}\, l_u - \frac{c_{12}E - c_{11}F}{W^2}\, l_v; \\ b_v &= -\frac{c_{12}G - c_{22}F}{W^2}\, l_u - \frac{c_{22}E - c_{12}F}{W^2}\, l_v. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Допирателното пространство към M^3 в точка p с радиус-вектор $X = X(u,v,w)$ е $\operatorname{span}\{X_u, X_v, X_w\}$. Допирателните векторни полета на M^3 се представят във вида:

$$\begin{aligned} X_u &= -a_{11}\, l_u - a_{12}\, l_v + p\, b; \\ X_v &= -a_{21}\, l_u - a_{22}\, l_v + q\, b; \\ X_w &= b, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

като за функциите $a_{ij} = a_{ij}(u,v,w),\ i,j = 1,2$ са в сила равенствата от страница 75, където вместо $w^{\alpha}\, c^{\alpha}_{ij},\ i,j = 1,2,\ \alpha = 1,\dots,n-2$ имаме $w\, c_{ij},\ i,j = 1,2$, а p и q са следните функции:

$$\begin{aligned} p &= c_{11}\, \frac{G\, r_u - F\, r_v}{W^2} + c_{12}\, \frac{E\, r_v - F\, r_u}{W^2}; \\ q &= c_{12}\, \frac{G\, r_u - F\, r_v}{W^2} + c_{22}\, \frac{E\, r_v - F\, r_u}{W^2}. \end{aligned}$$

От равенства (3.2.2) следва, че $b(u,v) = b_0 = const$, тогава и само тогава, когато $c_{ij}(u,v) = 0,\ i,j = 1,2$.

Нека $b(u,v) = b_0,\ (u,v) \in \mathcal{D}$, т. е. $c_{ij}(u,v) = 0,\ i,j = 1,2$. Тогава, $p = 0$, $q = 0$ и допирателното пространство към M^3 се определя от

$$\begin{aligned} X_u &= -a_{11}\, l_u - a_{12}\, l_v; \\ X_v &= -a_{21}\, l_u - a_{22}\, l_v; \\ X_w &= b, \end{aligned}$$

където $a_{ij} = a_{ij}(u,v),\ i,j = 1,2$. Ако $\det a_{ij} = 0$ за всички стойностти на $(u,v) \in \mathcal{D}$, то векторните полета X_u и X_v са линейно зависими и следователно, M^3 се състои само от особени точки. Затова считаме, че съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, такава че $(\det a_{ij})_{|\mathcal{D}_0} \neq 0$. Тогава, $M^3{}_{|\mathcal{D}_0}$ е регулярна хиперповърхнина с параметрично представяне

$$X(u,v,w) = z^r(u,v) + w\, b_0,$$

където $z^r(u,v) = r\,l + \dfrac{G\,r_u - F\,r_v}{W^2}\,l_u + \dfrac{E\,r_v - F\,r_u}{W^2}\,l_v$. Следователно, $M^3{}_{|\mathcal{D}_0}$ е цилиндрична хиперповърхнина с управителна повърхнина $M_r^2 : z^r = z^r(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$ и образуващи, успоредни на b_0.

Разглеждаме нецилиндричния случай, т. е. $(b_u, b_v) \neq (0,0)$ в подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Следователно, съществуват индекси $i, j \in \{1,2\}$, такива, че $c_{ij} \neq 0$. Тогава, $a_{ij} = a_{ij}(u,v,w)$, при това a_{ij} е линейна функция по отношение на w.

От (3.2.3) следва, че векторните полета X_u, X_v, X_w са линейно независими, тогава и само тогава, когато $\det a_{ij} \neq 0$.

При фиксирана стойност на $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ е в сила една от следните възможности:

1. $\det a_{ij}(u,v,w) \neq 0$ за всички стойности на $w \in \mathbb{R}$, т. е. не съществуват особени точки върху образуващата $\mathbb{E}^1(u,v)$ на M^3.

2. Съществува $w_0 \in \mathbb{R}$, така че $\det a_{ij}(u,v,w_0) = 0$, т. е. върху образуващата $\mathbb{E}^1(u,v)$ има особена точка, която се определя от $z^r(u,v) + w_0\,b(u,v)$. Тъй като функцията $\det a_{ij}(u,v,w)$ е квадратна функция по отношение на w, то върху правата $\mathbb{E}^1(u,v)$ има една или две особени точки.

Разглеждаме онези полусиметрични хиперповърхнини в $\mathbb{E}^4$, за които в околност $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ върху всяка образуваща $\mathbb{E}^1(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$ има особена точка.

Нека M^3 е полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$ с параметрично представяне (3.2.1) и върху всяка образуваща $\mathbb{E}^1(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$ ($\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$) има особена точка, определена от $w_0 = f(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$, където $f(u,v)$ удовлетворява

$$\det a_{ij}(u,v,f(u,v)) = 0. \tag{3.2.4}$$

Разглеждаме 2-параметричната съвкупност M_0 от особени точки, която се представя параметрично с

$$Z(u,v) = z^r(u,v) + f(u,v)\,b(u,v), \quad (u,v) \in \mathcal{D}_0. \tag{3.2.5}$$

Двупараметричната съвкупност от точки, зададена с (3.2.5) може да се състои от една точка (ако $Z_u = 0,\ Z_v = 0$), може да бъде крива (ако Z_u и Z_v са линейно зависими) или 2-мерна повърхнина (ако Z_u и Z_v са линейно независими).

Ако M_0 се състои само от една точка z_0, то за всяка стойност на $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ правата $\mathbb{E}^1(u,v)$ минава през точката z_0. Тогава, M^3 може да се параметризира по следния начин:

$$X(u,v,w) = z_0 + w\,b(u,v),$$

откъдето следва, че M^3 е конична хиперповърхнина с връх z_0.

Ако M_0 е крива $\boldsymbol{c}$, то за всяка стойност на $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ образуващата $\mathbb{E}^1(u,v)$ минава през точка от кривата $\boldsymbol{c}$. Тогава, M^3 може да се параметризира с

$$X(u,v,w) = z(v) + w\,b(u,v),$$

където $\boldsymbol{c} : z = z(v)$ е кривата, образувана от особените точки на M^3. Следователно, M^3 е 1-параметрична система от конични 2-мерни повърхнини, чиито върхове описват кривата $\boldsymbol{c}$.

Разглеждаме общия случай, при който 2-параметричната съвкупност от особени точки, зададена с (3.2.5), е 2-мерна повърхнина M_0^2. Допирателното пространство към повърхнината M_0^2 е $\operatorname{span}\{Z_u, Z_v\}$. Тъй като функцията $f(u,v)$ удовлетворява равенство (3.2.4), то векторните полета $Z_{u|\operatorname{span}\{l_u,l_v\}}$ и $Z_{v|\operatorname{span}\{l_u,l_v\}}$ са линейно зависими. Следователно, съществува единично векторно поле $n(u,v) \in \operatorname{span}\{l_u, l_v\}$, такова, че допирателните векторни полета Z_u и Z_v на M_0^2 се записват във вида:

$$Z_u = p_0\, n + (p + f_u)\, b;$$
$$Z_v = q_0\, n + (q + f_v)\, b,$$

където p_0 и q_0 са функции на (u,v), които се изразяват чрез $l(u,v)$, $r(u,v)$ и техните производни. Тогава, допирателното пространство към M_0^2 е $\operatorname{span}\{Z_u, Z_v\} = \operatorname{span}\{n, b\}$, откъдето следва, че образуващите $\mathbb{E}^1(u,v) = \operatorname{span}\{b(u,v)\}$ на хиперповърхнината M^3 са тангенти към 2-мерната повърхнина M_0^2. Следователно, полусиметричната хиперповърхнина M^3 може да се разглежда като 2-параметрична система от тангенти към повърхнината M_0^2 от особени точки.

Нека $n^\perp(u,v)$ е единично векторно поле, ортогонално на $n(u,v)$ и такова, че $\operatorname{span}\{n, n^\perp\} = \operatorname{span}\{l_u, l_v\}$. Допирателното пространство към повърхнината M_0^2 е $\operatorname{span}\{n, b\}$. Следователно, нормалното пространство на M_0^2 е $\operatorname{span}\{n^\perp, l\}$. Тъй като $b_u, b_v \in \operatorname{span}\{l_u, l_v\}$, то b_u и b_v се разлагат във вида

$$b_u = \beta_1\, n + \gamma_1\, n^\perp;$$
$$b_v = \beta_2\, n + \gamma_2\, n^\perp, \tag{3.2.6}$$

където β_1, β_2, γ_1 и γ_2 са функции на (u,v).

Векторното поле $b = b(u,v)$ е допирателно векторно поле за повърхнината M_0^2; $\beta_1\, n$ и $\beta_2\, n$ са допирателните компоненти съответно на b_u и b_v, а $\gamma_1\, n^\perp$ и $\gamma_2\, n^\perp$ са нормалните компоненти съответно на b_u и b_v. От равенства (3.2.6) следва, че нормалните компоненти на b_u и b_v са колинеарни.

Ще дефинираме понятието тангента от асимптотичен тип за произволна 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$.

Нека $M^2 : z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}\ (\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2)$ е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$. Означаваме с $\widetilde{\nabla}$ индуцираната свързаност върху M^2, а със σ - втория фундаментален тензор на M^2. Ако $b = b(u,v)$ е произволно допирателно векторно поле на M^2, то според формулата на Gauss, в сила са равенствата

$$\nabla'_{z_u} b = \widetilde{\nabla}_{z_u} b + \sigma(z_u, b);$$
$$\nabla'_{z_v} b = \widetilde{\nabla}_{z_v} b + \sigma(z_v, b).$$

Една тангента на M^2, определена от допирателно векторно поле b, наричаме *тангента от асимптотичен тип*, ако $\sigma(z_u, b)$ и $\sigma(z_v, b)$ са колинеарни (линейно зависими).

Очевидно е, че дадената дефиниция не зависи от избора на допирателното векторно поле, определящо тангентата.

Използвайки така въведеното понятие, от горните разглеждания получаваме

Твърдение 3.2.1. *Нека M^3 е полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$ с 2-мерна повърхнина M_0^2 от особени точки. Тогава образуващите на M^3 са тангенти от асимптотичен тип на M_0^2.*

Ще докажем, че е в сила и обратното, а именно: всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$, която допуска тангенти от асимптотичен тип, поражда полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$.

Нека $M^2 : z = z(u,v), \ (u,v) \in \mathcal{D} \ (\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2)$ е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$ с втори фундаментален тензор σ. Допирателното пространство към M^2 е $\operatorname{span}\{z_u, z_v\}$. Нека e_1 и e_2 са две взаимно ортогонални единични нормални векторни полета на M^2. Спрямо базата $\{z_u, z_v, e_1, e_2\}$ производните от втори ред на $z(u,v)$ се разлагат във вида:

$$\begin{aligned}
z_{uu} &= \Gamma_{11}^1\, z_u + \Gamma_{11}^2\, z_v + c_{11}^1\, e_1 + c_{11}^2\, e_2;\\
z_{uv} &= \Gamma_{12}^1\, z_u + \Gamma_{12}^2\, z_v + c_{12}^1\, e_1 + c_{12}^2\, e_2;\\
z_{vv} &= \Gamma_{22}^1\, z_u + \Gamma_{22}^2\, z_v + c_{22}^1\, e_1 + c_{22}^2\, e_2,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

където Γ_{ij}^k и c_{ij}^k, $i,j,k = 1,2$ са функции върху M^2.

Въвеждаме следните означения:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

Произволно допирателно векторно поле $b = b(u,v)$ на M^2 се записва във вида $b = \lambda\, z_u + \mu\, z_v$, където λ и μ са функции върху M^2.

В сила е

Лема 3.2.2. *Допирателното векторно поле $b = \lambda\, z_u + \mu\, z_v$ на M^2 определя тангента от асимптотичен тип, тогава и само тогава, когато функциите λ и μ удовлетворяват*

$$\Delta_1 \lambda^2 + \Delta_2 \lambda\, \mu + \Delta_3 \mu^2 = 0.$$

Доказателство. Нека $b = \lambda\, z_u + \mu\, z_v$. От равенства (3.2.7) получаваме

$$\begin{aligned}
\sigma(b, z_u) &= (\lambda\, c_{11}^1 + \mu\, c_{12}^1)\, e_1 + (\lambda\, c_{11}^2 + \mu\, c_{12}^2)\, e_2;\\
\sigma(b, z_v) &= (\lambda\, c_{12}^1 + \mu\, c_{22}^1)\, e_1 + (\lambda\, c_{12}^2 + \mu\, c_{22}^2)\, e_2.
\end{aligned}$$

Следователно, $\sigma(b, z_u)$ и $\sigma(b, z_v)$ са колинеарни, тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} \lambda\, c_{11}^1 + \mu\, c_{12}^1 & \lambda\, c_{11}^2 + \mu\, c_{12}^2 \\ \lambda\, c_{12}^1 + \mu\, c_{22}^1 & \lambda\, c_{12}^2 + \mu\, c_{22}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Последното равенство е еквивалентно на $\Delta_1 \lambda^2 + \Delta_2 \lambda\, \mu + \Delta_3 \mu^2 = 0$, с което лемата е доказана. □

Функциите $E(u,v) = g(z_u, z_u)$, $F(u,v) = g(z_u, z_v)$ и $G(u,v) = g(z_v, z_v)$ определят първата фундаментална форма на повърхнината M^2. Означаваме

$$L(u,v) = \frac{2\Delta_1}{W}; \quad M(u,v) = \frac{\Delta_2}{W}; \quad N(u,v) = \frac{2\Delta_3}{W},$$

където $W = \sqrt{E\,G - F^2}$.

Лема 3.2.3. *Функцията* $K = \dfrac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2}$ *е инварианта на повърхнината* M^2.

Доказателство. Нека

$$\begin{aligned} u &= u(\overline{u}, \overline{v}); \\ v &= v(\overline{u}, \overline{v}), \end{aligned} \qquad (\overline{u}, \overline{v}) \in \overline{\mathcal{D}},\ \overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$$

е гладка смяна на параметрите на M^2. Означаваме $J = u_{\overline{u}}\, v_{\overline{v}} - u_{\overline{v}}\, v_{\overline{u}}$ ($J \neq 0$). Ако $\overline{E} = g(z_{\overline{u}}, z_{\overline{u}})$, $\overline{F} = g(z_{\overline{u}}, z_{\overline{v}})$ и $\overline{G} = g(z_{\overline{v}}, z_{\overline{v}})$ са коефициентите на първата фундаментална форма на M^2 спрямо параметрите $\overline{u}, \overline{v}$, то от равенствата

$$\begin{aligned} z_{\overline{u}} &= z_u\, u_{\overline{u}} + z_v\, v_{\overline{u}}; \\ z_{\overline{v}} &= z_u\, u_{\overline{v}} + z_v\, v_{\overline{v}}, \end{aligned}$$

намираме $\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = J^2(E\,G - F^2)$. Нека

$$\begin{aligned} \sigma(z_{\overline{u}}, z_{\overline{u}}) &= \overline{c}_{11}^1\, e_1 + \overline{c}_{11}^2\, e_2; \\ \sigma(z_{\overline{u}}, z_{\overline{v}}) &= \overline{c}_{12}^1\, e_1 + \overline{c}_{12}^2\, e_2; \\ \sigma(z_{\overline{v}}, z_{\overline{v}}) &= \overline{c}_{22}^1\, e_1 + \overline{c}_{22}^2\, e_2. \end{aligned}$$

Лесно се проверява, че функциите $\overline{c}_{ij}^k$ и c_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ са свързани по следния начин:

$$\begin{aligned} \overline{c}_{11}^k &= u_{\overline{u}}^2\, c_{11}^k + 2u_{\overline{u}}\, v_{\overline{u}}\, c_{12}^k + v_{\overline{u}}^2\, c_{22}^k; \\ \overline{c}_{12}^k &= u_{\overline{u}}\, u_{\overline{v}}\, c_{11}^k + (u_{\overline{u}}\, v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}\, v_{\overline{u}})\, c_{12}^k + v_{\overline{u}}\, v_{\overline{v}}\, c_{22}^k; \qquad k = 1, 2. \\ \overline{c}_{22}^k &= u_{\overline{v}}^2\, c_{11}^k + 2u_{\overline{v}}\, v_{\overline{v}}\, c_{12}^k + v_{\overline{v}}^2\, c_{22}^k; \end{aligned}$$

Тогава от горните равенства получаваме, че връзката между функциите $\overline{\Delta}_i$ и Δ_i, $i = 1, 2, 3$ е

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_1 &= J\left(u_{\overline{u}}^2\, \Delta_1 + u_{\overline{u}}\, v_{\overline{u}}\, \Delta_2 + v_{\overline{u}}^2\, \Delta_3\right); \\ \overline{\Delta}_2 &= J\left(2u_{\overline{u}}\, u_{\overline{v}}\, \Delta_1 + (u_{\overline{u}}\, v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}\, v_{\overline{u}})\, \Delta_2 + 2v_{\overline{u}}\, v_{\overline{v}}\, \Delta_3\right); \\ \overline{\Delta}_3 &= J\left(u_{\overline{v}}^2\, \Delta_1 + u_{\overline{v}}\, v_{\overline{v}}\, \Delta_2 + v_{\overline{v}}^2\, \Delta_3\right). \end{aligned}$$

След пресмятане получаваме, че $\dfrac{\overline{L}\,\overline{N} - \overline{M}^2}{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2} = \dfrac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2}$. Следователно, функцията K е инвариантна при смяна на параметризацията на M^2.

Лесно се проверява също, че при смяна на базата $\{e_1, e_2\}$ на нормалното пространство на M^2 с друга ортонормирана база $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2\}$, такава, че

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos\theta\,\widetilde{e}_1 + \sin\theta\,\widetilde{e}_2; \\ e_2 &= -\sin\theta\,\widetilde{e}_1 + \cos\theta\,\widetilde{e}_2; \end{aligned} \qquad \theta = \angle(\widetilde{e}_1, e_1),$$

връзката между съответните функции c_{ij}^k и $\widetilde{c}_{ij}^k$, $i, j, k = 1, 2$ се дава с равенствата

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{ij}^1 &= \cos\theta\, c_{ij}^1 - \sin\theta\, c_{ij}^2; \\ \widetilde{c}_{ij}^2 &= \sin\theta\, c_{ij}^1 + \cos\theta\, c_{ij}^2; \end{aligned} \qquad i, j = 1, 2.$$

Тогава, $\widetilde{\Delta}_i = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$, откъдето следва, че функцията K не зависи от избора на база на нормалното пространство на M^2.

Следователно, K е инварианта на повърхнината M^2. $\square$

От Лема 3.2.2 следва, че допирателното векторно поле $b = \lambda\, z_u + \mu\, z_v$ на M^2 определя тангента от асимптотичен тип, тогава и само тогава, когато функциите λ и μ удовлетворяват $L\lambda^2 + 2M\lambda\,\mu + N\mu^2 = 0$. Следователно, в сила е следното

Твърдение 3.2.4. *Една 2-мерна повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^4$ допуска тангенти от асимптотичен тип тогава и само тогава, когато $K \leq 0$.*

Ще дадем начин за конструиране на полусиметрични хиперповърхнини в $\mathbb{E}^4$ чрез 2-мерни повърхнини с неположителна инварианта K като докажем следната основна теорема:

Теорема 3.2.5. *Всяка 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$, за която $K \leq 0$, поражда полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$.*

Доказателство. Нека $M^2 : z = z(u, v),\ (u, v) \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$) е 2-мерна повърхнина в $\mathbb{E}^4$, за която $K \leq 0$. Според Твърдение 3.2.4 M^2 допуска тангенти от асимптотичен тип. Нека $b(u, v) = \lambda\, z_u + \mu\, z_v$ е допирателно векторно поле на M^2, което определя тангента от асимптотичен тип. Тогава, $\sigma(z_u, b)$ и $\sigma(z_v, b)$ са колинеарни. Следователно, b_u и b_v се разлагат във вида

$$\begin{aligned} b_u &= a_{11}\, z_u + a_{12}\, z_v + p\, e; \\ b_v &= a_{21}\, z_u + a_{22}\, z_v + q\, e, \end{aligned}$$

където $e = e(u, v)$ е единично нормално векторно поле на M^2, а p, q, a_{ij}, $i, j = 1, 2$ са функции върху M^2. Нека $e^\perp(u, v)$ е единично нормално векторно поле на M^2, ортогонално на $e(u, v)$.

Разглеждаме хиперповърхнината M^3 в $\mathbb{E}^4$, дефинирана с равенството

$$X(u, v, w) = z(u, v) + w\, b(u, v); \quad (u, v) \in \mathcal{D},\ w \in \mathbb{R}.$$

M^3 е 2-параметрична система от прави $\mathbb{E}^1(u,v) = \mathrm{span}\{b(u,v)\}$, които са тангенти от асимптотичен тип за повърхнината M^2. Допирателните векторни полета на M^3 са

$$\begin{aligned}
X_u &= (1 + w\,a_{11})\,z_u + w\,a_{12}\,z_v + w\,p\,e;\\
X_v &= w\,a_{21}\,z_u + (1 + w\,a_{22})\,z_v + w\,q\,e;\\
X_w &= \lambda\,z_u + \mu\,z_v.
\end{aligned}$$

Тъй като векторното поле $e^{\perp}(u,v)$ е ортогонално на $\mathrm{span}\{X_u, X_v, X_w\}$, то $e^{\perp}(u,v)$ е нормално векторно поле за хиперповърхнината M^3. Освен това, векторното поле $e^{\perp}(u,v)$ е постоянно в точките на произволна фиксирана образуваща $\mathbb{E}^1(u,v)$ на M^3. Следователно, M^3 е развиваема 2-параметрична система $M^3 = \{\mathbb{E}^1(u,v)\}, (u,v) \in \mathcal{D}$ от прави, т. е. M^3 е полусиметрична хиперповърхнина. $\square$

Забележка. Ако $L = M = N = 0$, то всяка права върху M^2 е тангента от асимптотичен тип и следователно, всяко семейство от прави върху M^2 поражда полусиметрична хиперповърхнина. Ако $K = 0$ и $(L, M, N) \neq (0, 0, 0)$, то съществува едно семейство тангенти от асимптотичен тип върху M^2 и M^2 поражда една полусиметрична хиперповърхнина. Ако $K < 0$, то върху M^2 съществуват две семейства тангенти от асимптотичен тип и M^2 поражда две полусиметрични хиперповърхнини.

Със следващия пример даваме геометрична конструкция на клас полусиметрични хиперповърхнини.

Пример. Нека $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ е стандартната база на 4-мерното евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, а $\boldsymbol{c} : \widetilde{z} = \widetilde{z}(u),\ u \in J\ (J \subset \mathbb{R})$ е гладка крива в 3-мерното подпространство $\mathbb{E}^3 = \mathrm{span}\{l_1, l_2, l_3\}$ на $\mathbb{E}^4$, зададена параметрично с

$$\widetilde{z}(u) = (x(u), y(u), r(u))\,; \quad u \in J.$$

Считаме, че u е естествен параметър на кривата $\boldsymbol{c}$, т. е. $(x')^2 + (y')^2 + (r')^2 = 1$ и че $r(u) > 0,\ u \in J$. Кривината на $\boldsymbol{c}$ е $\varkappa = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (r'')^2}$. Разглеждаме 2-мерната повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^4$ с параметрично представяне

$$z(u,v) = (x(u), y(u), r(u)\cos v, r(u)\sin v)\,; \quad u \in J,\ v \in [0; 2\pi]. \tag{3.2.8}$$

M^2 е ротационна повърхнина, получена от кривата $\boldsymbol{c}$ при ротацията ѝ около 2-мерната ос $\mathbb{E}^2 = \mathrm{span}\{l_1, l_2\}$. Ще докажем, че M^2 има неположителна инварианта K.

Допирателното пространство на M^2 се определя от векторите

$$\begin{aligned}
z_u &= (x'(u), y'(u), r'(u)\cos v, r'(u)\sin v)\,;\\
z_v &= (0, 0, -r(u)\sin v, r(u)\cos v)\,.
\end{aligned}$$

Следователно, коефициентите на първата фундаментална форма на M^2 са:

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = r^2(u),$$

откъдето намираме $W = r(u)$.

За производните от втори ред на векторната функция $z(u,v)$ получаваме

$$\begin{aligned} z_{uu} &= (x''(u), y''(u), r''(u)\cos v, r''(u)\sin v)\,; \\ z_{uv} &= (0, 0, -r'(u)\sin v, r'(u)\cos v)\,; \\ z_{vv} &= (0, 0, -r(u)\cos v, -r(u)\sin v)\,. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Избираме ортонормирана база $\{e_1, e_2\}$ на нормалното пространство на M^2 по следния начин:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\varkappa}\,(x'', y'', r''\cos v, r''\sin v); \\ e_2 &= \frac{1}{\varkappa}\,(y'r'' - r'y'', x''r' - x'r'', (x'y'' - x''y')\cos v, (x'y'' - x''y')\sin v). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

От (3.2.9) и (3.2.10) пресмятаме функциите $c_{ij}^k,\ i, j, k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= g(z_{uu}, e_1) = \varkappa; & c_{11}^2 &= g(z_{uu}, e_2) = 0; \\ c_{12}^1 &= g(z_{uv}, e_1) = 0; & c_{12}^2 &= g(z_{uv}, e_2) = 0; \\ c_{22}^1 &= g(z_{vv}, e_1) = -\frac{r\,r''}{\varkappa}; & c_{22}^2 &= g(z_{vv}, e_2) = -\frac{r}{\varkappa}\,(x'y'' - x''y'), \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\Delta_1 = 0; \qquad \Delta_2 = -r\,(x'y'' - x''y'); \qquad \Delta_3 = 0.$$

Следователно,

$$L = 0; \qquad M = -(x'y'' - x''y'); \qquad N = 0.$$

Тогава инвариантата K на M^2 е

$$K = -\frac{(x'y'' - x''y')^2}{r^2}.$$

И така, за инвариантата K на ротационната повърхнина M^2, зададена параметрично с (3.2.8), получаваме

$$K \leq 0.$$

При $x'y'' - x''y' = 0$ всяка права върху M^2 е тангента от асимптотичен тип и следователно, всяко семейство от прави върху M^2 поражда полусиметрична хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$.

При $x'y'' - x''y' \neq 0$ върху M^2 съществуват две семейства тангенти от асимптотичен тип. Тъй като $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_3 = 0$, то според Лема 3.2.2 тангенти от асимптотичен тип на M^2 са тангентите, определени от допирателните вектори z_u и z_v. Следователно, по конструкцията, дадена в Теорема 3.2.5, M^2 поражда две полусиметрични хиперповърхнини в $\mathbb{E}^4$. Едната полусиметрична хиперповърхнина се задава параметрично с равенството

$$X^1(u, v, w) = z(u, v) + w z_u(u, v); \quad u \in J,\ v \in [0; 2\pi],\ w \in \mathbb{R},$$

т. е.

$$X^1(u,v,w) = (x(u) + wx'(u), y(u) + wy'(u), (r(u) + wr'(u))\cos v, (r(u) + wr'(u))\sin v)\,.$$

Другата полусиметрична хиперповърхнина има параметрично представяне

$$X^2(u,v,w) = z(u,v) + wz_v(u,v); \quad u \in J,\ v \in [0;2\pi],\ w \in \mathbb{R},$$

т. е.

$$X^2(u,v,w) = (x(u), y(u), r(u)\cos v - wr(u)\sin v, r(u)\sin v + wr(u)\cos v)\,.$$

Библиография

[1] Ганчев Г., Милушева В., *Развиваеми 2-параметрични системи от равнини с коразмерност 3 в евклидово пространство.* Научни трудове, т. **37**, серия 8, Русе (1999), 19-24.

[2] Петканчин Б., *Диференциална геометрия.* София, Наука и изкуство, 1964.

[3] Постников М., *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.* Москва, Наука, 1987.

[4] Синюков Н., *Еквидистантные римановы пространства.* Научн. ежегодник Одесск. ун-та, (1957), 133-135.

[5] Синюков Н., *Об одном классе римановых пространств.* Научн. ежегодник Одесск. ун-т. Физ.-матем. фак. и Н.-и ин.-т физ. Вып. 2, Одесса (1961), 122-126.

[6] Синюков Н., *Геодезические отображения римановых пространств.* Москва, Наука, 1979.

[7] Стернберг С., *Лекции по дифференциальной геометрии.* Москва, Мир, 1970.

[8] Aumann G., *Zur Theorie verallgemeinerter torsaler Strahlflächen.* Mh. Math., **91** (1981), 171-179.

[9] Aumann G., *Die Minimalhyperregelflächen.* Mh. Math., **34** (1981), 293-304.

[10] Boeckx E., *Asymptotically foliated semi-symmetric spaces.* Boll.-Un.-Mat.-Ital.-B **9** (1995), 975-1019.

[11] Boeckx E., *New explicit examples of complete semi-symmetric hypersurfaces of hyperbolic type.* Tsukuba-J.-Math. **20** (1996), 21-32.

[12] Boeckx E., Kowalski O., Vanhecke L., *Riemannian manifolds of conullity two.* Singapore, World Scientific, 1996.

[13] Cartan E., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* 2nd ed., Paris, 1946.

[14] Chen B.-Y., *Geometry of submanifolds.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[15] Chen B.-Y., *Some results for surfaces with flat normal connection.* Atti-Accad.-Naz.-Lincei-Rend.-Cl.-Sci.-Fis.-Mat.-Natur. (8) **56** (1974), 180-188.

[16] Chern S-S., *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface.* Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 771-782.

[17] Couty R., *Sur les transformations definis par le groupe d'holonomie infinitésimale.* C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 553-555.

[18] Couty R., *Sur le transformations des variétés riemanniennes et kähleriennes.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **9** (1959), 147-248.

[19] Frank H., Giering O., *Verallgemeinerte Regelflächen.* Math. Z., **150** (1976), 261-271.

[20] Ganchev G., Mihova V., *On the Riemannian geometry of a developable hypersurface in the Euclidean space.* C. R. Acad. Bulg. Sci., **50** (1997) 1, 17-20.

[21] Ganchev G., Milousheva V., *Hypersurfaces of conullity two in Euclidean space which are one-parameter systems of torses.* In: Perspectives of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, S. Dimiev and K. Sekigawa (Eds.), World Scientific, Singapore (2001), 135-146.

[22] Ganchev G., Milousheva V., *One-parameter systems of developable surfaces of codimension two in Euclidean space.* In: Geometry, Integrability and Quantization III, I. Mladenov and G. Naber (Eds), Coral Press (2002), 328-336.

[23] Ganchev G., Milousheva V., *Foliated semi-symmetric hypersurfaces in Euclidean space with involutive geometric two-dimensional distribution.* C. R. Acad. Bulg. Sci., **59** (2006) 1, 5-10.

[24] Ganchev G., Milousheva V., *A generation of foliated semi-symmetric hypersurfaces in the four-dimensional Euclidean space.* Mathematica Balkanica.

[25] Hicks N., *Notes on differential geometry.* New York, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.

[26] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of differential geometry.* Vol I. New York, Interscience Publishers, 1963.

[27] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of differential geometry.* Vol II. New York, Interscience Publishers, 1969.

[28] Korn A., *Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen.* Schwarz-Festschr., (1914), 215-229.

[29] Kowalski O., *An explicit classification of* 3*-dimensional Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y) \cdot R = 0$. Czechoslovak-Math.-J., **46**, (1996) 3, 427-474.

[30] Lichnerowicz A., *Courbure, nombres de Betti et espaces symmetriques.* Proc. Internat. Congress Math. (Cambridge, 1950), Amer. Math. Soc., Vol. II (1952), 216-223.

[31] Lichtenstein L., *Zur Theorie der konformen Abbildung nichtanalytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete.* Bull. Acad. Sci. Cracovie, (1916), 192-217.

[32] Milousheva V., *Regular one-parameter systems of torses in Euclidean space.* Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Thirtieth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians (2001), 188-193.

[33] Milousheva V., *A characterization of developable two-dimensional surfaces in Euclidean space.* Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of Thirty Fifth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians (2006).

[34] Nomizu K., *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor.* Tôhoku Math. J., **20** (1968), 41-59.

[35] Ryan P., *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces.* Tôhoku Math. J., **21** (1969), 363-388.

[36] Sekigawa K., *Notes on some* 3- *and* 4-*dimensional Riemannian manifolds.* Kodai Math. Sem. Rep., **24** (1972), 403-409.

[37] Sekigawa K., *On some hypersurfaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. Tensor, N. S., **25** (1972), 133-136.

[38] Sekigawa K., *On some* 3-*dimensional Riemannian manifolds.* Hokkaido Math. J., **2** (1973), 259-270.

[39] Sekigawa K., *On some* 3-*dimensional complete Riemannian manifolds satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. Tôhoku Math. J., **27** (1975), 561-568.

[40] Sekigawa K., *Almost Hermitian manifolds satisfying some curvature conditions.* Kodai Math. J., **2** (1979), 384-405.

[41] Sekigawa K., Tanno S., *Sufficient conditions for a Riemannian manifold to be locally symmetric.* Pacific Math. J., **34** (1970), 157-162.

[42] Singer I., Thorpe J., *The curvature of* 4-*dimensional Einstein spaces.* Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira, (1969), 355-365.

[43] Szabo Z., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$, *I. The local version.* J. Differential Geometry, **17** (1982), 531-582.

[44] Szabo Z., *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$, *II. Global version.* Geometriae Dedicata, **19** (1985), 65-108.

[45] Szabo Z., *Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. Acta Sci. Math., **47** (1984), 321-348.

[46] Takagi H., *An example of Riemannian manifolds satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$ *but not* $\nabla R=0$. Tôhoku Math. J., **24** (1972), 105-108.

[47] Tanno S., *Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor.* Tôhoku Math. J., **21** (1969), 297-303.

[48] Tanno S., *A class of Riemannian manifolds satisfying* $R(X,Y) \cdot R = 0$. Nagoya Math. J., **42** (1971), 67-77.

[49] Tanno S., *A theorem on totally geodesic foliations and its applications.* Tensor, **24** (1972), 116-122.

[50] Tanno S., 3-*dimensional Riemannian manifolds satisfying* $R(X,Y) \cdot R = 0$. Hokkaido Math. J., **3** (1974), 256-261.

[51] Yano K., *On the torse-forming directions in Riemannian spaces.* Proc. Imp. Acad., Tokyo **20** (1944), 340-345.

Съдържание