PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ, ВЛАДИМИР Х. ХРИСТОВ

Рассматривается класс 2π-периодических функций, имеющих только разрывы первого рода. Для функций этого класса найдены достаточные условия для хаусдорфовой сходимости частичных сумм ряда Фурье $S_n(f)$ к подходяще пополненному графику функции f. Как следствие из этих результатов для непрерывных функций получены известные критерии для равномерной сходимости Салема, Дини — Липшица, Чантурии и др.

В работе получены достаточные условия для сходимости ряда Фурье в хаусдорфовой метрике для класса функций 2π-периодических и имеющих только разрывы первого рода. Как следствие из этих результатов получаются известные признаки сходимости ряда Фурье непрерывной функции Салема, Дини — Липшица, Дирихле и Чантурии. В работе получены и достаточные условия для сходимости ряда Фурье в хаусдорфовой метрике, использующие модуль немонотонности функции $\mu_f(\delta)$, наилучшее приближение $E_n^0(f)$ функции ступенчатыми и др., из которых получаются новые критерии о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной функции.

Получена оценка для уклонения ряда Фурье от дополненной по Гиббсу графики Φ_f функции f (теорема 1) и как следствие из нее получен аналог критерия Салема для сходимости ряда Фурье в метрике Хаусдорфа. Рассмотрены следующие характеристики функции f: $\nu(n; f)$, введенная З. А. Чантурием, $\varkappa(f; n)$, введенная В. А. Поповым, Φ — вариация функции Л. Юнга, модуль немонотонности $\mu_f(\delta)$ Бл. Сендова, $\gamma_1(f; \delta)$, введенная В. А. Поповым и $E_n^0(f)$ — наилучшее приближение ступенчатыми функциями. Через эти характеристики получены признаки сходимости ряда Фурье в метрике Хаусдорфа. Например:

Если $f(x)$ 2π-периодична и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(1/n)/n<\infty$ или $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^0(f)/n<\infty$, то ряд Фурье функции f стремится к дополненной по Гиббсу графике Φ_f функции f в метрике Хаусдорфа.

Как следствие получаются и критерии для сходимости ряда Фурье непрерывной функции в равномерной метрике.

1. Обозначим через $D_{2\pi}$ класс 2π-периодических функций, имеющих только разрывы первого рода и такие, что в каждой точке x выполнено $[f(x)-f(x-0)]\cdot[f(x)-f(x+0)] \leqq 0$. Для каждой функции $f \in D_{2\pi}$, имеющей бесконечное число разрывов на интервале $[0, 2\pi)$, величины ее разрывов можно поставить в убывающей последовательности, стремящейся к нулю

(1) $$H_1 \geqq H_2 \geqq H_3 \geqq \ldots \to 0.$$

Обозначим через $p\,(0 \leqq p \leqq \infty)$ число разрывов функции f на интервале $[0,\ 2\pi)$. Если $m \leqq p$, то обозначим через $0 \leqq a_{1,\,m} < a_{2,\,m} < \ldots < a_{m,\,m} < 2\pi$ точки, где функция f достигает первые m по величине разрывов, а через $\{H_{i,\,m}\}_{i=1}^{m}$ их величины. Еще положим $a_{0,\,m} = a_{m,\,m} - 2\pi$ и $a_{m+1,\,m} = a_{1,\,m} + 2\pi$.

Для любого $\delta < 0$ и $m > 0$ целое обозначаем

$$\omega_i(f;\ \delta,\ m) = \sup\{|f(x) - f(y)|\ x,\ y \in (a_{i,\,m},\ a_{i+1,\,m}),\ |x-y| < \delta\},\ i = 0, 1, 2, \ldots,\ m.$$

Введем характеристику $\omega(f;\ \delta,\ m)$, напоминающую модуля непрерывности $\omega(f;\ \delta)$ функции f:

Определение 1. *Для любой функции $f \in D_{2\pi}$, имеющей p разрывов на интервале $[0,\ 2\pi)$ и для произвольных $\delta > 0$ и $m \geqq 0$ — целое определяем:*

$$\omega(f;\ \delta,\ m) = \begin{cases} \omega(f;\ \delta,\ 0) = \omega(f;\ \delta) & \text{для } m = 0, \\ \max_{0 \leqq i \leqq m}\{\omega_i(f;\ \delta,\ m)\},\ m \leqq p & \text{для } m \geqq 1, \\ \max_{0 \leqq i \leqq p}\{\omega_i(f;\ \delta,\ p)\},\quad m > p & \text{для } m \geqq 1. \end{cases}$$

Пусть $f \in D_{2\pi}$ и имеет p-разрывов на $[0,\ 2\pi)$. Будем говорить, что неубывающая последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ исчерпывает число разрывов функции f, если $\lim_{n\to\infty}(m_n - p) \geqq 0$. Тогда верна следующая

Лемма 1. *Пусть $f \in D_{2\pi}$. Для любой последовательности $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ исчерпывающей число разрывов функции f и любой последовательности $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \ldots \to 0$ имеем $\lim_{n\to\infty}\omega(f;\ \delta_n,\ m_n) = 0$.*

Доказательство. Когда функция f имеет конечное число разрывов на $[0,\ 2\pi)$, утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $p = \infty$. Допустим противное. Тогда существуют последовательности $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_k \to 0$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $m_k \to \infty$ и $d > 0$ такие, что $\omega(f;\ \delta_k,\ m_k) > d$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$ Из определения $\omega(f;\ \delta,\ m)$ вытекает, что для любого k существует i_k $(0 \leqq i_k \leqq m_k)$ такое, что $\omega_{i_k}(f;\ \delta_k,\ m_k) > d$, $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Следовательно, существуют точки $x_k,\ y_k \in (a_{i_k,\,m_k},\ a_{i_k+1\ m_k})$, $x_k < y_k$ и $|x_k - y_k| < \delta_k$ такие, что

(2) $$|f(x_k) - f(y_k)| > d.$$

Из ограниченной последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбираем монотонно сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $x_{k_j} \to x_0$. Так как $|x_k - y_k| < \delta_k$ и $\delta_k \to 0$, то $y_{k_j} \to x_0$. Можно считать, что индексы k_j выбраны так, что обе последовательности $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ монотонны.

Имеем следующие возможности для расположения точки x_0 относительно $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$:

а. $x_{k_j}<y_{k_j}\leqq x_0$ или $x_0\leqq x_{k_j}<y_{k_j}$. Тогда из неравенств (2) следует, что в точке x_0 функция f должна иметь разрыв второго рода. Получаем противоречие с тем, что $f\in D_{2\pi}$.

б. $x_{k_j}\leqq x_0\leqq y_{k_j}$. Тогда из (1) следует, что существует N такое, что для любых $j\geqq N$ выполнено $H_{k_j}<d/2$. Очевидно, для любого фиксированного $s>N$ в интервале $(a_{i_{k_s}, m_{k_s}},\ a_{i_{k_s}+1, m_{k_s}})$ функция f не может иметь разрывы величиной больше, чем $d/2$ и для $j>s$ все точки x_{k_j}, y_{k_j} и x_0 содержатся в этом интервале. Следовательно, наша функция не может иметь в точке x_0 разрыв, величина скачка которого больше чем $d/2$. После граничного перехода в (2) получаем $f(x_0-0)-f(x_0+0)\geqq d$, что является противоречием. Лемма доказана.

Определение 2. *Для любой функции $f\in D_{2\pi}$, имеющей на интервале $[0, 2\pi)$ p разрывов $(0\leqq p\leqq\infty)$, определяем*

$$L(f;\ m)=\begin{cases} 2\pi & \text{для } m=0 \text{ и } p \text{ любое},\\ \min_{0\leqq i\leqq m} a_{i,m}-a_{i+1,m} & \text{для } 1\leqq m\leqq p,\\ \min_{0\leqq i\leqq p} a_{i,p}-a_{i+1,p} & \text{для } 1\leqq p<m,\\ 2\pi & \text{для } p=0\,. \end{cases}$$

Очевидно, для любых $\delta>0$ и $\alpha>0$ таких, что $\alpha\delta<L(f;\ m)$ выполнено

$$\omega(f;\ \alpha\delta,\ m)\leqq(1+\alpha)\,\omega(f;\ \delta,\ m). \tag{3}$$

Учитывая, что для ряда Фурье от разрывной функции наблюдается эффект Гиббса, то мы дополняем графику $\{(x,\ f(x))\}$ функции f следующим образом

Определение 3. *Для любой функции $f\in D_{2\pi}$ дополненной по Гиббсу графики Φ_f будем называть следующее множество: $\Phi_f=\{(x, y):-\infty<x<\infty,\ J(f;\ x)\leqq y\leqq S(f;\ x)\}$, где*

$$\begin{aligned} J(f;\ x)&=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}-\Gamma\left|\frac{f(x-0)-f(x+0)}{2}\right|,\\ S(f;\ x)&=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}+\Gamma\left|\frac{f(x-0)-f(x+0)}{2}\right|, \end{aligned} \tag{4}$$

а $\Gamma=2\pi^{-1}\int_0^\pi t^{-1}\sin t\,dt$ обозначает константу Гиббса.

Сейчас введем выражения $T_{n,k}(x)$ и $Q_{n,k}(x)$, которые являются обобщениями выражениям $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ введенных Салемом [2, с. 283].

Определение 4. *Для любой функции f определяем*

$$T_{n,k}(x)=\sum_{i=k}^{n}{}'\Big[f\Big(x+\frac{(i-1)\pi}{n}\Big)-f\Big(x+\frac{i\pi}{n}\Big)\Big]/i$$

для n нечетного и k нечетного,

$$T_{n,k}(x)=\sum_{i=k}^{n-1}{}' [f(x+\frac{(i-1)\pi}{n})-f(x+\frac{i\pi}{n})]/i$$

для n четного и k нечетного и $T_{n,k}(x)=T_{n,k+1}(x)$ для четных k и любых n.

Знак Σ' означает, что i пробегает одни нечетные числа. Выражения $Q_{n,k}(x)$ получаем, заменяя везде в выражении $T_{n,k}(x)$ π на $-\pi$.

Для любой функции $f(x)\in D_{2\pi}$ обозначаем

$$f_i(a_{i,m};\ x)=\begin{cases} f(x) & \text{для}\quad x<a_{i,m}, \\ f(a_{i,m}-0) & \text{для}\quad x=a_{i,m}, \\ f(x)\pm H_{i,m} & \text{для}\quad x>a_{i,m}\quad (i=0,1,2,\ldots,m+1), \end{cases} \tag{5}$$

где знак перед $H_{i,m}$ совпадает со знаком разности $f(a_{i,m}-0)-f(a_{i,m}+0)$.

Для облегчения доказательства основной теоремы докажем следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $f\in D_{2\pi}$, $m(n)\geqq 0$ и $k(n)\geqq 0$ произвольные последовательности целых чисел такие, что $\pi k(n)/n\leqq L(f;\ m(n))/2$ и $\varepsilon(n)$ такая последовательность, что $\pi/n\leqq\varepsilon(n)\leqq L(f;\ m(n))/2$.*

а. *Если $x\in[0,\ 2\pi)$ и $|x-a_{i,m(n)}|\geqq\varepsilon(n)$ для $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m+1$, то для любого y такого, что $(x,\ y)\in\Phi_f$ выполнено неравенство*

$$|y-S_n(f;\ x)|\leqq\frac{1}{\pi}\sup_x|T_{n,k(n)}(x)|+\frac{1}{\pi}\sup_x|Q_{n,k(n)}(x)| \tag{6}$$

$$+C_1\omega(f;\ \frac{1}{n},\ m(n))\ln k(n)+C_2\frac{M}{k(n)}+C_3\frac{H_1}{n\,\varepsilon(n)}+C_4 M\,\omega_1(f;\ \frac{1}{n})$$

$$=W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \varepsilon(n)),$$

где через $S_n(f;\ x)$ обозначили n-ую парциальную сумму ряда Фурье функции $f(x)$, через $\omega_1(f;\ \delta)$ — интегральный модуль непрерывности, $M=\sup_x|f(x)|$, а $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ абсолютные константы.

б. *Если для некоторого i $x\in[0,\ 2\pi)$ и $|x-a_{i,m(n)}|\leqq\varepsilon(n)$ $(0\leqq i\leqq m(n)+1)$, то для любого y такого, что $(x,\ y)\in\Phi_{f_i}$ выполнено неравенство*

$$|y-S_n(f_i;\ x)|\leqq W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \varepsilon(n)). \tag{7}$$

Доказательство. Докажем случай а. Пусть заданы последовательности $m(n)$, $k(n)$ и $\varepsilon(n)$, удовлетворяющие условиям леммы. Фиксируем $x\in[0,\ 2\pi)$ и $n\geqq 1$. Для модуля непрерывности $\omega(f;\ (a,\ b),\ \delta)$ функции f на интервале $(a,\ b)$ справедливы следующие оценки:

$$\omega(f;\ (x-\varepsilon(n),\ x+\varepsilon(n)),\ \delta)\leqq 2\omega(f;\ \delta,\ m(n)), \tag{8}$$

так как $\varepsilon(n)\leqq L(f;\ m(n))/2$ и

$$\omega(f;\ [x-L(f;\ m(n))/2,\ x+L(f;\ m(n))/2],\ \delta) \tag{9}$$

$$\leqq 2\omega(f;\ \delta, m(n))+2H_1,$$

так как интервал $[x-L(f;\ m(n))/2,\ x+L(f;\ m(n))/2]$ может содержать только один из первых $m(n)$ по величине разрывов.

Пусть y такое, что $(x,\ y)\in\Phi_f$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad |y-S_n(f;\ x)| &\leqq |y-f(x)|+|f(x)-S_n(f;\ x)| \\
&\leqq 2(1+\Gamma)\,\omega(f;\ 1/n,\ m(n))+|f(x)-S_n(f;\ x)|.
\end{aligned}
$$

По [1] имеем

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad |S_n(f;\ x)-f(x)| &\leqq \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| \\
&+D_1 M\omega_1\left(f;\ \frac{1}{n}\right)\leqq\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\right|+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{0}\right|+D_1 M\omega_1\left(f;\ \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Обозначим $\psi_x(t)=f(x+t)-f(x)$. Будем перерабатывать первый интеграл, стоящий в правой части неравенства (11), как это делает Салем [2, с. 283]:

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad \left|\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| &= \left|\int_0^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|\leqq\left|\int_0^{\pi/n}\right|+\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\right| \\
&\leqq 2\pi(1+\pi)\,\omega\left(f;\ \frac{1}{n},\ m(n)\right)+\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|,
\end{aligned}
$$

так как $\pi/n\leqq\varepsilon(n)$ (см. (8)).

Перерабатываем интеграл в правой части (12)

$$
\begin{aligned}
J_n=\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| &\leqq \left|\sum_{i=1}^{n-1}\int_{i\pi/n}^{(i+1)\pi/n}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| \\
&\leqq\left|\sum_{i=0}^{n-2}\int_{\pi/n}^{2\pi/n}\psi_x\left(t+\frac{i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i\sin nt}{t+i\pi/n}\,dt\right|.
\end{aligned}
$$

Совершая замену переменного $nt=u$, получаем

$$
J_n\leqq\left|\sum_{i=0}^{n-2}\int_{\pi}^{2\pi}\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i\sin u}{u+i\pi}\,du\right|\leqq\sup_{\pi\leqq u\leqq 2\pi}\pi\left|\sum_{i=0}^{n-2}\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i}{u+i\pi}\right|.
$$

В последней сумме имеется $n-1$ член. Если n нечетно, то мы сможем их соединить попарно. Если n четно, то мы рассматриваем сумму только до $n-3$, а последний член оцениваем через $2M\pi/n$. Дальнейшие оценки будем делать, не теряя общности для n нечетного. Итак, для $\pi\leqq u\leqq 2\pi$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n-2}\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i}{u+i\pi}\right|=\left|\sum_{i=0}^{n-2}{}'\left[\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{1}{u+i\pi}\right.\right. \\
&\left.\left.-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right]\right|\leqq\left|\sum_{i=0}^{n-2}{}'\frac{1}{u+i\pi}\left[\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right]\right|
\end{aligned}
$$

$$+\left|\sum_{i=0}^{n-2}\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{u+i\pi}-\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right)\right|,$$

где знак $\sum'$ означает, что i пробегает одни четные числа.

Заметим, что $|(u+i\pi)^{-1}-(u+(i+1)\pi)^{-1}|\leqq(i+1)^{-2}$. Тогда, полагая $q(n)=[n\varepsilon(n)/\pi]-3$ и имея в виду (3), (8) и (9), получаем

$$(13)\quad \left|\sum_{i=0}^{n-2}{}'\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{u+i\pi}-\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right)\right|\leqq\sum_{i=0}^{n-2}\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$\leqq\sum_{i=0}^{q(n)-1}+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}+\sum_{i=k(n)-2}^{n-2}\leqq\sum_{i=0}^{q(n)-1}2\omega(f;\ (i+3)\pi/n,\ m(n))\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}\left[2\omega\left(f;\ \frac{(i+3)\pi}{n},\ m(n)\right)-2H_1\right]\frac{1}{(i+1)^2}+2M\sum_{i=k(n)-2}^{n-2}\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$\leqq D_2\,\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\ln k(n)+D_3H_1/n\varepsilon(n)+D_4M/k(n),$$

где D_2, D_3, D_4 — абсолютные константы.

Сделаем последнее преобразование, а именно заменим $1/(u+i\pi)$ через $1/(i+1)\pi$:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-2}{}'\left[\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{u+i\pi}\right|\leqq\sum_{i=0}^{k(n)-3}\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\right.$$

$$\left.-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\cdot\frac{1}{u+i\pi}+\left|\sum_{i=k(n)-2}^{n-2}{}'\left[\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{(i+1)\pi}\right|$$

$$+\sum_{i=k(n)-2}^{n-2}\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\cdot\left|\frac{1}{u+i\pi}-\frac{1}{(i+1)\pi}\right|=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Заметим, что в σ_2 индекс i пробегает все четные числа из интервала $[k(n)-2,\ n-2]$.

Но $|(u+i\pi)^{-1}-((i+1)\pi)^{-1}|\leqq(i+1)^{-2}$ для $\pi\leqq u\leqq2\pi$ и

$$\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|=\left|f\left(x+\frac{u+i\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|.$$

Имея снова в виду (3), (8) и (9), получаем

$$(14)\quad \sigma_1\leqq\sum_{i=0}^{q(n)-1}+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}\leqq\sum_{i=0}^{q(n)-1}2\omega\left(f;\ \frac{\pi}{n},\ m(n)\right)\frac{1}{(i+1)\pi}$$

$$+\frac{2H_1}{q(n)}+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}2\omega\left(f;\ \frac{\pi}{n},\ m(n)\right)\frac{1}{\pi(i+1)}$$

$$\leqq D_5\,\omega\left(f;\ \frac{1}{n},\ m(n)\right)\ln k(n)+D_6H_1/n\varepsilon(n),$$

$$\sigma_3 \leqq \sum_{i=k(n)-2}^{n-2} \left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right| \cdot \frac{1}{(i+1)^2} \leqq D_7 \frac{M}{k(n)}, \tag{15}$$

$$\sigma_2 \leqq |T_{n,\,k(n)}(x+\pi/n)| + D_8 M/k(n). \tag{16}$$

Из оценок (12)—(16) получаем

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| \leqq \frac{1}{\pi}\sup_x |T_{n,\,k(n)}(x)| \tag{17}$$

$$+D_9\,\omega\left(f;\ \frac{1}{n},\ m(n)\right)\ln k(n)+D_{10}M/k(n)+D_{11}H_1/n\,\varepsilon(n).$$

Аналогично оценивается и $|1/\pi\int_{-\pi}^0 \psi_x(t)(\sin nt)/t\,dt|$ с той только разницей, что в оценке (17) вместо $\sup_x |T_{n,\,k(n)}(x)|$ будет участвовать $\sup_x |Q_{n,k(n)}(x)|$.

Имея в виду (10) и (11), получается утверждение а леммы.

Утверждение б леммы доказывается аналогично.

2. В этом пункте мы припомним определение хаусдорфового расстояния и докажем наши основные утверждения.

Определение 5 [5]. *Пусть F и G две точечные совокупности на плоскости, 2π-периодические, ограниченные и замкнутые. Тогда под хаусдорфовым расстоянием между F и G с параметром α будем понимать*

$$r(F,\ G;\ \alpha)=\max\{\max_{(x,y)\in F}\ \min_{(\xi,\eta)\in G}\ \max[\frac{1}{\alpha}|x-\xi|,\ |y-\eta|],$$

$$\max_{(x,y)\in G}\ \min_{(\xi,\eta)\in F}\ \max[\frac{1}{\alpha}|x-\xi|,\ |y,\eta|]\}.$$

Если точечная совокупность F является графиком $\{(x,\ f(x))\}$ непрерывной функции $f(x)$, то под $r(f,\ G;\ \alpha)$ будем понимать $r(F,\ G;\ \alpha)$. В аналогичном смысле будем употреблять и обозначение $r(G,\ f;\ \alpha)$.

Лемма 3 (см. [5], с. 145). *Пусть F и G 2π-периодические. Если*

а) для каждой точки $A=(x,\ y)\in F$, $x\in[0,\ 2\pi)$ существует точка $B=(\xi,\ \eta)\in G$, $-\infty<\xi<\infty$ такая, что $r(A,\ B;\ \alpha)\leqq\delta$;

б) для каждой точки $A=(x,\ y)\in G$, $x\in[0,\ 2\pi)$ существует точка $B=(\xi,\ \eta)\in F$, $-\infty<\xi<\infty$ такая, что $r(A,\ B;\ \alpha)\leqq\delta$, то $r(F,\ G;\ \alpha)\leqq\delta$.

Имеет место следующее хорошо известное утверждение:

Лемма 4. *Пусть*

$$h(a;\ x)=\begin{cases}0, & a-\pi<x\leqq a,\\ H, & a<x\leqq a+\pi,\quad H>0\end{cases}$$

и $h(a;\ x)$ продолжена на $(-\infty,\ \infty)$ с периодом 2π. Тогда

$$r(\Phi_h,\ S_n(h);\ 1)\leqq CH/\sqrt{n},$$

$$|S_n(h;\ a-\pi/n)+(\Gamma-1)H/2|\leqq CH/\sqrt{n}, \tag{18}$$

$$|S_n(h;\ a+\pi/n)-(\Gamma+1)H/2|\leqq CH/\sqrt{n},$$

где C — абсолютная константа и $\Gamma=2\pi^{-1}\int_0^{\pi}t^{-1}\sin t\,dt$.

Теперь сформулируем наше основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in D_{2\pi}$ *и* $m(n)\geqq 0$, $k(n)\geqq 0$ *— две произвольные последовательности целых чисел таких, что* $k(n).\pi/n\leqq L(f;\ m(n))/2$, α *— положительное число и* $\varepsilon(n)$ *— произвольная последовательность такая, что* $\pi/n\leqq\alpha\,\varepsilon(n)\leqq L(f;\ m(n))/2$. *Тогда*

$$r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha)\leqq\max\{\varepsilon(n),\ \pi^{-1}\sup_x|T_{n,\,k(n)}(x)|+\pi^{-1}\sup_x|Q_{n,\,k(n)}(x)|$$

$$+C_1\,\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\ln k(n)+C_2\,M/k(n)+C_3\,H_1/\alpha\,n\,\varepsilon(n)$$

$$+C_4\,M\,\omega_1(f;\ 1/n)+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),m(n))+C_5\,H_1/\sqrt{n}\,\}.$$

Доказательство. Пусть $n\geqq 1$ фиксированное. Обозначим через U совокупность точек $x\in[0,\ 2\pi)$ таких, что $|x-a_{i,\,m(n)}|\geqq\alpha\varepsilon(n)$, для любого $i=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m(n)+1$, а через V совокупность точек $x\in[0,\ 2\pi)$ таких, что $|x-a_{i,\,m(n)}|\leqq\alpha\varepsilon(n)$ для некоторого i, $0\leqq i\leqq m(n)+1$. Очевидно, $U\cup V=[0,\ 2\pi)$.

Сначала для всех точек из U докажем, что выполнены условия а и б леммы 3 с $\delta=W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n))$ (см. (6)). Потом докажем то же самое и для всех точек из V с $\delta=\max\{\varepsilon(n),\ W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n))+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),m(n))+C_5\,H_1/\sqrt{n}\}$ (см. (7)). Тогда из леммы 3 будет вытекать утверждение теоремы.

Пусть $x\in U$. Тогда из леммы 2 получаем, что для каждой точки $A=(x,\ S_n(f;\ x))$ и для каждой точки $B=(x,\ y)\in\Phi_f$ имеем

$$r(A,\ B;\ \alpha)\leqq|S_n(f;\ x)-y|\leqq W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n)).$$

Здесь содержится все, что мы хотели получить для точек из U.

Пусть $x\in V$, т. е. $x\in[0,\ 2\pi)$ и $|x-a_{i,\,m(n)}|\leqq\alpha\varepsilon(n)$ для некоторого фиксированного i, $0\leqq i\leqq m(n)+1$. Не ограничивая общность доказательства, будем считать, что $f(a_{i,\,m(n)}-0)<f(a_{i,\,m(n)}+0)$.

Обозначим

$$h_i(a_{i,\,m(n)};\ t)=\begin{cases}0 & \text{для } t<a_{i,\,m(n)},\\ f(a_{i,\,m(n)})-f(a_{i,\,m(n)}-0) & \text{для } t=a_{i,\,m(n)},\\ H_{i,\,m(n)} & \text{для } t>a_{i,\,m(n)}.\end{cases}$$

Тогда $f(t)=f_i(a_{i,\,m(n)};\ t)+h_i(a_{i,\,m(n)};\ t)$ (для определения $f_i(a_{i,\,m(n)};\ t)$ см. (5)).

Если $a_{i,\,m(n)}-\alpha\varepsilon(n)\leqq t\leqq a_{i,\,m(n)}$, то по лемме 2 и лемме 4 получаем (см. также (4))

$$S_n(f;\ t)-J(f;\ a_{i,\,m(n)})=[S_n(f_i;\ t)-f_i(a_{i,\,m(n)};\ t)] \tag{19}$$

$$+[f_i(a_{i,\,m(n)};\ t)-f(a_{i,\,m(n)}-0)]+[S_n(h_i;\ t)+(\Gamma-1)\,H_{i,\,m(n)}/2]$$

$$\geqq-W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n))-\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))-C_5\,H_1/\sqrt{n}.$$

Если $a_{i,\,m(n)}\leqq t\leqq a_{i,\,m(n)}+\alpha\varepsilon(n)$, то оценка (19) получается еще проще.

Аналогично, для $a_{i,m(n)}-\alpha\varepsilon(n)\leqq t\leqq a_{i,m(n)}+\alpha\varepsilon(n)$ получается оценка сверху.

$$S(f;\ a_{i,m(n)})-S_n(f;\ t)\leqq W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n)) \tag{20}$$
$$+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))+C_5H_1/\sqrt{n}.$$

Из (19) и (20) следует, что существует точка $B=(a_{i,m(n)},\ y)\in\Phi_f$ такая, что для точки $A=(x,\ S_n(f;\ x))$ имеем

$$r(A,\ B;\ \alpha)\leqq\max\{\varepsilon(n),\ W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\alpha\varepsilon(n))+ \tag{21}$$
$$+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))+C_5H_1/\sqrt{n}\}.$$

Сейчас поменяем места $S_n(f;\ x)$ и Φ_f. Используя оценки (18), получаем, что для точек $z_1=a_{i,m(n)}-\pi/n$ и $z_2=a_{i,m(n)}+\pi/n$ выполнены следующие неравенства:

$$|S_n(f;\ z_1)-J(f;\ a_{i,m(n)})|\leqq|S_n(f_i;\ z_1)-f_i(z_1)| \tag{22}$$
$$+|f_i(z_1)-f(a_{i,m(n)}-0)|+|S_n(h_i;\ z_1)-(\Gamma-1)H_{i,m(n)}/2|\leqq W(f;n,k(n),m(n),$$
$$\alpha\varepsilon(n))+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))+C_5H_1/\sqrt{n}.$$

И аналогично

$$|S_n(f;\ z_2)-S(f;\ a_{i,m(n)})|\leqq W(f;\ n,\ k(n),m(n),\ \alpha\varepsilon(n)) \tag{23}$$
$$+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))+C_5H_1/\sqrt{n}.$$

Учитывая непрерывность $S_n(f;\ x)$, из (22) и (23) получаем, что для каждой точки $A=(x,\ y)\in\Phi_f$, $x\in V$ существует точка $B=(\xi,\ S_n(f;\ \xi))$ такая, что

$$r(A,\ B;\ \alpha)\leqq\max\{\varepsilon(n),\ W(f;\ n,\ k(n),\ m(n),\ \alpha\varepsilon(n)) \tag{24}$$
$$+\omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n))+C_5H_1/\sqrt{n}\}.$$

Из (21) и (24) следует, что для всех точек $x\in V$ выполнены условия а и б леммы 3. Этим доказательство теоремы закончено.

Как следствие из теоремы 1 получаем

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f\in D_{2\pi}$ *и* $\alpha>0$ *произвольное. Если существуют монотонно возрастающая последовательность* $m(n)\geqq 0$ *и последовательность* $\varphi(n)>0$, $\varphi(n)\to 0$ *такие, что* $L(f;\ m(n))\,n\to\infty$ *при* $n\to\infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x|T_{n,k(n)}(x)|=0 \ \text{и}\ \lim_{n\to\infty}\sup_x|Q_{n,k(n)}(x)|=0, \tag{25}$$

где

$$k(n)=\min\{[\frac{1}{2\pi}nL(f;\ m(n))],\quad[\exp\frac{\varphi(n)}{\omega(f;\ 1/n,\ m(n))}]\}, \tag{26}$$

то $\lim_{n\to\infty}r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы один разрыв, то для того, чтобы были выполнены условия (**25**), необходимо, чтобы $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда $\omega(f;\ 1/n,\ m(n)) \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $m(n)$ исчерпывает число разрывов, а, следовательно, $\omega(f;\ \delta_n,\ m(n)) \to 0$ при $n \to \infty$, если $\delta_n \to 0$ (см. лемму 1). Если $f(x)$ непрерывна и выполнены условия теоремы с $k(n)$ ограниченной, то всегда можно найти такую $\varphi(n) \to 0$, что уже $k(n) \to \infty$ и чтобы опять выполнялись условия теоремы.

Из теоремы 1 имеем следующую оценку:

$$r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha) \leqq \max\{\varepsilon(n),\ \pi^{-1}\sup_x |T_{n,\,k(n)}(x)| + \pi^{-1}\sup_x |Q_{n,\,k(n)}(x)|$$

$$+ C_1\,\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\ln k(n) + C_2 M/k(n) + C_3 H_1/\alpha\, n\, \varepsilon(n) + C_4 M\,\omega_1(f;\ 1/n)$$

$$+ \omega(f;\ \alpha\varepsilon(n),\ m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}\}.$$

Выбираем $\varepsilon(n) = L(f;\ m(n))/2\alpha$, когда число разрывов p функции f равно бесконечности, и $\varepsilon(n) = \pi/\alpha\sqrt{n}$, когда $p < \infty$. Для достаточно больших n $\varepsilon(n)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $[\alpha\, n\, \varepsilon(n)]^{-1} \to 0$.

Из (**26**) следует, что $k(n) \leqq [\exp\{\varphi(n)/\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\}]$. Следовательно, $\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\ln k(n) \leqq \varphi(n) \to 0$.

Но тогда все члены, стоящие в правой части оценки для $r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha)$, стремятся к нулю при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующий аналог теоремы Дини — Липшица [2, с. 280] для сходимости ряда Фурье от функции, принадлежащей классу $D_{2\pi}$ в метрике Хаусдорфа.

Следствие 1. *Если* $f(x) \in D_{2\pi}$ *и существует последовательность целых чисел* $m(n) \geqq 0$ *такая, что* $n L(f;\ m(n)) \to 0$ *и* $\omega(f;\ 1/n,\ m(n))\ln n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha) = 0$.

Из теоремы 2 получается и известный признак Салема [2, с. 283] для сходимости ряда Фурье непрерывной функции.

Следствие 2. *Если* f *непрерывна,* 2π*-периодична и такая, что* $\lim_{n\to\infty}\sup_x |T_{n,1}(x)| = 0$ *и* $\lim_{n\to\infty}\sup_x |Q_{n,1}(x)| = 0$, *то* $\lim_{n\to\infty}\sup_x |f(x) - S_n(f;\ x)| = 0$.

Доказательство. Если f непрерывна, то $\omega(f;\ \delta,\ m) = \omega(f;\ \delta)$ и $L(f;\ m) = 2\pi$. Выбирая $\varphi(n) = \sqrt{\omega(f;\ 1/n)}$, получаем

$$k(n) \leqq \min\{n,\ [\exp\frac{\varphi(n)}{\omega(f;\ 1/n)}]\} \leqq \exp\frac{\varphi(n)}{\omega(f;\ 1/n)}.$$

Следовательно, $\omega(f;\ 1/n)\ln k(n) \leqq \sqrt{\omega(f;1/n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны,

$$|T_{n,1}(x)| \geqq |T_{n,\,k(n)}(x)| - \sum_{i=1}^{k(n)} |f(x + i\pi/n) - f(x + (i+1)\pi/n)|/i$$

$$\geqq |T_{n,k(n)}(x)| - C\,\omega(f;\ 1/n)\ln k(n) \geqq |T_{n,\,k(n)}(x)| - C\sqrt{\omega(f;\ 1/n)}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\sup_x |T_{n,\,k(n)}(x)| = 0$.

Аналогично и $\lim_{n\to\infty}\sup_x |Q_{n,\,k(n)}(x)| = 0$.

Условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f); \alpha) = \lim_{n\to\infty} r(f; S_n(f); \alpha) = 0$.

Но для непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\sup_x |f(x)-g(x)| \leqq r(f, g; \alpha)+\omega(f; \alpha r(f, g; \alpha)) \tag{27}$$

[5, с. 146], из чего следует утверждение следствия.

3. Припомним определения характеристик функций, введенных Поповым [3] и Чантурием [4].

Определение 6. *Для любой функции $f(x)$, 2π-периодической обозначаем через $\varkappa(f; n)$ следующее выражение:*

$$\varkappa(f; n)=\sup_{0\leqq x_0\leqq x_1\leqq \ldots \leqq x_n \leqq 2\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

Очевидно $\varkappa(f; n)\leqq \varkappa(f; n+1)$ *и* $\lim_{n\to\infty}\varkappa(f; n)=\bigvee_0^{2\pi}(f)$.

Определение 7 *(модуль изменения функции $f(x)$). Для любой функции $f(x)$, 2π-периодической, модуль изменения*

$$\nu(n; f)=\sup_{\Pi}\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{2i+1})-f(x_{2i})|,$$

где Π — произвольное разбиение интервала $[0, 2\pi)$ на n непересекающихся подынтервалов (x_{2i}, x_{2i+1}), $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Нетрудно заметить, что $\varkappa(f; n)$ и $\nu(n; f)$ эквивалентны в смысле порядка роста.

В [4] Чантурия доказал, что необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ имела только разрывы первого рода, является $\nu(n; f)=o(n)$ для $n\to\infty$.

Используя теорему 2, докажем следующий критерий для сходимости ряда Фурье в метрике Хаусдорфа.

Теорема 3. *Пусть $f\in D_{2\pi}$ и $\alpha>0$. Если существует неубывающая последовательность $m(n)\geqq 0$ и последовательность таких $\varphi(n)>0$, $\varphi(n)\to 0$ для $n\to\infty$, что $L(f; m(n))n\to\infty$ при $n\to\infty$ и выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

$$\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-2}\varkappa(f; i)\to 0 \quad \text{для} \quad n\to\infty, \quad \sum_{i=k(n)}^{n} i^{-2}\nu(i; f)\to 0 \quad \textit{для} \quad n\to\infty,$$

где $k(n)=\min\{[nL(f; m(n))/\pi], [\exp\{\varphi(n)/\omega(f; 1/n, m(n)\}]\}$, *то* $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f); \alpha)=0$.

Доказательство. Пусть $x\in[0, 2\pi)$ — произвольная. Делая преобразование Абеля в выражении $|T_{n\,k(n)}(x)|$ и отбрасывая отрицательный член, получаем

$$|T_{n,k(n)}(x)| \leqq \sum_{i=k(n)}^{n} \frac{1}{i} |f(x+(i-1)\pi/n)-f(x+i\pi/n)|$$

$$\leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x+(i-1)\pi/n)-f(x+i\pi/n)| + \sum_{j=k(n)}^{n} \frac{1}{j^2} \sum_{i=1}^{j} |f(x+(i-1)\pi/n)$$

$$-f(x+i\pi/n)| \leqq \frac{1}{n}[\varkappa(f;\, n)+2M] + \sum_{j=k(n)}^{n} \frac{1}{j^2}[\varkappa(f;\, j)+2M]$$

$$\leqq \frac{1}{n}\varkappa(f;\, n)+C\frac{M}{k(n)}+\sum_{i=k(n)}^{n} \frac{1}{i^2}\varkappa(f;\, i).$$

В последних неравенствах $2M$ появляется, так как может случиться, что для некоторого i точка $2\pi \in (x+(i-1)\pi/n,\ x+i\pi/n)$. Тогда член $|f(x+(i-1)\pi/n)-f(x+i\pi/n)|$ оцениваем через $2M$.

Итак, получаем, что $\lim_{n\to\infty} \sup_x |T_{n,k(n)}(x)|=0$. Аналогично и $\lim_{n\to\infty} \sup_x |Q_{n,k(n)}(x)|=0$. Но тогда условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f,\, S_n(f);\, \alpha)=0$. Очевидно следующее

Следствие 3. *Для любой функции* $f \in D_{2\pi}$ *такой, что* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}\varkappa(f;\, i)<\infty$ *или ему эквивалентное* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}\nu(i;\, f)<\infty$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f,\, S_n(f);\, \alpha)=0$.

Аналогично тому, как из теоремы 2 получили следствие 2, можно из теоремы 3 вывести следующий известный результат Чантурии [4].

Следствие 4. *Пусть* f *непрерывна и* 2π*-периодична. Если существует* $\varphi(n)\to 0$ *такая, что или* $\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-2}\varkappa(f;\, i)\to 0$, *или* $\sum_{i=k(n)}^{n} i^{-2}\nu(i;\, f)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *где* $k(n)=[\exp\{\varphi(n)/\omega(f;\, 1/n)\}]$, *то* $\lim_{n\to\infty} \sup_x |S_n(f;\, x)-f(x)|=0$.

Сейчас сформулируем достаточное условие для сходимости ряда Фурье в метрике Хаусдорфа в терминах Ф-вариации Юнга. Сначала припомним, что если Φ строго возрастающая функция для $u \geqq 0$ и $\Phi(0)=0$, то будем говорить, что 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет ограниченную Ф-вариацию или $f(x) \in V_\Phi$, если

$$V_\Phi(f)=\sup_{-\infty<a<\infty}\ \sup_{\Pi_a} \sum_{i=1}^{n} \Phi(|f(x_i)-f(x_{i-1})|)<\infty,$$

где $\Pi_a=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=a+2\pi\}$ произвольное разбиение периода.

Заметим, что функции класса V_Φ могут иметь только разрывы первого рода.

Легко получается, что если Φ выпукла и $f \in V_\Phi$, то

$$\nu(n;\, f)=O\{n\,\Phi^{-1}(1/n)\}, \tag{28}$$

где через $\Phi^{-1}(u)$ обозначили обратную функцию функции $\Phi(u)$.

Имея в виду (28), из следствия 3 получаем

Следствие 5. *Пусть* $\Phi(u)$ *выпукла. Тогда если* $f(x)\in V_\Phi$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\Phi^{-1}(1/i)<\infty \tag{29}$$

то $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f); \alpha)=0$.

Если $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ выпуклые и взаимно дополняющиеся в смысле Юнга [2, с. 32], то условие (29) эквивалентно условию $\sum_{i=1}^{\infty}\Psi(1/i)<\infty$.

Рассмотрим еще несколько характеристик функции f и через них сформулируем достаточные условия для сходимости руда Фурье функции из класса $D_{2\pi}$ в метрике Хаусдорфа, а также для непрерывных функций в равномерной метрике.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция. Следуя Сендову [5], модуль немонотонности $\mu_f(\delta)$ функции $f(x)$ определим следующим образом:

$$\mu_f(\delta)=\frac{1}{2}\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|-|f(x_1)-f(x_2)|]\}.$$

Будем говорить, что функция f принадлежит классу локально монотонных функций, если $\lim_{\delta\to 0}\mu_f(\delta)=\mu_f(0)=0$. Легко видно, что класс локально монотонных функций совпадает с вышевведенным классом $D_{2\pi}$.

Теперь введем класс M_n частично монотонных функций порядка n.

Определение 8. *Будем говорить, что функция* $g\in D_{2\pi}$ *есть частично монотонная функция n-ого порядка, т. е.* $g\in M_n$, *если существует такое разбиение интервала* $[0, 2\pi]$ *на интервалы* $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$, $\bigcup_{k=1}^n\Delta_k=[0, 2\pi]$, *что* $g(x)$ *монотонна на каждом из них.*

Заметим, что некоторые из интервалов Δ_k могут вырождаться в одной точке и на таких интервалах будем считать, что всякая функция g монотонна. Совокупность функций, которые тождественно равны константе на интервале $[0, 2\pi]$, образуют класс частично монотонных функций нулевого парядка M_0.

Очевидно $M_k\subset M_n$ для $k<n$.

Для любой функции $f\in D_{2\pi}$ наилучшее приближение частично монотонными функциями n-ого порядка $M_n(f)$ определяем как

$$M_n(f)=\inf_{g(x)\in M_n}\sup_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)-g(x)|.$$

Аппроксимацию через частично монотонных функций рассматривал Севастьянов [6].

Для дальнейших рассуждений нам будет нужна связь между модулем изменения $\varkappa(f; n)$ функции f и ее наилучшим приближением частично монотонными.

Лемма 5. *Для любой функции* $f\in D_{2\pi}$

$$\varkappa(f; n)\leq 2\sum_{k=0}^{n-1}M_k(f). \tag{30}$$

Доказательство проведем по методу полной математической индукции.

Для $n=1$, 2 неравенство (30) очевидно.

Пусть оно верно для $\varkappa(f; n-1)$ и $\varkappa(f; n)$. Докажем справедливость (30) для $\varkappa(f; n+1)$.

Пусть $\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ — некоторая сумма для $\varkappa(f;n+1)$. Обозначим через $\Pi=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Очевидно можно считать, что $(f(x_i)-f(x_{i-1}))(f(x_{i+1})-f(x_i))<0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Пусть $x_\alpha \in \Pi$ такая, что $|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|=\min_{1\leq i\leq n+1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$.

Если $\alpha=1$ или $\alpha=n+1$, то, очевидно, $|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|\leqq 2M_n(f)$, а, следовательно,

$$\sigma_{n+1}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\alpha}}^{n+1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|$$

$$=\sigma_n+|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|\leqq\varkappa(f;\ n)+2M_n(f)\leqq 2\sum_{k=0}^{n}M_k(f),$$

т. е. получили нужное неравенство.

Если $\alpha\neq 1$ и $\alpha\neq n+1$, то, очевидно,

$$\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{\alpha-2}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(x_{\alpha+1})-f(x_{\alpha-2})|+\sum_{i=\alpha+2}^{n+1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$+2|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|\leqq\sigma_{n-1}+2|f(x_\alpha)-f(x_{\alpha-1})|$$

$$\leqq\varkappa(f;\ n-1)+2(M_{n-1}(f)+M_n(f))\leqq 2\sum_{k=0}^{n}M_k(f).$$

Лемма доказана.

Следуя [7], для каждой 2π-периодической функции $f(x)$ введем следующий модуль:

$$\nu_k(f;\ \delta)=\inf_{\varphi(x)\in V}\ \sup_{|\varphi(x+kh)-\varphi(x)|\leq\delta}|\Delta_h^k f(x)|,$$

где, как обычно, через $\Delta_h^k f(x)$ обозначили k-тую разность функции $f(x)$ с шагом h, а через V — класс функций, имеющих вариацию, непревосходящую единицы на интервале $[0, 2\pi]$.

Обозначим через $E_n^k(f)$ наилучшее приближение функции f на интервале $[0, 2\pi]$ сплайн-функциями k-той степени, имеющие $n+1$ узлов.

Тогда верны следующие оценки [8]:

$$\varkappa(f;\ n)\leqq 2\sum_{i=1}^{n}E_i^0(f), \tag{31}$$

$$\varkappa(f;\ n)\leqq\sum_{i=1}^{n}\nu_1(f;\ 1/i), \tag{32}$$

$$\varkappa(f;\ n)\leqq\varkappa(f;\ 4)+8\sum_{i=1}^{n}\mu_f(1/i).$$

Заметим, что оценки (31) и (32) следуют из (30), так как

$$M_k(f)\leqq E_{k+1}^0(f)\quad\text{и}\quad M_k(f)\leqq\nu_1(f;\ 1/(k+1))/2. \tag{33}$$

Имея в виду верхние неравенства, из следствия 3 получаем

Теорема 4. *Если для функции $f \in D_{2\pi}$ выполнено одно из следующих условий:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mu_f(1/i) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} M_i(f) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \nu_1(f;\ 1/i) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} E_i^0(f) < \infty,$$

то $\lim r(\Phi_f,\ S_n(f);\ \alpha) = 0$.

Доказательство. Оценим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varkappa(f;\ n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\varkappa(f;\quad 4) + 8 \sum_{i=1}^{n} \mu_f(1/i))$$

$$\leqq \varkappa(f;4) \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mu_f(1/i) \leqq 2\varkappa(f;\ 4) + 8 \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(1/i) \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\leqq 2\varkappa(f;\ 4) + C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mu_f(1/i) < \infty.$$

Условия следствия 3 выполнены. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f); \alpha) = 0$. Аналогично доказывается утверждение, если выполнены другие условия теоремы.

Если функция $f(x)$ непрерывна, Попов [3, 7] показал, что

$$E_n^k(f) \leqq C(k)\, \nu_{k+1}(f;\ (k+1)/n),$$

$$\nu_k(f;\ 1/n) \leqq 2^{k+1} E_n^k(f), \tag{34}$$

$$E_n^0(f) \leqq \varkappa(f;\ n)/n \leqq 6\, E_n^0(f).$$

С другой стороны,

$$M_{kn}(f) \leqq E_n^k(f). \tag{35}$$

Тогда из теоремы 4, (27), (30), (33), (34) и (35) получаем следующие достаточные условия для равномерной сходимости ряда Фурье:

Следствие 6. *Пусть f непрерывна и 2π-периодическая. Если выполнено одно из следующих условий:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \nu(n;\ f) < \infty$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varkappa(f;\ n) < \infty$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} M_n(f) < \infty$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n^k(f) < \infty$, д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \nu_k(f;\ 1/n) < \infty$, е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mu_f(1/n) < \infty$,

то $\lim_{n\to\infty} \sup_x |f(x) - S_n(f;\ x)| = 0$.

Заметим, что условие а) для равномерной сходимости ряда Фурье получено в [4], а условие в) Севастьяновым [6]. Из (33), (34) и (35) следует, что условия а) — д) эквивалентны друг другу.

Замечание. Утверждения теоремы 4 и следствия 6 можно сформулировать несколько сильнее, вводя $k(n)$, как это делается в теореме 3 и в следствии 4.

Пользуемся случаем выразить свою благодарность В. А. Попову за постановку задачи и за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hille. G. Klein. Riemann's localization theorem for Fourier series. *Duke Math. J.*, **21**, 1954, 587—591.
2. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
3. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **27**, 1974, № 5, 623—626.
4. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, № 1, 63—66.
5. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, вып. 5 (149), 1969, 141—178.
6. Е. А. Савастьянов. Равномерные приближения частично монотонным функциям и некоторые их применения к Ф-вариации и рядам Фурье. *Доклады АН СССР*, **217**, 1974, № 1, 27—30.
7. V. A. Popov. Direct and converse theorem for spline approximation with free knots. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **26**, 1973, № 10, 1297—1299.
8. P. P. Petrusev. On the rational approximation of functions with unbounded variation. *Serdica*, **2**, 1976, No. 2, 149—153.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 17. 11. 1975