PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

АППРОКСИМАЦИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

ИВАН Х. ФЕСЧИЕВ

В работе изучается аппроксимация комплекснозначиых функций интерполяционными полиномами по четному числу равноотстоящих узлов соответственно на единичной окружности и на остове бикруга. Выводятся эффективные оценки погрешности приближений в пространствах C и W. Полученные результаты прилагаются в приближенном вычислении сингулярных интегралов. Устанавливаются эффективные оценки погрешности предложенных квадратур и кубатурных формул для сингулярных интегралов.

1. Некоторые результаты об аппроксимации функций на окружности и их применение. Известно, что аппроксимация функций интерполяционными полиномами занимает существенное место в теории приближенного вычисления сингулярных интегралов и интегралов типа Коши. Ряд интерполяционных задач с указанным применением изучены В. В. Ивановым [1], Б. Г. Габдулхаевым [2—4], автором [5—7] и др. В работах [2—4] исследуется сходимость интерполяционных процессов в пространствах L_2 и C; при этом дается обоснование равномерной сходимости построенных квадратурных и кубатурных формул либо самостоятельно [2, 4], либо как следствие из сходимости в L_2 [3]. В монографии [1] рассматривается другой способ, который имеет некоторые существенные преимущества. Вводится пространство W, в котором норма сингулярного оператора равняется единице. Кроме того, из сходимости в W легко вытекает равномерная сходимость функций, сингулярный оператор которых является непрерывным. Такой же способ, при помощи пространства W, обобщенного автором для функций многих комплексных переменных, применяется и в работах [5—7]. В этом смысле настоящая работа является продолжением и уточнением наших исследований [5—7].

1. 1. Пусть в плоскости комплексного переменного дана окружность единичного радиуса γ с центром в начале координат и пусть в точках γ определена комплекснозначная функция $\varphi(t)$, $t=e^{i\theta}$. Следуя В. В. Иванову [1], построим многочлен интерполяции

$$(1)\qquad v_n(\varphi,\ t)=\sum_{k=-n}^{n-1} a_k t^k;\ \ a_k=\frac{1}{2n}\sum_{j=-n}^{n-1}\varphi(\tau_j)\,\tau_j^{-k};\ \ \tau_j=e^{i\pi j/n}.$$

Легко показать, что

$$v_n(\varphi,\ t)=\frac{1}{2n}\sum_{j=-n}^{n-1}\varphi(\tau_j)\left(\frac{t}{\tau_j}\right)^{-n}\frac{1-(t/\tau_j)^{2n}}{1-t/\tau_j};\ \ v_n(\varphi,\ \tau_j)=\varphi(\tau_j).$$

Теорема 1. *Имеют место оценки*

$$v_n(\varphi,\ t) \leqq [\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln(\frac{4}{\pi}\ n)]\max_j \varphi(\tau_j)\ , \tag{2}$$

$$v_n^{\pm}(\varphi,\ t) \leqq [\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln(\frac{4}{\pi}\ n)]\max_j \varphi(\tau_j)\ , \tag{3}$$

где $v_n^{\pm}$ *многочлены* $\sum_0^{n-1} a_k t^k$ и $-\sum_{-n}^{-1} a_k t^k$.

Такая оценка получена также в [2] другим способом.

Доказательство. Имеем, очевидно, $v_n(\varphi,t) \leqq [\max_j \varphi(\tau_j)\ G_n^*(\theta)]/2n$, где

$$G_n^*(\theta)=\sum_{j=-n}^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin[(\theta-\theta_j)/2]}\ ,\ \theta_j=\pi j/n\,.$$

Применяем схему доказательства теоремы 1 работы [8], с учетом некоторых изменений, происходящих из вида G_n^* $(0\leqq\theta\leqq\pi/2n)$

$$G_n^*=\frac{\sin n\theta}{\cos\theta/2}+\frac{\sin n\theta}{\sin\theta/2}+\sin n\theta\,[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\sin[(\theta_j-\theta)/2]}+\sum_{j=-n+1}^{-1}\frac{1}{\sin[(\theta-\theta_j)/2]}]\,.$$

В конце доказательства оценок (2) и (3) используется неравенство

$$\frac{k}{\cos\alpha}+\frac{k}{\sin\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_{2\alpha}^{\pi/2-2\alpha} d\theta/\sin\theta \leqq \frac{k}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\quad (0<\alpha\leqq\frac{\pi}{4})$$

$(k=1,\ 2)$, полагая в нем $\alpha=\pi/4n$; $n=1,\ 2,\ldots$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что предлагаемый процесс (1) не является частным случаем $(\omega=0)$ изученной в [2] интерполяции 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами по четному числу равноотстоящих узлов [9, с. 24].

Замечание 2. Для функции $\Psi(t)$, которая в узлах τ_j принимает значения

$$\Psi(\tau_j)=\begin{cases}(-1)^{j+1}\tau_j^{-1/2}, & j>0\,,\\ (-1)^j\tau_j^{-1/2}, & j\leqq 0\,,\end{cases}$$

справедливо равенство $\max_t v_n(\Psi,t)=[4+2\ln(\frac{4}{\pi}\ n)]/\pi+o(1/n)$.

Замечание 3. В пространстве $W(\gamma)$ (см. [1]) из (3) вытекает оценка

$$\|v_n(\varphi,\ t)\|_W \leqq [1+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln(\frac{4}{\pi}\ n)]\max_j|\varphi(\tau_j)|\,.$$

Замечание 4. Легко показать, что для любого многочлена вида

$$T_{n-1}(t)=\sum_{k=-n+1}^{n-1}\alpha_k t^k \tag{4}$$

имеет место тождество

(5) $$v_n(T_{n-1}, t) = T_{n-1}(t).$$

Замечание 5. Степень точности интерполяционного процесса (1) $\leqq n-1$.

Теорема 2. *Интерполяционный многочлен* (1) *аппроксимирует функцию* $\varphi(t)$ $(t \in \gamma)$ *в пространствах* $C(\gamma)$ *и* $W(\gamma)$ *с точностью*

$$\|\varphi(t) - v_n(\varphi, t)\| \leqq \left[1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right] E_{n-1}(\varphi),$$

$$\|\varphi(t) - v_n(\varphi, t)\|_W \leqq \left[2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right] \rho_{n-1}(\varphi),$$

где $E_{n-1}(\varphi)$ $(\rho_{n-1}(\varphi))$ *наилучшее приближение* φ *в* $C(\gamma)$ $(W(\gamma))$, *полиномами вида* (4).

Доказательство аналогично изложенному в [1].

Теперь укажем оценки для наилучших приближений $E_n(\varphi)$ и $\rho_n(\varphi)$.

Пусть на γ определен сингулярный интеграл (С. И.)

(6) $$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau.$$

Поскольку сопряженная функция $\tilde{\varphi} = i(S\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\exp i\theta)\,d\theta)$, то из [10] [1, с. 149—150] вытекает следующая

Лемма 1. *Для любой функции* $\varphi(t) = \varphi(\exp i\theta)$, *имеющей на* γ *непрерывную производную* $\varphi_\theta^{(r)}$ $(r \geqq 0)$ *(т. е.* $\varphi \in C^{(r)}(\gamma)$), *справедливы оценки*

(7) $$E_n(\varphi) \leqq \pi\|\varphi_\theta^{(r)}\|_C (n+1)^{-r}/2;$$

$$E_n(\varphi) < 3\,\omega(\varphi_\theta^{(r)};\ (n+1)^{-1})(n+1)^{-r} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

(8) $$E_n(S\varphi) \leqq \pi\|\varphi_\theta^{(r)}\|_C (n+1)^{-r}/2;$$

$$E_n(S\varphi) < 3\,\omega(\varphi_\theta^{(r)};\ (n+1)^{-1})(n+1)^{-r} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

где ω — *модуль непрерывности.*

Замечание 6. Оценки (8) имеют место лишь для дифференцируемых функций. В случае $r = 0$, из следствия 1 к теореме 1 С. Б. Стечкина [11] и второй оценки (7) вытекает следующий результат:

Лемма 2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\omega(\varphi;\ (n+1)^{-1}) < \infty$, *то* $S\varphi$ *является непрерывной функцией на* γ *и*

$$E_n(S\varphi) \leqq 3\,C_4\left\{\omega\left(\varphi;\ \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\left(\varphi;\ \frac{1}{\nu+1}\right)\right\},$$

где C_4 — *положительная постоянная, которая может быть оценена неравенством* [11, 12]

(9) $$0 < C_4 < 64/\pi.$$

Лемма 3. *Наилучшие приближения E_n и ρ_n связаны между собой соотношением*

$$\rho_n(\varphi) \leqq E_n(\varphi) + E_n(S\varphi). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть G_n, G_n^+ и G_n^- — множества всех полиномов соответственно видов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k; \quad T_n^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k; \quad T_n^-(t) = \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k.$$

Следуя В. В. Иванову [1], обозначим через φ^+ и φ^- предельные значения интеграла типа Коши $(2\pi i)^{-1}\int_\gamma \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau$ изнутри и извне γ. Пусть $\widetilde{T}_n^{(1)}(t)$ и $\widetilde{T}_n^{(2)}(t)$ — полиномы наилучшего равномерного приближения к функциям φ^+ и φ^-, т. е. $\inf_{T_n \in G_n} \|\varphi^+ - T_n\|_C = \|\varphi^\pm - \widetilde{T}_n^{(1),(2)}\|_C = E_n(\varphi^\pm)$ Как известно [10, с. 250], коэффициенты многочленов наилучшего приближения пропорциональны коэффициентам c_k рядов Фурье. Поэтому $\widetilde{T}_n^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\lambda}_k c_k t^k \in G_n^+$; $\widetilde{T}_n^{(2)}(t) = \sum_{k=-n}^{-1} \widetilde{\lambda}_k c_k t^k \in G_n^-$, где λ_k — вполне определенные постоянные, зависящие от n и гладкости функций $\varphi^\pm$. Следовательно, для $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}_n^{(1)} - \widetilde{T}_n^{(2)}$ будем иметь $\widetilde{T}_n^{(1)} = (\widetilde{T}_n)^+$, $\widetilde{T}_n^{(2)} = (\widetilde{T}_n)^-$. На основании этого и исходя из определения $\rho_n(\varphi)$, получаем

$$\rho_n(\varphi) = \inf_{T_n \in G_n} \|\varphi - T_n\|_W \leqq \|\varphi - \widetilde{T}_n\|_W \tag{11}$$

$$= \|\varphi^+ - \widetilde{T}_n^{(1)}\|_C + \|\varphi^- - \widetilde{T}_n^{(2)}\|_C = E_n(\varphi^+) + E_n(\varphi^-).$$

Далее, при помощи формул Сохоцкого [15] и лемм 1 и 2 из [13, с. 146], имеем

$$E_n(\varphi^\pm) \leqq \frac{1}{2} E_n(\varphi) + \frac{1}{2} E_n(S\varphi). \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекает (10).

Следует отметить, что лемма 3 является существенной, так как на ее основе и при помощи лемм 1 и 2 можно получить удобные оценки для ρ_n. В частности, спреведлива следующая

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in C^r(\gamma)$ ($H_\alpha^r(\gamma)$, т. е. $\varphi_\theta^{(r)} \in H_\alpha$; $0 < \alpha \leqq 1$). Имеют место оценки*

$$\rho_n(\varphi) \leqq \pi \|\varphi_\theta^{(r)}\|_C (n+1)^{-r} \quad (\varphi \in C^r;\ r = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

$$\rho_n(\varphi) < 6 \frac{H(\varphi_\theta^{(r)};\ \alpha)}{(n+1)^{r+\alpha}}, \quad H(f;\ \alpha) = \sup_{\theta' \neq \theta} \frac{|f(\theta') - f(\theta)|}{|\theta' - \theta|^\alpha} \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

$$\rho_n(\varphi) \leqq 3 \frac{(1 + C^*) H(\varphi;\ \alpha)}{(n+1)^\alpha}, \quad C^* \leqq \begin{cases} C_4 [1 + 2^\alpha (2^\alpha - 1)^{-1}], & 0 < \alpha < 1, \\ 2 C_4, \ \alpha = 1 & (r = 0), \end{cases} \tag{15}$$

где постоянная C_4 оценена формулой (9).

Доказательство. Оно очевидно для (13) и (14). Поэтому остановимся более подробно на случае $r=0$, т. е. на оценке (15). Поскольку $\varphi \in H_\alpha$, то $\omega(\varphi;\ 1/(n+1)) \leqq H(\varphi;\ \alpha)(n+1)^{-\alpha}$. Очевидно, лемма 2 приложима и мы будем иметь

$$(16) \qquad E_n(S\varphi) \leqq 3\,C_4\,H(\varphi;\ \alpha)\left\{\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)^\alpha}\right\}.$$

Для оценки бесконечной суммы в правой части (16) можно применить, например, лемму 1 работы [14]. Имеем

$$(17) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)^\alpha} \leqq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[2^p(n+1)+1]^\alpha} < \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

В частности, при $\alpha=1$, для этой же суммы имеем точное равенство

$$(18) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right] = \lim_{p\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{n+1+p}\left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right] = \frac{1}{n+1}.$$

Из (16)—(18), на основе леммы 3, вытекает (15).

Заметим, что в (15) неравенство для постоянной C^* в случае $\alpha<1$ — строгое. Оно обращается в равенство лишь при $\alpha=1$.

Учитывая (7)—(10) и, в частности, (13)—(15), теорема 2 может служить основой для получения ряда эффективных оценок точности приближения функции $\varphi(t)$ на γ интерполяционным многочленом (1). В качестве примера и ввиду дальнейших приложений, укажем на следующий результат:

Теорема 3. *Справедливы оценки*

$$\|\varphi(t)-v_n(\varphi,\ t)\|_W \leqq \left[2\pi+4+4\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{\|\varphi_\theta^{(r)}\|_C}{n^r};\quad (r=1,\ 2,\ldots)$$

$$\|\varphi(t)-v_n(\varphi,\ t)\|_W \leqq 6\left[2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{H(\varphi_\theta^{(r)};\ \alpha)}{n^{r+\alpha}};\quad (r=1,\ 2,\ldots)$$

$$\|\varphi(t)-v_n(\varphi,\ t)\|_W \leqq 3\left[2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{(1+C^*)\,H(\varphi;\ \alpha)}{n^\alpha};\quad (r=0),$$

где C^* оценена в (15).

Следует отметить, что интерполяционный процесс (1) сходится и в пространстве $L_2(\gamma)$. Оценка погрешности такого же вида, как и в работах [1, 2].

1. 2. Полученные нами в предыдущем пункте результаты имеют естественное применение в приближенных вычислениях СИ-ов и интегралов типа Коши. Например, для СИ (6), как обычно, положим

$$(19) \qquad S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma v_n(\varphi,\ \tau)(\tau-t)^{-1}\,d\tau + R_n(\varphi) \equiv S\,v_n(\varphi;\ t)+R_n(\varphi),$$

где $R_n(\varphi)$ — остаточный член квадратурной формулы (19). Легко показать, что Sv_n можно представить в виде

$$Sv_n(\varphi;\ \tau)=\frac{1}{n}\sum_{j=-n}^{n-1}\varphi(\tau_j)\sin^2\frac{n}{2}(\theta-\theta_j)\left[1+i\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta-\theta_j)\right].$$

Теорема 4. *Имеют место оценки*

$$\|R_n(\varphi)\|\leqq\|R_n(\varphi)\|_W\leqq\left[2\pi+4+4\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{\|\varphi_\theta^{(r)}\|_C}{n^r}\qquad(r=1,\ 2,\ldots),\tag{20}$$

$$\|R_n(\varphi)\|\leqq\|R_n(\varphi)\|_W\leqq 6\left[2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{H(\varphi_\theta^{(r)};\alpha)}{n^{r+\alpha}}\qquad(r=1,\ 2,\ldots),\tag{21}$$

$$\|R_n(\varphi)\|\leqq\|R_n(\varphi)\|_W<3\left[2+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}n\right)\right]\frac{(1+C^*)H(\varphi;\ \alpha)}{n^\alpha}\qquad(r=0),\tag{22}$$

причем (21) *и* (22) *справедливы для всех* $0<\alpha\leqq1$. *Постоянная* C^* *оценена в (15).*

Доказательство сразу вытекает из теоремы 3 с учетом того, что $\|S\|_W=1$ [1].

Замечание 7. Очевидно оценки (20)—(22) лучше по порядку чем соответствующие результаты Б. Г. Габдулхаева [2, с. 41].

2. Об интерполяции функций на остове бикруга и ее применение.

2. 1. Для функции $\varphi(t_1,\ t_2)$, определенной на остове бикруга $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$ [5] построим интерполяционные многочлены

$$\begin{gathered}Q_{n,0}\varphi=\sum_{k=-n}^{n-1}a_k(t_2)t_1^k,\ \ a_k(t_2)=\frac{1}{2n}\sum_{p=-n}^{n-1}\varphi(\tau_p,\ t_2)\,\tau_p^{-k},\\ Q_{n,m}\varphi=\sum_{k=-n}^{n-1}\sum_{j=-m}^{m-1}c_{kj}t_1^kt_2^j,\ \ c_{kj}=\frac{1}{4nm}\sum_{p=-n}^{n-1}\sum_{q=-m}^{m-1}\varphi(\tau_p,\ \sigma_q)\,\tau_p^{-k}\sigma_q^{-j},\end{gathered}\tag{23}$$

по узлам $\tau_p=\exp i\frac{\pi p}{n}$; $p=\overline{-n,\ n-1}$; $\sigma_q=\exp i\frac{\pi q}{m}$; $q=\overline{-m,\ m-1}$. $Q_{0,m}\varphi$ строится аналогично $Q_{n,0}\varphi$. Легко видеть, что $Q_{n,m}\varphi=Q_{n,0}Q_{0,m}\varphi=Q_{0,m}Q_{n,0}\varphi$.

Теорема 5. *Имеют место оценки*

$$\|Q_{n,0}\varphi\|\leqq\lambda_n\|\varphi\|_C,\ \ \|\varphi-Q_{n,0}\varphi\|\leqq(1+\lambda_n)E_{n-1,\infty}(\varphi),\tag{24}$$

$$\|Q_{n,0}\varphi\|_W\leqq2\mu_n\|\varphi\|_W;\ \ \|\varphi-Q_{n,0}\varphi\|_W\leqq(1+2\mu_n)\rho_{n-1,\infty}(\varphi),\tag{25}$$

$$\|\varphi-Q_{n,m}\varphi\|\leqq\begin{cases}(1+\lambda_n)E_{n-1,\infty}(\varphi)+\lambda_n(1+\lambda_m)E_{\infty,m-1}(\varphi),\\ \lambda_m(1+\lambda_n)E_{n-1,\infty}(\varphi)+(1+\lambda_m)E_{\infty,m-1}(\varphi),\end{cases}\tag{26}$$

$$\|\varphi-Q_{n,m}\varphi\|_W\leqq\begin{cases}(1+2\mu_n)\rho_{n-1,\infty}(\varphi)+2\mu_n(1+2\mu_m)\rho_{\infty,m-1}(\varphi),\\ 2\mu_m(1+2\mu_n)\rho_{n-1,\infty}(\varphi)+(1+2\mu_m)\rho_{\infty,m-1}(\varphi),\end{cases}\tag{27}$$

где $\lambda_s=\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}s\right)$, $\mu_s=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi}s\right)$, *а* $E_{n-1,\infty}(\varphi)$ *и* $\rho_{n-1,8}(\varphi)$

$(E_{\infty, m-1}(\varphi)$ *и* $\rho_{\infty, m-1}(\varphi))$ *наилучшие приближения функции* $\varphi(t_1, t_2)$ *соответственно в пространствах* $C(\Gamma)$ *и* $W(\Gamma)$ *псевдополиномами степени* $n-1$ $(m-1)$ *по* $t_1(t_2)$, *построенными в* [5].

Доказательство. Оценки (24) можно получить без труда на основе соответствующих результатов в одномерном случае из 1. Остановимся подробнее на доказательстве оценок (25).

По определению нормы пространства $W(\Gamma)$

$$\|Q_{n,0}\varphi\|_W = \|(Q_{n,0}\varphi)^{++}\|_C + \ldots + \|(Q_{n,0}\varphi)^{--}\|_C,$$

где для $(Q_{n,0}\varphi)^{++}$ имеем для $|z_k|<1$, $k=1, 2$,

$$(Q_{n,0}\varphi)^{++} = \lim_{\substack{z_1\to t_1\\ z_2\to t_2}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\tau_2)\tau_1^k}{(\tau_1-z_1)(\tau_2-z_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\lim_{\substack{z_2\to t_2\\ |z_2|<1}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{a_k(\tau_2)\,d\tau_2}{\tau_2-z_2}\Big\} t_1^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^+(t_2)\, t_1^k.$$

Аналогичным образом нетрудно убедиться и в справедливости остальных соотношений $(Q_{n,0}\varphi)^{+-} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^-(t_2)\,t_1^k$; $(Q_{n,0}\varphi)^{-+} = -\sum_{k=-n}^{-1} a_k^+(t_2)\,t_1^k$.

Следует отметить следующий факт: $a_k^{\pm}(t_2) = (2n)^{-1}\sum_{p=-n}^{n-1}\varphi^{\cdot\pm}(\tau_p, t_2)\,\tau_p^{-k}$, откуда видно, что псевдополиномы $\sum_{-n}^{n-1} a_k^{\pm}(t_2)\,t_1^k$ являются интерполяционными полиномами вида (23) функций $\varphi^{\cdot\pm}(t_1, t_2)$.

Теперь зафиксируем $t_2\in\Gamma_2$. На основании оценок (3) имеем

$$|(Q_{n,0}\varphi)^{\pm\pm}| \leqq \mu_n \cdot \max_p |\varphi^{\cdot\pm}(\tau_p, t_2)|.$$

Отсюда при помощи формул Сохоцкого [15] нетрудно получить

$$\|(Q_{n,0}\varphi)^{\pm\pm}\|_C \leqq \mu_n\|\varphi^{\cdot\pm}\|_C \leqq \mu_n[\|\varphi^{+\pm}\|_C + \|\varphi^{-\pm}\|_C].$$

Следовательно,

(28) $$\|Q_{n,0}\varphi\|_W \leqq 2\mu_n\|\varphi\|_W$$

и левая оценка (25) доказана.

Далее, пусть $T^*_{n-1,\infty}$ — псевдополином наилучшего приближения (вида, указанного в [5]) функции $\varphi(t_1, t_2)$ в метрике $W(\Gamma)$. На основе свойства (5) (при любом фиксированном $t_2\in\Gamma_2$) имеем

$$\|\varphi - Q_{n,0}\varphi\|_W \leqq \|\varphi - T^*_{n-1,\infty}\| + \|Q_{n,0}(T^*_{n-1,\infty}-\varphi)\|_W$$

$$\leqq (1+\|Q_{n,0}\|_W)\,\rho_{n-1,\infty}(\varphi),$$

откуда и из (28) следует вторая оценка (25).

Оценки (26) и (27) можно получить без труда при помощи предшествующих оценок (24), (25) и неравенства

$$\|\varphi - Q_{n,m}\varphi\|_X \leqq \begin{cases} \|\varphi - Q_{n,0}\varphi\|_X + \|Q_{n,0}(\varphi - Q_{0,m}\varphi)\|_X, \\ \|\varphi - Q_{0,m}\varphi\|_X + \|Q_{0,m}(\varphi - Q_{n,0}\varphi)\|_X, \end{cases}$$

где $X=X(\Gamma)$ любое из пространств $C(\Gamma)$ и $W(\Gamma)$.

Введем на остове $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$ сингулярные интегралы

$$S_1\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau_1,\ t_2)}{\tau_1-t_1}d\tau_1,\quad S_{12}\varphi=\frac{1}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}.$$

S_2 определяется аналогично S_1.

Из результатов пункта 1 непосредственно вытекают оценки для $E_{n,\infty}$. (Оценки для $E_{\infty,m}$ — полностью аналогичны.)

$$(29)\qquad E_{n,\infty}(\varphi)\leqq\frac{\pi}{2}\frac{\|\varphi_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1},\ t_2)\|_C}{(n+1)^r};\ E_{n,\infty}(\varphi)<3\frac{\omega^1(\varphi_{\theta_1}^{(r)};1/(n+1))}{(n+1)^r}$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$(30)\qquad E_{n,\infty}(S_1\varphi)\leqq\frac{\pi}{2}\frac{\|\varphi_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1},\ t_2)\|_C}{(n+1)^r};\ E_{n,\infty}(S_1\varphi)<3\frac{\omega^1(\varphi_{\theta_1}^{(r)};1/(n+1))}{(n+1)^r}$$

$$(r=1,\ 2,\ldots),$$

где $\omega^1(f;\ \delta)=\max_{t_2}\sup_{0<\theta_1'-\theta_1\leqq\delta}|f(\theta_1',\ t_2)-f(\theta_1,\ t_2)|$.

Следует отметить, что оценки (30) имеют место лишь для дифференцируемых (по t_1) функций ($r\geqq1$). В случае $r=0$ оказывается справедлива лемма 2 с заменой ω на ω^1 и S на S_1. Для ссылки в этом случае введем обозначение „лемма 2*".

Теперь укажем оценки для $\rho_{n,\infty}(\varphi)$. Везде ниже будем предполагать, что $\varphi(t_1,\ t_2)$ r — раз дифференцируема по $t_1=\exp i\theta_1\,(r\geqq0)$, причем $\varphi_{\theta_1}^{(r)}(\exp i\theta_1,\ t_2)\in W(\Gamma)$.

Следуя доказательству леммы 3, нетрудно показать, что

$$(31)\qquad \rho_{n,\infty}(\varphi)\leqq E_{n,\infty}(\varphi)+E_{n,\infty}(S_1\varphi)+E_{n,\infty}(S_2\varphi)+E_{n,\infty}(S_{12}\varphi).$$

Из (29)—(31) имеем

$$(32)\qquad \rho_{n,\infty}(\varphi)\leqq\frac{\pi}{(n+1)^r}\{\|\varphi_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1},\ t_2)\|_{C(\Gamma)}+\|S_2(\varphi)_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1},\ t_2)\|_{C(\Gamma)}\}$$

$$(r=1,\ 2,\ldots)$$

$$(33)\qquad \rho_{n,\infty}(\varphi)\leqq6\,(n+1)^{-r}\{\omega^1(\varphi_{\theta_1}^{(r)};\ 1/(n+1))+\omega^1(S_2\varphi_{\theta_1}^{(r)};\ 1/(n+1))\}$$

$$(r=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Оценка (32) неудобна, так как она приводит к дополнительным вычислениям $\|S_2\varphi_{\theta_1}^{(r)}\|$. Ограниченность интеграла S_2 на Γ следует из непрерывности, поскольку $\varphi_{\theta_1}^{(r)}\in W(\Gamma)$. Однако из (33) можно получить удобные оценки при некоторых дополнительных предположениях о $\varphi_{\theta_1}^{(r)}$, напр., принадлежность к классу H и т. п.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что $\varphi_{\theta_1}^{(r)}(\exp i\theta_1,\ \exp i\theta_2)$ удовлетворяет условию H с показателями α и γ соответственно по θ_1 и θ_2, и пусть

(34) $$A_1^r=\max_{t_2}\sup_{\theta_1'\neq\theta_1}|\varphi_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1'},\ t_2)-\varphi_{\theta_1}^{(r)}(e^{i\theta_1},\ t_2)|\,|\theta_1'-\theta_1|^{-\alpha},$$

(35) $$A_2^r=\max_{t_1}\sup_{\theta_2'\neq\theta_2}|\varphi_{\theta_1}^{(r)}(t_1,\ e^{i\theta_2'})-\varphi_{\theta_1}^{(r)}(t_1,\ e^{i\theta_2})|\,|\theta_2'-\theta_2|^{-\nu}.$$

Для первого слагаемого в правой части (33), очевидно, имеем

(36) $$\omega^1(\varphi_{\theta_1}^{(r)};\ (n+1)^{-1})\leqq A_1^r(n+1)^{-\alpha}.$$

Займемся оценкой второго слагаемого. Способ основывается на результатах Н. И. Мусхелишвили [15, § 18, п. 3°] об одномерных интегралах с зависящей от параметра плотностью. Ради упрощения обозначений положим $f=\varphi_{\theta_1}^{(r)}$. Имеем

$$\sigma_f=S_2f(t_1',\ t_2)-S_2f(t_1,\ t_2)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1',\ \tau_2)-f(t_1,\ \tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2.$$

К σ_f применим метод, указанный в работе [15, с. 62]. В результате (после укругления некоторых постоянных) нетрудно получить

(37) $$|\sigma_f|\leqq\frac{2}{\nu}\widetilde{A}_2^r|t_1'-t_1|^{\nu}-6\widetilde{A}_1^r|t_1'-t_1|^{\alpha}\ln\frac{1}{|t_1'-t_1|},$$

где $\widetilde{A}_k^r(k=1,\ 2)$ — постоянные Гельдера по отношению к t_1 и t_2, аналогичные A_k^r. Поскольку Γ_k — единичная окружность, легко видеть, что

$$\frac{2}{\pi}|\theta_k'-\theta_k|\leqq|t_k'-t_k|\leqq|\theta_k'-\theta_k|\quad(k=1,\ 2),$$

откуда следует

(38) $$A_k^r\leqq\widetilde{A}_k^r\leqq\frac{\pi}{2}A_k^r\qquad(k=1,\ 2).$$

Принимая во внимание, что функция $x^{\alpha}\ln(1/x)$ растет на интервале $(0,\ \exp(-1/\alpha))$, из (37)—(38) вытекает следующий результат.

Для любых двух точек θ_1 и $\theta_1'\in[0,\ 2\pi]$, которые удовлетворяют условию $|\theta_1'-\theta_1|\leqq\delta\leqq e^{-1/\alpha}$, выполняется неравенство

(39) $$|\sigma_f|\leqq\frac{\pi}{\nu}A_2^r\delta^{\nu}-3\pi A_1^r\delta^{\alpha}\ln\delta\quad(t_1=e^{i\theta_1})$$

и, следовательно,

(40) $$\omega^1(S_2f;\ \delta)=\omega^1(S_2\varphi_{\theta_1}^{(r)};\ \delta)\leqq\frac{\pi}{\nu}A_2^r\delta^{\nu}-3\pi A_1^r\delta^{\alpha}\ln\delta.$$

Заметим, что оценка (40) имеет место для всех $r=0,\ 1,\ 2,\ldots,$ как видно из способа ее получения.

Из (33), (36) и (40) вытекает оценка

$$(41)\qquad \rho_{n,\infty}(\varphi) \leqq \frac{6}{(n+1)^r}\left\{\frac{A_1^r}{(n+1)^\alpha} + \frac{\pi}{\nu}\,\frac{A_2^r}{(n+1)^\nu} + \frac{3\pi A_1^r \ln(n+1)}{(n+1)^\alpha}\right\},$$

$$r=1,\ 2,\ 3,\dots,\ n \geqq e^{1/\alpha}-1,$$

где постоянные Гельдера A_k^r ($k=1$, 2) определены формулами (34), (35).

Полученный результат (41) основывается на (33) и, следовательно, имеет место лишь для дифференцируемых (по t_1) функций (т. е. для $r\geqq 1$). Остается рассмотреть случай $r=0$.

Выходим из основного неравенства (31). В ходе доказательства леммы мы получили оценки $E_n(S\varphi)\leqq 3\,C^* H(\varphi;\ \alpha)(n+1)^{-\alpha}$, откуда непосредственно следует

$$(42)\qquad E_{n,\infty}(S_1\varphi)\leqq 3\,C^* A_1^0(n+1)^{-\alpha},$$

где C^* оценена в (15).

Кроме того, из (29) и (40) при $r=0$ имеем

$$(43)\qquad E_{n,\infty}(\varphi)<3\,\omega^1(\varphi;\ (n+1)^{-1})\leqq 3\,A_1^0(n+1)^{-\alpha},$$

$$(44)\qquad E_{n,\infty}(S_2\varphi)<3\omega^1(S_2\varphi;\ (n+1)^{-1})\leqq 3\,\pi\nu^{-1}A_2^0(n+1)^{-\nu}$$

$$+\,9\pi\,A_1^0(n+1)^{-\alpha}\ln(n+1).$$

Для $E_{n,\infty}(S_{12}\varphi)$ применяем лемму 2* и (44).

$$E_{n,\infty}[S_1(S_2\varphi)]\leqq 3\,C_4\left\{\omega^1\left(S_2\varphi;\ \frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{\pi}{\nu}\,\frac{A_2^0}{(k+1)^\nu}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,3\pi A_1^0\,\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^\alpha}\right]\right\},$$

откуда после некоторых оценок и вычислений, аналогичных одномерному случаю, приходим к результату

$$(45)\qquad E_{n,\infty}(S_{12}\varphi)\leqq 3\,C_4\{\pi\,\nu^{-1}(1+D_1)\,A_2^0(n+1)^{-\nu}$$

$$+\,3\pi\,A_1^0(1+D_2)(n+1)^{-\alpha}\ln(n+1)\};\ (C_4<64/\pi),$$

где

$$D_1\leqq\begin{cases}2^\nu(2^\nu-1)^{-1}, & 0<\nu<1,\\ 1, & \nu=1,\end{cases}\qquad D_2\leqq\begin{cases}\dfrac{4}{2^\alpha-1}\left[\dfrac{\ln 2}{2^\alpha-1}+1\right], & 0<\alpha<1,\\ 2, & \alpha=1.\end{cases}$$

Из (31), (42)—(44) и (45) вытекает оценка

$$(46)\qquad \rho_{n,\infty}(\varphi)\leqq 3\,\{(1+C^*)\,A_1^0(n+1)^{-\alpha}+\pi\nu^{-1}(1+C_4+C_4D_1)\,A_2^0(n+1)^{-\nu}$$

$$+\,3\pi\,A_1^0(1+C_4+C_4D_2)(n+1)^{-\alpha}\ln(n+1)\}\qquad (n\geqq e^{1/\alpha}-1),$$

где A_k^0 ($k=1$, 2) постоянные Гельдера функции φ (см. (34), (35)), а C^*, C_4 и $D_{1,2}$ оценены выше.

Тем самым мы доказали следующую лемму:

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(t_1, t_2)=\varphi(\exp i\theta_1, \exp i\theta_2)$ r $(r\geq 0)$ — *раз дифференцируема по* θ_1, *причем* $\varphi^{(r)}_{\theta_1}(\exp i\theta_1, \exp i\theta_2)$ *удовлетворяет условию* H *по* θ_1 *и* θ_2 *соответственно с показателями* α *и* ν *и* A^r_k $(k=1,2)$, *соответствующие постоянные Гельдера (см.* (34) *и* (35)*). Тогда для наилучшего приближения* $\rho_{n,\infty}(\varphi)$ *функции* $\varphi(t_1, t_2)$, *построенными в* [5] *псевдополиномами, имеют место оценки* (41) *при* $r=1, 2, \ldots$ *и* (46) *при* $r=0$. *При этом вычислены все постоянные, участвующие в этих оценках.*

Для $\rho_{\infty,m}(\varphi)$ результат вполне аналогичен.

2.2. Обоснованное выше интерполирование на остове Γ имеет естественное применение в приближенных вычислениях двумерных СИ-ов и интегралов типа Коши. Именно теорема 5 вместе с леммой 5 может служить практически удобным средством в реализации этих вычислений в силу равенства $\|S_{12}\|_{W(\Gamma)}=1$ [6]. К примеру, чтобы получить оценку погрешности кубатурной формулы $S_{12}(\varphi)=S_{12}Q_{n,m}+R_{n,m}$, т. е. оценить

$$R_{n,m}=S_{12}\varphi-S_{12}Q_{n,m}\varphi\leqq\|S_{12}\varphi-S_{12}Q_{n,m}\varphi\|_{W(\Gamma)}=\|\varphi-Q_{n,m}\varphi\|_{W(\Gamma)},$$

очевидно, остается только заменить в (27) $\rho_{n-1,\infty}(\varphi)$ и $\rho_{\infty,m-1}(\varphi)$ указанными в лемме 5 оценками этих наилучших (в $W(\Gamma)$) приближений φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, 1968.
2. Б. Г. Габдулхаев. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений. Труды международной конференции по конструктивной теории функций, Варна, 19—25 мая, 1970 г. София, 1972, 35—49.
3. Б. Г. Габдулхаев. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов I. *Известия Мат. инст. БАН*, **11**, 1970, 181—196.
4. Б. Г. Габдулхаев. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов II. *Известия вузов, Математика*, № 4, 1975, 3—13.
5. И. Х. Фесчиев. Об аппроксимации функций двух комплексных переменных на остове бикруга. *Доклады АН БССР*, **19**, 1975, № 2, 113—116.
6. И. Х. Фесчиев. О приближенном вычислении двумерных сингулярных интегралов и интегралов типа Коши. *Доклады АН БССР*, **19**, 1975, № 5, 389—392.
7. И. Х. Фесчиев. Вычисление двумерных сингулярных интегралов и интегралов типа Коши и их приложения. Канд. диссерт., БГУ, Минск, 1974.
8. В. В. Иванов, В. К. Задирака. Некоторые новые результаты в теории аппроксимации. В сб. Вычисл. математика, Киев, 1966.
9. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, II. Москва, 1965.
10. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
11. С. Б. Стечкин. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. *Известия АН СССР*, **20**, 1956, № 2, 197—206.
12. С. Б. Стечкин. О порядке наилучшего приближения непрерывных функций. *Известия АН СССР*, **15**, 1951, № 3, 219—242.
13. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва — Ленинград, 1949.
14. Н. К. Бари. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. *Известия АН СССР*, **19**, 1955, № 5, 285—302.
15. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва, 1968.

Пловдивский университет,
Математический факультет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 18. 2. 1976
в переработанном виде 28. 9. 1976