PLISKA

STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ПЕТЪР Г. БОЯДЖИЕВ

Пусть (E, F) — регулярный конденсатор на плоскости. Исследуются величины $\sigma_n = \inf_{r\in R_n}(\max_E |r|/\min_F |r|)$, где R_n класс всех рациональных функций порядка $\leqq n$ и

$$\mu_n = \sup(\min_E \sum_{k=1}^{n} g_F(z, z_k)),$$

где $g_F(z, z_k)$ — функция Грина для $\mathbf{C}\setminus F$, а sup берется по всем наборам $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_i\in E$. Показано, что $\lim \mu_n = \lim \ln \sigma_n^{-1/n}$.

1. Хорошо известно, что в теории интерполяции и равномерной аппроксимации аналитических функций полиномами большое значение имеет задача Чебышева о нахождении полинома степени n со старшим коэффициентом единица, который имеет наименьший максимум модуля на компакте, где ведется приближение среди всех полиномов рассматриваемого вида. Эта задача является ключом к решению задачи о наибольшей скорости, с которой данная функция, аналитическая в окрестности компакта, может быть равномерно приближена полиномами.

Существенную роль в теории интерполяции и в вопросах о скорости равномерной аппроксимации аналитических функций более общими рациональными функциями играет задача, аналогичная задаче Чебышева и впервые рассматриваемая Гончаром [1] и позже Уайдомом [2]. Именно, пусть E и F — компакты в расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, имеющие положительную логарифмическую емкость, пересечение которых пусто. Пару (E, F) принято называть плоским конденсатором. Пусть R_n — множество рациональных функций порядка $\leqq n$. (Порядком рациональной функции $r(z)$ называется число полюсов этой функции в $\mathbf{C}$.) Гончаром и Уайдомом рассматривалась последовательность $\{\sigma_n\}$, определенная следующим образом

$$\sigma_n = \inf_{r\in R_n}(\max_E |r|/\min_F |r|). \tag{1}$$

Ими было показано, что $\lim(\sigma_n)^{1/n}$ существует и в точности равняется $\exp(-1/c(E, F))$, где $c(E, F)$ — емкость конденсатора (E, F) (см. ниже 3). Позднее в работе [3] в связи с проблемой о нахождении порядка наилучшего равномерного приближения аналитических функций рациональными функциями из множества $R_n^P \subset R_n$, полюсы которых расположены на фиксированном компакте $P \subset \mathbf{C}$, непересекающемся с E, рассматривалась последовательность $\{\sigma_n^P(E, F)\}$, которая определялась аналогично (1) заменой R_n на R_n^P. Там же было показано, что предел $\lim(\sigma_n^P)^{1/n}$, $n \to \infty$ существует и является мерой порядка равномерного на E приближения аналитических в $\mathbf{C}\setminus F$ функций рациональными функциями из R_n^P. Таким образом выявилась роль последовательностей вида (1) в теории аппроксимации аналитических функций, что и побудило подробное исследование этих вопросов в настоящей работе. Последовательность $\{\sigma_n\}$ тесно связана с одной экстремальной задачей для функции Грина (см. ниже 4) и их изучение ведется параллельно.

В конце пункта 4 как применение развитых методов и полученных результатов приводятся две теоремы о рациональной аппроксимации. В пункте 5 дается обобщение одного результата К. Ю. Осипенко о приближении аналитических функций только по информации об их значениях в конечном числе точек.

2. Пусть E и F — компакты, введенные в 1. Все задачи, которые будем в дальнейшем рассматривать, инвариантны относительно дробно-линейного преобразования, так что мы можем без ограничения общности предполагать, что E и F ограничены.

Очевидно множество $\mathbf{C}\setminus F$ содержит лишь конечное число компонент $D_1, D_2, \ldots, D_p$, которые пересекаются с E, а $\mathbf{C}\setminus E$ — лишь конечное число компонент $G_1, G_2, \ldots, G_q$, пересекающиеся с F. Положим $D_{ij} = D_i \cap G_j$, $i=1, 2, \ldots, p$, $j=1, 2, \ldots, q$. Очевидно D_{ij} — компоненты дополнения $\mathbf{C}\setminus(E \cup F)$, и они и только они обладают тем свойством, что ∂D_{ij} пересекается как с E, так и с F. Положим $E_{ij} = \partial D_{ij} \cap E$, $F_{ij} = \partial D_{ij} \cap F$. Назовем функцией Грина для $\bar{\mathbf{C}}\setminus F$ с полюсом в $\zeta \in \bar{\mathbf{C}}\setminus F$ функцию $g_F(z, \zeta)$, определенную в $\bar{\mathbf{C}}\setminus F$ следующим образом: если $\zeta \in A$, где A — компонента дополнения F, то $g_F(z, \zeta)$ совпадает с обычной функцией Грина для A при $z \in A$ и равна нулю при $z \notin A$. Аналогично определяется функция Грина $g_E(z, \zeta)$ для $\bar{\mathbf{C}}\setminus E$. Функция $g_F(z, \zeta)$ гармонична в $\bigcup\{D_i : i\}$ за исключением точки ζ и равна нулю всюду на $\bigcup\{F_{ij} : i, j\}$ за исключением множества логарифмической емкости нуль. Аналогичное утверждение имеет место и для $g_F(z, \zeta)$.

Пусть M_E — множество всех положительных единичных мер, сосредоточенных на E. Положим

$$V(E, F) = \inf_{\mu \in M_E} \iint g_F(z, \zeta)\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta).$$

Нам понадобятся следующие предложения теории потенциала [6, гл. III].

а. Существует единственная мера $\nu_E \in M_E$ такая, что

$$V(E, F) = \iint g_F(z, \zeta)\, d\nu_E(z)\, d\nu_E(\zeta).$$

Носитель E^* меры ν_E содержится в $\bigcup E_{ij}$ и $\gamma((\bigcup E_{ij})\setminus E^*) = 0$, где, как обычно, $\gamma(K)$ означает логарифмическую емкость компакта K.

b. Функция $u_{\nu_E}(z)=\int g_F(z,\zeta)\,d\nu_E(z)$ супергармонична в $\bigcup D_i$, гармонична в $(\bigcup D_i)\setminus(\bigcup E_{ij})$, $u_{\nu_E}(z)=0$ всюду на $\partial(\bigcup D_i)=\bigcup F_{ij}$ за исключением множества K, для которого $\gamma(K)=0$ и $u_{\nu_E}(z)=V(E,F)$ для $z\in C\setminus(\bigcup G_i)$ всюду, за исключением множества K, для которого $\gamma(K)=0$. Если E регулярен относительно задачи Дирихле, то $u_{\nu_E}(z)=V(E,F)$ всюду на $C\setminus(\bigcup G_i)$.

c. Если для $\mu\in M_E$ положим $u_\mu(z)=\int g_F(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)$, то $u_\mu(z)$ супергармонична в $\bigcup D_i$ и имеет место неравенство

$$\min_E u_\mu(z)\leqq V(E,F)\leqq\max_E u_\mu(z).$$

Заменой E на F получим константу $V(F,E)$ и функцию $u_{\nu_F}(z)$, для которых имеют место аналогичные утверждения.

3. Емкость конденсатора. Связь $V(E,F)$ с емкостью. Пусть $u(z)$ — гармоническая в $\bigcup D_{ij}$ функция такая, что $u(z)=1$, $z\in\bigcup F_{ij}$ и $u(z)=0$, $z\in\bigcup E_{ij}$, т. е. $u(z)$ — гармоническая мера $\bigcup F_{ij}$ относительно $\bigcup D_{ij}$. Пусть L_{ij} гомологический класс гладких кривых Жордана для области D_{ij} и n — нормаль к L_{ij}, направленная в сторону возрастания $u(z)$. Число

$$c(E,F)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

где $L=\bigcup L_{ij}$, называется емкостью конденсатора (E,F). Ясно, что $c(E,F)=c(F,E)$.

Заметим, что для любого конденсатора (E,F) имеет место равенство $c(E,F)=1/V(E,F)$. Это сразу вытекает из определения $c(E,F)$ и равенства $u(z)=1-u_{\nu_E}(z)/V(E,F)$, $z\in\bigcup D_{ij}$. Таким образом, всегда $V(E,F)=V(F,E)$. Поэтому в дальнейшем будем писать просто V.

4. В этом параграфе мы изучим подробно экстремальные последовательности $\sigma_n^P(E,F)=\sigma_n^P$ и $\mu_n(E,F)=\mu_n$, $n=1,2,\ldots$ определенные следующим образом: Если $P\subset C$ — произвольный компакт и R_n^P — введенный в 1 класс рациональных функций, то $\sigma_n^P(E,F)=\inf_{r\in R_n^P}(\max_E r/\min_F r)$ (когда $P=C$, будем писать просто σ_n); если $z_1,z_2,\ldots,z_n$, $z_i\in E$ произвольные n точки, то

$$\mu_n(E,F)=\sup_{(z_1,z_2,\ldots,z_n)}\{\min_E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_F(z,z_k))\}.$$

Аналогично определяется и последовательность $\{\mu_n(F,E)\}$.

Как отметили выше, последовательность σ_n^P уже изучалась. Здесь нам понадобится только результат Гончара [1] о том, что $\lim\sqrt[n]{\sigma_n}=e^{-V}$.

Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $P\subset C$ — произвольный компакт, то существует рациональная функция $\rho(z)\in R_n^P$, не имеющая полюсы на E и нули на F, и такая, что $\sigma_n^P(E,F)=\max_E\rho/\min_F\rho$.*

Доказательство Заметим, что если $P\cap E=\varnothing$, эта теорема легко вытекает из результатов [7, гл. 12]. В общем случае возникают некоторые затруднения, поэтому мы проведем доказательство подробно.

Ясно, что имеет место равенство $\sigma_n^P=\inf_\theta \max_E |\theta(z)|$, где inf берется в классе всех рациональных функций $\theta \in R_n^P$, для которых $\min_F|\theta|=1$.

Пусть $\{\theta_\nu(z)\}$, $\theta_\nu \in R_n^P$ такая последовательность, что $\min_F|\theta_\nu|=1$ и $\sigma_n^P=\lim_{\nu\to\infty}\max_E|\theta_\nu|$. Тогда $\theta_\nu(z)=p_\nu(z)/q_\nu(z)$, где $p_\nu(z)=\sum_{s=1}^n a_s^{(\nu)}z^s$ и $q_\nu(z)=\sum_{s=1}^n b_s^{(\nu)}z^s$ взаимно простые полиномы. Очевидно можем предполагать, что $\sum_s |b_s^{(\nu)}|=1$ для любого $\nu=1, 2, \ldots$ Тем самым, любая последовательность $\{b_s^{(\nu)}\}$, $\nu=1, 2, \ldots$, $s=1, 2, \ldots, n$, ограничена и без ограничения общности можем предполагать, что существуют числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ такие, что $b_s^{(\nu)}\to b_s$ при $\nu\to\infty$. Так как $\sum|b_s|=1$, то не все b_s, $s=1, 2, \ldots, n$, равны нулю.

Положим $q(z)=\sum b_s z^s$ и пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — нули $q(z)$. Ясно, что равномерно на компактных подмножествах $\mathbf{C}$ имеем $q_\nu(z)\to q(z)$. Тем самым, существует константа M такая, что $\max_E|q_\nu|\leqq M$ для любого ν. Но так как последовательность $\{\max_E|p_\nu/q_\nu|\}$ сходится, то найдется константа M_1 такая, что $|p_\nu(z)/q_\nu(z)|\leqq M_1$ для $z\in E$. Таким образом $\max_E|p_\nu(z)|\leqq MM_1$, $\nu=1, 2, \ldots$

Поскольку у нас $\gamma(E)>0$, то E содержит несчетное множество точек. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, $z_i\in E$, произвольные, фиксированные, различные точки. Тогда по интерполяционной формуле Лагранжа будем иметь

$$p_\nu(z)=\sum_{k=1}^{n+1} p_\nu(z_k)\frac{\omega_n(z)}{(z-z_k)\,\omega_n'(z_k)}, \tag{2}$$

где $\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n+1})$. Так как $|p_\nu(z_k)|\leqq MM_1$, $k=1, 2, \ldots, n+1$ и $\omega_n(z)/z-z_k$, $k=1, 2, \ldots, n+1$, локально равномерно ограничены (это многочлены), то из (2) получим, что $\{p_\nu(z)\}$ — локально равномерно ограниченная последовательность. Но тогда, применяя неравенство Коши для коэффициентов Тейлора, получим, что последовательности $\{a_s^{(\nu)}\}$, $s=1, 2, \ldots, n$, $\nu=1, 2, \ldots$, ограничены. Выбирая сходящиеся подпоследовательности, можем утверждать, что существует многочлен $p(z)=\sum a_s z^s$ и подпоследовательность $\{\nu_\mu\}$ натуральных чисел такие, что $p_{\nu_\mu}(z)\to p(z)$ равномерно на компактных подмножествах плоскости $\mathbf{C}$. Но тогда последовательность $r_\mu(z)=p_{\nu_\mu}(z)/q_{\nu_\mu}(z)$, $\mu=1, 2, \ldots$, равномерно внутри проколотой плоскости $\mathbf{C}\setminus(\bigcup\{\beta_s\})$ сходится к $p(z)/q(z)=\rho(z)$. Покажем, что $\rho(z)$ — искомая функция.

Пусть $z_0\in E$ — точка, в которой $|\rho(z)|$ достигает своего минимума. Очевидно $z_0\neq\beta_s$, $s=1, 2, \ldots, n$, и значит $r_\mu(z_0)\to\rho(z_0)$, $\mu\to\infty$. Так как $|r_\mu(z_0)|\geqq\min_F|r_\mu(z)|=1$, то

$$|\rho(z_0)|=\min_F|\rho(z)|\geqq 1. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно и $K_s^\varepsilon=\{z;\ |z-\beta_s|<\varepsilon\}$. Положим $K_\varepsilon=E\setminus\bigcup\{K_s^\varepsilon: s\}$. Ясно, что K_ε компакт и что $r_\mu(z)\to\rho(z)$ равномерно на K_ε. Тогда из неравенства

$$\max_{K_\varepsilon} |\rho(z)| \leqq \max_{K_\varepsilon} |\rho(z) - r_\mu(z)| + \max_E |r_\mu(z)|$$

при $\mu \to \infty$ получим $\max_{K_\varepsilon} |\rho(z)| \leqq \sigma_n^P$ (напомним, что $\max_E |r_\mu| \to \sigma_n^P$, $\mu \to \infty$). Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда вытекает, что $\max_E |\rho(z)| \leqq \sigma_n^P$. Из этого неравенства и из (3) следует

$$\sigma_n^P \leqq \max_E |\rho| / \min_F |\rho| \leqq \sigma_n^P,$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что $\rho(z)$ не имеет нули на F и полюсы на E. Иначе получилось бы, что либо $\max_E |\rho| = \infty$, либо $\min_F |\rho| = 0$, т. е. что $\sigma_n^P = \infty$, тогда как $\sigma_n^P \leqq 1$. Это последнее неравенство сразу получается из определения σ_n^P, если заметить, что функция $r(z) = \mathrm{const}$ принадлежит R_n^P.

Прежде чем перейти к основным результатам этой работы (теоремы 3, 4 и 5), докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = \{a_{nk}\}$, $a_{nk} \in E$, $n = 1, 2, \ldots$ $k = 1, 2, \ldots, n$. *Для любого натурального* n *определим точки* $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}$, $b_{nk} \in F$ *так, чтобы функция Шеня (см.* [7]*)*

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} |z_i - z_j| \Big/ \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n-1} |z_i - a_{nj}|,$$

достигала своего максимума на F^n *при* $z_k = b_{nk}$. *Положим* $r_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_{nk})/(z - b_{nk})$ *и пусть*

$$a_n = (\max_E |r_n| / \min_F |r_n|)^{1/n}, \quad \mu_n(\alpha) = \min_E \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_F(z, a_{nk}).$$

Тогда, если F *регулярен, имеют место равенства*

$$\limsup \ln a_n^{-1} = \limsup \mu_n(\alpha),$$

$$\liminf \ln a_n^{-1} = \liminf \mu_n(\alpha).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi_n(z) = \ln \min_F |r_n| - \ln |r_n(z)| - \sum_{k-1}^{n} g_F(z, a_{nk}).$$

Она субгармонична в $\bigcup D_i$ и на границе не превосходит 0. Таким образом для $z \in E$ выполняется неравенство $\ln \min_F |r_n| - \ln |r_n(z)| \leqq \sum_{k=1}^{n} g_F(z, a_{nk})$. Тогда $\ln a_n^{-1} \leqq \mu_n(\alpha)$ и значит

$$\limsup \ln a_n^{-1} \leqq \limsup \mu_n(\alpha),$$

(4)

$$\liminf \ln a_n^{-1} \leqq \liminf \mu_n(\alpha).$$

Дальше напомним, что, поскольку у нас задача инвариантна относительно дробнолинейного преобразования, можем предполагать, что E и F

ограничены. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Существует окрестность U_ε границы $\bigcup D_i$ такая, что для $t\in U_\varepsilon\cap(\bigcup D_i)$ и $\zeta\in E$ выполняется неравенство $g_F(\zeta, t)\leqq\varepsilon$. В частности, оно будет иметь место для $t\in L_\varepsilon=\partial U_\varepsilon\cup(\bigcup D_i)$.

Обозначим через $\rho(L_\varepsilon, F)>0$ расстояние от L_ε до F и пусть $t\in L_\varepsilon$ фиксировано. Функция

$$\theta_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t-b_{nk}}\cdot\frac{V(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,k-1}, z, b_{n,k+1}, \ldots, b_{nn})}{V(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn})}$$

рациональна порядка n и имеет полюсы в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n,n-1}$. По определению точек b_{nk} для любого $z\in F$ будем иметь

$$\theta_n(z)\leqq n/\rho(L_\varepsilon, F). \tag{5}$$

Дальше ясно, что $\theta_n(b_{nk})=1/(t-b_{nk})$, т. е. что $\theta_n(z)$ интерполирует функцию $1/(t-z)$ в точках b_{nk}, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда, как известно [7], имеет место равенство

$$\frac{1}{z-t}-\theta_n(z)=\frac{1}{z-t}\cdot\frac{z-a_{nn}}{t-a_{nn}}\cdot\frac{r_n(t)}{r_n(z)}.$$

Из (5) и последнего равенства очевидным образом получаем для любых $t\in L_\varepsilon$ и $z\in F$ $|r_n(t)|/|r_n(z)|\leqq M_\varepsilon.(n+1)$, где M_ε — константа, зависящая от ε. Из последнего неравенства, так как $z\in F$ произвольно, следует

$$|r_n(t)|/\min_F|r_n|\leqq M_\varepsilon(n+1),\quad t\in L_\varepsilon. \tag{6}$$

Функция $\psi_n(t)=\ln(|r_n(t)|/\min_F|r_n|)+\sum_{k=1}^{n}g_F(t, a_{nk})$ гармонична в $\bigcup D_i$ и на L_ε удовлетворяет (см. (6) и определение L_ε) неравенству $\psi_n(t)\leqq\ln(M_\varepsilon(n+1))+n\varepsilon$. По принципу максимума отсюда вытекает $n^{-1}\ln(\max_E|r_n|/\min_F|r_n|)\leqq\varepsilon+n^{-1}\ln M_\varepsilon(n+1)-\mu_n(\alpha)$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ из этого неравенства следует

$$\limsup_{n\to\infty}\ln a_n^{-1}\geqq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\alpha),\quad \liminf_{n\to\infty}\ln a_n^{-1}\geqq\liminf_{n\to\infty}\mu_n(\alpha).$$

Из (4) и последних двух неравенств получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $\alpha=\{a_{nk}\}$, $n=1, 2,\ldots$, $k=1, 2,\ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих E. Положим $\mu_n(\alpha)=\min_E n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g_F(z, a_{nk})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1° $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\alpha)=V$.

2° *Для любого n найдется полином $p_n(z)$ степени $\leqq n$ такой, что*

$$\lim_{n\to\infty}(\max_E|r_n|/\min_E|r_n|)^{1/n}=e^{-V}, \tag{7}$$

где $r_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_{nk})/p_n(z)$.

Доказательство. Пусть выполнено 2°. Рассмотрим функцию

$$\psi_n(z)=\ln\min_F|r_n|-\ln|r_n(z)|-\sum_{k=1}^{n}g_F(z, a_{nk}).$$

Как в лемме 1, убеждаемся, что для нее имеет место неравенство $\ln(\min_F r_n/\max_F r_n)^{1/n} \leqq \mu_n(\alpha)$. В силу нашего предположения отсюда следует

$$V \leqq \lim\inf \mu_n(\alpha),\quad n \to \infty. \tag{8}$$

Обратно, если λ_n — единичная, неотрицательная мера, такая, что $\lambda_n(\{a_{nk}\}) = 1/n$, то на основании свойства с) имеем $\lim\sup \mu_n(\alpha) \leqq V$, $n \to \infty$. Из (8) и последнего неравенства вытекает 1^0.

Пусть выполнено 1^0 и пусть $r_n(z) = \Pi_{k=1}^n (z - a_{nk})/(z - b_{nk})$ — рациональная функция, построенная в лемме 1. Тогда, в силу 1^0 и леммы 1 для нее будет выполняться (7), так что $p_n(z) = \Pi_{k=1}^n (z - a_{nk})$ искомый в 2^0 полином. Лемма доказана.

Дальше нам понадобится следующая теорема Багби.

Теорема 2. (Багби, [11]). *Существуют таблицы точек* $\alpha = \{a_{nk}\} \subset \bigcup E_{ij}$ *и* $\beta = \{b_{nk}\} \subset \bigcup F_{ij}$, $a_{nk} \neq a_{nj}$, $b_{nk} \neq b_{nj}$, $k \neq j$, *такие, что*

$$\lim(\max_E |\omega_n| / \min_F |\omega_n|)^{1/n} = e^{-V},$$

где $\omega_n(z) = \Pi_{k=1}^n (z - a_{nk})/(z - b_{nk})$.

Теорема 3. *Если* E *и* F *регулярны, то последовательность* $\{\mu_n(E, F)\}$ *сходится и ее предел равен* V.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для таблицы α из теоремы 2, на основании леммы 2 выполняется равенство

$$\lim \mu_n(\alpha) = V(E, F). \tag{9}$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_i \in E$ произвольны. Если λ_n — мера, сосредоточенная в этих точках, такая, что $\lambda_n(\{z_k\}) = 1/n$, то из $n^{-1}\sum_{k=1}^n g_F(z, z_k) = \int g_F(z, \zeta)\, d\lambda_n(\zeta)$ на основании свойства с) получим $\min_E n^{-1}\sum_{k=1}^n g_F(z, z_k) \leqq V$, откуда следует, что

$$\lim\sup \mu_n(E, F) \leqq V. \tag{10}$$

Обратно, если α таблица точек из теоремы 2, то $\mu_n(E, F) \geqq \mu_n(\alpha)$ Отсюда на основании (9) получаем $\lim\inf \mu_n(E, F) \geqq V$. Из (10) и последнего неравенства вытекает утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть* E *и* F *регулярны. Если* $\beta = \{b_{nk}\}$ *таблица точек, построенная в теореме 2 и*

$$\mu_n(\beta) = \min_F \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_E(z, b_{nk}),$$

то $\lim \mu_n(\beta) = V$, $n \to \infty$.

Доказательство. Функция $r_n(z) = 1/\omega_n(z)$, где $\omega_n(z)$ функция, построенная в теореме 2, удовлетворяет равенству $\lim(\max_F |r_n|/\min_E |r_n|)^{1/n} = e^{-V}$. Таким образом к ней применима лемма 2, в которой нужно только разменить места E и F.

Следствие 1. *Пусть* E *и* F *регулярны и* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_k \in F$, *произвольны. Если*

$$\mu_n(F,\ E) = \sup_{(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)} \min_F \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_E(z,\ z_k),$$

то $\lim \mu_n(F,\ F) = \lim \mu_n(E,\ F) = V$.

Теорема 5. *Пусть E и F регулярны и ν_E и ν_F — определенные в 2 равновесные меры. Если $\alpha = \{a_{nk}\}$ и $\beta = \{b_{nk}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, n — таблицы, построенные в теореме 2, то равномерно внутри $\bigcup D_{ij}$ выполняются равенства*

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_F(z,\ a_{nk}) = \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \nu_E(\zeta) = u_{\nu_E}(z);$$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_E(z,\ b_{nk}) = \int g_E(z,\ \zeta)\, d\, \nu_F(\zeta) = V - u_{\nu_E}(z).$$

Доказательство. Поскольку доказательство второго утверждения получается из доказательства первого заменой E на F, то мы проверим только первое.

Последовательность гармонических в $\bigcup D_{ij}$ функций

$$u_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_F(z,\ a_{nk})$$

равномерно ограничены внутри $\bigcup D_{ij}$ и поэтому достаточно показать, что любая ее предельная функция $u(z)$ совпадает с $\int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \nu_E(\zeta)$.

Итак, пусть $\{n_s\}$ — подпоследовательность натуральных чисел такая, что равенство $u(z) = \lim u_{n_s}(z)$ выполняется равномерно внутри $\bigcup D_{ij}$. Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ единичных мер, сосредоточенных в точках a_{nk}, $k = 1,\ 2, \ldots,\ n$ и таких, что $\lambda_n(\{a_{nk}\}) = 1/n$. Так как $\{\lambda_n\}$ слабо компактна (это единичные меры), то без ограничения общности можем предполагать, что $\{\lambda_{n_s}\}$ слабо сходится к некоторой единичной мере λ, сосредоточенной на E.

Поскольку для любого $z \in \bigcup D_{ij}$ функция $g_F(z,\ \zeta)$ непрерывна как функция от ζ на E, то $u_{n_s}(z) = \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \lambda_{n_s}(\zeta) \to \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \lambda(\zeta)$. Таким образом, для любого $z \in \bigcup D_{ij}$ выполняется равенство $u(z) = \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \lambda(\zeta) = u_\lambda(z)$. В силу выбора таблицы α имеем $\lim \mu_{n_s}(\alpha) = V$, $s \to \infty$. Тогда, если $z \in E$, то

$$\liminf u_{n_s}(z) \geq V,\ s \to \infty. \tag{11}$$

Так как $g_F(z,\ \zeta)$ положительна и полунепрерывна снизу и так как λ_{n_s} слабо сходится к λ, то для $z \in E$ выполняется неравенство [8, с. 20, лемма 0.1]

$$\liminf u_{n_s}(z) = \liminf \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \lambda_{n_s}(\zeta) \geq \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \lambda(\zeta) = u_\lambda(z),\ s \to \infty. \tag{12}$$

Пусть σ — произвольная, положительная, единичная мера на E и $u_\sigma(z) = \int g_F(z,\ \zeta)\, d\, \sigma(\zeta)$. Тогда, пользуясь теоремой Фубини и равенством $u_{\nu_E}(z) = V$ для $z \in E$ (см. 2, в), получим $\int u_\sigma(z)\, d\, \nu_E(z) = \int u_{\nu_E}(z)\, d\, \sigma(z) = V$. Из (12) и последнего равенства вытекает

$$V = \int u_{n_s}(z)\,d\nu_E(z) = \liminf \int u_{n_s}(z)\,d\nu_E(z) \geq \int \liminf u_{n_s}(z)\,d\nu_E(z)$$

$$\geq \int u_\lambda(z)\,d\nu_E(z) = V, \quad s \to \infty.$$

Таким образом имеем

(13) $$\int \liminf u_{n_s}(z)\,d\nu_E(z) = V = \int u_\lambda(z)\,d\nu_E(z), \quad s \to \infty.$$

Из (11) и первого равенства в (13) следует

(14) $$\liminf u_{n_s}(z) = V, \quad s \to \infty, \quad \nu_E \text{ — почти всюду на } E.$$

Применяя к этому равенству (12), получим $u_\lambda(z) \leqq V$ ν_E — почти всюду на E и значит, на основании второго равенства в (13) будем иметь $u_\lambda(z) = V$ ν_E — почти всюду на E. Отсюда вытекает, что всюду на носителе E^* меры ν_E имеет место неравенстго $u_\lambda(z) \leqq V$. Действительно, допустим, что для $z_0 \in E^*$ имеет место $u_\lambda(z_0) > V$. Тогда, так как $u_\lambda(z)$ полунепрерывна снизу, в некотором круге $K_\varepsilon = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ будет выполняться неравенство $u_\lambda(z) > V + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно малое. Так как $z_0 \in E^*$, то $\nu_E(K_\varepsilon) > 0$. Тогда из (14) и того факта, что $u_\lambda(z) = V$ ν_E — почти всюду на E, получим $V = \int u_\lambda(z)\,d\nu_E(z) \geq V + \delta\nu_E(K_\varepsilon) > V$, что неверно.

Так как у нас E регулярен, то $E^* = \bigcup E_{ij}$. С другой стороны, поскольку все a_{nk} лежат на $\bigcup E_{ij}$, то $\operatorname{supp}\lambda_n \subset \bigcup E_{ij}$ и значит $\operatorname{supp}\lambda \subset \bigcup E_{ij}$. Таким образом $u_\lambda(z) \leqq V$ для любого $z \in \operatorname{supp}\lambda$. По теореме Мариа [6, с. 53] отсюда следует, что $u_\lambda(z) \leqq V$ всюду на $\bigcup D_i \supset \bigcup D_{ij}$. Тогда для функции $u_{\nu_E}(z) - u_\lambda(z) = w(z)$ имеем

(15) $$\sup_{\zeta \in \bigcup F_{ij}} \limsup_{z \to \zeta,\, z \in \bigcup D_{ij}} w(z) = 0, \quad \inf_{\zeta \in \bigcup F_{ij}} \liminf_{z \to \zeta,\, z \in \bigcup D_{ij}} w(z) \geqq 0.$$

Пусть L_{ij} — гомологический класс гладких кривых Жордана для области D_j и n — нормаль к L_{ij}, направленная в сторону E_{ij}. Положим $L = \bigcup L_{ij}$. Тогда

$$0 = \int_L \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \sum_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n}\,ds.$$

Но так как все члены суммы в последнем равенстве неотрицательны, то $\int_{L_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = 0$. Тогда из известной теоремы Ландау—Осермана [9], из (15) и последнего равенства вытекает, что $w(z) \equiv 0$, $z \in D_{ij}$. Теорема доказана.

Отметим две следствия теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть $\{a_{nk}\}$ и $\{b_{nk}\}$ — таблицы, определенные в теореме 2. Если f — функция, голоморфная в $\bigcup D_i$ и $r_{n-1}(z)$ — рациональная функция порядка $n-1$, имеющая полюсы в $b_m, \ldots, b_{n,n-1}$, которая интерполирует f в точках a_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, n$, то имеет место неравенство*

$$\limsup\,(\max_E |f(z) - r_{n-1}(z)|)^{1/n} \leqq e^{-V}.$$

Доказательство подобно доказательству леммы 3 работы [4].

Теорема 7. *Если* $\{\omega_n(z)\}$ *последовательность рациональных функций, построенная в теореме 2, и* $u_{\nu_E}(z)$ — *функция, определенная в пункте 2, то равномерно внутри* $(\bigcup D_{ij})\times(\bigcup D_{ij})$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} |\omega_n(z)/\omega_n(t)|^{1/n} = \exp(u_{\nu_F}(z) - u_{\nu_F}(t)).$$

Доказательство повторяет доказательство аналогичных теорем из [10].

5. Об одном результате К. Ю. Осипенко. В интересной работе [5] вместе с другими более общими задачами К. Ю. Осипенко рассматривает следующую задачу:

Пусть $D\subset\mathbf{C}$ — произвольная односвязная область, граница которой не есть точка, и пусть $A(D, M)$ — класс функций, аналитических в D и ограниченных константой M. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — фиксированные, различные точки области D. Обозначим через $\Delta(0, M)$ полидиск в $\mathbf{C}^n$ с центром в нуле и радиусом M и пусть $\mathbf{C}^{\Delta(0,M)}$ — множество всех комплекснозначных функций, определенных в $\Delta(0, M)$. Тогда, если $z\in D$, $f\in A(D, M)$ и $S\in\mathbf{C}^{\Delta(0,M)}$, то отображение $f(z)\to S(f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n))$ Осипенко называет методом приближения значения функции f в точке z значениями этой функции в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Задача, грубо говоря, состоит в том, чтобы среди всех функций $S\in\mathbf{C}^{\Delta(0,M)}$ найти функцию $S_{f,z}$ (которая, очевидно, будет зависеть от f и z), для которой разность $f(z)-S_{f,z}(f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n))$ будет наименьшей среди разностей $f(z)-S(f(z_1), \ldots, f(z_n))$, $S\in\mathbf{C}^{\Delta(0,M)}$. Осипенко конкретизирует эту задачу, требуя найти величину

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = \inf_{S\in\mathbf{C}^{\Delta(0,M)}} \{ \sup_{f\in A(D,M)} |f(z)-S(f(z_1), \ldots, f(z_n))|\}.$$

Пользуясь своей общей теоремой о приближении линейных функционалов, он доказывает равенство

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = \sup |f(z)|, \tag{16}$$

где sup берется среди всех функций $f\in A(D, M)$, для которых $f(z_1)=f(z_2)=\ldots=f(z_n)=0$. Дальше, если $E\subset D$ произвольный компакт и

$$r_n(E) = \inf_{\substack{(z_1,\ldots,z_n)\\ z_i\in D}} \{\sup_{z\in E} r(z, z_1, \ldots, z_n)\},$$

то доказано соотношение $\lim \sqrt[n]{r_n(E)} = \exp(-1/c(E, F))$.

Цель настоящего пункта показать, что это последнее равенство имеет место в гораздо более общей ситуации. Именно, пусть E и F — непересекающиеся, регулярные относительно задачи Дирихле компакты в $\mathbf{C}$ такие, что любая из областей D_i, $i=1, 2, \ldots, p$ (см. пункт 2) конечносвязна. Положим $D=\bigcup D_i$ и пусть, как выше, $A(D, M)$ — класс функций, голоморфных в D и ограниченных константой M. Тогда справедлива

Теорема 8. *Имеет место равенство* $\lim \sqrt[n]{r_n(E)} = e^{-V}$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму:

Лемма 3. *Если E и F компакты с указанными только что свойствами, то существует константа $N \leqq M$ такая, что*

$$N \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} g_F(z, z_k)\right) \leqq r(z, z_1, \ldots, z_n) \leqq M \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} g_F(z, z_k)\right). \tag{17}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (16). Пусть $f \in A(D, M)$ такая, что $f(z_i)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда функция

$$\psi_n(z) \doteq \ln[f(\zeta)/M] + \sum_{k=1}^{n} g_F(\zeta, z_k)$$

субгармонична в D и если $t \in \partial D$, то $\limsup \psi_n(\zeta) \leqq 0$, $\zeta \to t$, $\zeta \in D$. Таким образом $\ln f(\zeta) \leqq \ln M - \sum g_F(\zeta, z_k)$ для любого $\zeta \in D$ и в частности для $\zeta = z$. Тем самым

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f \in A(D, M) \\ f(z_1)=f(z_2)=\ldots=f(z_n)=0}} f(z) \leqq M \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} g_F(z, z_k)\right). \tag{18}$$

Для получения левого неравенства в (17) рассмотрим функцию

$$f_1(\zeta) = M \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} (g_F(\zeta, z_k) + i\widetilde{g}_F(\zeta, z_k))\right),$$

(Через $\widetilde{u}(z)$ обозначаем функцию, сопряженную гармонической функции $u(z)$.) Функция $f_1(\zeta)$ аналитична в D, не превосходит по модулю M, но в общем случае не однозначна и значит не принадлежит $A(D, M)$.

Мы можем предполагать, что D область, ограниченная конечного числа кривых Жордана $C_0, C_1, \ldots, C_s$. Это не уменьшает общность нижеприведенных рассуждений. Для определенности, пусть, например, C_0 охватывает $C_1, C_2, \ldots, C_s$.

Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ — произвольные точки такие, что ζ_ν лежит внутри C_ν и пусть $d_\nu > 0$ — расстояние от ζ_ν до C_ν. Обозначим через α_ν изменение функции $-\sum \widetilde{g}_F(\zeta, z_k)$ вдоль произвольной кривой γ_ν, лежащей в D и гомотопически эквивалентной C_ν. Очевидно, существует целое число n_ν такое, что $2\pi n_\nu \leqq \alpha_\nu < 2\pi(n_\nu + 1)$. Положим $\beta_\nu = (\alpha_\nu - 2\pi n_\nu)/2\pi$. Ясно, что $0 \leqq \beta_\nu \leqq 1$. Рассмотрим функцию

$$u(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{s} \beta_\nu (\ln |\zeta - \zeta_\nu| - \ln d_\nu).$$

Тогда $0 \leqq u(\zeta) \leqq M_1$ для некоторой константы M_1, $0 < M_1 < \infty$, зависящей от области D и $\Delta_\nu \widetilde{u}(z) = 2\pi\beta_\nu = \alpha_\nu - 2\pi n_\nu$, где через $\Delta_\nu \psi$ обозначается изменение функции ψ вдоль кривой γ_ν. Положим $\varphi(\zeta) = \exp(-u(\zeta) - i\widetilde{u}(\zeta))$. Тогда изменение аргумента функции $f_1(\zeta) \cdot \varphi(\zeta)$ вдоль кривой γ_ν равно $\alpha_\nu - 2\pi\beta_\nu = 2\pi n_\nu$. Таким образом функция $f_1(\zeta) \cdot \varphi(\zeta)$ однозначна. Из очевидного неравенства $\exp(-M_1) \leqq |\varphi(\zeta)| \leqq 1$ и из $|f_1(z_k)| = 0$ следует, что $|\varphi \cdot f_1| \leqq M$ и $|(\varphi \cdot f)(z_k)| = 0$. Кроме того,

$$(\varphi f_1)(z) = M \exp[-\sum g_F(z, z_k)] \cdot \varphi(z) \geqq M e^{-M_1} \exp[-\sum g_F(z, z_k)].$$

Таким образом из (16) вытекает

(19) $$r(z, z_1, \ldots, z_n) \geqq (\varphi f_1)(z) \geqq N \exp[-\sum g_F(z, z_k)],$$

где положено $N = M e^{-M_1}$. Из (18) и (19) вытекает (17).

Доказательство теоремы 8. Из (17) непосредственно следует

$$N^{1/n} e^{-\mu_n(E, F)} \leqq \sqrt[n]{r_n(E)} \leqq M^{1/n} e^{-\mu_n(E, F)}.$$

Отсюда и из теоремы 3 вытекает утверждение теоремы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями. *Мат. сб.*, **78**, 1969, № **4**, 640—654.
2. H. Widom. Ratinal approximation and n-dimentional diameter. *J. Appr. Theory*, **5**, 1972, 343—361.
3. П. Г. Бояджиев. Зависимость наилучшей рациональной аппроксимации аналитических функций от расположения полюсов аппроксимирующих функций. *Сердика Бълг. мат. сп.*, **1**, 1975, № 3—4, 331—336.
4. П. Г. Бояджиев. Аппроксимация аналитических функций рациональными. *Сердика Бълг. мат. сп.*, **1**, 1975, № 1, 5—11.
5. К. Ю. Осипенко. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек. *Мат. заметки*, **19**, 1976, № 1, 29—40.
6. M. Tsuji. Potential theory in modern function theory. Tokyo, 1959.
7. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.
8. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Москва, 1966.
9. Th. Bagby. A uniqueness theorem for harmonic functions on Riemann surfaces. *Duke Math. J.*, **36**, 1969, 91—93.
10. П. Г. Бояджиев. Рационална апроксимация на аналитични функции. Доклади на Втора пролетна конференция на БМД, Видин 6—8 април, 1973 г., София, 1974, 67—74.
11. Th. Bagby. On interpolation by rational functions. *Duke Math. J.*, **36**, 1969, No. 1, 95—104.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 29. 6. 1976
в переработанном виде 19. 10. 1976