PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

НАИЛУЧШИЕ ХАУСДОРФОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

БЛАГОВЕСТ Х. СЕНДОВ

Наилучшие хаусдорфовые приближения изучались относительно алгебраических и тригонометрических многочленов, частично-монотонных функций, ступенчатых функций, рациональных функций и др. В этой работе даются оценки для хаусдорфовых приближений сплайн-функциями с равноотстоящими узлами и обратные теоремы для этого способа приближения.

1. Пусть $\Delta=[a, b]$ замкнутый отрезок на абсцисной оси x. Через F_Δ будем обозначать, как обычно [1], множество всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с Δ.

Пусть f — ограниченная функция, заданная на отрезке Δ. Дополненным графиком $\bar{f}$ функции f назовем пересечение всех множеств из F_Δ, содержащих график функции f [1] или

$$\bar{f}=\{\bigcap F : F \in F_\Delta;\ \forall x \in \Delta,\ (x, f(x)) \in F\}.$$

Верхней и нижней функциями Бэра для функции f, заданной на отрезке Δ, назовем соответственно

$$S_f(x)=\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{|x-t|\le\delta} f(t),\ x \in \Delta;\quad I_f(x)=\lim_{\delta\to 0}\ \inf_{|x-t|\le\delta} f(t),\ x, t \in \Delta.$$

Не трудно видеть, что $\bar{f}=\{(x, y): x \in \Delta,\ y \in [I_f(x),\ S_f(x)]\}$.

Аналогично определяются верхняя и нижняя функции Бэра для каждого точечного множества $F \in F_\Delta$,

$$S_F(x)=\max\{y:(x, y) \in F\},\quad I_F(x)=\min\{y:(x, y) \in F\}.$$

Очевидно имеет место тождество $F=\{(x, y): x \in \Delta,\ y \in [I_F(x),\ S_F(x)]\}$ для каждого $F \in F_\Delta$. Имеют также место равенства $S_f(x)=S_{\bar{f}}(x)$, $I_f(x)=I_{\bar{f}}(x)$; $x \in \Delta$ для каждой ограниченной на отрезке Δ функции f.

Дополненный график $\bar{f}$ каждой ограниченной функции f, заданной на отрезке Δ, является элементом F_Δ, но не каждый элемент F_Δ является дополненным графиком некоторой ограниченной функции, заданной на Δ. Так, например, если $x_0 \in \Delta$ точечное множество (крест),

$$F_0=\{(x, y): x \in \Delta,\ y=0 \vee x=x_0,\ y \in [-1,\ 1]\}$$

принадлежит F_Δ, но не существует функция, для которой дополненный график являлся бы точечным множеством F_0.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 1, 1977, с. 79—92.

Пусть $F \in F_\Delta$ и $x_0 \in \Delta$. Будем говорить, что x_0 является max-точкой для F, если

$$S_F(x_0) > \varlimsup_{\delta \to 0} \sup\{y : (x, y) \in F, \ |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0\},$$

и что x_0 является min-точкой для F, если

$$I_F(x_0) < \varliminf_{\delta \to 0} \inf\{y : (x, y) \in F, \ |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0\}.$$

Пользуясь понятиями max-точкой и min-точкой, можно характеризовать элементы F_Δ, которые являются дополненными графиками функции.

Лемма 1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы точечное множество $F \in F_\Delta$ являлось дополненным графиком некоторой ограниченной функции, заданной на отрезке Δ, заключается в следующем: не существует точки $x_0 \in \Delta$, которая является одновременно* max-*точкой F и* min-*точкой F.*

Доказательство. Необходимость условия можно считать очевидной. Для установления достаточности условия можно воспользоваться функцией

$$f(x) = \begin{cases} S_F(x), & \text{если } x \text{ является max-точкой для } F \\ & \text{или } x\text{-иррациональное число, но не} \\ & \text{является min-точкой для } F; \\ I_F(x), & \text{если } x \text{ является min-точкой для } F \\ & \text{или } x\text{-рациональное число, но не} \\ & \text{является max-точкой для } F. \end{cases}$$

При выполнении условия леммы f определяется таким образом однозначно в каждой точке $x \in \Delta$. Легко проверяется, что $\bar{f} = F$. Этим лемма доказана.

Хаусдорфово расстояние с параметром α между двумя элементами $F, G \in F_\Delta$ определим, как обычно [1], следующим образом:

$$r(\alpha, \Delta;\ F, G) = \max\{\max_{A \in F} \min_{B \in G} d_\alpha(A, B),\ \max_{A \in G} \min_{B \in F} d_\alpha(A, B)\},$$

где $d_\alpha(A, B) = d_\alpha(A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)) = \max[\alpha^{-1}|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|]$ и $\alpha > 0$.

Хаусдорфово расстояние между двумя ограниченными функциями, заданными на отрезке Δ, определяется как хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е. $r(\alpha, \Delta; f, g) = r(\alpha, \Delta;\ \bar{f}, \bar{g})$.

Если нет надобности подчеркивать, в каком интервале рассматривается хаусдорфово расстояние, вместо $r(\alpha, \Delta; f, g)$ будем писать $r(\alpha; f, g)$.

Следующее неравенство [2] дает связь между хаусдорфовым расстоянием и равномерным расстоянием $R(f, g) = \sup_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$, а именно

$$r(\alpha; f, g) \leqq \|f - g\| \leqq r(\alpha; f, g) + \omega(f; \alpha r(\alpha; f, g)), \tag{1}$$

где $\omega(f; \delta)$ модуль непрерывности одной из двух функций на отрезке Δ.

Докажем одно следствие из неравенства (1).

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots$ последовательность дифференцируемых функций заданных на отрезке Δ, для которых

(2) $\varphi_0'(x)=0; \quad \|\varphi_p'-\varphi_{p-1}'\|\leqq c_p\|\varphi_p-\varphi_{p-1}\|; \quad p=1, 2, 3, \ldots$

Лемма 2. *Если последовательность* $\{\varphi_p\}_0^\infty$ *удовлетворяет условию* (2), *то*

(3) $$\|\varphi_p'\|\leqq\frac{1}{\alpha}\left(-1+\prod_{i=1}^{p}(1+\alpha c_i\, r(\alpha;\varphi_i,\varphi_{i-1}))\right).$$

Доказательство. Пользуясь неравенством (1), (2) и свойством модуля непрерывности, получаем последовательно

$$\|\varphi_p'\|\leqq\|\varphi_p'-\varphi_{p-1}'\|+\|\varphi_{p-1}'\|\leqq c_p\|\varphi_p-\varphi_{p-1}\|+\|\varphi_{p-1}'\|$$
$$\leqq c_p r(\alpha;\varphi_p,\varphi_{p-1})+c_p\omega(\varphi_{p-1};\alpha r(\alpha;\varphi_p,\varphi_{p-1}))+\|\varphi_{p-1}'\|$$
$$\leqq c_p r(\alpha;\varphi_p,\varphi_{p-1})+(1+\alpha c_p r(\alpha;\varphi_p,\varphi_{p-1}))\|\varphi_{p-1}'\|$$

или $1+\alpha\|\varphi_p'\|\leqq(1+\alpha c_p r(\alpha;\varphi_p,\varphi_{p-1}))(1+\alpha\|\varphi_{p-1}'\|)$.

Из последнего, имея в виду (2) и что $\|\varphi_0'\|=0$, получаем (3). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_p\}_0^\infty$ *последовательность функций, удовлетворяющих условию* (2) *и* f *произвольная ограниченная функция, заданная на том же отрезке* Δ. *Тогда для модуля непрерывности* f *имеет место следующее неравенство*

(4) $$\omega(f;\delta)\leqq\left(\frac{\delta}{\alpha}+2r(\alpha;f,\varphi_p)\right)\prod_{i=1}^{p}(1+\alpha c_i r(\alpha;\varphi_i,\varphi_{i-1})),\quad p=1, 2, 3,\ldots$$

Доказательство. Используя неравенство (1) и свойства модуля непрерывности, получаем

$$\omega(t;\delta)\leqq\omega(f-\varphi_p;\delta)+\omega(\varphi_p;\delta)\leqq2\|f-\varphi_p\|+\delta\|\varphi_p'\|$$
$$\leqq2r(\alpha;f,\varphi_p)+2\omega(\varphi_p;\alpha r(\alpha;f,\varphi_p))+\|\varphi_p'\|$$
$$\leqq2r(\alpha;f,\varphi_p)+(\delta+2\alpha r(\alpha;f,\varphi_p))\|\varphi_p'\|.$$

Из последнего, используя (3), получаем (4). Лемма доказана. Подобная оценка дана и в работе [2].

Пусть W — некоторое множество функций, заданных на отрезке Δ, и f — элемент F_Δ или ограниченная функция, заданная на Δ. Наилучшее приближение f элементами W относительно хаусдорфова расстояния с параметром α назовем число

$$E(W,\alpha,\Delta;f)=\inf\{r(\alpha,\Delta;f,\varphi):\varphi\in W\}.$$

2. Обозначим через $S_{k,n}$ множество всех сплайн-функций порядка (k,n), заданных на отрезке $\Delta=[a,b]$. Функция s принадлежит $S_{k,n}$, если $s\in C_\Delta^{k-1}$ (имеет непрерывные производные до порядка $k-1$ на отрезке Δ) и существуют $n+1$ узлов $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, так что на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=1, 2, 3,\ldots, n$, функция s совпадает с алгебраическим многочленом степени не выше k. Для $k=0$ множество $S_{0,n}$ состоит из

ступенчатых функций, а для $k=1$ $S_{1,n}$ состоит из частично линейных непрерывных функций (ломаных). Для элементов $S_{0,n}$ возникает вопрос об их значениях в узлах. Ступенчатые функции из $S_{0,n}$ можно считать непрерывными слева или справа. Это не имеет значения в дальнейшем, так как мы будем всегда рассматривать только дополненные графики всех функций.

Обозначим

$$(x_i-x)_+^k=\begin{cases}(x_i-x)^k & \text{для } x\leqq x_i,\\ 0 & \text{для } x>x_i.\end{cases}$$

Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 4. *Каждую функцию $s\in S_{k,n}$ можно представить следующим образом:*

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x_i-x)_+^k+P(x),$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы, а P — алгебраический многочлен степени $k-1$.

Дальше нам будет необходима одна лемма, которая была доказана еще Л. Чакаловым [3], а потом И. Шенбергом [4].

Лемма 5. *Сплайн-функции*

$$\varphi_{i,k}(x)=\sum_{j=i}^{i+k+1}\frac{(k+1)(x_j-x)_+^k}{\omega'_{i,k+1}(x_j)};\quad i=0, 1, 2, \ldots, n-k-1,$$

где $\omega_{i,k+1}(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{i+k+1})$, удовлетворяют условиям

$$\varphi_{i,k}(x)=0 \text{ для } x\in[a, x_i]\cup[x_{i+k+1}, b],$$

$$\varphi_{i,k}(x)>0 \text{ для } x\in(x_i, x_{i+k+1}),$$

$$\int_a^b\varphi_{i,k}(x)dx=1.$$

Используя эту лемму, докажем одно утверждение для сплайн-функции из $S_{k,n}$.

Лемма 6. *Если $\psi\in S_{k,n}$ и*

$$(\psi x)\leqq\delta \text{ для } x\in[x_{i-1}, x_i]\cup[x_{i+k+1}, x_{i+k+2}];\ i+k+2\leqq n, \tag{5}$$

то существует константа c, не зависящая от δ, такая, что

$$\text{или } \psi(x)\leqq c\delta \text{ для } x\in[x_i, x_{i+k+1}], \text{ или } \psi(x)\geqq -c\delta \text{ для } x\in[x_i, x_{i+k+1}].$$

Доказательство. Допустим противоположное, что такая константа не существует. Тогда для каждого положительного числа M существует сплайн-функция $\psi_M\in S_{k,n}$, для которой выполнено (5) и, кроме того,

$$\max\{\psi_M(x): x_i\leqq x\leqq x_{i+k+1}\}\geqq M,$$

$$\min\{\psi_M(x): x_i\leqq x\leqq x_{i+k+1}\}\leqq M.$$

Тогда существует $\psi_0 \in S_{k,n}$, для которой $\psi_0(x_\nu)=\psi_0'(x_\nu)=\ldots=\psi_0^{(k-1)}(x_\nu)=0$, $\nu=i,\ i+k+1$ и ψ_0 принимает как положительные, так и отрицательные значения на отрезке $[x_i,\ x_{i+k+1}]$.

Рассмотрим сплайн-функцию $s \in S_{k+1,n}$, заданную следующим образом:

$$s(x)=0 \text{ для } x \in [a, x_i] \bigcup [x_{i+k+1},\ b],$$

$$s(x)=\int_{x_i}^{x} (\psi_0(t)+\lambda\varphi_{i,k}(t))\,dt \text{ для } x \in [x_i,\ x_{i+k+1}],$$

где $\varphi_{i,k} \in S_{k,n}$ — функция, дефинированная в лемме 5, а константа λ определяется условием $s(x_{i+k+1})=0$.

Имея в виду вид выбранной функции ψ_0 и свойства функции $\varphi_{i,k}$, не трудно видеть, что s действительно принадлежит $S_{k+1,n}$ и не тождественно равно нулю.

С другой стороны, согласно определению сплайн-функции s имеем, что $s(x_\nu)=s'(x_\nu)=\ldots=s^{(k)}(x_\nu)=0$ для $\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ i,\ i+k+1,\ i+k+2,\ldots,\ n$.

Пользуясь леммой 4, из последних равенств следует, что s тождественно равна нулю. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 7. *Пусть заданы числа: $M\geqq 0$, $m\leqq 0$ и $d \in [m, M]$. Существует сплайн-функция $\theta \in S_{k,n}$, для которой*

(6) $$\theta(x)=0 \text{ для } x \in [a,\ x_i],\ i\geqq 0,$$

(7) $$\theta(x)=d \text{ для } x \in [x_{i+k+2},\ b],\ i+k+2\leqq n,$$

(8) $$\max\{\theta(x): x_i\leqq x\leqq x_{i+k+2}\}=M,$$

(9) $$\min\{\theta(x): x_i\leqq x\leqq x_{i+k+2}\}=m.$$

Доказательство. Рассмотрим сплайн-функцию

$$\theta(x)=\beta\varphi_{i,k}(x)-\gamma\,\varphi_{i+1,k}(x)+d\int_a^x \varphi_{i+1,\,k-1}(t)dt,$$

где $\varphi_{i,k}$ — функция, дефинированная в лемме 3. Непосредственно проверяется, что $\theta \in S_{k,n}$ и удовлетворяет условиям (6) и (7). Это следует из свойства функции $\varphi_{i,k}$. Не трудно видеть, что неотрицательные константы β и γ определяются однозначно условиями (8) и (9), так как $\varphi_{i,k}$ строго положительна в интервале $(x_i,\ x_{i+k+1})$ и равна нулю вне его.

3. Дальше будем рассматривать только сплайн-функции с равноотстоящими узлами на отрезке $\Delta=[a, b]$.

Для четного k будем пользоваться узлами $x_0=a$, $x_1=x_0+h/2$, $x_2=x_1+h$, $x_3=x_2+h,\ldots,\ x_{n-1}=x_{n-2}+h,\ x_n=x_{n-1}+h/2=b$, где $h=(b-a)/(n-1)$.

Для нечетного будем пользоваться узлами $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h,\ldots,\ x_n=x_{n-1}+h=b$, где $h=(b-a)/n$.

Множество всех сплайн-функций порядка $(k,\ n)$ с вышеопределенными узлами обозначим через $S_{k,n}$.

Из выбора узлов следует, что:

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned} &\text{для } k \text{ нечетного } S_{k,n} \subset S_{k,2n};\\ &\text{для каждого целого } k \geqq 0,\ S_{k,n} \subset S_{k,3n}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Маркова для алгебраических многочленов, можно получить аналог неравенства Бернштейна для сплайн-функции из $S_{k,n}$. Так как для четных k наименьшим расстоянием между двумя узлами является $(b-a)/2(n-1)$, а для нечетных k это расстояние всегда равно $(b-a)/n$, то имеет место следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $s \in S_{k,n}$. Для каждого $x \in \Delta$ имеет место неравенство*

$$s'(x) \leqq \frac{2k^2n}{b-a} \max_{x \in \Delta} |s(x)| \quad \text{для } k \text{ нечетного},$$

$$s'(x) \leqq \frac{4k^2(n-1)}{b-a} \max_{x \in \Delta} |s(x)| \quad \text{для } k \text{ четного}.$$

Оценка снизу для наилучшего хаусдорфова приближения сплайн-функциями из $S_{k,n}$ дается следующей теоремой.

Теорема 1.

$$E(S_{k,n}, \alpha, \Delta; F_\Delta) = \sup_{F \in F_\Delta} E(S_{k,n}, \alpha, \Delta; F) \geqq (k+3)h/2\alpha,$$

где $h=(b-a)/(n-1)$ для k четного и $h=(b-a)/n$ для k нечетного.

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $F_0 \in F_\Delta$, для которого $E(S_{k,n}, \alpha, \Delta; F_0) \geqq (k+3)h/2\alpha-\varepsilon$. Это можно установить легко, если для F_0 возьмем точечное множество из F_Δ, состоящее из одного горизонтального отрезка $\{(x, y): x \in \Delta,\ y=0\}$ и одного вертикального отрезка $\{(x, y): x=x',\ y \in [-M, M]\}$, где x' совпадает с некоторым узлом для k нечетного и с серединой между двумя узлами при k четном. Имея в виду лемму 6, если M достаточно большое, каждая сплайн-функция $s \in S_{k,n}$, которая приближается к F_0 достаточно хорошо, должна иметь достаточно большие значения с противоположными, знаками на интервале длиной $(k+2)h$. Тогда, при достаточно больших M и при указанном выборе x'

$$r(\alpha, \Delta; F_0, s) \geqq (k+2)h/2\alpha + h/2\alpha - \varepsilon = (k+3)h/2\alpha - \varepsilon.$$

Этим теорема доказана.

По всей вероятности, оценку в теореме 1 нельзя улучшить, но этого мы пока не могли доказать для всех k. Все-таки порядок точен.

Теорема 2. *Для каждого $F \in F_\Delta$ имеет место неравенство*

$$E(S_{k,n}, \alpha, \Delta; F) \leqq (k+2)h/\alpha,$$

где $h=(b-a)/(n-1)$ для k четного и $h=(b-a)/n$ для k нечетного.

Доказательство. Теорема следует непосредственно из леммы 7. Достаточно сгруппировать отрезки $\Delta_i=[x_i, x_{i+1}]$ в группы по $k+2$ последовательных отрезков, при этом в первой и в последней группе, в зависимости от делимости n на $k+2$, содержится между $[(k+3)/2]$ и $k+2$ отрезков. Обозначим полученные этим образом отрезки через $D_l=[\xi_l, \xi_{l+1}]$, $l=0, 1, 2, \ldots, q$. Согласно проделанной конструкции ξ_l совпадает с некоторым узлом и $\xi_{l+1}-\xi_l=(k+2)h$ для $l=1, 2, 3, \ldots, q-1$.

Определим следующие числа:

$$M_l=\max\{y: x\in D_l,\ (x, y)\in F\},$$

$$m_l=\min\{y: x\in D_l,\ (x, y)\in F\},$$

$$d_l=\frac{1}{2}[\min(M_l, M_{l+1})+\max(m_l, m_{l+1})],\quad l=0, 1, 2, \ldots, q-1.$$

Согласно лемме 7 существует сплайн-функция $s_l\in S_{k,n}$; $l=1, 2, 3, \ldots, q-1$, для которой

$$s_l(x)=0 \text{ для } x\in[\alpha, \xi_l],\quad s_l(x)=d_l-d_{l-1} \text{ для } x\in[\xi_{l+1}, b],$$

$$\max_{x\in D_l} s_l(x)=M_l-d_{l-1},\quad \min_{x\in D_l} s_l(x)=m_l-d_{l-1}.$$

Кроме того, не трудно сообразить, что существует $s_0\in S_{k,n}$, для которой

$$\max_{x\in D_0} s_0(x)=M_0,\quad \min_{x\in D_0} s_0(x)=m_0,\quad s(x)=d_0 \text{ для } x\in[\xi_1, b],$$

и что существует $s_q\in S_{k,n}$, для которой

$$\max_{x\in D_q} s_q(x)=M_q-d_{q-1},\quad \min_{x\in D_q} s_q(x)=m_q-d_{q-1},\quad s(x)=0 \text{ для } x\in[a, \xi_{q-1}].$$

Обозначим $s(x)=\Sigma_{l=0}^{q} s_l(x)$. Тогда из определения сплайн-функции s_l; $l=0, 1, 2, \ldots, q$ следует, что $s\in S_{k,n}$ и $r(\alpha, \Delta; F, s)\leqq(k+2)h/\alpha$. Этим теорема доказана.

Следствие 1. *Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что*

$$(k+3)h/2\alpha\leqq E(S_{k,n}, \alpha;\ F_\Delta)\leqq(k+2)h/\alpha,$$

где $h=(b-a)/n$ *для* k *нечетного и* $h=(b-a)/(n-1)$ *для* k *четного.*

Естественно, возникает вопрос о нахождении точного значения $E(S_{k,n}, \alpha;\ F_\Delta)$. Мы предполагаем, что $E(S_{k,n}, \alpha;\ F_\Delta)=(k+3)h/2\alpha$, но можем это доказать только для $k=0$ и 1.

Теорема 3. $E(S_{0,n}, \alpha;\ F_\Delta)=3(b-a)/2\alpha(n-1)$.

Доказательство. Пусть F — произвольный элемент из F_Δ. Обозначим

$$m_i=\min\{y: x\in[x_i-h/2,\ x_i+h/2],\ (x, y)\in F\},$$

$$M_i=\max\{y: x\in[x_i-h/2,\ x_i+h/2],\ (x, y)\in F\},$$

для $i=1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Определяем ступенчатую функцию $s\in S_{k,n}$ следующим образом (см. рис. 1):

$$s(x) = m_1 \quad \text{для} \quad x \in [x_0, x_1],$$
$$s(x) = \max[M_1, M_2] \quad \text{для} \quad x \in [x_1, x_2],$$
$$s(x) = \min[m_2, m_3] \quad \text{для} \quad x \in [x_2, x_3],$$
$$s(x) = \max[M_3, M_4] \quad \text{для} \quad x \in [x_3, x_4],$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

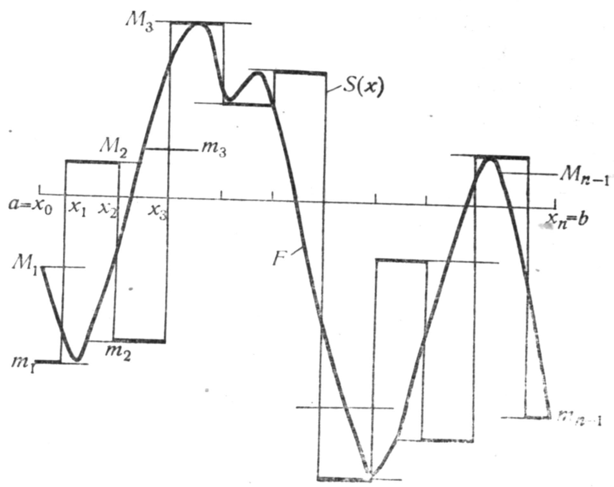

Рис. 1

Непосредственно проверяется, что $r(\alpha, \Delta; F, s) \leqq 3(b-a)/2\alpha(n-1)$. Из последнего неравенства и следствия 1 получаем утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. $E(S_{1,n}, \alpha; F_\Delta) = 2(b-a)/\alpha n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — произвольный элемент F_Δ. Обозначим (см. рис. 2):

$$M_0 = \max\{y : x \in [x_0, x_1],\ (x, y) \in F\},$$
$$m_1 = \min\{y : x \in [x_0, x_2],\ (x, y) \in F\},$$
$$M_2 = \max\{y : x \in [x_1, x_3],\ (x, y) \in F\},$$
$$m_3 = \min\{y : x \in [x_2, x_4],\ (x, y) \in F\},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Определяем частично-линейную функцию $s \in S_{1,n}$ так, чтобы

$$s(x_0) = M_0,\ s(x_1) = m_1,\ s(x_2) = M_2,\ s(x_3) = m_3, \ldots$$

Непосредственно проверяется, что имеет место $r(\alpha, \Delta; F, s) \leqq 2(b-a)/\alpha n$. Из последнего неравенства и следствия 1 получаем утверждение теоремы.

Доказанная теорема сформулированна в [2] для сплайнов из $S_{1,n}$ с произвольными узлами. Следовательно, сплайны $S_{1,n}$ с равномерными узлами дают оптимальное приближение класса F_Δ.

4. Рассмотрим некоторые обратные теоремы, в которых из оценки для наилучшего приближения $F \in F_\Delta$ сплайн-функциями из $S_{k,n}$ можно

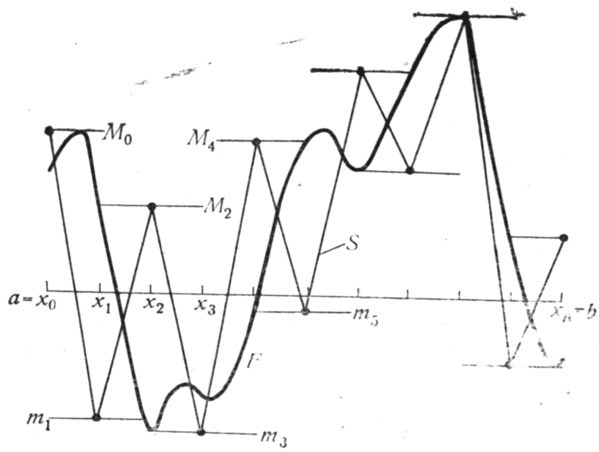

Рис. 2

получить некоторые свойства F. Универсальная оценка здесь имеет порядок $1/n$ и следует отметить, что характеристику F можно получить посредством константы, находящейся перед $1/n$ в оценке для наилучшего приближения F. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 9. *Пусть U_Δ^M — точечное множество*

$$U_\Delta^M = \{(x, y) : x \in \Delta = [a, b],\ y \in [-M, M]\},$$

представляющее плотный прямоугольник. Тогда для каждого натурального n имеют место следующие соотношения:

$$E(S_{0,n}, \alpha, \Delta;\ U_\Delta^M) \leqq (b-a)/2\alpha(n-1), \tag{11}$$

притом для $n \geqq (b-a)/2\alpha M$ имеется точное равенство,

$$E(S_{k,n}, \alpha, \Delta;\ U_\Delta^M) < h/\alpha,\ \ k=1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

где $h=(b-a)/(n-1)$ для k четного и $h=(b-a)/n$ для k нечетного.

Доказательство. Неравенство (11) доказывается непосредственно путем аппроксимации U_Δ^M ступенчатой функции

$$s(x) = \begin{cases} -M & \text{для } x \in [x_{2l},\ x_{2l+1}), \\ \ \ M & \text{для } x \in [x_{2l+1},\ x_{2l+2}), \end{cases}$$

$$l=0, 1, 2, \ldots, [n/2].$$

Для установления (12) необходимо доказать существование сплайн-функции из $S_{k,n}$, которая имеет одинаковые максимальные значения (M) и одинаковые минимальные значения ($-M$), расстояние между которыми равно $2h$. Такую функцию можно строить по-разному для четных и для нечетных k.

Нечетным $k=2m+1$ ставим в соответствие нечетный многочлен

$$P(x)=a_1x+a_3x^3+\ldots+a_mx^{2m+1},$$

который удовлетворяет следующим условиям:

$$P(1)=1,\ P^{(l)}(1)=0 \text{ для } l=1,3,5,\ldots,2m-1.$$

Эти условия совместимы и определяют однозначно многочлен P. Нетрудно видеть, что функция

$$S_M(x)=MP((-1)^l(\frac{2(x-a)}{h}-2l-1))$$

является для $x\in[x_l,\ x_{l+1}]$, $l=0,1,2,\ldots,\ n-1$, сплайн-функцией из $S_{k,n}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что $r(\alpha,\ \Delta;\ U_\Delta^M,\ s_M)<h/\alpha=(b-a)/\alpha n$.

Для четных $k=2m$ рассматриваем четный многочлен

$$Q(x)=1+b_1x^2+b_2x^4+\ldots+b_mx^{2m},$$

который удовлетворяет условиям $Q^{(2l)}(1)=0$ для $l=0,1,2,\ldots,\ m-1$.

Эти условия совместимы и определяют однозначно многочлен Q. Нетрудно видеть, что функция

$$\theta_M(x)=(-1)^lMQ(\frac{2(x-a)}{h}-2l)$$

является для $x\in[x_l,\ x_{l+1}]$, $l=0,1,2,3,\ldots,\ n-1$, сплайн-функцией из $\overline{S}_{k,n}$. Кроме того,

$$r(\alpha,\ \Delta;\ U_\Delta^M,\ \theta_M)<h/\alpha=(b-a)/\alpha(n-1).$$

Этим лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть $F\in F_\Delta$ и k — целое положительное число. Если*

$$\limsup_{n\to\infty} nE(S_{k,n},\ \alpha,\ \Delta;\ F)<(b-a)/2\alpha k^2$$

и k нечетное, то F является графиком непрерывной функции на отрезке Δ. То же самое имеет место для k четное, если

$$\limsup_{n\to\infty} n\,E(\overline{S}_{k,n},\ \alpha,\ \Delta;\ F)<(b-a)/4\alpha k^2.$$

Доказательство. Докажем только первую часть теоремы, так как вторая часть доказывается таким же способом. Обозначим через

$s_{n,F} \in S_{k,n}$ сплайн-функцию наилучшего хаусдорфова приближения F, где k нечетное число. Из леммы 8 следует, что

$$\|s'_{2j,F} - s'_{j,F}\| \leqq \frac{2k^2\, 2j}{b-a} \|s_{2j,F} - s_{j,F}\|.$$

Тогда, если в лемме 3 $\varphi_i = s_{2^i,F}$; $i = 0, 1, 2, \ldots$, и $\delta = \alpha E(\bar{S}_{k,n}, \alpha, \Delta;\, F)$, получаем

$$\omega(F;\, \alpha E(\bar{S}_{k,n}, \alpha, \Delta;\, F))$$

$$\leqq 3E(S_{k,n}, \alpha, \Delta;\, F) \prod_{i=1}^{[\ln_2 n]} \left(1 + \alpha \frac{2k^2\alpha^i}{b-a} (E(S_{k,2^i}, \alpha, \Delta;\, F) + E(\bar{S}_{k,2^{i-1}}, \alpha, \Delta;\, F))\right)$$

или, для достаточно больших n

$$\omega\left(F;\, \frac{b-a}{2k^2 n}\right) \leqq \frac{3(b-a)}{2\alpha k^2 n} (4-3\varepsilon)^{\ln_2 n},$$

т. е.

$$\omega\left(F;\, \frac{b-a}{2k^2 n}\right) \leqq \frac{3(b-a)}{\alpha k^2} n^{-\nu},$$

где $\nu > 0$. Следовательно, $\lim_{\delta\to 0} \omega(F;\, \delta) = 0$. Этим теорема доказана.

Из леммы 9 следует, что в теореме 5 константу $(b-a)/2\alpha k^2$ для нечетных k и константу $(b-a)/4\alpha k^2$ для четных k нельзя заменить на константу большую или равную $(b-a)/\alpha$.

Остается открытым вопрос о нахождении константы $c(k)$, для которой неравенство $\limsup_{n\to\infty} nE(\bar{S}_{k,n}, \alpha, \Delta;\, F) < c(k)(b-a)/\alpha$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы F было графиком непрерывной функции на отрезке Δ.

Пока известно только, что $1/2k^2 \leqq c(k) \leqq 1$ для нечетных k и $1/4\, k^2 \leqq c(k) \leqq 1$ для четных k.

5. Остановимся более подробно на приближении ступенчатых функций, т. е. на элементах $\bar{S}_{0,n}$.

Пусть $F \in F_\Delta$ и

$$c_0(F) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha n}{b-a} E(\bar{S}_{0,n}, \alpha, \Delta;\, F).$$

Согласно теореме 3 для каждого $F \in F_\Delta$, $0 \leqq c_0(F) \leqq 3/2$.

Т е о р е м а 6. *Пусть $F \in F_\Delta$. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы F было дополненным графиком некоторой ограниченной на отрезке Δ функции, является неравенство*

$$c_0(F) < 3/2. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что (13) выполнено и F не является дополненным графиком ограниченной функции на отрезке Δ. Согласно лемме 1 существует точка $\xi_0 \in \Delta$, такая, что ξ_0 является одновременно и max-точкой, и min-точкой множества F. Это означает, что можно найти два положительных числа $\tau > 0$, $\delta > 0$ таких, что

$$S_F(\xi_0)<\sup\{\,y:(x,y)\in F,\ x-\xi_0<\delta,\ x\neq\xi_0\}+\tau,$$
$$I_F(\xi_0)<\inf\{\,y:(x,y)\in F,\ x-\xi_0<\delta,\ x\neq\xi_0\}-\tau.$$

Так как для каждого вещественного числа γ неравенство [5, с. 6]

$$\gamma-p/q<q^{-2}$$

имеет бесконечное число решений в целых числах p, q, то для бесконечного числа значений n точка ξ_0 будет находиться на расстоянии не большем n^{-2} от середины между двумя узлами. Тогда для бесконечного числа значений n будет иметь место (см. рис. 3)

$$E(S_{0,n},\alpha,\Delta;F)\geqq 3(b-a)/2\alpha n-1/\alpha n^2.$$

Но из последнего следует, что $c_0(F)=3/2$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть $F\in F_\Delta$. Если $c_0(F)<1$, то F не имеет ни max-точки, ни min-точки.*

Доказательство. Допустим, что F имеет или max-точку, или min-точку ξ_0. Тогда, как и в доказательстве предыдущей теоремы, имея в виду, что для бесконечного числа значений n точка ξ_0 будет на расстоянии не большем n^{-2} от некоторого узла, приходим к выводу, что $c_0(F)\geqq 1$. Этим доказательство теоремы завершается.

Теорема 8. *Пусть $F\in F_\Delta$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы F являлось графиком непрерывной функции на отрезке Δ, является неравенство $c_0(F)<1/2$.*

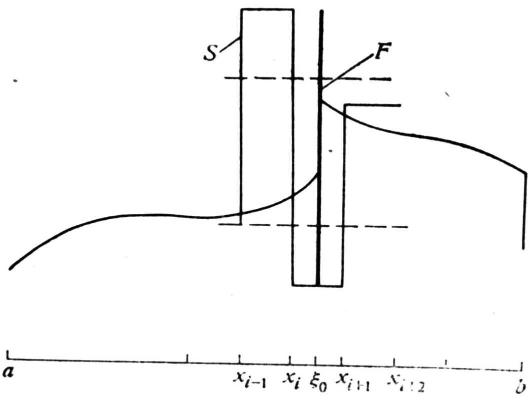

Рис. 3

Доказательство. Допускаем, что условие $c_0(F)<1/2$ выполнено и F не является графиком непрерывной функции на отрезке Δ. Тогда существует точка $\xi_0\in\Delta$, для которой $S_F(\xi_0)>I_F(\xi_0)$.

Как и при доказательстве теоремы 6, имея в виду, что для бесконечного числа значений n точка ξ_0 будет находиться на расстоянии не большем n^{-2} от середины между двумя узлами, приходим к выводу, что

$c_0(F) \geqq 1/2$. Этим достаточность условия доказана. Необходимость условия следует из неравенства (11) леммы 9, которое показывает, что $c_0(U_\Delta^M) = 1/2$. Но U_Δ^M не является графиком непрерывной функции на отрезке Δ.

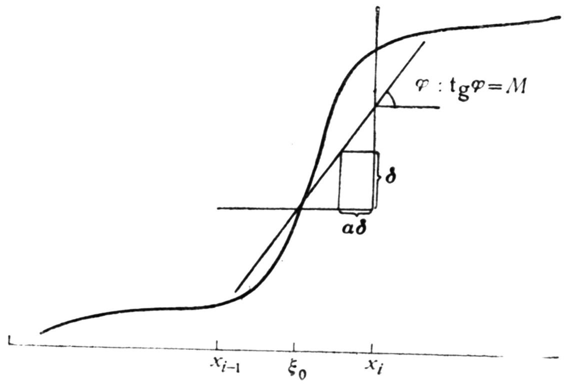

Рис. 4

Теорема 9. *Пусть f — непрерывная функция на отрезке Δ. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $f \in \mathrm{Lip}_M 1$, является неравенство $c_0(f) \leqq \alpha M/(1+\alpha M)$.*

Доказательство. Если $f \in \mathrm{Lip}_M 1$, т. е. $f(x+h) - f(x) \leqq Mh$, то для ступенчатой функции $\psi \in S_{0,n}$, для которой

$\psi(x) = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, получаем $r(\alpha, \Delta; f, \psi) \leqq Mh/(1+\alpha M)$,

где $h = (b-a)/(n-1)$. Следовательно, $c_0(f) \leqq \alpha M/(1+\alpha M)$.

Этим необходимость условия доказана. Достаточность доказывается посредством допущения противоположного. Пусть условие теоремы выполнено и f не принадлежит $\mathrm{Lip}_M 1$. Тогда существует точка $\xi_0 \in \Delta$, для которой

$$(14) \qquad \sup_{h>0} f(x+h) - f(x)/h > M.$$

Но для бесконечного числа значений n точка ξ_0 будет на расстоянии не большем n^{-2} от середины между двумя узлами. Тогда из (14) (см. рис. 4) следует

$$c_0(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha n}{b-a} E(S_{0,n}, \alpha, \Delta; f)$$

$$> \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha n}{b-a} \frac{M((b-a)/n - n^{-2})}{1+\alpha M} = \alpha M/(1+\alpha M),$$

что противоречит условию. Теорема, таким образом, доказана.

Следствие 2. *Если* $F \in F_\Delta$ *и*

$$E(S_{0,n}, \dot{\alpha}, \Delta; F) = o(1/n),$$

то F — *горизонтальный отрезок, т. е. график функции* $f(x) = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и жеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141— 178.
2. Е. П. Долженко, Е. А. Севастианов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике. *Доклады АН СССР*, **226**, 1976, № 4, 768 — 770.
3. Л. Чакалов. Върху едно представяне на Нютоновите частни в теорията на интерполациите и неговите приложения. *Годишник Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, **34**, 1938, 353 — 405.
4. I. J. Schoenberg. On spline functions, Inequalities. New York — London, 1957, 255 — 292.
5. Дж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений. Москва, 1961.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 31. 8. 1976