PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МАКСИМАЛЬНОЙ ДИЭДРАЛЬНОЙ ПОДГРУППОЙ

НИКОЛА Т. ПЕТРОВ

В работе рассматриваются конечные группы, содержащие максимальную подгруппу, изоморфную диэдральной группе D_{2n}, n — нечетно (МД-группы). Описание таких групп сводится к случаям, когда группа либо разрешима, либо простая. Приводится полное описание разрешимого случая. Далее, при некоторых ограничениях на число простых делителей группового порядка доказывается, что простая МД-группа принадлежит одной из серий PSL$(2, q)$ и Sz(q).

Конечную группу G будем называть группой с максимальной диэдральной подгруппой (или короче: МД-группой), если она удовлетворяет следующим условиям:

а) G содержит подгруппу N, изоморфную диэдральной группе D_{2n}, n — нечетно,

$$N=\langle a,\ t \mid a^n=t^2=1,\ tat=a^{-1}\rangle;$$

б) подгруппа N максимальна в G.

Полное описание простых МД-групп пока не известно. Их изучением занимались Г. Хигмэн [6], К. Харада [4], Стюарт [6].

Здесь приводим полное описание разрешимых МД-групп. Далее, при некоторых ограничениях на число простых делителей порядка группы G покажем, что простая МД-группа G принадлежит серии PSL$(2, q)$ или Sz(q).

Заметим, что все известные простые МД-группы — это PSL$(2, q)$ и группы Сузуки Sz(q). Если q — четное, группа PSL$(2, q)$ содержит две максимальные диэдральные подгруппы соответственно порядка $2(q+1)$ и $2(q-1)$. При нечетном q PSL$(2, q)$ содержит с точностью до сопряженности только одну подгруппу с условиями а), б), $|N|=q\pm 1$, где знак $\pm$ выбирается так, чтобы $(q\pm 1)/2$ было нечетным. В группах Сузуки соответствующая диэдральная подгруппа имеет порядок $2(q-1)$ $(q=2^{2r+1},\ r\geqq 1)$.

Фиксируем обозначения: $K=\langle a\rangle$, $|K|=n$, t — инволюция из N. Далее, если говорится о МД-группе G, символы t, a, N, K будут использоваться без дополнительных пояснений, ибо всегда имеется в виду их уже указанный смысл; n всегда предполагается нечетным. Слово „группа" всегда означает „конечная группа". Знак $\subset$ имеет смысл строгого включения. Остальные обозначения стандартны.

Лемма 1. *Пусть G — простая МД-группа. Тогда:*

а) *подгруппа K — с тривиальным пересечением в G (т. е. из $K\cap K^x \neq\{1\}$, $x \in G$, всегда следует, что $K^x=K$);*

б) *если $\{1\}\neq K_0\subseteq K$, то $N_G(K_0)=N$; в частности $C_G(K_0)=K$;*

в) *K — холловская подгруппа в G.*

Доказательство. а) Предположим, что при некотором $x \in G$ выполняется: $K^x \neq K$, $K^x \cap K \neq \{1\}$ (впредь $X^y = yXy^{-1}$). Тогда $K^x \cap K \triangle \langle N, K^x \rangle$, поскольку K — абелева. Но $N \subset \langle N, K^x \rangle$. Следовательно, $\langle N, K^x \rangle = G$, т. е. $\{1\} \neq K^x \cap K \triangle G$ — противоречие.

б) Очевидно, потому что N — максимальна в простой группе G.

в) Из б) следует, что нормализатор любой силовской p-подгруппы группы K совпадает с N. Следовательно, любая силовская p-подгруппа в K является силовской p-подгруппой группы G.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая МД-группа. Тогда справедливо одно из следующих:*

а) $K \triangle G$, $|G| = 4n$ $(n = |K|)$;

б) $K \triangle G$, $|G| = 2pn$, p — *нечетное простое и*
$G = \langle a, b, t \mid a^n = b^p = t^2 = 1,\ tat = a^{-1},\ tbt = b^{-1},\ ab = ba \rangle$;

в) $G = \langle a, b, t \mid a^n = b^p = t^2 = 1,\ tat = a^{-1},\ b^{-1}ab = a^r,\ tb = bt \rangle$,

где p — нечетное простое, делящее $\varphi(n)$ (φ — функция Эйлера), r — целое положительное, для которого

$$r^p \equiv 1 \pmod{n};$$

г) *существуют нормальные подгруппы T и K_1, $K_1 = K \cap T$, такие, что $G/T \cong N/K_1$, T/K_1 — элементарная абелева p-группа и N действует неприводимо на T/K_1.*

Доказательство. Предположим сначала, что K — нормальна в G и пусть S_2 — силовская 2-подгруппа в G. Если $|S_2| > 2$, то $G = S_2 K$, поскольку можно считать $t \in S_2$ и $N \subset S_2 K$. Так как $|K| = n$ — нечетно, то $|G| = |S_2| n$. Ввиду максимальности подгруппы N порядок S_2 должен быть 4, т. е. имеет место а). Пусть $K \triangle G$ и $|S_2| = 2$. Тогда имеются две возможности: либо $C_G(t) = \langle t \rangle$, либо $\langle t \rangle \subset C_G(t)$. В обоих случаях по теореме Бернсайда G имеет нормальное 2-дополнение $O(G)$, $G = \langle t \rangle\ O(G)$. В первом случае t действует регулярно на $O(G)$ (т. е. из $x \in O(G)$, $txt = x$ следует $x = 1$), следовательно, $O(G)$ — абелева группа. В $O(G) \setminus K$ выбираем элемент b простого порядка p. Так как максимальная подгруппа $N = \langle a, t \rangle$ строго содержится в $\langle a, b, t \rangle$, то имеет место б). Дальше, если $\langle t \rangle \subset C_G(t)$, выбираем в $O(G) \setminus K$ такой элемент простого порядка, чтобы $tb = bt$. Тогда имеет место в). Условия для p и r легко следуют из соображений о группе автоморфизмов группы K.

Дальше предположим, что K не нормальна в G и K не содержит неединичных подгрупп, нормальных в G. Тогда справедливо заключение леммы 1 (доказательство этой леммы сводилось к тому, что если нарушается некоторое из заключений а), б), то существует подгруппа H, такая, что $H \subseteq K$ и $H \triangle G$). Пусть T — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G — разрешима, то T является элементарной абелевой p-подгруппой. Если $t \in T$, то $t \,.\, a^{-1}ta = a^2 \in T$, поскольку $T \triangle G$. Следовательно, T не является 2-группой — противоречие. Итак, $t \notin T$. Если $T \cap K \neq \{1\}$, то $T \subseteq K$, потому что K — холловская подгруппа в G, а T — нормальная p-подгруппа с p делящим $|K|$. Это противоречит предположению, что K не содержит неединичных подгрупп нормальных в G. Следовательно, $N \cap T = \{1\}$ и $G = NT$. Очевидно N действует неприводимо на T, поскольку T — минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, имеет место г) с $K_1 = \{1\}$.

Предположим, наконец, что K не нормальна в G, и пусть K_1 — максимальная нормальная подгруппа ($K_1 \subset G$), содержащаяся в K. Тогда группа $\bar{G} = G/K_1$ является МД-группой; на этот раз в качестве диэдральной подгруппы следует рассматривать подгруппу $\bar{N} = N/K_1$, $\bar{K} = K/K_1 \neq \{1\}$. Ввиду „максимального выбора" подгруппы K_1, группа $\bar{G}$ удовлетворяет условию только что рассмотренного случая, т. е. для G опять выполнено г).

Таким образом, мы разобрали все возможные случаи, чем теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — произвольная МД-группа, $N = \langle a, t \mid a^n = t^2 = 1, tat = a^{-1} \rangle$ (n — нечетно) — соответствующая диэдральная подгруппа. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

а) *G — разрешима;*

б) *существует целое неотрицательное s ($s < n$), для которого подгруппа $K_1 = \langle a^s \rangle$ нормальна в G и G/K_1 — простая МД-группа.*

Доказательство. Случай 1. Предположим, что подгруппа $K = \langle a \rangle$ нормальна в G. Тогда G разрешима и справедливо одно из заключений а), б), в) теоремы 1. Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1. Заметим, что соответствующая часть рассуждений не использует предположений о разрешимости группы G. Следовательно, в этом случае G — разрешима.

Случай 2. Предположим, что K не содержит нееденичных подгрупп, нормальных в G. Как уже отмечалось, это предположение означает, что имеет место заключение леммы 1. Если G — простая, доказывать нечего. Пусть $T \neq \{1\}$ — нормальная подгруппа группы G. Если инволюция t ($t \in N$) принадлежит T, то $t \,.\, a^{-1}ta = a^2 \in T$, следовательно, $a \in T$ (поскольку $|a| = n$ — нечетно), т. е. $N \subseteq T$. Но N максимальна в G, следовательно, $N = T \triangle G$ — противоречие, поскольку $N \subset G$, $N_G(N) = N$. Дальше предположим $t \notin T$, $T_1 = TK$. Так как $N_G(K) = N$ (заключение б) леммы 1), то $N_{T_1}(K) = K$. Следовательно, TK — группа Фробениуса (поскольку K — с тривиальным пресечением в G), т. е. $T_1 = T_0 K$, T_0 — нильпотентная характеристическая подгруппа группы T_1, $K \cap T_0 = \{1\}$. Так как K не является нормальным делителем G, то $T_0 \neq \{1\}$, а ввиду максимальности (в G) группы N, получаем $G = \langle t, KT_0 \rangle = NT_0$, $T_0 \triangle G$. Очевидно, что G — разрешима.

Случай 3. Пусть K_1 — максимальная нормальная подгруппа (группы G), содержащаяся в K. Тогда, очевидно, группа $\bar{G} = G/K_1$ является МД-группой и, удовлетворяет условиям рассмотренного случая 2. Следовательно, $\bar{G}$ либо разрешима (и, стало быть, G — разрешима), либо простая, чем теорема доказана.

Следующие результаты будут использоваться при доказательстве теоремы 3.

Лемма 2. *Соотношение*

$$r^{\mu} = 2^{\alpha} 3^{\beta} + \delta, \tag{1}$$

где r — простое число, μ, α, β — натуральные и $\delta = \pm 1$ может выполняться только при $\mu = 1$ или 2. Если $\mu = 2$, то $\delta = 1$ и $r = 5$, 7 или 17.

Доказательство. (I) Пусть $\mu = 2\gamma + 1$, $\gamma \geq 1$. Так как квадрат любого целого числа сравним с единицей или нулем по модулю 3, то из (1) следует, что

$$r \equiv \delta \pmod 3.$$

Имеем

$$2^\alpha 3^\beta = r^{2\gamma+1} - \delta = (r-\delta) \sum_{i=0}^{2\gamma} (\delta r)^i.$$

Так как целое число $\sum_{i=0}^{2\gamma} (\delta r)^i$ нечетно, то

$$\sum_{i=0}^{2\gamma} (\delta r)^i = 3^{\beta-\pi}, \tag{2}$$

где $\beta-\pi>0$. Значит $r-\delta=2^\alpha 3^\pi$. Ввиду предыдущего сравнения, из (2) следует, что $2\gamma+1\equiv 0 \pmod 3$. При $\gamma=1$ в соотношении (1) должно быть $\beta-\pi>1$ (иначе получим $r=2$ и $\alpha=0$). При $\mu=3$ перепишем соотношение (1) в виде

$$r^2+\delta r+1=(2^\alpha 3^\beta)^2+3\delta(2^\alpha 3^\pi)+3=3^{\beta-\pi}.$$

Так как $\pi>0$, $\beta-\pi>1$, то, переходя к сравнению по модулю 9, получаем противоречие. Следовательно, соотношение (1) не может иметь место при $\mu=3$. До сих пор мы не использовали, что r — простое.

Таким образом, $\mu=2\gamma+1=3(2\varepsilon+1)$, $\varepsilon>0$. Положим $r_1=r^{2\varepsilon+1}$. Следовательно, $r_1{}^3=2^\alpha 3^\beta+\delta$. По доказанному, последнее соотношение не может выполняться.

Случай нечетного μ полностью разобран.

II. $\mu=2\gamma$, $\gamma\geqq 1$. Здесь $\delta=1$, поскольку -1 не является квадратичным вычетом по модулю 3. Удобно положить $\mu=2^\sigma(2\tau+1)$, $\tau\geqq 0$, $\sigma\geqq 1$.

Если $\tau>0$, то $r_1^{2\tau+1}=2^\alpha 3^\beta+1$ с $r_1=r^{2^\sigma}$. По доказанному в п. I это невозможно. Значит, $\mu=2^\sigma$. Если $\sigma>1$, то $r^\mu-1$ делится на r^4-1, откуда $r=5$, ибо иначе $r^4\equiv 1 \pmod 5$. Но при $r=5$ имеем $r^4\equiv 1 \pmod{13}$. Полученное противоречие показывает, что $\sigma=1$, т. е. $\mu=2$. Первая часть леммы доказана.

Пусть $(r-\varepsilon)(r+\varepsilon)=2^\alpha 3^\beta$, $r-\varepsilon=2^{\alpha'}3^{\beta'}$, $\beta'>0$. Это всегда так при $\varepsilon=1$ или -1. Так как $(r+\varepsilon,\ r-\varepsilon)=2$, то $\beta=\beta'$ и $\alpha'=1$, потому что $r+\varepsilon=2(2^{\alpha'-1}3^\beta)$. Итак,

$$r-\varepsilon=2.3^\beta,\ r+\varepsilon=2(3^\beta+\varepsilon).$$

Отсюда следует, что $3^\beta+\varepsilon=2^{\alpha-2}$. Дальше, несложный анализ последнего уравнения показывает, что $\varepsilon=\beta=1$, $\alpha=4$, либо $\varepsilon=-1$, $\beta=1$, $\alpha=3$, либо $\varepsilon=-1$, $\beta=2$, $\alpha=5$.

Лемма 3 (Харада [4]). *Если G — простая МД-группа с $n\geqq 5$, то она содержит только один класс сопряженных инволюций и*

$$|G|=n(kn+\varepsilon)(kn+2\varepsilon)m^2, \tag{3}$$

где m и k — подходящие натуральные числа, $\varepsilon=\pm 1$.

Если z — целое рациональное число, через $\pi(z)$ будем обозначать множество всех простых чисел, делящих z. Положим

$$\pi_0=\pi(n), \quad \pi_1=\pi(kn+2\varepsilon), \quad \pi_2=\pi(kn+\varepsilon).$$

Очевидно, множества π_0, π_1, π_2 попарно не пересекаются. π_i-элементом будем называть любой элемент g из G, для которого $\pi(|g|)\subset\pi_i$ $(i=0, 1, 2)$; π_i-подгруппы определяются аналогично.

Лемма 4 (Харада [4]). *Пусть G — простая МД-группа, порядок которой задается параметрической формулой* (3) *с* $m=1$. *Тогда централизатор любого π_i-элемента явяется π_i-подгруппой* ($i=0, 1, 2$).

Теорема 3. *Пусть простая группа G содержит в качестве максимальной подгруппы диэдральную группу порядка $2n$ и n — нечетно. Предположим, что порядок группы G, задаваемый соотношением* (3) *с* $m=1$, *делится самое большое на 4 различных простых числа.*

Тогда $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ при некотором q, либо $G \cong \mathrm{Sz}(2^{2l+1})$.

Примечание. Освободиться от предположения $m=1$ нам пока не удалось. Заметим, что во всех известных простых МД-группах это условие выполнено.

Доказательство теоремы. Через G будем обозначать простую МД-группу, удовлетворяющую условиям теоремы. Из результата Фейта и Томпсона [2] следует, что PSL(2,5) и PSL(2,7) являются единственными простыми МД-группами, в которых $n=3$. Поэтому будем всегда предполагать, что $n \geqq 5$. Числа n, $kn+\varepsilon$, $kn+2\varepsilon$ попарно взаимно простые, следовательно, $|G|$ делится по крайней мере на три различных простых числа.

I. Пусть $|G|$ делится только на 3 различных простых числа. Тогда ясно, что каждое из чисел n, $kn+\varepsilon$, $kn+2\varepsilon$ должно быть степенью некоторого простого числа, причем одно из $kn+\varepsilon$, $kn+2\varepsilon$—четно. Пусть, скажем $kn+\varepsilon=2^{\alpha}$, $\alpha>0$. По лемме 4 это означает, что централизатор в G любой инволюции является 2-группой. Следовательно, по теореме Сузуки [7] G изоморфна одной из групп: $\mathrm{Sz}(q)$, $\mathrm{PSL}(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна), $\mathrm{PSL}(2, 2^s)$, $\mathrm{PSL}(2, 9)$, $\mathrm{PSL}(3, 4)$. Порядок групп Сузуки равен $q^2(q-1)(q^2+1)$ ($q=2^{2r+1}$, $r \geqq 1$) и делится по крайней мере на 4 различных простых числа. Группу PSL(3, 4) также следует отбросить, потому что она не является МД-группой: она содержит диэдральную подгруппу порядка 10, которая, однако, не максимальна — содержится в PSL(2, 4). Среди остальных перечисленных групп условию рассматриваемого случая удовлетворяют только PSL(2, 4), PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 17). В этом можно убедиться, например, используя лемму 2. Случай I полностью разобран.

Дальше, до конца будем предполагать, что $|G|$ делится в точности на 4 различных простых числа.

II. Предположим, что 3 не делит $|G|$. Поскольку G — простая группа, по известной теореме Томпсона G изоморфна некоторой из групп Сузуки $\mathrm{Sz}(2^{2l+1})$ при подходящем $l \geqq 1$.

Дальше будем предполагать, что 3 делит $|G|$.

III. Пусть некоторое из чисел n, $kn+\varepsilon$, $kn+2\varepsilon$ является степенью 3. По лемме 4 это предположение означает, что централизатор в G любого 3-элемента является 3-подгруппой. (Следуя Хигмэну, группы с таким свойством называют $C\Theta\Theta$-группами.) Теперь можем применить результат Герцога [5], согласно которому любая простая $C\Theta\Theta$-группа H, для которой выполнено условие $|\pi(|H|)| \leqq 4$, изоморфна одной из групп: $\mathrm{PSL}(3, 4)$, $\mathrm{PSL}(2, 3^r)$ (при подходящем $r>1$) или же некоторой из групп $\mathrm{PSL}(2, q)$ при подходящем q, таком, что $q \pm 1 = 2.3^s$, $s>1$. Уже отмечали, что PSL(3,4) не является МД-группой. Следовательно, G изоморфна некоторой из групп $\mathrm{PSL}(2, q)$ при подходящем $q \geqq 4$. Случай III полностью разобран.

Из результата Харады [4] следует, что если в соотношении (3), задающем порядок простой МД-группы, выполнено условие $m=1$, $k=1$ или $k=2$, то $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$, $q \geqq 4$. Дальше будем предполагать, что $k \geqq 3$. Из предыдущих пунктов доказательства ясно, что теперь достаточно рассмотреть лишь случай, когда $|G|$ делится только на 4 различных простых числа, 3 делит $|G|$ и никакое из чисел n, $kn+\varepsilon$, $kn+2\varepsilon$ не является степенью тройки. Это означает, что $kn+\varepsilon$ и $kn+2\varepsilon$ связаны некоторым соотношением типа (1), т. е. либо $kn+\varepsilon=r^{\mu}$, $kn+2\varepsilon=2^{\alpha}3^{\beta}$, либо $kn+2\varepsilon=r^{\mu}$, $kn+\varepsilon=2^{\alpha}3^{\beta}$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, r — простое нечетное), где по лемме 2 во всяком случае можно предполагать, что $\mu=1$ или $\mu=2$. В зависимости от этого дальше будем рассматривать два случая.

IV. Пусть $\mu=1$, т. е. $|G|=nr(r-\delta)$, $\delta=\pm 1$. Так как $r=kn+\varepsilon$, либо $r=kn+2\varepsilon$, $k\geq 3$, то, очевидно, $r^3>|G|$. Тогда, по теореме Брауера и Рейнольдса [1], группа G изоморфна $\mathrm{PSL}(2,\,2^l)$, $r=2^l+1$ или $\mathrm{PSL}(2,\,r)$.

V. Пусть $\mu=2$, $r=5,\ 7,\ 17$. Следовательно,

$$|G|=n(kn+2\varepsilon)(kn+\varepsilon)=nr^2(r^2-1),$$

т. е. для n, k, ε имеются только следующие возможности:

а) $\varepsilon=-1$, $n=5$, $k=10$ или 58, либо $\varepsilon=-1$, $n=29$, $k=10$;

б) $\varepsilon=1$, $n=7$ (соотв. 41), $k=41$ (соотв. 7).

Пусть $n=5$, $kn-1=49$, $kn-2=16.3$. Условимся обозначать через S_p произвольную силовскую p-подгруппу. Покажем сначала, что $|N_G(S_7)|=49.2$. Для этого заметим, что если в $N_G(S_7)$ содержится некоторый p-элемент x, $p\neq 7$, то по лемме 4 x должен действовать регулярно на S_7 и, следовательно, p должно делить $|S_7|-1=48$. Стало быть, $[N_G(S_7):S_7]$ делит 48. Значит $f=[G:N_G(S_7)]=5.3^{\alpha}2^{\beta}$, $\alpha=0,\ 1$, $\beta\leq 4$. С другой стороны, по теореме Силова $f\equiv 1 \pmod 7$. Теперь перебором всех возможностей для α и β убеждаемся, что это сравнение может выполняться только если $f=5.3$ или $f=5.3.8$. Пусть $f=5.3$. Это означает, что силовская 2-подгруппа S_2 нормализует S_7. Но, с другой стороны, S_2 должна действовать регулярно на S_7 и, стало быть, S_2 либо циклическая, либо изоморфна группе обобщенных кватернионов (см. [3, с. 200]). В первом случае по теореме Бернсайда G имеет нормальное 2-дополнение, во втором — по известной теореме Брауера и Сузуки — G имеет нетривиальный центр (в нем содержится инволюция). Полученное противоречие показывает, что $f\neq 3.5$, т. е. $f=3.5.8$, $|N(S_7)|=49.2$.

Следовательно, находимся в такой ситуации: G — простая группа, содержащая абелеву подгруппу $A=S_7$, причем: I) если $1\neq x\in A$, то $C_G(x)=A$; II) $|N_G(A)|=2|A|$. При этих условиях мы можем применить результат Харады [4] и для $|G|$ получим соотношение

$$|G|=49\,(49k_1+2\varepsilon_1)\,(49k_1+\varepsilon_1)\,m_1^2,\ \ k_1\geq 1,\ \ m_1^2\geq 1,\ \varepsilon_1=\pm 1.$$

Однако по условию $|G|=49.48.5$ и, очевидно, что предыдущее соотношение не может выполняться при $k_1\geq 1$, $m_1\geq 1$. Полученное противоречие показывает, что случаю $n=5$, $k=10$, $\varepsilon=-1$ не соответствует группа G, удовлетворяющая условиям теоремы.

Пусть $n=29$, $k=10$, $kn-1=17^2$, $kn-2=32.9$. Рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что $f=[G:N(S_{17})]=29.3^{\alpha}2^{\beta}$. С другой стороны, $f\equiv 1 \pmod{17}$. Перебором возможностей для α, β убеждаемся, что это сравнение не может выполняться. Анализ оставшихся случаев, перечисленных в а), б), дословно повторяет предыдущие рассуждения, и поэтому мы его опускаем. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Brauer, W. E. Reynolds. On a problem of Artin. *Ann. Math.*, **68**, 1958, 713—720.
2. W. Feit, J. Thompson. Finite groups which contain a self-centralizing subgroup of order 3. *Nagoya Math. J.*, **21**, 1962, 185—197.
3. D. Gorenstein. Finite groups. New York — London, 1968.
4. K. Harada. A characterization of the groups LF(2, q). *Ill. J. Math.*, **11**, 1967, 647—659.
5. M. Herzog. $C\Theta\Theta$-groups involving no Suzuki groups. *Pacif. J. Math.*, **39**, 1971, 687—690.
6. G. Higman. Odd characterizations of finite simple groups. Lectures, University of Michigan, 1968.
7. M. Suzuki. Finite groups with nilpotent centralizers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99**, 1961, 425—470.

Высший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 14. 4. 1976