PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О ШПЕХТОВОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

АНГЕЛ П. ПОПОВ

Пусть K — поле характеристики нуль. Пусть $\mathfrak{N}_s$ — многообразие ассоциативных алгебр над полем K, определенное тождеством $x_1x_2\dots x_s=0$, а $\mathfrak{L}_k$ — многообразие ассоциативных алгебр над полем K, определенное тождеством $[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]=0$. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. Для каждого натурального s многообразие $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2$ является шпехтовым.

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что полилинейное произведение произвольного числа коммутаторов произвольной длины определяет шпехтовое многообразие. Доказывается, что произведение произвольного числа многообразий $\mathfrak{L}_k$ с произвольной расстановкой скобок является подмногообразием некоторого из многообразий $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2$ и, следовательно, каждое такое произведение — шпехтово.

1. Введение. Пусть K — поле характеристики нуль. В настоящей статье рассматриваются только ассоциативные алгебры над полем K. Пусть $K[x]=K[x_1, x_2, \dots]$ — абсолютно свободная ассоциативная алгебра без единицы, свободно порожденная множеством переменных $\{x_1, x_2, \dots\}$. Пусть $\{f_i(x),\ i\in I\}$ — некоторая система многочленов из $K[x]$. Класс всех алгебр, удовлетворяющих всем тождествам $f_i(x)=0$, $i\in I$, называется многообразием, определенным тождествами $f_i(x)$, $i\in I$. Каждому многообразию $\mathfrak{F}$ взаимно-однозначно соответствует Т-идеал (вполне инвариантный идеал) $T(\mathfrak{F})$ алгебры $K[x]$, который составлен из всех тождеств, выполняющихся во всех алгебрах многообразия $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$, — многообразия, то класс всех алгебр, которые являются расширениями алгебры из $\mathfrak{F}$ с помощью алгебры из $\mathfrak{B}$, также является многообразием, обозначается через $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ и называется произведением многообразий $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}$.

Напомним, что многообразие $\mathfrak{U}$ называется конечнобазируемым, если $\mathfrak{U}$ можно определить конечной системой тождеств. Ясно, что многообразие $\mathfrak{U}$ — конечнобазируемое, если $T(\mathfrak{U})$ — конечно-порожден как T-идеал. Многообразие $\mathfrak{U}$ называется шпехтовым, если все его подмногообразия (включая $\mathfrak{U}$) — конечнобазируемые. Ясно, что многообразие $\mathfrak{U}$ — шпехтово, если каждый T-идеал V алгебры $K[x]$, такой, что $T(\mathfrak{U})\subseteq V$, конечно-порожден как T-идеал. В этом случае T-идеал $T(\mathfrak{U})$ также называется шпехтовым.

Обозначим через $\mathfrak{N}_s\ (s\geq 1)$ многообразие всех нильпотентных алгебр, класс нильпотентности которых не превосходит s. Ясно, что $\mathfrak{N}_s$ — многообразие, определенное тождеством $x_1x_2\dots x_s=0$.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 41—53.

Коммутатор $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ длины n $(n \geqq 2)$ определяется индуктивно следующим образом: $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$, а для $n > 2$, $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. Обозначим через $\mathfrak{L}_k$ $(k \geqq 1)$ многообразие всех ассоциативных лиево нильпотентных алгебр, класс лиевой нильпотентности которых не превосходит k. Ясно, что $\mathfrak{L}_k$ — многообразие, определенное тождеством $[x_1, \ldots, x_{k+1}] = 0$. Многообразие $\mathfrak{L}_1$ состоит из всех коммутативных алгебр.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Для каждого натурального s многообразие $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2$ является шпехтовым.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что полилинейное произведение произвольного числа коммутаторов произвольной длины определяет шпехтовое многообразие. После того как мы доказали эту теорему, нам стало известно, что в то же время такой результат, но другим методом был получен В. Н. Латышевым.

В последней части этой работы доказывается, что произведение произвольного числа лиево нильпотентных многообразий с произвольной расстановкой скобок является подмногообразием некоторого из многообразий $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2$ $(s \geqq 1)$ и, следовательно, каждое такое произведение — шпехтово.

Эта работа является естественным продолжением работы [10] Г. К. Генова, где доказано, что многообразия $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_1$ $(s \geqq 1)$ — шпехтовы. Для доказателства теоремы 1 мы применяем метод, аналогичный методу доказательства Г. К. Генова.

Пусть $\{f_i, i \in I\}$ — некоторая система многочленов алгебры $K[x]$. Обозначим через $\{f_i, i \in I\}^T$ T-идеал алгебры $K[x]$, порожденный всеми многочленами f_i, $i \in I$. Ясно, что если система $\{f_i, i \in I\}$ определяет многообразие $\mathfrak{U}$, то имеет место равенство $T(\mathfrak{U}) = \{f_i, i \in I\}^T$. Будем говорить, что элемент $f \in K[x]$ вытекает из системы $\{f_i, i \in I\}$, если $f \in \{f_i, i \in I\}^T$.

Отметим без доказательства следующие хорошо известные результаты.

Предложение 1.1. *Каждое многообразие определяется некоторой системой полилинейных многочленов. Если полилинейная система многочленов $\{f_i, i \in I\}$ определяет многообразие $\mathfrak{U}$, а полилинейная система многочленов $\{g_j, j \in J\}$ определяет многообразие $\mathfrak{V}$, то многообразие $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ определяется системой всех полилинейных многочленов $f_i(y_1^{\varepsilon_1} g_{j_1} y_2^{\varepsilon_2}, y_3^{\varepsilon_3} g_{j_2} y_4^{\varepsilon_4}, \ldots)$, где $i \in I$, $j_r \in J$, $r = 1, 2, \ldots$, y_t — образующие алгебры $K[x]$, а $\varepsilon_t = 0, 1$, $t = 1, 2, \ldots$*

Доказательство этого утверждения можно найти в [6].

Предложение 1.2. *Пусть U, V — два T-идеала алгебры $K[x]$, такие, что V — шпехтов, а $U \subseteqq V$. Если каждый T-идеал W алгебры $K[x]$ такой, что $U \subseteqq W \subseteqq V$ — конечно-порожден как T-идеал, то U является шпехтовым.*

Додазательство этого утверждения можно найти в [4].

2. Об одном T-идеале относительно свободной алгебры многообразия $\mathfrak{N}_{s+1}\mathfrak{L}_2$. Пусть $u_s = [x_1, x_2, x_3] \ldots [x_{3s-2}, x_{3s-1}, x_{3s}]$ и $U_s = \{u_s\}^T$. Для удобства будем считать, что $U_0 = K[x]$.

Лемма 2.1. *Для каждого натурального s выполняется равенство $U_s = T(\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2)$.*

Доказательство. Очевидно $u_s \in T(\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2)$ и, значит, включение $U_s \subseteqq T(\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2)$ выполнено. Докажем и обратное включение. Из равенства $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1, x_2, x_3]\, x_4 + x_3[x_1, x_2, x_4]$ индукцией по числу s вытекает, что все элементы $y_1^{\varepsilon_1}[x_1, x_2, x_3]\, y_2^{\varepsilon_2} \dots y_s^{\varepsilon_s}[x_{3s-2}, x_{3s-1}, x_{3s}]\, y_{s+1}^{\varepsilon_{s+1}} \equiv 0 \pmod{U_s}$, где y_j — другие образующие алгебры $K[x]$, $\varepsilon_j = 0, 1$, $j = 1, 2, \dots, s+1$. Следовательно, имеет место и обратное включение. Лемма 2.1 доказана.

Пусть $F = K[x]/U_{s+1}$, $s \geqq 0$. Ясно, что F — относительно свободная алгебра многообразия $\mathfrak{N}_{s+1}\mathfrak{L}_2$. Условимся отождествлять переменные x_i и их образы при естественном гомоморфизме $x \to x + U_{s+1}$, образ T-идеала U_1 будем обозначать через P, а образ T-идеала U_s через U. Пусть Π — множество полилинейных элементов алгебры F, а $M = U \cap \Pi$. Пусть $\varepsilon : F \to F$ — тождественный эндоморфизм, а σ_{ij} $(i \neq j)$ — эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами: $x_k\sigma_{ij} = x_k$ при $k \neq i$, $k \neq j$ и $x_i\sigma_{ij} = x_j$, $x_j\sigma_{ij} = x_i$.

Пусть A — множество всех полилинейных одночленов из Π, а $Q = \{ v \in \Pi;\ v = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m}[x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}] \}$, где $m, n \geqq 0$, $i_1 < \dots < i_m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{2n}$.

Для удобства будем считать, что пустое слово также лежит в Π, A, Q; обозначим его формально через 1. Для элемента $f \in \Pi$ обозначим множество всех переменных, участвующих в записи элемента f, через $\operatorname{int} f$. Будем считать, что $\operatorname{int} 1 = \varnothing$.

Пусть $B = \{ w \in \Pi;\ w = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \} \cup \{ w \in \Pi;\ w = ([x_{i_1}, x_{i_2}]\, [x_{i_3}, x_{i_4}])(\varepsilon + \sigma_{i_r i_s}),\ 1 \leqq r,\ s \leqq 4 \}$.

Пусть $W = \{ w \in \Pi;\ w = [x_i, x_j, x_k],\ i < j,\ i < k \}$,

$\{ w \in \Pi;\ w = ([x_i, x_j]\, [x_k, x_l])\, (\varepsilon + \sigma_{jk}),\ i < k < j < l \}$,

$\{ w \in \Pi;\ w = ([x_i, x_j]\, [x_k, x_l])\, (\varepsilon + \sigma_{jl}),\ i < k < j < l \}$.

Мы будем рассматривать M как линейное пространство над полем K.

Лемма 2.2. *Линейное пространство M порождается над полем K полилинейными элементами следующего вида: $v_1w_1v_2 \dots v_sw_sv_{s+1}$, где $w_i \in B$, $v_j \in A$, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, s+1$.*

Доказательство. Для любых элементов $a, b, x, y, z \in F$ имеют место равенства:

$$ba = ab + [a, b],\quad [x, y, ab] = a[x, y, b] + [x, y, a]b,$$

$$[ab, x, y] = a[b, x, y] + [a, x, y]b + [a, x]\,[b, y] + [a, y]\,[b, x],$$

$$[ab, x]\,[y, z] + [ab, y]\,[x, z] = a([b, x]\,[y, z] + [b, y]\,[x, z])$$
$$+ b([a, x]\,[y, z] + [a, y]\,[x, z]) + [a, x, b]\,[y, z] + [a, y, b]\,[x, z],$$

$$[x, ab]\,[y, z] + [x, y]\,[ab, z] = a([x, b]\,[y, z] + [x, y]\,[b, z]$$
$$+ ([x, a]\,[y, z] + [x, y]\,[a, z])b + [x, y, a]\,[b, z] - [x, a]\,[y, z, b].$$

Теперь утверждение следует из указанных равенств и из линейности коммутаторов. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Каждый элемент $w \in B$ представляется в виде линейной комбинации $w = \Sigma \pm a_r w_r b_r$, где $w_r \in W$, $a_r\, b_r \in A$, $a_r w_r b_r \in \Pi$ для любого r.*

Доказательство. Имеют место равенства: $[x_j, x_i, x_k] = -[x_i, x_j, x_k]$, $[x_k, x_j, x_i] = [x_i, x_j, x_k] - [x_i, x_k, x_j]$,

$$([x_i, x_k]\,[x_j, x_l])\,(\varepsilon + \sigma_{kl}) = ([x_i, x_j]\,[x_k, x_l])\,((\varepsilon + \sigma_{jk}) - (\varepsilon + \sigma_{jl})),$$

$$([x_i, x_j]\,[x_k, x_l])\,(\varepsilon + \sigma_{ik}) = ([x_i, x_j]\,[x_k, x_l])\,(\varepsilon + \sigma_{jl}) + [[x_i, x_l],\, [x_j, x_k]],$$

$$([x_k, x_j]\,[x_i, x_l])\,(\varepsilon + \sigma_{jl}) = ([x_i, x_j]\,[x_k, x_l])\,(\varepsilon + \sigma_{jl}) - [[x_i, x_j],\, [x_k, x_l]]\,(\varepsilon + \sigma_{jl}),$$

где $i<k<j<l$, а x_i, x_j, x_k, x_l – свободные образующие алгебры F. Теперь утверждение следует из равенства $[[x, y], [z, t]]=[x, y, z]t-t[x, y, z]+z[x, y, t]-[x, y, t]z$ для любых $x, y, z, t\in F$. Лемма 2.3 доказана.

Заметим, что в указанном представлении $w=\sum_r \pm a_r w_r b_r$ предшествующей леммы существует слагаемое $a_r w_r b_r$, такое, что $a_r=b_r=1$.

Лемма 2.4. *Каждый элемент $v\in A$ представляется по* $\mathrm{mod}\, P$ *линейной комбинацией над полем K элементов из Q.*

Доказательство. Утверждение следует из сравнений $[x, y]z\equiv z[x, y]$ $(\mathrm{mod}\, P)$, $[x, y]\,[z, t]\equiv -[x, z]\,[y, t]\,(\mathrm{mod}\, P)$ и из равенства $xy=yx+[x, y]$ для любых элементов x, y, z, t алгебры F. Ясно, что указанное представление $v\equiv \sum_r t_r v_r\,(\mathrm{mod}\, P)$ элемента $v\in A$, где $t_r\in K$, $v_r\in Q$, такое, что имеет место $\mathrm{int}\, v=\mathrm{int}\, v_r$ для всех r. Лемма 2.4 доказана.

Объединяя результаты предшествующих лемм, получаем следующую важную лемму.

Лемма 2.5. *Линейное пространство M порождается полилинейными элементами следующего вида:*

$$v_1w_1v_2w_2\ldots v_sw_sv_{s+1}, \tag{1}$$

где $w_i\in W$, $v_j\in Q$, $i=1, 2, \ldots, s$, $j=1, 2, \ldots, s+1$.

Пусть $v=x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}[x_{j_1}, x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}]$. Будем записывать $v=YZ$, где $Y=x_{i_1}\ldots x_{i_m}$, а $Z=[x_{j_1}, x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}]$. Элементы вида (1) будем записывать и в виде

$$Y_1Z_1w_1Y_2Z_2w_2\ldots Y_sZ_sw_sY_{s+1}Z_{s+1}, \tag{2}$$

где $Y_jZ_j=v_j$ для $j=1, 2, \ldots, s+1$.

Обозначим через E множество всех элементов вида (1).

3. Некоторые частично упорядоченные множества. В этом пункте изучим некоторые частично упорядоченные множества. Понадобятся следующие обозначения: J — множество натуральных чисел; J_0 — множество целых неотрицательных чисел; Φ — множество всех монотонных инъективных отображений $\varphi: J_0\to J_0$, такие, что $\varphi(0)=0$. Обозначим через e тождественное отображение $e: J_0\to J_0$. Λ — множество всех последовательностей $\alpha=(\alpha(1), \alpha(2), \ldots)$, где $\alpha(r)=0$, 1, для $r=1, 2, \ldots$ и такие, что для любого α существует натуральное $n=n(\alpha)$, для которого имеет место $\alpha(r)=0$ для всех $r>n$. Обозначим через ω ту последовательность, для которой $\omega(r)=0$ для всех $r=1, 2, \ldots$

Пусть R — конечное подмножество множества J и $i_1<i_2<\cdots<i_r$ — все элементы множества R. Обозначим через (R) — конечную последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Будем считать, что $(\emptyset)=\emptyset$.

Пусть $\alpha\in\Lambda$. Обозначим через $\{\alpha\}$ множество $\{r\in J;\ \ \alpha(r)=1\}$. Последовательность $(\{\alpha\})$ назовем носителем последовательности α и обозначим через (α). Последовательности α и (α) вполне определяются взаимно. Ясно, что $\alpha=\omega$ тогда и только тогда, если $(\alpha)=\emptyset$.

Для последовательности $\alpha\in\Lambda$ определим число $m(\alpha)$ следующим образом: $m(\omega)=0$, а $m(\alpha)=\min_r(r\in J, \alpha(r)=1)$ для $\alpha\neq\omega$. Ясно, что $m(\alpha)\geqq 0$, и равенство имеет место только в том случае, когда $\alpha=\omega$.

Обозначим через $|\alpha|$ число элементов множества $\{\alpha\}$. Будем считать, что $|\omega|=0$.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Определим эндоморфизм φ^* алгебры F равенством $x_i\varphi^* = x_{\varphi(i)}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$

Пусть m, n целые неотрицательные числа. Рассмотрим множество $\Sigma_{m,n}$ всех элементов следующего вида: $(i_1, i_2, \ldots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $i_r \in J$, $r = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha_t \in \Lambda$, $t = 1, 2, \ldots, n$. Определим отношение частичной упорядоченности множества $\Sigma_{m,n}$ следующим образом:

Определение 3.1. *Для элементов* $(i_1, i_2, \ldots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sigma$ *и* $(j_1, j_2, \ldots, j_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \tau$ *из* $\Sigma_{m,n}$ *будем считать, что* $\sigma \leqq_\Phi \tau$, *если существует* $\varphi \in \Phi$, *такое, что выполнены следующие три условия:*

(a) *для* $r = 1, 2, \ldots, m$ *имеет место равенство* $j_r = \varphi(i_r)$;

(b) *для* $t = 1, 2, \ldots, n$ *имеет место равенство* $m(\beta_t) = \varphi(m(\alpha_t))$;

(c) *для* $t = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $\alpha_t(r) \leqq \beta_t(\varphi(r))$.

В этом случае будем обозначать $\sigma \leqq_\varphi \tau$. *Ясно, что если* $\sigma \leqq_\Phi \tau$, *то* $\beta_t = \omega$ *тогда и только тогда, если* $\alpha_t = \omega$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

Нетрудно показать, что множество $\Sigma_{m,n}$ с отношением $\leqq_\Phi$ является частично упорядоченным множеством.

Напомним, что множество Σ с упорядоченностью $\leq$ называется частично хорошо упорядоченным, если для любого подмножества $S \subseteqq \Sigma$ существует конечное подмножество $R \subseteqq S$, такое, что для любого $s \in S$ существует $r \in R$, такое, что имеет место неравенство $r \leqq s$.

Отметим без доказательства следующую важную лемму.

Лемма 3.1. *Для произвольных целых* $m, n \geqq 0$ *множество* $\Sigma_{m,n}$ *с упорядоченностью* $\leqq_\Phi$ *является частично хорошо упорядоченным.*

Доказательство этого результата можно увидеть в работе [10]. В доказательстве существенно используются некоторые результаты из работы Хигмана [1].

Обозначим через D множество всех последовательностей $d = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ $(i_r \in J,\ 1 \leqq r \leqq 5)$, для которых выполняется одно из следующих двух условий:

(a) $i_1 < i_2$, $i_1 < i_3$, $i_4 = i_5 = i_1$;

(b) $i_1 < i_3 < i_2 < i_4$, $i_5 = i_3$, или $i_1 < i_3 < i_2 < i_4$, $i_5 = i_4$.

Элементы, удовлетворяющие условию (a), назовем первого типа, а удовлетворяющие условию (b) — второго типа.

В множестве $\Sigma_{5s,2s+2}$ $(s \geqq 0)$ рассмотрим подмножество C, определенное следующим образом. Элемент $(i_1, i_2, \ldots, i_{5s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2s+2})$ из $\Sigma_{5s,2s+2}$ принадлежит множеству C, если выполняются следующие три условия:

(a) для любого k $(1 \leqq k \leqq s)$ последовательность $d_k = (i_{5k-4}, i_{5k-3}, i_{5k-2}, i_{5k-1}, i_{5k})$ принадлежит множеству D:

(b) для любого t $(s+2 \leqq t \leqq 2s+2)$ число $|\alpha_t|$ — четное;

(c) нет натурального числа r, участвующего одновременно в записи последовательностей d_k и $d_l (1 \leqq k,\ l \leqq s,\ k \neq l)$; если $\alpha_t(r) = 1$ $(1 \leqq t \leqq 2s+2,\ r \in J)$, то для всех $j \neq t$ $(1 \leqq j \leqq 2s+2)$ имеет место равенство $\alpha_j(r) = 0$ и число r не участвует в записи последовательностей $d_k (k = 1, 2, \ldots, s)$.

Элемент $\sigma \in C$ будем записывать в виде:

(3) $$\sigma = (d_1, d_2, \ldots, d_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{s+1}),$$

где $d_k = (i_{5k-4}, i_{5k-3}, i_{5k-2}, i_{5k-1}, i_{5k})$, $1 \leqq k \leqq s$, $\lambda_j = \alpha_{s+j+1}$, $1 \leqq j \leqq s+1$.

Для элемента $d = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) \in D$ рассмотрим отображение $d \to w_d \in W$, определенное следующим образом: $w_d = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]$, если d — элемент первого типа и $w_d = ([x_{i_1}, x_{i_2}]\ [x_{i_3}, x_{i_4}])\ (\varepsilon + \sigma_{i_3 i_5})$, если d — элемент второго типа. Для элемента $\alpha \in A$ рассмотрим отображение $\alpha \to Y_\alpha$, $Y_\alpha \in \Pi$, определенное следующим образом: $Y_\omega = 1$, а $Y_\alpha = x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_m}$, если $(\alpha) = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Для элемента $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \equiv 0 \pmod 2$, рассмотрим отображение $\lambda \to Z_\lambda$, $Z_\lambda \in \Pi$, определенное следующим образом: $Z_\omega = 1$, а $Z_\lambda = [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}]$, если $(\lambda) = (j_1, j_2, \dots, j_{2n})$.

Рассмотрим отображение $\theta: C \to E$, определенное следующим образом: для элемента $\sigma = (d_1, \dots, d_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s+1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{s+1})$ из C, $\sigma\theta = Y_{\alpha_1} Z_{\lambda_1} w_{d_1} \dots Y_{\alpha_s} Z_{\lambda_s} w_{d_s} Y_{\alpha_{s+1}} Z_{\lambda_{s+1}}$. Из условий (а) — (с) определения множества C вытекает, что отображение θ — биекция и далее будем отождествлять элементы множества C и E при помощи θ.

Для элемента $a \in E$, записанного в виде (1) — (3), будем обозначать $d_i = d_i(a)$, $w_i = w_i(a) = w_{d_i(a)} (1 \leq i \leq s)$, $\alpha_t = \alpha_t(a)$, $Y_t = Y_t(a) = Y_{\alpha_t(a)}$, $\lambda_t = \lambda_t(a)$, $Z_t = Z_t(a) = Z_{\lambda_t(a)}$, $v_t = v_t(a) = Y_t Z_t$ $(1 \leq t \leq s+1)$.

Для элемента $a \in E$ и переменной $x_i \in \operatorname{int} a$ определим число $p_a(x_i)$ следующим образом: $p_a(x_i) = k$, если $x_i \in \operatorname{int} w_k(a)$ и $p_a(x_i) = k+s$, если $x_i \in \operatorname{int} v_k(a)$. Для элемента $v = YZ \in Q$ и переменной $x_i \in \operatorname{int} v$ определим число $q_v(x_i)$ следующим образом: $q_v(x_i) = 1$, если $x_i \in \operatorname{int} Z$ и $q_v(x_i) = 2$, если $x_i \in \operatorname{int} Y$.

Определим еще одно отношение частичной упорядоченности множества Π (будем обозначать через $\leq$), которое оказывается линейной упорядоченностью на некоторых подмножествах множества Π.

Будем считать, что $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.

Определение 3.2. *Если $i < k < j < l$ — натуральные числа, будем считать, что $[x_i, x_j, x_k] > [x_i, x_k, x_j]$ и $([x_i, x_j] [x_k, x_l]) (\varepsilon + \sigma_{jk}) > ([x_i, x_j] [x_k, x_l]) (\varepsilon + \sigma_{jl})$.*

Определение 3.3. *Пусть u, v — элементы из Q, такие, что $\operatorname{int} u = \operatorname{int} v = \{x_{j_1} < x_{j_2} < \dots < x_{j_m}\}$, $m > 0$. Будем считать, что $u > v$, если существует l $(1 \leq l \leq m)$, такое, что $q_u(x_{j_r}) = q_v(x_{j_r})$ для $r = 1, 2, \dots, l-1$, но $q_u(x_{j_l}) < q_v(x_{j_l})$.*

Определение 3.4. *Пусть a, b — элементы из E, такие, что $\operatorname{int} a = \operatorname{int} b = \{x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n}\}$, $n > 0$. Будем считать, что $a > b$, если выполняется одно из следующих трех условий:*

(а) *существует m $(1 \leq m \leq n)$, такое, что $p_a(x_{i_r}) = p_b(x_{i_r})$ для $r = 1, 2, \dots, m-1$, но $p_a(x_{i_m}) < p_b(x_{i_m})$;*

(b) *имеют место равенства $p_a(x_{i_r}) = p_b(x_{i_r})$ для $r = 1, 2, \dots, n$ и существует l $(1 \leq l \leq s)$, такое, что $w_j(a) = w_j(b)$ для $j = 1, 2, \dots, l-1$, но $w_l(a) > w_l(b)$;*

(с) *имеют место равенства $p_a(x_{i_r}) = p_b(x_{i_r})$, $w_j(a) = w_j(b)$ для $r = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, s$ и существует k $(1 \leq k \leq s+1)$, такое, что $v_t(a) = v_t(b)$ для $t = 1, 2, \dots, k-1$, но $v_k(a) > v_k(b)$.*

Пусть $L(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = \{a \in E, \operatorname{int} a = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}\}$, $L_n = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$.

Для элементов a, b из L, такие, что $a \in L_m$, $b \in L_n$ $(m < n)$, будем считать, что $a < b$.

Ясно, что отношение $\leq$ из предшествующих определений является частичной упорядоченностью множества Π. Нетрудно показать, что имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. (1) *Каждое множество* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и множество* L *являются вполне упорядоченными.*

(2) *Пусть* a, b *— элементы из* $L(x_{i_1}x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$. *Неравенство* $a \leqq b$ *имеет место тогда и только тогда, когда для всех* $\varphi \in \Phi$ *выполняется неравенство* $a\varphi^* \leqq b\varphi^*$.

Пусть $f \in M$. Из леммы 2.5 следует, что f можно записать линейной комбинацией элементов из E над полем K. Пусть

$$f = \sum_{i=0}^{t} r_i a_i, \tag{4}$$

где $r_i \in K$, $a_i \in E$ $(0 \leqq i \leqq t)$ — такая запись.

Элемент $a_0 \in E$ назовем старшим этой записи, если $a_0 > a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, t$ и будем обозначать через $\bar{f}$. Из леммы 3.2 следует, что для любого элемента f из M, записанного в виде (4), существует старший этой записи. У нас нет теоремы единственности о записи элемента f из M равенством (4), а вероятно такая теорема и не имеет места. Так что вообще допускаем, что какой-то элемент $f \in M$ можно записать разными способами равенствами вида (4) и нет оснований утверждать, что старшие элементы разных записей совпадают. Когда пишем $\bar{f} = a$, $f \in M$, будем понимать, что существует запись элемента f вида (4), в которой старший равен элементу a.

Лемма 3.3. *Пусть* $a, b \in E$, $a \leqq_\varphi b$ *и элемент* f *из* M *— такой, что* $\bar{f} = a$. *Тогда существует элемент* g *из* $\{f\}^T$, *такой, что* $\bar{g} \leqq_e b$.

Доказательство. Ясно, что для элемента $g = f\varphi^*$ из леммы 3.2 имеем, что $\bar{g} = a\varphi^*$, а по определению 3.1 имеем, что выполняется неравенство $a\varphi^* \leqq_e b$. Лемма 3.3 доказана.

Следующие две леммы содержат утверждения о старшем члене некоторых специальных элементов из M.

Лемма 3.4. *Пусть* k *— натуральное число* $(1 \leqq k \leqq s+1)$ *и элемент* $f = g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_s h_s g_{s+1}$ *из* M *— такой, что* $h_i \in W$ $(1 \leqq i \leqq s)$, $g_j \in Q$ $(1 \leqq j \leqq s+1$, $j \neq k)$, $g_k \in A$. *Тогда для* $\bar{f} = a$ *выполняются следующие условия:*

(1) $w_i(a) = h_i (1 \leqq i \leqq s)$, $\quad v_j(a) = g_j$ $(1 \leqq j \leqq s+1, \quad j \neq k)$;

(2) $\operatorname{int} v_k(a) = \operatorname{int} g_k$.

Доказательство. Из леммы 2.4 имеем, что $g_k \equiv \sum_t r_t v_k^{(t)} \pmod P$, где $r_t \in K$, $v_k^{(t)} \in Q$ и $\operatorname{int} v_k^{(t)} = \operatorname{int} g_k$. Следовательно, имеем равенство $f = \Sigma r_t a_t$, где $a_t = g_1 h_1 g_2 \ldots h_{k-1} v_k^{(t)} h_k \ldots g_{s+1}$ и утверждения леммы очевидно выполнены. Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* k *— натуральное число* $(1 \leqq k \leqq s)$ *и элемент* $f = g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_s h_s g_{s+1}$ *из* M *— такой, что* $g_j \in Q (1 \leqq j \leqq s+1)$, $h_i \in W(1 \leqq i \geqq s$, $i \neq k)$, $h_k \in B$. *Тогда для* $\bar{f} = a$ *выполняются следующие условия:*

(1) $v_j(a) = g_j (1 \leqq j \leqq s+1)$, $w_i(a) = h_i (1 \leqq i \leqq s$, $i \neq k)$;

(2) $\operatorname{int} w_k(a) = \operatorname{int} h_k$.

Доказательство. Из леммы 2.3 имеем равенство $h_k = \Sigma r_t p_t w_k^{(t)} q_t$, где $r_t \in K$, $p_t, q_t \in A$, $w_k^{(t)} \in W$ и $\operatorname{int} h_k = \operatorname{int}(p_t w_k^{(t)} q_t)$. Выбирая $w_k^{(0)}$ наибольшее из всех $w_k^{(t)}$ (определение 3.2), для которых $p_t = q_t = 1$, ясно, что элемент $g_1 h_1 \ \ldots \ g_k w_k^{(0)} g_{k+1} \ldots h_s g_{s+1}$ является старшим для элемента f и утверждения леммы очевидно выполнены. Лемма 3.5 доказана.

4. Эндоморфизмы $\psi_m^{(r,t)}$ и $\chi_m^{(r)}$. Пусть m, r, t — натуральные числа, такие, что $m<r, t$; $r\neq t$. Определим эндоморфизмы $\psi_m^{(r,t)}$ и $\chi_m^{(r)}$ алгебры F равенствами: $x_m\psi_m^{(r,t)}=x_m[x_r, x_t]$, а для $i\neq m$, $x_i\psi_m^{(r,t)}=x_i$, $x_m\chi_m^{(t)}=x_m x_r$, а для $i\neq m$, $x_i\chi_m^{(r)}=x_i$.

В этом пункте изучим действия эндоморфизмов $\psi_m^{(r,t)}$ и $\chi_m^{(r)}$ на множестве E и связи с упорядоченностью из определении 3.4.

Лемма 4.1. *Пусть $a\in E$, $m<r, t$ — натуральные числа $(r\neq t)$, такие, что $x_m\in \operatorname{int} w_q(a)$ $(1\leq q\leq s)$, $x_r, x_t\notin \operatorname{int} a$. Пусть $b=\overline{a\psi_m^{(r,t)}}$ и $c=\overline{a\chi_m^{(r)}}$. Тагда для любого $x_l\in \operatorname{int} a$ имеет место равенство: $p_a(x_l)=p_b(x_l)=p_c(x_l)$.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные случаи, возникающие в зависимости от типа w_q, и позиции переменной x_m в w_q.

Случай 1. $w_q=[x_m, x_i, x_j]$. Имеют место равенства:

$$w_q\psi_m^{(r,t)}=[x_m, x_t, x_j]\ [x_r, x_t]+x_m[x_r, x_t, x_i, x_j]+[x_m, x_i]\ [x_r, x_t, x_j]$$
$$+[x_m, x_j]\ [x_r, x_t, x_l],$$
$$w_q\chi_m^{(r)}=([x_m, x_i]\ [x_r, x_j])\ (\varepsilon+\sigma_{ij})+x_m[x_r, x_i, x_j]+[x_m, x_i, x_j]x_r.$$

Полагая в a на место w_q правую часть первого равенства, получаем равенство $a\psi_m^{(r,t)}=b_1+b_2+b_3+b_4$, где b_n $(n=1, 2, 3, 4)$ получается, если на место w_q в a положим n-тое слагаемое правой части первого равенства. Из леммы 3.4 и из леммы 3.5 следует, что $\overline{b}_1>\overline{b}_n$ $(n=2, 3, 4)$ и, следовательно, имеем равенство $b=\overline{b}_1=\overline{a\psi_m^{(r,t)}}$, откуда непосредственно вытекает, что для любого $x_l\in \operatorname{int} a$ выполняется равенство $p_a(x_l)=p_b(x_l)$. Полагая в a на место w_q правую часть второго равенства, получаем равенство $a\chi_m^{(r)}=c_1+c_2+c_3$, где c_n $(n=1, 2, 3)$ получается, если на место w_q в a положим n-тое слагаемое правой части второго равенства. Из леммы 3.4 и из леммы 3.5 следует, что $\overline{c}_1>\overline{c}_n$ $(n=2, 3)$ и, следовательно, имеем равенство $c=\overline{c}_1=\overline{a\chi_m^{(r)}}$, откуда непосредственно вытекает, что для любого $x_l\in \operatorname{int} a$ выполняется равенство $p_a(x_l)=p_c(x_l)$. Случай 1 полностью исчерпан.

Во всех остальных случаях доказательство ведется вычислением аналогичных равенств. Так как все рассуждения далее повторяют рассуждения, сделанные выше, то ниже приведем только равенства в соответствующих случаях. Всегда первое слагаемое в правых частях определяет старшего члена $a\psi_m^{(r,t)}$, соответственно $a\chi_m^{(r)}$.

Случай 2. $w_q=[x_i, x_m, x_j]$. Этот случай сводится к случаю 1, так как имеет место равенство $w_q=-[x_m, x_i, x_j]$.

Случай 3. $w_q=[x_i, x_j, x_m]$. Имеют место равенства:

$$w_q\psi_m^{(r,t)}=w_q\,.\,[x_r, x_t]+x_m[x_i, x_j, [x_r, x_t]],$$
$$w_q\chi_m^{(r)}=w_q\,.\,x_r+x_m[x_i, x_j, x_r].$$

Случай 4. $w_q=([x_m, x_l]\ [x_j, x_k])\ (\varepsilon+\sigma_{ij})$. Имеют место равенства:

$$w_q\psi_m^{(r,t)}=w_q[x_r, x_t]+([x_m, x_i]\ [x_r, x_t, [x_j, x_k]])\ (\varepsilon+\sigma_{tj})$$
$$+(x_m[x_r, x_t, x_i]\ [x_j, x_k])\ (\varepsilon+\sigma_{ij}),$$
$$w_q\chi_m^{(r)}=w_q\,.\,x_r+x_m([x_r, x_i]\,[x_j, x_k])\ (\varepsilon+\sigma_{ij})+([x_m, x_l]\ [x_j, x_k, x_r])\ (\varepsilon+\sigma_{ij}).$$

Случай 5. $w_q=([x_m, x_i][x_j, x_k])(\varepsilon+\sigma_{ik})$. Этот случай сводится к случаю 4, так как имеет место равенство $w_q=-([x_m, x_i][x_k, x_j])(\varepsilon+\sigma_{ik})$.

Случай 6. $w_q=([x_i, x_m][x_j, x_k])(\varepsilon+\sigma_{mj})$. Имеют место равенства:

$$w_q\psi_m^{(r,t)}=w_q\cdot[x_r, x_t]+[x_i, x_m][x_r, x_t, [x_j, x_k]]-x_m[x_r, x_t, x_i][x_j, x_k]$$
$$-[x_i, x_j]x_m[x_r, x_t, x_k],$$
$$w_q\chi_m^{(r)}=w_q x_r-[x_i, x_m][x_j, x_k, x_r]+[x_i, x_j, x_m][x_r, x_k]+x_m([x_i, x_j][x_r, x_k])(\varepsilon+\sigma_{jr}).$$

Случай 7. $w_q=([x_i, x_m][x_j, x_k])(\varepsilon+\sigma_{mk})$. Этот случай сводится к случаю 6, так как имеет место равенство $w_q=-([x_i, x_m][x_k, x_j])(\varepsilon+\sigma_{mk})$.

Случай 8. $w_q=([x_i, x_j][x_m, x_k])(\varepsilon+\sigma_{jm})$. Этот случай точно совпадает с случаем 6.

Случай 9. $w_q=([x_i, x_j][x_m, x_r])(\varepsilon+\sigma_{jk})$. Имеют место равенства:

$$w_q\psi_m^{(r,t)}=w_q[x_r, x_t]+[x_i, x_j]x_m[x_r, x_t, x_k]+[x_i, x_k]x_m[x_r, x_t, x_j],$$
$$w_q\chi_m^{(r)}=w_q\cdot x_r+x_m([x_t, x_j][x_r, x_k])(\varepsilon+\sigma_{jk})+([x_i, x_j, x_m][x_r, x_k])(\varepsilon+\sigma_{jk}).$$

Случай 10. $w_q=([x_t, x_j][x_k, x_m])(\varepsilon+\sigma_{jk})$. Этот случай сводится к случаю 9, так как имеет место равенство $w_q=-([x_i, x_j][x_m, x_k])(\varepsilon+\sigma_{jk})$.

Случай 11. $w_q=([x_i, x_j][x_k, x_m])(\varepsilon+\sigma_{jm})$. Этот случай точно совпадает с случаем 7.

Все случаи исчерпаны. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $a\in E$, $m<r, t$ — натуральные числа $(r\neq t)$, такие, что $x_m\in \operatorname{int} v_k(a)$ $(1\leq k\leq s+1)$, $x_r, x_t\notin \operatorname{int} a$. Тогда для $b=\overline{a\psi_m^{(r,t)}}$ выполняются условия:*

(1) $w_i(b)=w_i(a)$ $(1\leq i\leq s)$, $v_j(b)=v_j(a)$ $(1\leq j\leq s+1,\ j\neq k)$;

(2) $Y_k(b)=Y_k(a)$, $(\lambda_k(b))=((\lambda_k(a))\cup\{r, t\})$.

Доказательство. Если $x_m\in \operatorname{int} Y_k(a)$, то утверждение вытекает из первого сравнения в доказательстве леммы 2.4. Если $x_m\in \operatorname{int} Z_k(a)$, то утверждение вытекает из указанного сравнения и из сравнения $[x_m[x_r, x_t], x_n]\equiv[x_m, x_n][x_r, x_t] \pmod P$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть $a\in E$, r, k — натуральные числа, такие, что $1\leq k\leq s+1$, $x_r\notin \operatorname{int} a$. Обозначим через $m_a^{(k)}(x_r)=0$, если $\{t\in J,\ x_t\in \operatorname{int} v_k,\ t<k\}=\varnothing$ и $m_a^k(x_r)=\max\{t\in J,\ x_t\in \operatorname{int} v_k,\ t<r\}$. Пусть $m=m_a^{(k)}(x_r)>0$. Тогда для $c=\overline{a\chi_m^{(r)}}$* выполняются условия:

(1) $w_i(c)=w_i(a)$ $(1\leq i\leq s)$, $v_j(c)=v_j(a)$ $(1\leq j\leq s+1,\ j\neq k)$.

(2) $Z_k(c)=Z_k(a)$, $(\alpha_k(c))=((\alpha_k(a))\cup\{r\})$.

Доказателство. Утверждение (1) следует из леммы 3.4. Если $x_m\in \operatorname{int} Y_k(a)$, то утверждение (2) очевидно выполнено; в этом случае $c=a\chi_m^{(r)}$. Пусть $x_m\in Z_k(a)$. Запишем $Z_k=[x_m, x_n]Z'_k$ и $v_k=x_{k_1}\ldots x_{k_t}x_{k_{t+1}}\ldots x_{k_l}[x_m, x_n]Z'_k$, где $k_t<m<k_{t+1}$. Из доказательства леммы 2.4 имеем, что выполняется сравнение $v_k\equiv x_{k_1}\ldots x_{k_t}[x_m, x_n]x_{k_{t+1}}\ldots x_{k_l}Z'_k \pmod P$. Следовательно, имеет место и сравнение: $v_k\chi_m^{(r)}\equiv x_{k_1}\ldots x_{k_t}x_r x_{k_{t+1}}\ldots x_{k_l}Z_k+x_{k_1}\ldots x_{k_t}x_m x_{k_{t+1}}\ldots x_{k_l}[x_r, x_n]Z'_k \pmod P$. Обозначим через $v_k^{(1)}$ — первое слагаемое, а через $v_k^{(2)}$ — второе слагаемое правой части последнего сравнения. Ясно, что $v_k^{(i)}\in Q$ $(i=1, 2)$ и по

определению 3.4 имеет место неравенство $v_k^{(1)} > v_k^{(2)}$. Следовательно, $\overline{a\chi_m^{(r)}} = a_1 + a_2$, где $a_i = v_1 \ldots w_{k-1} v_k^{(i)} w_{k+1} \ldots v_{s+1}$ $(i=1, 2)$ и по определению 3.5 имеет место неравенство $a_1 > a_2$. Теперь утверждение (2) очевидно выполнено. Лемма 4.3 доказана.

Непосредственным следствием леммы 4.1 и леммы 4.2 является следующая лемма.

Лемма 4.4. *Пусть a, b — элементы из E и $a > b$. Пусть $m < r, t$ — натуральные числа $(r \neq t)$, такие, что $x_m \in \operatorname{int} v_k(a)$ $(1 \leq k \leq s+1)$, $x_r, x_t \notin \operatorname{int} a$. Тогда для $a_1 = \overline{a\psi_m^{(r,t)}}$ и $b_1 = \overline{b\psi_m^{(r,t)}}$ имеет место неравенство $a_1 > b_1$.*

Непосредственным следствием леммы 4.1 и леммы 4.3 является следующая лемма.

Лемма 4.5. *Пусть a, b — элементы из E и $a > b$. Пусть k, r — натуральные числа, такие, что $1 \leq k \leq s+1$ и $x_r \notin \operatorname{int} a$. Пусть $m = m_a^k(x_r)$ — из леммы 4.3 и $m > 0$. Тогда для $a_1 = \overline{a\chi_m^{(r)}}$ и $b_1 = \overline{b\chi_m^{(r)}}$ имеет место неравенство $a_1 > b_1$.*

Лемма 4.6. *Пусть $f \in M$, $a \leq_\Phi b$ — элементы из E и $\overline{f} = a$. Тогда существует элемент $h \in \{f\}^T$, такой, что $\overline{h} = b$.*

Доказательство. По лемме 3.3 можно считать, что $a \leq_e b$. Тогда имеет место включение $\operatorname{int} a \subseteq \operatorname{int} b$. Проведем доказательство индукцией по числу $q = |\operatorname{int} b| - |\operatorname{int} a|$. Если $q = 0$, то $a = b$ и нечего доказывать. Пусть мы уже доказали утверждение леммы для натуральных чисел меньше q и элементы a, b, f — такие, что $|\operatorname{int} b| - |\operatorname{int} a| = q$. Пусть $x_r \in \operatorname{int} b$, $x_r \notin \operatorname{int} a$. Так как $w_i(a) = w_i(b)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$, то $x_r \in \operatorname{int} v_k(b)$ для некоторого k $(1 \leq k \leq s+1)$. Запишем $v_k(b) = Y_k(b) Z_k(b)$. Если $x_r \in Y_k(b)$, то $Y_k(a) \neq 1$ и $m(Y_k(b)) = m(Y_k(a)) < r$. Тогда $m = m_a^k(x_r)$ из леммы 4.3 больше нуля. Рассмотрим элемент $g = f\chi_m^{(r)}$. Из леммы 4.5 вытекает, что $\overline{f\chi_m^{(r)}} = \overline{a\chi_m^{(r)}} = a_1$, а из леммы 4.3 вытекает, что $a_1 \leq_e b$. Ясно, что $|\operatorname{int} b| - |\operatorname{int} a_1| = q - 1$ и по предложению индукции существует элемент h из $\{g\}^T$, такой, что $\overline{h} = b$. Но очевидно $\{g\}^T \subseteq \{f\}^T$ и в этом случае лемма 4.6 доказана. Если $x_r \in \operatorname{int} Z_k(b)$, то $Z_k(a) \neq 1$ и для $m = m(Z_k(a))$ имеем, что $0 < m < r$. Но $|Z_k(a)| \equiv |Z_k(b)| \equiv 0 \pmod 2$ и, следовательно, существует число t $(m < t \neq r)$, такое, что $x_t \in \operatorname{int} Z_k(b)$ и $x_t \notin \operatorname{int} a$. Рассмотрим элемент $g = f\psi_m^{(r,t)}$. Из леммы 4.4 вытекает, что $\overline{f\psi_m^{(r,t)}} = \overline{a\psi_m^{(r,t)}} = a_1$, а из леммы 4.2 вытекает, что $a_1 \leq_e b$. Ясно, что $|\operatorname{int} b| - |\operatorname{int} a_1| = q - 2$, и по предложению индукции сеществует элемент h из $\{g\}^T$, такой, что $\overline{h} = b$. Но очевидно $\{g\}^T \subseteq \{f\}^T$ и в этом случае лемма 4.6 доказана. Лемма 4.6 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть V — T-идеал алгебры F, такой, что $V \subseteq U$. Тогда V — конечно-порожден как T-идеал.*

Доказательство. Пусть V_n — множество полилинейных элементов T-идеала V, записанных с помощью первых n-переменных и $\overline{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Так как T-идеал V порождается своими полилинейными элементами, а каждый полилинейный элемент из V следует из элементов $\overline{V}$, то для доказательства леммы достаточно показать, что существует конечная система элементов из $\overline{V}$, такая, что любой элемент из $\overline{V}$ следует из элементов этой системы. Пусть $S=\{a\in E, \exists f\in \bar{V}, \bar{f}=a\}$. Ясно, что для $S_n=S\cap L_n$ имеет место $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Множество $(S, \leqq)$ как подмножество вполне упорядоченного множества L также является вполне упорядоченным. Множество $(S, \leqq_\Phi)$ как подмножество частично хорошо упорядоченного множества E также является частично хорошо упорядоченным. Тогда существует конечная система элементов из S; пусть эта система — $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такая, что для любого $a\in S$ выполняется неравенство $a_k\leqq_\Phi a$ для некоторого $k (1\leqq k\leqq n)$. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — элементы из $\bar{V}$, такие, что $\bar{f}_k=a_k (1\leqq k\leqq n)$. Покажем, что $\bar{V}\subseteqq \{f_1, \ldots, f_n\}^T$. Доказательство проведем индукцией по вполне упорядоченному множеству $(S, \leqq)$. Для основания индукции можно взять нулевой элемент из $\bar{V}$, который, считаем, меньше остальных элементов множества S. Пусть $b\in S$ и уже доказали, что все элементы множества $\bar{V}$, для которых старшие элементы меньше элемента b (в упорядоченности $\leqq$) лежат в T-идеале $\{f_1, \ldots, f_n\}^T$. Пусть $f\in \bar{V}$ и $\bar{f}=b$. Тогда существует $k (1\leqq k\leqq n)$, такое, что выполняется неравенство $a_k\leqq_\Phi b$. По лемме 4.6 существует элемент h из T-идеала $\{f_k\}^T$, такой, что $\bar{h}=b$. Подбираем $\lambda\in K$, такое, что для $g=f-\lambda h$ имеет место неравенство $\bar{g}<b$. По предложению индукции следует, что $g\in\{f_1, \ldots, f_n\}^T$. Из включения $h\in\{f_k\}^T \subseteqq \{f_1, \ldots, f_n\}^T$ следует, что и элемент $f=g+\lambda h$ тоже лежит в T-идеале $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}^T$. Включение $\bar{V}\subseteqq\{f_1, \ldots, f_n\}^T$ доказано, откуда вытекает конечная порожденность T-идеала V. Лемма 5.1 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1.

Доказательство проведем индукцией по числу $s\geqq 0$. Для $s=0$ утверждение очевидно. Пусть мы уже доказали, что T-идеал U_s $(s\geqq 0)$ алгебры $F[x]$ — шпехтов. Из леммы 5.1 вытекает, что каждый T-идеал V такой, что $U_{s+1}\subseteqq V\subseteqq U_s$ — конечно-порожден как T-идеал. По предложению 1.2 следует, что U_{s+1} также является шпехтовым. Теорема 1 доказана.

6. Следствия из теоремы 1. В этом пункте получаем некоторые следствия из теоремы 1. Все T-идеалы, которые рассмотрим в этом пункте — T-идеалы свободной алгебры $F[x]$.

Лемма 6.1. *Для каждого натурального $k>1$ выполняется включение $\mathfrak{L}_k\subseteqq \mathfrak{N}_{k-1}\mathfrak{L}_2$.*

Доказательство. Докажем включение индукцией по числу $k\geqq 2$. Для $k=2$ утверждение очевидно. Пусть включение доказано для натуральных чисел меньше $k (k>2)$. Обозначим через V_k T-идеал алгебры $K[x]$, порожденный элементом $[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}]$. Ясно, что $V_k=T(\mathfrak{L}_k)$. Из сравнения $[x_1, \ldots, x_k\ x_{k+1}, x_{k+2}]\equiv[x_1, \ldots, x_k][x_{k+1}, x_{k+2}](\varepsilon+\sigma_{k\,k+1})\equiv 0 \pmod{V_k}$, полагая $x_{k+2}=x_{3k-3}$, $x_{k+1}=[x_{3k-5}, x_{3k-4}]$, получаем, что имеют место сравнения:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k][x_{3k-5}, x_{3k-4}, x_{3k-3}]\equiv 0 \pmod{V_k},$$

$$y_1^{\varepsilon_1}[x_1, x_2, \ldots, x_k] y_2^{\varepsilon_2}[x_{3k-5}, x_{3k-4}, x_{3k-3}]\equiv 0 \pmod{V_k}.$$

По предложению индукции элемент u_{k-2} линейно выражается элементами $g_1^{\varepsilon_1}[f_1, f_2, \ldots, f_k]g_2^{\varepsilon_2}$ и, следовательно, имеет место и сравнение: $u_{k-1}\equiv u_{k-2}[x_{3k-5}, x_{3k-4}, x_{3k-3}]\equiv 0 \pmod{V_k}$. Лемма 6.1 доказана.

Из леммы 2.1 и из леммы 6.1 вытекает, что имеет место включение $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_k \subseteq \mathfrak{N}_{s(k-1)}\mathfrak{L}_2$ для любых натуральных чисел k, s и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. *Для всех натуральных чисел k, s многообразие $\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_k$ является шпехтовым.*

Следствие 1. *Каждый элемент базиса Шпехта определяет шпехтовое многообразие.*

Лемма 6.3. *Пусть k — натуральное число, W_k — T-идеал алгебры $K[x]$, порожденный элементом $[[x_1, \ldots, x_{k+1}], [x_{k+2}, \ldots x_{2k+1}]]$. Тогда имеет место включение $u_s \in W_k$ для $s = k(k+1)/2$.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу $k>0$. Для $k=1$ утверждение очевидно. Пусть включение доказано для натуральных меньше $k\,(k>1)$. Из сравнения: $[[x_1, \ldots, x_{k+1}], [y_1, \ldots, y_{k-1}, x_{k+2}y_k]] \equiv [[x_1, \ldots, x_{k+1}], x_{k+2}[y_1, \ldots, y_k]] + [[x_1, \ldots, x_{k+1}], [y_1, \ldots, x_{k+2}]y_k] \equiv [x_1, \ldots, x_{k+2}][y_1, \ldots, y_k] + [x_1, \ldots, x_{k+1}, y_k][y_1, \ldots y_{k-1}, x_{k+2}] \equiv 0 \pmod{W_k}$, полагая $y_i = y_{k+i}$, для $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $y_k = [y_1, \ldots, y_k]$, вытекает, что имеют место сравнения:

$$[x_1, \ldots, x_{k+2}]\,[[y_1, \ldots, y_k], [y_{k+1}, \ldots, y_{2k-1}]] \equiv 0 \pmod{W_k},$$

$$[x_1, \ldots, x_{k+2}]z[[y_1, \ldots, y_k], [y_{k+1}, \ldots, y_{2k-1}]] \equiv 0 \pmod{W_k}.$$

Теперь из предположения индукции и из леммы 6.1 вытекает включение $u_s(x) \in W_k$, для $s = k(k+1)/2$. Лемма 6.3 доказана.

Непосредственно из предшествующих лемм вытекает следующее:

Следствие 2. *Для всех натуральных k, l элемент $v_{k,l} = [[x_1, \ldots, x_k], [x_{k+1}, \ldots, x_l]]$ определяет шпехтовое многообразие.*

Нетрудно показать, что полилинейное произведение элементов $v_{k,l}$ определяет шпехтовое многообразие.

Лемма 6.4. *Для каждого натурального s имеет место включение $\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_s \subseteq \mathfrak{N}_m\mathfrak{L}_2$ для $m = 2s + (s+1)(s+2)/2$.*

Доказательство. Все элементы $[z_1^{\varepsilon_1}v_1, z_2^{\varepsilon_2}v_2, z_3^{\varepsilon_3}v_3] \in T(\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_s)$, где $v_i = [x_1^{(i)}, \ldots, x_{s+1}^{(i)}]$, $x_p^{(i)}$, z_i — различные переменные, $\varepsilon_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$, $p = 1, 2, \ldots, s+1$. Из равенства $[a, b, zc] = [a, b, z]c + z[a, b, c]$ и $[a, zb, c] = z[a, b, c] + [a, z, b]c + [a, z][b, c] + [z, c][a, b]$ вытекает, что имеет место сравнение: $[v_1, y_1, y_2]z_1^{\varepsilon_1}[v_2, v_3]z_2^{\varepsilon_2}v_4 \equiv 0\,(T(\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_s))$, где $v_i = [x_1^{(i)}, \ldots, x_{s+1}^{(i)}]$, $x_p^{(i)}$, y_j, z_j — различные переменные, $\varepsilon_j = 0, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$, $p = 1, 2, \ldots, s+1$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 6.1 и из леммы 6.3. Лемма 6.4 доказана.

Следуя доказательству леммы 6.4, нетрудно установить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6.5. *Для любых натуральных k, s имеет место включение $(\mathfrak{N}_s\mathfrak{L}_2)\mathfrak{L}_k \subseteq \mathfrak{N}_m\mathfrak{L}_2$ для $m = s(2k + (k+1)(k+2)/2)$*

Следствие 3. *Для любых натуральных k, s многообразие $\mathfrak{L}_s\mathfrak{L}_k$ является шпехтовым.*

Обозначим через $\mathfrak{L}_k^{(n)}$ многообразие $\underbrace{(\ldots((\mathfrak{L}_k\mathfrak{L}_k)\mathfrak{L}_k)\ldots\mathfrak{L}_k)\mathfrak{L}_k}_{n \text{ раз}}$.

Непосредственно из леммы 6.5 вытекает следующая

Теорема 6.6. *Для любых натуральных k, n многообразие $\mathfrak{L}_k^{(n)}$ является шпехтовым.*

Доказательство. Индукцией по числу n получаем, что имеет место включение $\mathfrak{L}_k^{(n)} \subseteq \mathfrak{N}_m\mathfrak{L}_2$ для $m=k\ (2k+(k+1)(k+2)/2)^{n-1}$. Теперь утверждение следует из теоремы 1. Теорема 6.6 доказана.

Отметим, что шпехтовость многообразия $\mathfrak{L}_1^{(n)}(n \geqq 1)$ можно получить следствием результата Г. К. Генова, так как многообразие $\mathfrak{L}_1^{(n)}$ оказывается подмногообразием некоторого из многообразий $\mathfrak{N}_m \mathfrak{L}_1$ для больших m.

Автор выражает глубокую благодарность М. Б. Гаврилову за помощь при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc.*, 2, 1952, 326—336.
2. D. E. Cohen. On the laws of a metabelian variety. *J. Algebra*, 5, 1967, 267—273.
3. R. M. Bryant, M. R. Vaughan-Lee. Soluble varieties of Lie algebras. *Qart. J. Math. Oxford*, 23, 1972, 107—112.
4. M. R. Vaghan-Lee. Center-by-metabelian Lie algebras. *J. Austr. Math. Soc.*, 15, 1973.
5. R. M. Bryant, M. F. Newman. Some finitly based varieties of groups. *Proc. London Math. Soc.*, 28, 1974, 252—274.
6. М. Б. Гаврилов. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Доклады БАН*, 21, 1968, 989—992.
7. М. Б. Гаврилов. О T-идеалах, содержащих элемент $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]$. *Известия Мат. инст. БАН*, 11, 1970, 269—271.
8. В. Н. Латышев. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, 8, 1969, 660—674.
9. Г. К. Генов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль. *Доклады БАН*, 29, 1976, 937—940.
10. Г. К. Генов. Некоторые шпехтовые многообразия ассоциативных алгебр. *Плиска*, 2, 1981, 30—40.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 2. 6. 1976