PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

АНГЕЛ П. ПОПОВ

Пусть K — поле характеристики нуль. В настоящей работе рассматриваются многообразия ассоциативных K-алгебр.

Напомним, что многообразие — это класс алгебр, удовлетворяющих некоторой фиксированной системе тождеств. Для данного многообразия $\mathfrak{M}$ будем обозначать через $\Gamma(\mathfrak{M})$ группоид всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ относительно $\mathfrak{M}$-умножения.

В настоящей работе дается описание всех многообразий $\mathfrak{M}$, для которых в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ не имеет места закон правого сокращения (предложение 3). Из этого результата вытекает, что для любого многообразия $\mathfrak{M}$ группоид (полугруппа) $\Gamma(\mathfrak{M})$ не является свободным группоидом (свободной полугруппой). Этим результатом (теорема 4) отвечается одному вопросу Л. А. Бокутя [2, № 18], но только в случае многообразий ассоциативных алгебр.

В конце статьи сделаны несколько замечаний, из которых видно, что эти результаты можно перенести и в случае многообразий ассоциативных алгебр над произвольным бесконечным полем.

1. Введение. В настоящей работе рассматриваются ассоциативные алгебры над произвольным фиксированным полем K, характеристики нуль. Пусть $K[x]$ — свободная ассоциативная алгебра (без единицы), свободно порожденная счетным множеством переменных $(x)=\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Пусть $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный полином из $K[x]$. Полином f называется тождеством в алгебре A, если $f(a_1, \ldots, a_n)=0$ для любого выбора элементов $a_1, \ldots, a_n$ из A. Будем говорить еще, что алгебра A удовлетворяет тождеству $f=0$. Хорошо известно, что множество $T(A)$ всех полиномов алгебры $K[x]$, которые являются тождествами в данной алгебре A, является вполне инвариантным идеалом алгебры $K[x]$. В теории многообразий ассоциативных алгебр принято называть эти идеалы T-идеалами.

Пусть $\{f_i;\ i\in I\}$ — некоторая система полиномов алгебры $K[x]$. Класс всех алгебр, которые удовлетворяют всем тождествам $f_i=0$, $i\in I$, называется многообразием, определенным этой системой. Будем обозначать через $\{f_i;\ i\in I\}^T$ минимальный T-идеал в алгебре $K[x]$, содержащий все элементы f_i $(i\in I)$. Пусть многообразие $\mathfrak{U}$ определяется системой тождеств $f_i=0$, $i\in I$. Ясно, что T-идеал $\{f_i;\ i\in I\}^T$ состоит из всех полиномов алгебры $K[x]$, которые являются тождествами во всех алгебрах многообразия $\mathfrak{U}$. Будем обозначать этот T-идеал еще через $T(\mathfrak{U})$.

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ — многообразия. Класс всех алгебр, которые являются расширениями алгебр из $\mathfrak{U}$ с помощью алгебр из $\mathfrak{B}$, называется их произведением, обозначается через $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ и также является многообразием. Хорошо известно [1], что T-идеал $T(\mathfrak{U}\mathfrak{V})$ произведения двух многообразий $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ порождается всеми полиномами вида $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, где $f \in T(\mathfrak{U})$, $g_1, \ldots, g_n \in T(\mathfrak{V})$.

Ясно, что многообразие $\mathfrak{O}$ всех ассоциативных алгебр является нулем, а многообразие $\mathfrak{E}$, которое содержит только нулевую алгебру — единицей относительно этой операции. Все многообразия, кроме многообразия $\mathfrak{E}$, будем называть нетривиальными.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие. Рассмотрим операцию $\mathfrak{M}$-умножение, которая определяется следующим образом: Для двух многообразий $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ их $\mathfrak{M}$-произведением (обозначаем через $\mathfrak{U}\langle \circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{V}$) называется многообразие $(\mathfrak{U}\mathfrak{V}) \cap \mathfrak{M}$. Ясно, что множество всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ является группоидом относительно этой операции. Будем обозначать этот группоид через $\Gamma(\mathfrak{M})$. Отметим, что группоид $\Gamma(\mathfrak{O})$ совпадает с группоидом всех многообразий относительно обычного умножения.

Для $\mathfrak{M}$-умножения рассматриваются такие задачи: Описать в терминах тождеств (или другим образом) все многообразия $\mathfrak{M}$, для которых группоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ имеет данное свойство. Например, в работе [3] описаны все многообразия $\mathfrak{M}$, для которых в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ имеет место коммутативный закон. Так как в группоиде $\Gamma(\mathfrak{O})$ не имеет места ассоциативный закон [1], то особый интерес представляет задача (до сих пор нерешена) описать все многообразия $\mathfrak{M}$, для которых группоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ является полугруппой.

Л. А. Бокуть поставил [2, № 18] следующие вопросы: Для каких многообразий $\mathfrak{M}$ группоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ является свободным группоидом? Для каких многообразий $\mathfrak{M}$ группоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ является свободной полугруппой?

В настоящей работе получено описание всех многообразий $\mathfrak{M}$, для которых в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ не имеет места закон правого сокращения. Следствием этого результата получается ответ на указанные выше вопросы Л. А. Бокутя.

Напомним, что правонормированный коммутатор $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ длины $n \geqq 2$ определяется индуктивно равенствами $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{-1}], x_n]$, если $n > 2$.

В п. 2 будем пользоваться следующим хорошо известным фактом: Любое многообразие ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики определяется полилинейной системой тождеств.

2. Основные результаты. Дальше через $\mathfrak{A}$ будем обозначать многообразие всех коммутативных алгебр, т. е. многообразие $\mathfrak{A}$ определяется тождеством $[x_1, x_2] = 0$. Через $\mathfrak{N}_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ будем обозначать многообразие всех нильпотентных алгебр с классом нильпотентности $\leqq k$, т. е. многообразие $\mathfrak{N}_k$ определяется тождеством $x_1x_2 \ldots x_k = 0$.

Имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть многообразие $\mathfrak{A}_k$ $(k \geqq 3)$ определяется равенством $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_k$. Тогда многообразия $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots$ различны и для любого $k \geqq 3$ выполняется равенство $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$.*

Доказательство. Ясно, что поле K лежит в $\mathfrak{A}$, но не лежит в $\mathfrak{A}_k$ для всех $k = 3, 4, \ldots$. Если для чисел $m, n \geqq 3$ имеет место неравенство $m < n$, то фактор-алгебра K/K^n лежит в $\mathfrak{A}_n$, но не лежит в $\mathfrak{A}_m$. Первая часть леммы доказана. Дальше T-идеал $T(\mathfrak{A}^2)$ порождается всеми полиномами

$$(1) \qquad [y_1^{\varepsilon_1}[x_1, x_2]y_2^{\varepsilon_2}, y_3^{\varepsilon_3}[x_3, x_4]y_4^{\varepsilon_4}],$$

где y_j — переменные из (x), не совпадающие с x_1, x_2, x_3, x_4, а $\varepsilon_j = 0, 1$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Из равенства $[ab, c]=a[b, c]+[a, c]b$ для произвольных элементов a, b, c алгебры $K[x]$ вытекает сравнение

$$(2)\qquad [[x_1, x_2]x_5, [x_3, x_4]x_6]\equiv[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]\equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{A}^2)}.$$

С другой стороны, T-идеал $T(\mathfrak{A}_k\mathfrak{A})$ порождается полиномами (1) и полиномом $\varphi=[x_1, x_1]\ldots[x_{2k-1}, x_{2k}]$. В силу (2) имеет место включение $\varphi\in T(\mathfrak{A}^2)$, откуда вытекает и равенство: $T(\mathfrak{A}_k\mathfrak{A})=T(\mathfrak{A}^2)$. Следовательно, и равенство $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^2$, $k\geqq 3$, доказано. Лемма 1 доказана.

Все собственные подмногообразия многообразия $\mathfrak{A}$ — это многообразия $\mathfrak{A}_k=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_k$, $k=1, 2,\ldots$ Так как имеет место равенство $\mathfrak{A}_k\langle\circ, \mathfrak{A}\rangle\mathfrak{A}_l=\mathfrak{A}_{kl}$ для всех натуральных чисел k, l, то группоид $\Gamma(\mathfrak{A})$ является коммутативной полугруппой, изоморфной мультипликативной полугруппы целых неотрицательных чисел. Отметим и очевидный факт, что многообразие $\mathfrak{N}_2$ не имеет собственные подмногообразия, различные от многообразия $\mathfrak{E}$. Таким образом, мы доказали:

Лемма 2. *Группоиды $\Gamma(\mathfrak{A})$ и $\Gamma(\mathfrak{N}_2)$ являются коммутативными полугруппами со законом сокращения.*

Оказывается, что во всех остальных случаях, кроме указанных в лемме 2, в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ не имеет места закон правого сокращения, т. е. имеет место следующее предложение:

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нетривиальное многообразие, несовпадающее с многообразием $\mathfrak{A}$ и с многообразием $\mathfrak{N}_2$. Тогда в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ не имеет места закон правого сокращения.*

Доказательство. Рассмотрим два случая в зависимости от того, выполнено или нет включение $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{A}$.

1. Пусть $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{A}$. Тогда многообразия $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_3$ — различные подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$, а по лемме 1 имеет место равенство $\mathfrak{A}_3\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{A}$.

2. Пусть $\mathfrak{M}$ не содержит $\mathfrak{A}$. Тогда в T-идеале $T(\mathfrak{M})$ лежит полином вида $x_1, x_2\ldots x_n+\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in\{[x, y]\}^T$. Следовательно, для некоторого $n\geqq 1$ полином x^n лежит в T-идеале $T(\mathfrak{M})$. Пусть m — минимальное число, для которого выполняется включение $x^m\in T(\mathfrak{M})$. Так как многообразие $\mathfrak{M}$ — нетривиальное, то $m>1$. Рассмотрим два подслучая:

2a. Если $m>2$, то рассмотрим многообразие $\mathfrak{N}$, которое определяется равенством $T(\mathfrak{N})=T(\mathfrak{M})+\{x^{m-1}\}^T$. Ясно, что многообразие $\mathfrak{N}$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$, и, кроме того, имеет место равенство $\mathfrak{N}\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{N}=0$.

2b. Если $m=2$, то имеет место включение $x_1x_2x_3\in T(\mathfrak{M})$ ($\operatorname{char} K\neq 2$). Тогда $\mathfrak{N}_2$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$ и, кроме того, имеет место равенство $\mathfrak{N}_2\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{N}_2=0$. Предложение 3 доказано.

Теперь можно дать ответ на вопросы Л. А. Бокутя. Для группоида $\Gamma(\mathfrak{N}_2)$ вопросы не имеют смысла. Группоид $\Gamma(\mathfrak{A})$ — коммутативная полугруппа и, следовательно, не является свободной. Во всех остальных случаях в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ не имеет места закон правого сокращения и, следовательно, он не может быть свободным. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 4. *Для любого многообразия $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики группоид (полугруппа) $\Gamma(\mathfrak{M})$ не является свободным группоидом (свободной полугруппой).*

Отметим, что из доказательства предложения 3 вытекает, что если многообразие $\mathfrak{M}$ не содержит $\mathfrak{A}$, то в группоиде $\Gamma(\mathfrak{M})$ существуют нильпотентные элементы. Интересно описать все многообразия с этим свойством.

3. Некоторые замечания. В этом пункте будем предполагать, что K — произвольно-фиксированное бесконечное поле. Все алгебры и многообразия будем рассматривать над ним. Покажем, что результаты п. 2 с незначительными изменениями можно перенести и в этом случае. Изменения появляются в зависимости от характеристики поля K.

В доказательстве леммы 1 не участвуют ограничения для характеристики поля. Следовательно, лемма 1 полностью переносится (с доказательством из п. 2) в этом случае.

Если поле K имеет положительную характеристику, то группоид $\Gamma(\mathfrak{A})$ устроен сложнее, чем в случае нулевой характеристики. Несмотря на это, результат леммы 2 остает верен и в этом случае. Чтобы установить это, рассмотрим все многообразия $\mathfrak{B}_a$, которые определяются тождествами вида:

$$[x_1, x_2]=0, \quad x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}=0,$$

где $a=(k_1, k_2, \dots, k_n)$ — конечная последовательность натуральных чисел. Ясно, что если последовательность $a_1=(l_1, l_2, \dots, l_n)$ является перестановкой последовательности $a=(k_1, k_2, \dots, k_n)$, то $\mathfrak{B}_{a_1}=\mathfrak{B}_a$. Нетрудно установить, что любое собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}$ является конечным сечением многообразий $\mathfrak{B}_a$. Легко проверить, что многообразия $\mathfrak{B}_a$ коммутируют и, кроме того, для них выполняется ассоциативный закон. Следовательно, группоид $\Gamma(\mathfrak{A})$ и в этом случае оказывается коммутативной полугруппой. Можно установить, что в полугруппе $\Gamma(\mathfrak{A})$ остает в силе и закон сокращения. Таким образом, лемма 2 переносится для многообразий ассоциативных алгебр над произвольным бесконечным полем.

Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то результаты предложения 3 и теоремы 4 тоже переносятся (с доказательствами из п. 2) полностью.

Если $\operatorname{char} K=2$, то в предложении 3 нужно учесть, что и для многообразия $\mathfrak{N}$, которое определяется тождеством $x_1^2=0$, группоид $\Gamma(\mathfrak{N})$ является коммутативной полугруппой со законом сокращения. С этим изменением предложение 3, а потом полностью теорема 4 переносятся для многообразий ассоциативных алгебр над произвольным бесконечным полем.

Выражаю свою глубокую благодарность М. Б. Гаврилову за помощь при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Гаврилов. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Доклады БАН*, **21**, 1968, 989—992.
2. Днестровская тетрадь, II. Новосибирск, 1975.
3. Ю. Н. Мальцев. Некоторые свойства произведения многообразий ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **11**, 1972, 673—688.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 2. 1977