PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О БАЗИСАХ ТОЖДЕСТВ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

ПЛАМЕН Ж. ЧИРИПОВ, ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

В п. 1 работы доказывается шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$ ассоциативных алгебр над полем характеристики, отличной от 2, а в п. 2 найден базис тождеств алгебры Грассмана бесконечномерного пространства над любым полем.

В этой работе рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над любым полем K любой характеристики. Она примыкает непосредственно к [1], где можно найти все понятия, которые мы используем, но не даем их определений.

Результаты первого пункта получены первым из авторов. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 1. *Если характеристика поля K отлична от 2, то произведение $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$ нильпотентного многообразия $\mathfrak{N}_3$ класса нильпотентности 3 на абелевое многообразие $\mathfrak{A}$ ассоциативных алгебр над K является шпехтовым многообразием.*

Этот результат является полным аналогом результата Р. М. Брайанта и Воон-Ли из их работы [2], где они доказывают шпехтовость произведения $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ нильпотентного многообразия $\mathfrak{N}_2$ на абелевое многообразие $\mathfrak{A}$ алгебр Ли над полем характеристики отличной от 2.

Заметим, что шпехтовость многообразий $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль доказана Г. К. Геновым [1] и Латышевым [5].

Результаты второго пункта получены вторым из авторов. Там проводятся доказательства следующих двух теорем:

Теорема 2. Многообразие $\mathfrak{L}_2$ *ассоциативных алгебр над любым полем любой характеристики, которое определяется тождеством*

$$[x_1, x_2, x_3]=0,$$

является шпехтовым многообразием.

Теорема 2 является обобщением результата Г. К. Генова [1, следствие 1.2] о том, что $\mathfrak{L}_2$ над полем характеристики нуль является шпехтовым многообразием.

Если E — бесконечномерное линейное пространство над полем K, то через G обозначим алгебру Грассмана пространства E. В работе [6] (следствие теоремы 4.1) показано, что если поле K имеет характеристику нуль, то ассоциативная алгебра G порождает многообразие $\mathfrak{L}_2$, т. е. в этом случае тождество $[x_1, x_2, x_3]=0$ является базисом тождеств алгебры Грассмана G. В общем случае, когда K — любое поле, нетрудно заметить, что G содержится в многообразии $\mathfrak{L}_2$. Поэтому, в связи с теоремой 2 возникает задача нахождения базиса тождеств алгебры Грассмана любого бесконечномерного линейного пространства. Эта задача решается следующей теоремой:

Теорема 3. *Пусть E — любое бесконечномерное линейное пространство над полем K положительной характеристики p. Если G — алгебра Грассмана пространства E, то тождества $x_1^p=0$, $[x_1, x_2, x_3]=0$ образуют базис тождеств, выполняющихся в алгебре G.*

1. Пусть $K[x]$ — свободная ассоциативная алгебра (без единицы) над полем K со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots$ Коммутатор $[x_1, x_2]$ длины 2 называется полином $x_1x_2-x_2x_1$. Далее индуктивно определяем коммутатор $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ длины n: если коммутатор длины к $w_k=[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ уже определен, то коммутатор длины $k+1$ определяется равенством

$$[x_1, x_2, \ldots. x_{k+1}]=w_k x_{k+1}-x_{k+1}w_k.$$

Если f_i, $i\in I$ — элементы из $K[x]$, обозначим через $\{f_i; i\in I\}^T$ — T-идеал алгебры $K[x]$, который порождается (как T-идеал) множеством $\{f_i; i\in I\}$.

Через $a, b, c, \ldots$ будем обозначать неотрицательные целые числа. Через $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \ldots$ будем обозначать последовательности из неотрицательных целых чисел с конечным носителем, а $\alpha(r)$ — это r-тый член последовательности α.

Если F — ассоциативная алгебра, а $y_1, y_2, \ldots$ элементы F, то через $[y_i\ y_j, X_\alpha]$ будем обозначать коммутатор

$$[y_i, y_j, \underbrace{y_1, y_1, \ldots, y_1}_{\alpha(1)\text{ раз}}, \underbrace{y_2, y_2, \ldots, y_2}_{\alpha(2)\text{ раз}}, \ldots, \underbrace{y_m, y_m, \ldots, y_m}_{\alpha(m)\text{ раз}}],$$

где $\alpha(r)=0$ для $r>m$ (если $\alpha(k)=0$, то y_k не участвует на соответствующем месте коммутатора). Через Z_β будем обозначать произведение

$$\underbrace{y_1 y_1 \cdots y_1}_{\beta(1)\text{ раз}}\ \underbrace{y_2 y_2 \cdots y_2}_{\beta(2)\text{ раз}} \cdots \underbrace{y_m y_m \cdots y_m}_{\beta(m)\text{ раз}},$$

где $\beta(r)=0$ для $r>m$.

Если J_0 — множество неотрицательных целых чисел, то через Φ будем обозначать множество всех инъективных отображений множества J_0 в себя, которые сохраняют естественную упорядоченность чисел и отображают 0 в 0. Иными словами, Φ — множество всех изотонных отображений множества J_0 в себя, оставляющих 0 неподвижным. Коммутант алгебры F будем обозначать через $[F, F]$.

Легко заметить, что многообразие $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ определяется тождеством $[x_1, x_2][x_3, x_4]\ldots[x_{2k-1}, x_{2k}]=0$.

Шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ ассоциативных алгебр над любым полем доказана в [4, теорема 16]. Теперь мы рассмотрим многообразие $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$ ассоциативных алгебр на полем K любой характеристики.

Пусть F — свободная алгебра этого многообразия со свободными образующими $y_1, y_2, \ldots$. Очевидно

$$F\cong K[x]/[K[x], K[x]]^3.$$

Так как многообразие $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ шпехтово, то для доказательства шпехтовости многообразия $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$ достаточно доказать, что каждый T-идеал алгебры F, который содержится в $[F, F]$, конечно-порожден (как T-идеал) [1, предложение 3.24].

Определение 1.1. *Левонормированный коммутатор* $[y_i, y_j, X_\alpha]$, *где* y_i — *некоторые из свободных образующих алгебры* F, *называется специальным коммутатором.*

Также, как в работе [1, лемма 3.2—3.6], доказывается, что множество S элементов s вида

$$s = Z_\gamma[y_i, y_j, X_\alpha][y_k, y_l, X_\beta]Z_\delta,$$

где i, j, k, l — натуральные числа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — последовательности натуральных чисел с конечным носителем, порождает $[F, F]^2$ как линейное пространство.

Мы будем отождествлять упорядоченную восьмерку $(i, j, k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и элемент $s = Z_\gamma[y_i, y_j, X_\alpha][y_k, y_l, X_\beta]Z_\delta \in S$.

Определение 1.2. *Если* α *и* β *последовательности неотрицательных целых чисел с конечным носителем, будем считать, что* $\alpha < \beta$, *если существует* $n \geqq 1$, *такое, что для каждого* $r > n$ $\alpha(r) = \beta(r)$ *и* $\alpha(n) < \beta(n)$.

Теперь вводим порядок в S. Пусть $s, t \in S$ и $s \neq t$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что* s *меньше* t, *и записывать*

$$s = (i, j, k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta) < (i_1, j_1, k_1, l_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = t,$$

если это выполняется лексикографически, т. е. $i < i_1$ *или* $i = i_1$, *но* $j < j_1$ *или* $i = i_1$, $j = j_1$, *но* $k < k_1$ *и т. д.*

Легко проверить, что $(S, \leqq)$ — вполне упорядоченное множество.

Теперь рассмотрим другой порядок в множестве S.

Определение 1.4. *Пусть* $s, t \in S$. *Будем считать, что*

$$s = (i, j, k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \leqq_1 (i_1, j_1, k_1, l_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = t,$$

если выполняются следующие две условия:

а) *существует* $\varphi \in \Phi$, *такое, что* $i\varphi = i_1$, $j\varphi = j_1$, $k\varphi = k_1$, $l\varphi = l_1$, $\alpha(r) \leqq \alpha_1(r\varphi)$, $\beta(r) \leqq \beta_1(r\varphi)$, $\gamma(r) \leqq \gamma_1(r\varphi)$, $\delta(r) \leqq \delta_1(r\varphi)$, *для каждого* $r = 1, 2, \ldots$;

б) $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \beta(r) \equiv \sum_{r=1}^{m} \beta_1(r) \pmod 2$.

Как и в работе [2], показывается, что $(S, \leqq_1)$ частично хорошо упорядоченное множество.

В каждой ассоциативной алгебре выполняются тождества

$$x_1x_2 = x_2x_1 + [x_1, x_2], \tag{1}$$

$$\begin{aligned} [x_1, x_2x_3] &= x_2[x_1, x_3] + [x_1, x_2]x_3, \\ [x_1x_2, x_3] &= x_1[x_2, x_3] + [x_1, x_3]x_2, \end{aligned} \tag{2}$$

которые мы будем часто использовать.

Пусть $g \in [F, F]^2$. Тогда элемент g можно записать в виде

$$g = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \cdots + \lambda_n s_n, \tag{3}$$

где $s_i \in S$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $s_1 > s_2 > \cdots > s_n$.

Если элемент g записан в виде (3), то s_1 будем называть весом элемента g и будем его обозначать через $wt(g)$.

Пусть $t \in S$. Тогда, если

(4)
$$t = y_1^{\gamma(1)} \dots y_m^{\gamma(m)} [y_i, \ y_j, \ y_1^{\alpha(1)}, \dots, y_m^{\alpha(m)}, \ y_n] [y_k, \ y_l, \ y_1^{\beta(1)}, \dots y_m^{\beta(m)}] y_1^{\delta(1)} \dots y_m^{\delta(m)}$$

или

(5)
$$t = y_1^{\gamma(1)} \dots y_m^{\gamma(m)} [y_i, y_j, y_1^{\alpha(1)}, \dots, y_m^{\alpha(m)}] [y_k, \ y_l, \ y_1^{\beta(1)}, \dots, y_m^{\beta(m)}, y_n] y_1^{\delta(1)} \dots y_m^{\delta(m)},$$

где $n > m$, то обозначим через $\psi_{p,q}$ — эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $y_n \psi_{p,q} = y_p y_q$, $y_i \psi_{p,q} = y_i$, $i \neq n$.

Следующие две леммы доказываются непосредственной проверкой и применением тождеств (1) и (2).

Лемма 1.5. *Пусть $s, t \in S$, $s < t$ и t имеет вид* (4) *или* (5). *Тогда* $wt(s\psi_{p,q}) < wt(t\psi_{p,q})$.

Лемма 1.6. *Пусть s, $t \in S$, $s < t$ и i — натуральное число. Тогда элементы $y_i s$, $s y_i$, $y_i t$, $t y_i$ содержатся в S и $s y_i < t y_i$, $y_i s < y_i t$.*

Пусть n, p, q — натуральные числа. Обозначим через $\theta_{p,q}$ — эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $y_n \theta_{p,q} = y_p + y_q$, $y_i \theta_{p,q} = y_i$, $i \neq n$.

Тогда, если используем тождество $[x_1, \ x_2 + x_3] = [x_1, \ x_2] + [x_1, \ x_3]$, то непосредственной проверкой доказывается лемма:

Лемма 1.7. *Пусть s, $t \in S$, $s < t$ и t имеет вид* (4) *или* (5). *Тогда* $wt(s\theta_{p,q}) < wt(t\theta_{p,q})$.

Лемма 1.8. *Пусть $g \in [F, F]^2$ и $wt(g) = s$. Пусть существует элемент $t \in S$, такой, что $s \leq_1 t$. Тогда существует полином $h \in \{g\}^T$, такой, что $wt(h) = t$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий эндоморфизм θ алгебры F: $y_i \theta = y_i + [y_i, \ y_n]$, n — фиксированное, для каждого $i = 1, 2, \dots$. Пусть $n > m$. С помощью простой индукции доказывается, что $[y_i, \ y_j, \ X_\alpha]\theta = [y_i, \ y_j, \ X_\alpha] + [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n]$.

Если $s = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha][y_k, \ y_l, \ X_\beta] Z_\delta$, так как $[F, \ F]^3 = 0$, то

$$s\theta = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha][y_k, \ y_l, \ X_\beta] Z_\delta + Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta] Z_\delta$$
$$+ Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta + Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta.$$

Используя тождество (1), получаем

$$s y_n - y_n s = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta] Z_\delta + Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta.$$

Тогда

$$w_n = s\theta - s - (s y_n - y_n s) = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta.$$

Если $p > m$, рассмотрим

$$w_n \theta_{n,p} = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n + y_p][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n + y_p] Z_\delta$$
$$= Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta + Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_p][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_p] Z_\delta$$
$$+ Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_p] Z_\delta + Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_p][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta.$$

Введем обозначение

$$z_{n,p} = w_n \theta_{n,p} - w_n - w_p = Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_n][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_p] Z_\delta$$
$$+ Z_\gamma [y_i, \ y_j, \ X_\alpha, \ y_p][y_k, \ y_l, \ X_\beta, \ y_n] Z_\delta.$$

Пусть $\varphi(\varphi \in \Phi)$ — отображение, которое доказывает, что $s \leqq_1 t$. Обозначим через φ^* эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $y_i\varphi^* = y_i\varphi$ для $i = 1, 2, \ldots$.

Очевидно $wt(g\varphi^*) = wt(g)\varphi^*$. Пусть $s_1 = wt(g\varphi^*)$. Тогда, если

$$t = Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda][y_c, y_d, X_\mu]Z_\pi,$$

то $s_1 = Z_{\gamma_1}[y_a, y_b, X_{\alpha_1}][y_c, y_d, X_{\beta_1}]Z_{\delta_1}$, где $\alpha_1(r) \leqq \lambda(r)$, $\beta_1(r) \leqq \mu(r)$, $\gamma_1(r) \leqq \nu(r)$, $\delta_1(r) \leqq \pi(r)$, $r = 1, 2, \ldots$.

Если $\alpha_1(r) = \lambda(r)$, $\beta_1(r) = \mu(r)$, $\gamma_1(r) = \nu(r)$, $\delta_1(r) = \pi(r)$, $r = 1, 2, \ldots$, то $h = g\varphi^*$. Рассмотрим отдельно возможные случаи.

а. Мы имеем $\Sigma_{r=1}^m(\nu(r) - \gamma_1(r)) \geqq 0$ и $\Sigma_{r=1}^m(\pi(r) - \delta_1(r)) \geqq 0$. Тогда рассмотрим элемент $h_1 = y_1^{\nu(1)-\gamma_1(1)} \ldots y_m^{\nu(m)-\gamma_1(m)} . g\varphi^* . y_1^{\pi(1)-\delta_1(1)} \ldots y_m^{\pi(m)-\delta_1(m)}$.

Очевидно $wt(h_1) = Z_\nu[y_a, y_b, X_{\alpha_1}][y_c, y_d, X_{\beta_1}]Z_\pi$.

Итак, мы можем предполагать, что $\nu = \gamma_1$ и $\pi = \delta_1$.

б. Если $f(g\varphi^*, t) = \Sigma_{r=1}^m(\lambda(r) - \alpha_1(r)) = 0$, то $\lambda = \alpha_1$.

Пусть $f(g\varphi^*, t) > 0$. Мы докажем индукцией по $f(g\varphi^*, t)$, что можно считать $\lambda = \alpha_1$. Рассмотрим элемент

$$\bar{g} = g\varphi^* . y_n - y_n g\varphi^*, \quad n > m,$$

$$\bar{s} = s_1 y_n - y_n s_1 = Z_\nu[y_a, y_b, X_{\alpha_1}, y_n][y_c, y_d, X_{\beta_1}]Z_\pi$$
$$+ Z_\nu[y_a, y_b, X_{\alpha_1}][y_c, y_d, X_{\beta_1}, y_n]Z_\pi \quad \text{(лемма 1.6)}.$$

Так как $f(g\varphi^*, t) > 0$, то существует $r(1 \leqq r \leqq m)$ со свойством $\lambda(r) > \alpha_1(r)$. Рассмотрим эндоморфизм φ_r^* алгебры F, определенный равенствами $y_n\varphi_r^* = y_r$, $y_i\varphi_r^* = y_i$, $i \neq n$.

Тогда $\bar{g}\varphi_r^*$ имеет вес $\bar{s}\varphi_r^*$, а $f(\bar{g}\varphi_r^*, t) = f(g\varphi^*, t) - 1$. По индукционному предположению можно считать, что элемент $g\varphi^*$ имеет вес $s_1 = Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda][y_c, y_d, X_{\beta_1}]Z_\pi$.

в. Если обозначим $e(g\varphi^*, t) = \sum_{r=1}^m(\mu(r) - \beta_1(r))$, то индукцией по $e(g\varphi^*, t)$ покажем, что существует элемент $h \in \{g\}^T$ и $wt(h) = t$.

Если $e(g\varphi^*, t) = 0$, то $h = g\varphi^*$. Пусть $e(g\varphi^*, t) > 0$. Рассмотрим элемент

$$v_n = s_1 y_n - y_n s_1 = Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda, y_n][y_c, y_d, X_{\beta_1}]Z_\pi$$
$$+ Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda][y_c, y_d, X_{\beta_1}, y_n]Z_\pi, \quad n > m.$$

Рассмотрим элементы

$$g_1 = g\varphi^* y_n - y_n . g\varphi^*, \quad g_2 = g\varphi^* y_p - y_p g\varphi^*, \quad p > m.$$

Пусть

$$g_{n,p} = ((g\varphi^*)\theta - g\varphi^* - g_1)\theta_{n,p} - ((g\varphi^*)\theta - g\varphi^* - g_1) - ((g\varphi^*)\theta - g\varphi^* - g_2).$$

Как показано выше, первые две слагаемые в записи $g_{n,p}$ равны элементу

$$z_{n,p} = Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda, y_n][y_c, y_d, X_{\beta_1}, y_p]Z_\pi + Z_\nu[y_a, y_b, X_\lambda, y_p][y_c, y_d, X_{\beta_1}, y_n]Z_\pi.$$

Рассмотрим элемент

$$\bar{h} = g_1\psi_{n,p} + g_1\psi_{p,n} + g_{n,p} - y_p g_1 - g_2 y_n - y_n g_2 - g_1 y_p.$$

Применяя леммы 1.5—1.7, мы получаем, что достаточно рассмотреть элемент

$$x=v_n\psi_{n,p}+v\psi_{p,n}+z_{n,p}-y_pv_n-y_nv_p-v_py_n-v_ny_p,$$

для того, чтобы определить $wt\,(\bar{h})$.

$$\begin{aligned}x=&Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_ny_p][y_c,y_d,X_{\beta_1}]Z_\pi+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_ny_p]Z_\pi\\&+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_py_n][y_c,y_d,X_{\beta_1}]Z_\pi+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_py_n]Z_\pi\\&+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_n][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_p]Z_\pi+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_p][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n]Z_\pi\\&-Z_\nu y_p[y_a,y_b,X_\lambda,y_n][y_c,y_d,X_{\beta_1}]Z_\pi-Z_\nu y_p[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n]Z_\pi\\&-Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_p][y_c,y_d,X_{\beta_1}]y_nZ_\pi-Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_p]y_nZ_\pi\\&-Z_\nu y_n[y_a,y_b,X_\lambda,y_p][y_c,y_d,X_{\beta_1}]Z_\pi-Z_\nu y_n[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_p]Z_\pi\\&-Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda,y_n][y_c,y_d,X_{\beta_1}]y_pZ_\pi-Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n]y_pZ_\pi.\end{aligned}$$

После применения тождества (2) и приведения получаем

$$\begin{aligned}x=&-2Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n,y_p]Z_\pi\\&+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_p]y_nZ_\pi+Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n]y_pZ_\pi\\&-Z_\nu y_n[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_p]Z_\pi-Z_\nu y_p[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n]Z_\pi.\end{aligned}$$

Пусть характеристика поля K отлична от 2. Тогда

$$wt(\bar{h})=Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_n,y_p]Z_\pi.$$

Так как $e(g\varphi^*,t)>$, то существуют числа u, w ($1\leq u$, $w\leq m$), такие, что $\mu(u)-\beta_1(u)>0$, $\mu(w)-\beta_1(w)>0$.

Тогда элемент $h_1=(\bar{h}\varphi_n^*)\,\varphi_w^*$ имеет вес $Z_\nu[y_a,y_b,X_\lambda][y_c,y_d,X_{\beta_1},y_u,y_w]Z_\pi$ и, следовательно, $e(h_1,t)=\sum\limits_{r=1}^{m}(\mu(r)-\beta_1(r))=e(g\varphi^*,t)-2$.

По индукционному предположению существует элемент $h\in\{g\}^T$, такой, что $wt(h)=t$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть I — T-идеал алгебры F и $I\subseteq[F,F]^2$. Покажем, что I является конечно-порожденным (как T-идеал).

Пусть $S_I\subseteq S$ и S_I — множество всех весов всех полиномов из I. Так как $(S,\leq_1)$ частично хорошо упорядоченное, то существует $S_0=\{s_1,s_2,\dots,s_r\}\subseteq S_I$, такое, что для каждого $s\in S_I$ существует i ($1\leq i\leq r$), такое, что $s_i\leq_1 s$. Пусть $g_1,g_2,\dots,g_r$ — элементы из I, имеющие веса соответственно $s_1,s_2,\dots,s_r$. Покажем, что $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}^T=I$. Очевидно $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}^T\subseteq I$. Пусть h_1 — произвольный элемент из I и $wt(h_1)=t$. Тогда существует $s_i\in S_0$ ($1\leq i\leq r$), такое, что $s_i\leq_1 t$. Из леммы 1.8 следует, что существует $h\in\{g_i\}^T\subseteq I$ и $wt(h)=t$. Пусть ϱ — ненулевой коэффициент веса элемента h_1 и рассмотрим $g=h_1-\varrho h$. Тогда или $g=0$, или $wt(g)<wt(h_1)$. По индукции заключаем, что $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}^T=I$. Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть

$$V=[K[x],K[x]],\quad U=\{[x_1,x_2,x_3]\}^T,\quad F=K[x]/U.$$

Образы свободных образующих алгебры $K[x]$ в F будем обозначать снова через $x_1, x_2, \ldots$.

Из соотношений (1) и (2) без особого труда доказывается, что в алгебре F выполняются тождества

(6) $$[x_1, x_2][x_3, x_4] = -[x_1, x_3][x_2, x_4], \quad [x_1, x_2][x_3, x_4] = -[x_1, x_4][x_3, x_2].$$

Поэтому в F выполняется тождество

(7) $$[x_1, x_2][x_1, x_3] = 0.$$

Из тождеств (1) и (7) получается

$$[x_1, x_i]fx_j x_1 g = [x_1, x_i]f x_1 x_j g - [x_1, x_i]f[x_1, x_j]g$$
$$= [x_1, x_i]fx_1x_jg - [x_1, x_i][x_1, x_j]fg = [x_1, x_i]fx_1 x_j g.$$

Итак,

(8) $$[x_1, x_i]f x_j x_1 g = [x_1, x_i]fx_1x_jg.$$

Лемма 2.1. *Каждый элемент алгебры F, содержащийся в $[F, F]$, является линейной комбинацией элементов вида*

(9) $$v[x_{i_1}, x_{i_2}],$$

где v — моном из F.

Доказательство. Ясно, что каждый элемент алгебры F, содержащийся в $[F, F]$, является линейной комбинацией элементов вида $h[f, g]$, $h, f, g \in F$. Отсюда видно, что каждый элемент из $[F, F]$ является линейной комбинацией элементов вида $m_1[m_2, m_3]$, где m_i — мономы из F $(i = 1, 2, 3)$. Поэтому, применяя многократно тождество (2), получаем утверждение леммы.

Пусть $wx_kx_lu[x_i, x_j]$ — элемент вида (9). Применяя тождество (1), получаем

$$wx_kx_lu[x_i, x_j] = wx_lx_ku[x_i, x_j] + wu[x_k, x_l][x_i, x_j].$$

Следовательно, каждый элемент вида (9) можно записать в виде суммы элементов вида

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_t}^{\alpha_t}[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}], \quad s \geqq 1, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_t.$$

Используя тождество (6), можем считать $j_1 < j_2 < \cdots j_{2s}$. Причем из тождества (7) видно, что неравенства строгие. Наконец, применяя тождество [8], получаем:

Лемма 2.2. *Каждый элемент алгебры F, содержащийся в $[F, F]$, является линейной комбинацией элементов вида*

(10) $$u = x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_t}^{\alpha_t}[x_{j_1}, x_{j_2}]\, x_{j_1}^{\beta_1-1} x_{j_2}^{\beta_2-1} \ldots [x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}]\, x_{j_{2s-1}}^{\beta_{2s-1}-1} x_{j_{2s}}^{\beta_{2s}-1},$$

где $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{2s}$, $s \geqq 1$, $\{i_1, \ldots, i_t\} \cap \{j_1, \ldots, j_{2s}\} = \varnothing$.

Пусть J_0, Φ — множества, определенные в п. 1. Пусть L — множество всех последовательностей неотрицательных целых чисел с конечным носителем. Обозначим $H = \{(\alpha, \beta);\ \alpha \in L,\ \beta \in L\}$.

Пусть $(\alpha, \beta) \in H$ и $(\gamma, \delta) \in H$. Через α_r будем обозначать r-тый член последовательности α. Положим $(\alpha, \beta) \leqq_1 (\gamma, \delta)$, если существует $\varphi \in \Phi$, такое, что $\alpha_r \leqq \gamma_{r\varphi}$, $\beta_r \leqq \delta_{r\varphi}$, $r = 1, 2, \ldots$ Будем обозначать $(\alpha, \beta) \leqq_1^{\varphi} (\gamma, \delta)$. Из теоремы 2.9 работы [1] легко следует, что множество H является частично хорошо упорядоченным.

Через M обозначим все элементы вида (10). Пусть $u \in M$ и u записан в виде (10). Говорим, что $x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_t}^{\alpha_t}$ — начало u, а $[x_{j_1}, x_{j_2}] x_{j_1}^{\beta_1 - 1} x_{j_2}^{\beta_2 - 1} \dots [x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}] x_{j_{2s-1}}^{\beta_{2s-1}-1} x_{j_{2s}}^{\beta_{2s}-1}$ — конец u. Пусть u и v — элементы из M и

$$u = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_t}^{\alpha_t} [x_{j_1}, x_{j_2}] x_{j_1}^{\beta_1 - 1} x_{j_2}^{\beta_2 - 1} \dots [x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}] x_{j_{2s-1}}^{\beta_{2s-1}-1} x_{j_{2s}}^{\beta_{2s}-1},$$

$$v = x_{k_1}^{\gamma_1} \dots x_{k_p}^{\gamma_p} [x_{l_1}, x_{l_2}] x_{l_1}^{\delta_1 - 1} x_{l_2}^{\delta_2 - 1} \dots [x_{l_{2q-2}}, x_{l_{2q}}] x_{l_{2q-1}}^{\delta_{2q-1}-1} x_{l_{2q}}^{\delta_{2q}-1}.$$

Определение 2.3. *Говорим, что $u > v$, если выполняется одно из следующих условий:*

(а) $\deg u > \deg v$,

(б) $\deg u = \deg v$, *но* $s < q$,

(в) $\deg u = \deg v$ *и* $s = q$, *но существует* $i \geq 1$, *такое, что для каждого* $j < i$ $\deg_{x_j} u = \deg_{x_j} v$, *но* $\deg_{x_i} u > \deg_{x_i} v$,

(г) $\deg u = \deg v$, $s = q$ *и для каждого* $i \geq 1$ $\deg_{x_i} u = \deg_{x_i} v$. *Существует* $k \geq 1$, *такое, что для каждого* $j > k$ x_j *участвует в начале (конце, не участвует) и тогда и только тогда, когда участвует в начале (конце, не участвует)* v, *но* x_k *участвует в начале* u *и в конце* v.

Легко проверяется, что множество $(M, \leq)$ — вполне упорядоченное. Каждый элемент $f \in [F, F]$ записывается

$$f = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k, \quad 0 \neq \lambda_i \in K,$$
$$u_i \in M \quad (1 \leq i \leq k), \quad u_1 > u_2 > \dots > u_k.$$

Для каждой такой записи f назовем u_1 весом элемента f в этой записи и будем его обозначать через $wt(f)$.

Каждому элементу u вида (10) сопоставим элемент $\zeta(u) = (\alpha, \beta) \in H$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ и $\alpha_n = 0$ для $n > t$, $\beta_m = 0$ для $m > 2s$. Отображение ζ является вложением M в H, и мы можем считать, что $M \subseteq H$. Мы получаем, что $(M, \leq_1)$ — частично хорошо упорядоченное.

Мы применим тот же метод доказательства, как и п. § 1. Поэтому ясно, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 2.4. *Пусть* $f \in [F, F]$ *и* $wt(f) = u$, $t \in M$ *и* $u \leq_1 t$. *Тогда существует элемент* $h \in \{f\}^T$ *и* $wt(h) = t$.

Пусть $\varphi \in \Phi$, а φ^* — эндоморфизм алгебры F, для которого $x_i \varphi^* = x_{i\varphi}$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть ε — тождественное отображение множества J_0 в себя. Следующие три леммы доказываются простым приложением определений, и поэтому мы опускаем их доказательства.

Лемма 2.5. *Пусть* $u, t \in M$ *и* $u < t$. *Тогда для каждого* $\varphi \in \Phi$ *выполняется* $u\varphi^* < t\varphi^*$.

Лемма 2.6. *Пусть* $u, t \in M$ *и* $u \leq_1^{\varphi} t$. *Тогда мы имеем* $u\varphi^* \leq_1^{\varepsilon} t$.

Лемма 2.7. *Пусть* $f \in [F, F]$ *и* $wt(f) = U$ — *его вес, записанный в виде* (10). *Тогда выполняется*

(а) *если* $1 \leq k \leq 2s$, *то вес элемента* $x_{j_k} f$ *равен элементу*

$$x_{j_k} u = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_t}^{\alpha_t} [x_{j_k}, x_{j_{k+1}}] x_{j_k}^{\beta_k} x_{j_{k+1}}^{\beta_{k+1}-1} \dots$$

при k — *нечетное и*

$$x_{j_k}u = x_{i_1}^{a_1} x_{i_t}^{a_t} \ldots [x_{j_{k-1}}, x_{j_k}]\, x_{j_{k-1}}^{\beta_{k-1}-1} x_{j_k}^{\beta_k} \ldots$$

при k — четное число,

(б) *весом элемента* $[x_p, x_q]f$ (p, q — *произвольные*) *является элемент* $[x_p, x_q]$ u, *приведенный в виде* (10) *при помощи тождеств* (6) *и* (8).

Лемма 2.8. *Пусть u — элемент вида* (10) *и w — начало элемента u, а v — его конец. Тогда выполняется*

(а) *если* $1 \leqq k \leqq t$, *то весом элемента* x_{i_k} u *является элемент* $t = x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_k}^{a_k+1} \ldots x_{i_t}^{a_t} v$;

(б) *если* $wt(f) = u$, *то* $wt(x_{i_k} f) = t$.

Доказательство. Мы имеем

$$x_{i_k}u = x_{i_k} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_t}^{a_t} v = x_{i_1} x_{i_k} x_{i_1}^{a_1-1} \ldots x_{i_t}^{a_t} v + [x_{i_k}, x_{i_1}]\, x_{i_1}^{a_1-1} \ldots x_{i_t}^{a_t} v.$$

Ясно, что второе слагаемое (приведенное в виде (10)) меньше t в порядке $\leqq$ (см. определение 2.3, (б)). Продолжая этим способом, мы можем „перенести“ x_{i_k} на его месте и получим, что t будет весом элемента $x_{i_k} u$.

Утверждение (б) леммы немедленно получается из условия (а).

Доказательство леммы 2.4. Пусть $f \in [F, F]$, $wt(f) = u$, $t \in M$, $u \leqq_1^{\varphi} t$. Из леммы 2.6 вытекает, что мы можем считать $u \leqq_1^{\varepsilon} t$. Пусть w_u и w_t — начала, а v_u и v_t — концы соответственно u и t, т. е. $u = w_u v_u$, $t = w_t v_t$. По лемме 2.7 мы можем считать, что $v_u = v_t = v$.

Итак, $wt(f) = u = w_u v$, $t = w_t v$, $u \leqq_1^{\varepsilon} t$. Пусть $w_t = x_{i_1}^{\gamma_1} \ldots x_{i_p}^{\gamma_p}$. Тогда $w_u = x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_p}^{a_p}$, где $0 \leqq a_k \leqq \gamma_k$ $(1 \leqq k \leqq p)$.

Проведем индукцию по числу

$$r_{t,f} = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_k - a_k).$$

Если $r_{t,f} = 0$, то $u = t$ и $h = f$. Пусть $r_{t,f} > 0$. Тогда для некоторого k имеем $\gamma_k > a_k$ $(1 \leqq k \leqq p)$. Рассмотрим элемент $g = x_{i_k} f$. Для него (применяя лемму 2.8) мы имеем $r_{t,g} = r_{t,f} - 1$. По индукционному предположению существует элемент $h \in \{g\}^T$ и $wt(h) = t$. Остается заметить, что $\{g\}^T \subseteq \{f\}^T$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис пространства E. Пусть сначала $\operatorname{char} K = 2$. Легко заметить, что $x_1^2 = 0$ является тождеством в алгебре Грассмана G. Из тождества $x_1^2 = 0$ следует тождество $[x_1, x_2, x_3] = 0$. Пусть $T = \{x_1^2\}^T \subset K[x]$, $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x]$ и полином f существенно зависит от букв $x_1, \ldots, x_n$, т. е. если $1 \leqq i \leqq n$, то $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$. Имея в виду, что из $x_1^2 = 0$ следует антикоммутативность, которая ($\operatorname{char} K = 2$) эквивалентна коммутативности, мы можем записать

$$f \equiv a x_1 x_2 \ldots x_n (\operatorname{mod} T), \quad a \in K.$$

Если $f \notin T$, то $a \neq 0$ и, следовательно, f не является тождеством в G (например, $a e_1 e_2 \ldots e_n \neq 0$ в G). Следовательно, в G выполняется только тождество $x_1^2 = 0$ и его следствия.

Пусть теперь $\operatorname{char} K = p > 2$.

Замечание. Нетрудно показать, что в этом случае тождество $[x_1, x_2, x_3] = 0$ не следует из тождества $x_1^p = 0$, как и тождество $x_1^p = 0$ не следует из тождества $[x_1, x_2, x_3] = 0$.

Назовем элементы грассманской алгебры G полиномами, а элементы вида $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}$ — мономами. Моном $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}$ назовем четным, если $n = 2k$, и нечетным — в противном случае. Полином $g \in G$ назовем четным, если он записан как линейная комбинация четных мономов, и нечетным — если он линейная комбинация нечетных мономов. Обозначим через C множество четных полиномов алгебры G и через H — множество нечетных полиномов алгебры G. Если w — моном из C, то для каждого $j = 1, 2, \dots$ $we_j = e_j w$ и, следовательно, w принадлежит центру алгебры G. То есть, C содержится в центре алгебры G. Будем использовать это многократно без оговорок. (В действительности C просто совпадает с центром алгебры G.)

Если u и v — мономы из H, то $uv = -vu$. Отсюда получается, что если h, t — полиномы из H, то $ht = -th$ и $h^2 = t^2 = 0$. Ясно также, что если u — моном, то $u^2 = 0$.

Каждый элемент g из алгебры G записывается в виде $g = c + h$, $c \in C$, $h \in H$.

Если n — натуральное число, то

$$g^n = (c+h)^n = c^n + nc^{n-1}h, \tag{11}$$

потому что $h^2 = h^3 = \dots = 0$. Отсюда при $n = p$ $g^p = c^p$. Если $c = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$, u_i — мономы $(1 \leq i \leq s)$, то $c^p = \alpha_1^p u_1^p + \dots + \alpha_s^p u_s^p = 0$, так как $\operatorname{char} K = p$ и $u_i^2 = 0$ $(1 \leq i \leq s)$. Следовательно, $x_1^p = 0$ является тождеством в G.

Если $g_1 = c_1 + h_1$, $g_2 = c_2 + h_2$, $c_i \in C$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$, то применением (11) получается

$$[g_1, g_2] g_1^{\beta_1 - 1} g_2^{\beta_2 - 1} = 2 c_1^{\beta_1 - 1} c_2^{\beta_2 - 1} h_1 h_2. \tag{12}$$

Очевидно, что если $f = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, u_i — мономы, $\alpha_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$, то

$$f^{n+1} = 0. \tag{13}$$

Лемма 2.9. *Пусть n — натуральное число и при $k \neq l$ выполняется $e_{i_k} \neq e_{i_l}$ $(1 \leq k, l \leq 2n)$. Пусть $w = e_{i_1}e_{i_2} + e_{i_3}e_{i_4} + \dots + e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n}}$. Тогда*

(а) $w^n = (e_{i_1}e_{i_2} + e_{i_3}e_{i_4} + \dots + e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n}})^n = n!\, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_{2n}}$;

(б) *если $m < n$, то w^m является линейной комбинацией мономов, число которых больше 1 и в каждом мономе участвуют не все элементы e_{i_j} $(1 \leq j \leq 2n)$.*

Доказательство. Утверждение (а) получается индукцией по n. При $n = 1$ равенство (а) очевидно. Пусть $n > 1$. Мы имеем

$$w^n = [(e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2n-3}}e_{i_{2n-2}}) + e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n}}]^n = (e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2n-3}}e_{i_{2n-2}})^n + n(e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2n-3}}e_{i_{2n-2}})^{n-1} e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n-2}},$$

потому что $(e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n}})^2 = 0$. Имея в виду (13), получаем

$$w^n = n(e_{i_1}e_{i_2} + \dots + e_{i_{2n-3}}e_{i_{2n-2}})^{n-1} e_{i_{2n-1}}e_{i_{2n}}.$$

Остается приложить индукционное предположение. Утверждение (б) очевидно. Лемма доказана.

Пусть $T=\{x_1^p, [x_1, x_2, x_3]\}^T \subset K[x]$. Пусть $f=f(x_1, x_2, \ldots x_n) \in K[x]$ и f зависит существенно от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из доказательства леммы 2.2 видно, что верна аналогичная

Лемма 2.10. *Полином f сравним по модулю T с линейной комбинацией элементов вида* (10). *При этом $\alpha_k<p$ $(1\leq k\leq t)$, $\beta_l-1<p$ $(1\leq l\leq 2s)$.*

Снова можем выбрать вес $wt(f)$ в соответствии с порядком $\leqq$ (определение 2.3).

Лемма 2.11. *Каждый элемент u вида* (10) *не является тождеством в алгебре G.*

Доказательство. Рассмотрим $u(g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_{2s}})$, где элементы

$$g_{i_k}=c_{i_k}+h_{i_k},\ c_{i_k} \in C,\ h_{i_k} \in H \quad (1\leq k\leq t)$$
$$g_{j_l}=c_{j_l}+h_{j_l},\ c_{j_l} \in C,\ h_{j_l} \in H \quad (1\leq l\leq 2s)$$

определим позже. Мы имеем (применяя (12))

$$u(g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_{2s}})=2^s\prod_{k=1}^{t}(c_{i_k}+h_{i_k})^{\alpha_k}\prod_{l=1}^{s}c_{j_{2l-1}}^{\beta_{2l-1}-1}c_{j_{2l}}^{\beta_{2l}-1}h_{j_{2l-1}}h_{j_{2l}}.$$

Выбираем $h_{i_k}=0$ $(1\leq k\leq t)$. Тогда

$$u(g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_{2s}})=2^s\prod_{k=1}^{t}c_{i_k}^{\alpha_k}\prod_{l=1}^{s}c_{j_{2l-1}}^{\beta_{2l-1}-1}c_{j_{2l}}^{\beta_{2l}-1}h_{j_{2l-1}}h_{j_{2l}}.$$

Выбираем $h_{j_l}=e_l$ $(1\leq l\leq 2s)$. Теперь из леммы 2.9 (а) видно, что мы можем так выбрать c_{i_k} и c_{j_l} $(1\leq k\leq t,\ 1\leq l\leq 2s)$, что $u(g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_{2s}})$ окажется мономом, отличным от 0 (помним, что $\alpha_k<p$ и $\beta_l-1<p$). Лемма доказана.

Пусть $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и f существенно зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть

$$f\equiv\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k \pmod T \quad \text{(лемма 2.1) и } wt(f)=u_1>u_2>\cdots>u_k.$$

Так как полином f существенно зависит от букв x_i, то каждая переменная x_i $(1\leq i\leq n)$ входит в каждое u_j $(1\leq j\leq k)$. Если $f\notin T$, то хотя бы для одного индекса j $(1\leq j\leq k)$ выполняется $\alpha_j\neq 0$. После устранения слагаемых с нулевым коэффициентом, мы будем считать, что все $\alpha_j\neq 0$. Докажем, что в этом случае полином f не является тождеством в алгебре G.

Пусть $wt(f)=u_1$ имеет вид (10). Применяя лемму 2.11, мы выбираем такие элементы g_{i_k} $(1\leq k\leq t)$ и g_{j_l} $(1\leq l\leq 2s)$ из алгебры G, что $\alpha_1u_1(g_{i_1}, \ldots, g_{i_t}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_{2s}})=\alpha_1w\neq 0$, w — моном из алгебры G. Пусть этому выбору отвечает гомоморфизм η: $K[x]\to G$

$$x_{i_k}\eta=g_{i_k}=c_{i_k} \quad (1\leq k\leq t),$$
$$x_{j_l}\eta=g_{j_l}=c_{j_l}+h_{j_l} \quad (1\leq l\leq 2s),$$
$$x_m\eta=0, \quad m\neq i_k,\ j_l.$$

Пусть v — произвольный элемент множества $\{u_2, u_3, \ldots, u_k\}$. Элемент $v\eta$ является линейной комбинацией $v\eta = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$, $\beta_i \in K$ $(1 \leqq i \leqq r)$ нескольких мономов из алгебры G. Мы покажем, что ни один из них не может сократиться с мономом w. Этим все будет доказано.

Мы имеем $u_1 > v$. Тогда выполняется некоторое из условий (а) — (г) определения 2.3.

Допустим, что выполняется условие (а). В этом случае существует элемент x_j $(1 \leqq j \leqq n)$, такой, что $\alpha = \deg_{x_j} u_1 > \deg_{x_j} v = \beta$. Пусть $x_j \eta = g_j = c_j + h_j$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Элемент x_j участвует в начале u_1 и в начале v. Тогда $h_j = 0$ и $w = u_1\eta = \cdots c_j^{\alpha} \ldots$, $v\eta = \cdots c_j^{\beta} \ldots$ и $\alpha > \beta$.

Применяя условие (б) леммы 2.9, мы получаем, что ни один из мономов v_i $(1 \leqq i \leqq r)$ не может сократиться с мономом w.

Случай 2. Элемент x_j участвует в начале u_1 и в конце v. Тогда $x_j\eta = c_j$ — центральный элемент алгебры G и $v\eta = 0$.

Случай 3. Элемент x_j участвует в конце u_1 и в начале v. Тогда, используя (11) и (12), мы имеем

$$w = u_1\eta = \ldots c_j^{\alpha-1} h_j \ldots$$

$$v\eta = \ldots (c_j^{\beta} + \beta c_j^{\beta-1} h_j) \ldots = \ldots c_j^{\beta} \ldots + \ldots c_j^{\beta-1} h_j \ldots$$

Мономы, появляющиеся из первого слагаемого элемента $v\eta$, не могут сократиться с мономом w, потому что в каждом из них элемент h_j не участвует. Мономы из второго слагаемого тоже не могут сократиться с мономом w, потому что $\beta - 1 < \alpha - 1$ (снова используем условие (б) леммы 2.9).

Случай 4. Элемент x_j участвует в конце u_1 и в конце v

$$w = u_1\eta = \ldots c_j^{\alpha-1} h_j$$

$$v\eta = \cdots c_j^{\beta-1} h_j \ldots$$

Снова $\beta - 1 < \alpha - 1$.

Пусть теперь выполняется условие (б) определения 2.3. Тогда число коммутаторов, участвующих в записи элемента u_1, меньше, чем число коммутаторов, участвующих в записи элемента v. В этом случае существует элемент x_j, который не участвует в коммутатор в записи элемента u_1, но участвует в коммутатор в записи элемента v. Так как $x_j\eta$ — центральный элемент, то $v\eta = 0$.

Случаи (в) и (г) рассматриваются аналогично. Так мы получаем, что и в случае, когда $\operatorname{char} K = p > 2$, каждый полином f из алгебры $K[x]$, который не содержится в идеале T, не может быть тождеством в алгебре Грассмана G. Теорема 3 доказана.

Авторы выражают благодарность Г. К. Генову за постановку проблем, за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. К. Генов. Некоторые шпехтовые многообразия ассоциативных алгебр. *Плиска*, **2**. 1981, 30—40.
2. R. M. Bryant, M. R. Vaughan-Lee. Soluble varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math. Oxford.*, **23**, 1972, 107—112.
3. D. E. Cohen. On the laws of a metabelian variety. *J. Algebra*, **5**, 1967, 267—273.
4. J. Lewin. A matrix representation for associative algebras. *I. Trans. Amer. Math. Soc.*, **188**, 1974, 293—308.
5. В. Н. Латышев. Частично упорядоченные множества и нематричные тождества ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **15**, 1976, 53—70.
6. P. Krakovsky, A. Regev. The polinomial identities of the Grassman algebra. *Trans, Amer. Math. Soc.*, **181**, 1973, 429—438.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 2. 1977