PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

РЕДУКЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНО СОГЛАСНЫХ ПОЛЕЙ

НИКОЛА П. ЗЯПКОВ

В настоящей работе доказаны теоремы, которые позволяют сводить исследование универсально согласных расширений периода q к случаю, когда $q=p^n$, а K/k — p-расширение Галуа (p — простое число).

1. Универсально согласные расширения. Пусть K — конечное нормальное сепарабельное расширение поля k с группой Галуа F и пусть α — эпиморфизм конечной группы G на F. Решить задачу погружения $(K/k, G, \alpha)$ — значит построить поле (или алгебру Галуа) L, содержащее K и нормальное над k, причем такое, что группа Галуа расширения L/k равна G и для любого автоморфизма $g\in G$ поля L его ограничение на K совпадает с $\alpha(g)$.

Одно необходимое (но не достаточное) условие разрешимости задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ найдено Д. К. Фаддеевым и X. Хассе; мы приведем некоторые из формулировок этого условия, называемого условием согласности, для случая, когда $A=\operatorname{Ker}\alpha$ абелева группа, а поле K содержит первообразный корень из единицы степени, равной периоду A. Рассмотрим задачу погружения $(K/k, G, \alpha)$; пусть G_2 — подгруппа G, содержащая группу $A=\operatorname{Ker}\alpha$, и пусть k_1 — подполе K, принадлежащее группе $\alpha(G_2)$, а B — нормальный делитель G_2, содержащийся в A. Обозначим через G_1 фактор-группу G_2/B; гомоморфизм α индуцирует эпиморфизм α_1 группы G_1 на группу Галуа $\alpha(G_2)$ расширения K/k_1. Задача погружения $(K/k_1, G_1, \alpha_1)$ называется сопутствующей для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$.

Задача погружения $(K/k_0, H, \beta)$ называется брауэровской, если $\operatorname{Ker}\beta$ — циклическая группа и если существует операторный (относительно группы Галуа расширения K/k_0) мономорфизм группы $\operatorname{Ker}\beta$ в K^*.

Для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ выполнено условие согласности, если все сопутствующие ей брауэровские задачи разрешимы.

Приведем еще одну форму условия согласности для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ (см. [1]). На группе A естественным образом определены операторы из группы Галуа расширения K/k (если $f\in F$, $a\in A$, то $a^f=\bar f^{-1}a\bar f$ для любого такого элемента $\bar f\in G$, что $\alpha\bar f=f$). Для любого гомоморфизма $\chi: A\to K^*$ обозначим через F_χ подгруппу группы F, состоящую из всех таких $f\in F$, что $\chi(a^f)=[\chi(a)]^f$, а через G_χ — полный прообраз группы F_χ относительно эпиморфизма α. Пусть c_χ — элемент из группы $H^2(F_\chi, A)$, отвечающий расширению

$$1\to A\to G_\chi\xrightarrow{\alpha}F_\chi\to 1.$$

Условие согласности состоит в том, что для всех гомоморфизмов $\chi: A \to K^*$ образ элемента c_χ при отображении $H^2(F_\chi, A) \to H^2(F_\chi, K^*)$ индуцированным гомоморфизмом χ равен 1.

Напомним одну теоретико-групповую конструкцию и ее значение в теории Галуа. Пусть $\alpha_1: G_1 \to F$, $\alpha_2: G_2 \to F, \ldots, \alpha_n: G_n \to F$ — эпиморфизмы конечных групп на одну и ту же группу F. В прямом произведении $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ возьмем подгруппу G, состоящую из всех таких элементов $g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_n$, что $\alpha_1(g_1) = \alpha_2(g_2) = \cdots = \alpha_n(g_n)$; имеется естественный эпиморфизм $\alpha: G \to F$, определенный формулой $\alpha(g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_n) = \alpha_1(g_1) = \alpha_2(g_2) = \cdots = \alpha_n(g_n)$. Если ядра всех гомоморфизмов абелевы, то $\operatorname{Ker} \alpha$ — также абелева группа. Группа G называется прямым произведением G_i с объединенной фактор-группой F и обозначается $G_1 \underset{F}{*} G_2 \underset{F}{*} \ldots \underset{F}{*} G_n$ или $\underset{F}{\Pi *} G_i$.

Предложение. *Если для задач погружения $(K/k, G_i, \alpha_i)$ выполнено условие согласности (соответственно, если они разрешимы), то для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ также выполнено условие согласности (соответственно, они разрешимы)*.

Доказательство хорошо известно. Напомним, что если алгебра L_i решает задачу $(K/k, G_i, \alpha_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то алгебра $L_1 \otimes_k L_2 \otimes_k \cdots \otimes_k L_n$ решает задачу погружения $(K/k, G, \alpha)$.

Расширение Галуа K/k называется универсально согласным периода q, если поле K содержит первообразный корень ζ степени q из 1 и если для любой подгруппы F_0 группы Галуа F расширения K/k гомоморфизм

$$H^2(F_0, \{\zeta\}) \to H^2(F_0, K^*),$$

индуцированный вложением $\{\zeta\} \to K^*$, является нулевым.

Из второй формулировки условия согласности легко вытекает

Теорема 1. *Расширение Галуа K/k — содержащее первообразный корень степени q из 1, тогда и только тогда универсально согласно периода q, когда для любой задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ с абелевым ядром периода q выполнено условие согласности.*

Упростим теперь условие теоремы 1 и покажем, что достаточно проверять выполнение условия согласности не для всех задач погружения с абелевым ядром периода q, а лишь для одной такой задачи.

Теорема 2. *Пусть K/k — конечное нормальное сепарабельное расширение с группой Галуа F, содержащее первообразный корень степени q из 1, $\varphi: S \to F$ — эпиморфизм свободной группы на F, $R = \operatorname{Ker} \varphi$, $G = S/[R, R]R^q$, α — эпиморфизм G на F, индуцированный гомоморфизмом φ. Для того, чтобы расширение K/k было универсально согласно, необходимо и достаточно, чтобы условие согласности выполнялось для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$.*

Доказательство. Ядром гомоморфизма α является группа $R/[R, R]R^q$; это ядро абелево и имеет период q. Поэтому, если расширение K/k универсально согласно периода q, для задачи погружения $(K/k, G, \alpha)$ выполнено условие согласности (по теореме 1). Необходимость условия теоремы 2 доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть $(K/k, H, \beta)$ — какая-то задача погружения с абелевым ядром периода q. Поскольку S — свободная группа, существует такой гомоморфизм $\psi: S \to H$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ H \arrow[r, "\beta"'] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна. Гомоморфизм ψ индуцирует гомоморфизм γ группы $S/[R, R]R^q$ в группу H. При этом, очевидно, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ H \arrow[r, "\beta"'] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим через A ядро α, а через B — ядро β; индуцированный γ гомоморфизм $A \to B$ обозначим через γ_0. Предыдущая диаграмма в развернутом виде превращается в диаграмму

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & B \arrow[r] & H \arrow[r, "\beta"] & F \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Пусть $c \in H^2(F, A)$ — фундаментальный класс верхней строчки этой диаграммы. Тогда фундаментальный класс нижней строчки равен $\gamma_0{}^* c$, где $\gamma_0{}^*$ — гомоморфизм гомологии, порожденный гомоморфизмом γ_0. Пусть теперь χ — произвольный гомоморфизм B в K^*; тогда $\chi\gamma_0$ — гомоморфизм A в K^*. Обозначим через F_χ, F'_χ — подгруппы группы F, состоящие из всех таких элементов $f \in F$, что $\chi(b^f) = [\chi(b)]^f$ для всех $b \in B$ и соответственно $\chi\gamma_0(a^f) = [\chi\gamma_0(a)]^f$ для всех $a \in A$. Поскольку γ_0—F — гомоморфизм, группа F_χ содержится в F'_χ; действительно, для любых $a \in A$, $f \in F_\chi$ выполнено соотношение

$$\chi\gamma_0(a^f) = \chi[(\gamma_0 a)^f] = [\chi(\gamma_0 a)]^f = (\chi\gamma_0 a)^f,$$

т. е. $f \in F'_\chi$. Фундаментальный класс c'_χ последовательности

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \alpha^{-1} F'_\chi \longrightarrow F'_\chi \longrightarrow 1$$

равен $r_{F/F'_\chi} c$, где $r_{F/F'_\chi} : H^2(F, A) \longrightarrow H^2(F'_\chi, A)$ — гомоморфизм ограничения. Аналогично, фундаментальный класс c_χ последовательности

$$1 \longrightarrow B \longrightarrow \beta^{-1} F_\chi \longrightarrow F_\chi \longrightarrow 1$$

равен

$$r_{F/F_\chi}(\gamma_0^* c) = \gamma_0^* r_{F/F_\chi} c = \gamma_0^* r_{F'_\chi/F_\chi}\,(r_{F/F'_\chi} c).$$

Применяя гомоморфизм χ^*, индуцированный гомоморфизмом

$$\chi:\ B \longrightarrow \{\zeta\} \longrightarrow K^*,$$

получаем

$$\chi^*(c_\chi) = \chi^*\gamma_0^* r_{F'_\chi/F_\chi}(r_{F/F'_\chi}\, c) = r_{F'_\chi/F_\chi}(\chi\gamma_0)^* r_{F/F'_\chi}\, c = r_{F'_\chi/F_\chi}(\chi\gamma_0)^* c'_\chi = 1,$$

ибо для задачи погружения $(K/k,\ G,\ \alpha)$ выполнено условие согласности, и потому $(\chi\gamma_0)^* c'_\chi = 1$. Следовательно, из второй формулировки условия согласности следует, что это условие выполнено и для задачи погружения $(K/k,\ H,\ \beta)$.

Теорема 2 полностью доказана.

2. Редукционные теоремы.

Теорема 3. *Пусть K/k — конечное нормальное сепарабельное расширение, содержащее первообразный корень степени q из 1. Пусть, далее, $q = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$ — разложение q в произведение степеней различных простых чисел. Для того, чтобы расширение K/k было универсально согласным периода q, необходимо и достаточно, чтобы оно было универсально согласным для каждого из периодов $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_m^{n_m}$.*

Доказательство. Представим группу Галуа F расширения K/k в виде эпиморфного образа свободной группы S с конечным числом образующих $F = \varphi(S)$ и обозначим через R ядро φ. Далее положим $G = S/[R, R]R^q$, $G_i = S/[R, R]R^{p_i^{n_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизмы $\bar\varphi:\ G \to F$, $\bar\varphi_i:\ G_i \to F$.

Ясно, что группа G — прямое произведение групп $G_1, G_2, \ldots, G_m$ с объединенной фактор-группой F. Универсальная согласность периода q равносильна выполнению условия согласности для задачи $(K/k,\ G,\ \bar\varphi)$ (теорема 2), что по предложению из 1 равносильно выполнению условия согласности для каждой из задач $(K/k,\ G_i,\ \bar\varphi_i)$. Но для задачи $(K/k,\ G_i,\ \bar\varphi_i)$ условие согласности выполнено тогда и только тогда, когда расширение K/k универсально согласно периода $p_i^{n_i}$ (мы опять пользуемся теоремой 2). Теорема 3 доказана

Теорема 4. *Пусть K/k — конечное нормальное сепарабельное расширение с группой Галуа F, содержащее первообразный корень степени $q = p^n$ из 1 (p — простое число); пусть, далее, F_p — силовская p подгруппа группы F, k_p — подполе K, принадлежащее F_p. Для того, чтобы расширение K/k было универсально согласно периода q, необходимо и достаточно, чтобы расширение K/k_p было универсально согласно периода q.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся исходным определением универсальной согласности: для любой подгруппы H группы F гомоморфизм $H^2(H, \{\zeta\}) \to H^2(H, K^*)$ нулевой (здесь ζ — первообразный корень из 1 степени q). Универсальная согласность расширения K/k_p означает, что это условие выполнено для тех подгрупп H, которые содержатся в F_p. Пусть теперь H — произвольная подгруппа группы F, H_p — ее силовская p-подгруппа; поскольку всякая p-подгруппа группы F вкладывается в силовскую p-подгруппу, а все силовские p-подгруппы сопряжены, существует такой элемент $g \in F$, что $g^{-1}H_p g \subset F_p$. Обозначим через c_g естественный изоморфизм

$$H^2(H, *) \longrightarrow H_2(g^{-1}Hg, *)$$

(см. [2, XII, 8]). Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(H, \{\zeta\}) & \xrightarrow{c_g} & H^2(g^{-1}Hg, \{\zeta\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(H, K^*) & \xrightarrow{c_g} & H^2(g^{-1}Hg, K^*) \end{array},$$

из которой видно, что правая вертикальная стрелка тогда и только тогда является нулевым гомоморфизмом, когда нулевым гомоморфизмом будет левая стрелка. Благодаря этому можно считать, что $H_p \subset F_p$. Группа $H^2(H, \{\zeta\})$ вместе с группой $\{\zeta\}$ имеет период $q=p^n$, и потому гомоморфизм перенесения t: $H^2(H_p, \{\zeta\}) \to H^2(H, \{\zeta\})$ является эпиморфизмом (см. [2, теорема XII. 10. 1]).

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^2(H_p, \{\zeta\}) & \xrightarrow[\chi_1]{} & H^2(H_p, K^*) \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ H^2(H, \{\zeta\}) & \xrightarrow[\chi_2]{} & H^2(H, K^*) \end{array}$$

видно теперь, что $\operatorname{Im} \chi_2 = \operatorname{Im} \chi_2 t = \operatorname{Im} t\chi_1 = 0$, так как $\operatorname{Im} \chi_1 = 0$ по универсальной согласности расширения K/k_p. Итак, гомоморфизм $H^2(H, \{\zeta\}) \to H^2(H, K^*)$ нулевой для любой подгруппы H группы F, т. е. расширение K/k универсально согласно периода q.

Теорема 5. *Если K/k — универсально согласное расширение периода $q=p^n$, где p — простое число, а L — нормальное и сепарабельное над k расширение поля K, и если степень $(L:K)$ взаимно проста с p, то L/k — универсально согласное расширение периода q.*

Доказательство. Пусть F — группа Галуа расширения K/k, F' — группа Галуа расширения L/k, α_1 — естественный эпиморфизм $F' \to F$, F'_p — силовская p-подгруппа группы F'. Тогда α_1 изоморфно отображает группу F'_p на силовскую подгруппу $F_p = \alpha_1(F'_p)$ группы F. Представим F'_p как эпиморфный образ свободной группы S:

$$F'_p = \varphi(S),$$

и обозначим через R ядро φ, через G — фактор-группу $S/[R, R]R^q$, через α' — естественный эпиморфизм $G \to F'_p$; композиция α' с α_1 дает эпиморфизм α: $G \to F_p$. Поскольку K/k — универсально согласное периода q расширение, всякая брауэровская задача погружения, сопутствующая задаче погружения$(K/K^{F_p}, G, \alpha)$ разрешима; если M — ее решение, то композит ML решает соответствующую брауэровскую задачу, сопутствующую задаче $(L/L^{F'_p}, G, \alpha')$. Таким образом, все брауэровские задачи, сопутствующие задаче $(L/L^{F'_p}, G, \alpha')$, разрешимы, и по теореме 2 из настоящей работы, расширение $L/L^{F'_p}$ универсально согласно периода q. Теорема 4 показывает, что расширение L/k также универсально согласно периода q.

Замечание. Использование универсально согласных расширений позволяет дать простое доказательство разрешимости обратной задачи теории Галуа для групп нечетного порядка для полей алгебраических чисел (см. [3]).

В заключение автор искренне благодарит профессора Ленинградского университета А. В. Яковлева за ценные указания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Демушкин, И. Р. Шафаревич. Задача погружения для локальных полей. *Известия АН СССР*. Сер. матем., **23**, 1959, 823—840.
2. А. Картан, С. Эйленберг. Гомологическая алгебра. Москва, 1960.
3. Н. П. Зяпков, А. В. Яковлев. Универсально согласные расширения Галуа. *Записки ЛОМИ*, **71**,1977,133—152.

Высший педагогический институт
9700 Шумен

Поступила 9. 5. 1977