PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

ИВАН С. СТОЯНОВ, ИВАН К. ТОНОВ

В работе изучается связь между объединением и произведением многообразий ассоциативных алгебр над полем K нулевой характеристики. Описаны те многообразия $\mathfrak{M}$, для которых выполнено

$$(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)\langle \circ, \ \mathfrak{M}\rangle \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_1\langle \circ, \ \mathfrak{M}\rangle \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A}_2\langle \circ, \ \mathfrak{M}\rangle \mathfrak{B}),$$

где $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ произвольные подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$.

В этой работе рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над фиксированным полем K нулевой характеристики. Широко известно, что существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями и вполне характеристическими идеалами свободной ассоциативной алгебры $K\langle x\rangle$ счетного ранга, которое обращает отношение включения $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда $T(\mathfrak{A}_1) \supset T(\mathfrak{A}_2)$. Множество всех многообразий является частично упорядоченным множеством, которое является полной решеткой в смысле следующих определений наибольшей и наименьшей граней: $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2$ есть многообразие, соответствующее идеалу $T(\mathfrak{A}_1) + T(\mathfrak{A}_2)$, а $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ — многообразие, соответствующее идеалу $T(\mathfrak{A}_1) \cap T(\mathfrak{A}_2)$. Точнее, $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ совпадает с многообразием, порожденным многообразиями $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, а $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2$ является пересечением $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

В [1] указано, что для любых многообразий групп $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ выполняется

$$(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_2\mathfrak{B},$$

Для многообразий ассоциативных алгебр аналогичный факт не имеет места, а имеет место только включение

$$(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}_1\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}.$$

При этом включение является строгим. Примеры в этом направлении можно найти в диссертациях Гаврилова [2] и Попова [3]. Независимо от этого мы приведем еще один пример, в известном смысле минимальный, который показывает, что включение строгое.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$ — многообразие всех коммутативных алгебр, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_0$ — многообразие всех антикоммутативных алгебр и $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}_2$ — многообразие алгебр с нулевым умножением. Тогда включение

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}_0)\mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{A}\mathfrak{N}_2 \vee \mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2$$

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 130—133.

строгое. Действительно, в идеале $T(\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)$ не содержатся полиномы второй степени и, следовательно, все элементы идеала $T((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}_0)\mathfrak{N}_2)$ имеют степень больше либо равно 6. Но в идеале $T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2\vee\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)=T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)\cap T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)$ содержатся элементы пятой степени. Например, полином

$$[x_1x_2x_3x_4,\ x_5]=x_1x_2x_3x_4x_5-x_5x_1x_2x_3x_4\in T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)\cap T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2).$$

Действительно, $x_1x_2x_3x_4x_5\equiv x_3x_4x_5x_1x_2\equiv x_5x_1x_2x_3x_4 \pmod{T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)}$. С другой стороны, $x_1x_2x_3x_4x_5\equiv -x_3x_4x_5x_1x_2\equiv x_5x_1x_2x_3x_4 \pmod{T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)}$, и получается, что $[x_1x_2x_3x_4,\ x_5]\in T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)\cap T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)$. Кроме этого полинома, полином $x_1x_2x_3x_4x_5-x_1x_2x_4x_5x_3$ тоже лежит в пресечении. Есть и другие примеры.

Естественным образом можно спросить: Для каких многообразий $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр выполняется: для любой тройки подмногообразий $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ многообразия $\mathfrak{M}$ верно равенство

$$(\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_1\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}_2\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B})\,?$$

Произведение в этом случае рассматривается как $\mathfrak{M}$-произведение, то есть если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{A}_1\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cap\mathfrak{M}$.

Основная теорема. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр удовлетворяло вышецитированному свойству, является существование в идеале $T(\mathfrak{M})$ всех тождеств пятой степени, которые лежат в идеале $T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)\cap T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)$ из приведенного примера, и выполнение импликации*

$$\sum_\sigma \alpha_\sigma\,[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}\ x_{\sigma(4)}]\equiv\sum_\sigma\beta_\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})\circ(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) \pmod{T(\mathfrak{M})}$$
$$\longrightarrow\sum_\sigma\alpha_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\in T(\mathfrak{M}),$$

где $x_1\circ x_2=x_1x_2+x_2x_1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, для которого для любой тройки его подмногообразий $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ выполняется

(1) $$(\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_1\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{A}_2\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}).$$

Тогда если возьмем подмногообразия $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{N}_2$, состоящиеся соответственно из всех коммутативных, антикоммутативных и алгебр с нулевым умножением многообразия $\mathfrak{M}$, то из приведенного примера сразу вытекает, что все тождества пятой степени идеала $T(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)\cap T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)$ должны содержаться в $T(\mathfrak{M})$, так как минимальная степень полиномов идеала $T((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}_0)\mathfrak{N}_2)$ больше 5.

Пусть $\sum_\sigma\alpha_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\equiv\sum_\sigma\beta_\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})\circ(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) \pmod{T(\mathfrak{M})}$. Полином $\sum_\sigma\beta_\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})\circ(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})\in T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)$ и, следовательно, $\sum_\sigma\alpha_\sigma\,[x_{\sigma(1)}\ x_{\sigma(2)}\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\in T(\mathfrak{A}_0\mathfrak{N}_2)+T(\mathfrak{M})$. Из (1) получается, что

$$\sum_\sigma\alpha_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\in T((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}_0)\mathfrak{N}_2)+T(\mathfrak{M}),$$

а мы знаем, что в идеале $T((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}_0)\mathfrak{N}_2)$ нет полиномов четвертой степени, поэтому $\sum_\sigma\alpha_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\in T(\mathfrak{M})$. Необходимость доказана.

Достаточность. Установим некоторые свойства элементов идеала $T(\mathfrak{M})$

$$x_1x_2x_3x_4[x_5, x_6]=x_1x_2x_3x_4x_5x_6-x_1x_2x_3x_4x_6x_5\equiv x_1x_2x_3x_4x_5x_6-x_5x_1x_2x_3x_4x_6$$

$$\equiv x_1x_2x_3x_4x_5x_6-x_1x_2x_3x_4x_5x_6=0 \pmod{T(\mathfrak{M})}.$$

$$x_1x_2x_3[x_4, x_5]x_6=[x_1x_2x_3[x_4, x_5], x_6]+x_6x_1x_2x_3[x_4, x_5]\equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$$

и так далее. Таким образом получается, что в $T(\mathfrak{M})$ находятся все полиномы вида $u[x, y]v$, где u и v — слова свободных образующих и $\deg u+\deg v\geqq 4$. Из этого вытекает, что если $f(x)$ — полилинейный полином степени $n\geqq 6$, по модулю $T(\mathfrak{M})$ имеем

$$f(x)\equiv ax_1x_2\ldots x_n \pmod{T(\mathfrak{M})},$$

где a — сумма коэффициентов полинома $f(x)$, т. е. если $f(x)$ — полином степени $n\geqq 6$ находится в коммутанте свободной алгебры $K\langle X\rangle$, то он эквивалентен по модулю $T(\mathfrak{M})$ с одночленом $x_1x_2\ldots x_n$.

Переходим к доказательству достаточности. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ произвольные подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условию теоремы. Следующее включение по модулю $T(\mathfrak{M})$ очевидно

$$T((\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B})\subset T(\mathfrak{A}_1\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B})\cap T(\mathfrak{A}_2\langle\circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}) \pmod{T(\mathfrak{M})}. \tag{2}$$

Чтобы доказать обратное включение, возьмем полилинейный полином $f(x)\in T(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B})\cap T(\mathfrak{A}_2\mathfrak{B})$, такой, что $\deg f(x)\geqq 6$. Если сумма его коэффициентов равно нулю, то имея в виду сказанное выше, $f(x)\in T(\mathfrak{M})$ и значит $f(x)$ по модулю $T(\mathfrak{M})$ лежит в левой части включения (2). Интерес представляет только случай, когда сумма коэффициентов полинома $f(x)$ не равняется нулю. Тогда $f(x)$ эквивалентный по модулю $T(\mathfrak{M})$ с одночленом $x_1x_2\ldots x_n$. Существование этого полинома в правой части включения (2) показывает, что в идеалах $T(\mathfrak{A}_1)$, $T(\mathfrak{A}_2)$ и $T(\mathfrak{B})$ лежат полиномы, сумма коэффициентов у которых не равна нулю. Пусть минимальные степени этих полиномов соответственно k_1, k_2 и s и для определенности $k_1\leqq k_2$. Известно, что если в некоторой алгебре выполняется полилинейное тождество степени m, сумма коэффициентов у которого не равна нулю, то в этой алгебре выполняется и унитарное тождество $u_m=\sum_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$. Следовательно, в идеале $T((\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\mathfrak{B})$ лежит элемент, эквивалентный по модулю $T(\mathfrak{M})$ с унитарным тождеством степени k_2s. Но $k_2s\leqq n$ и, следовательно, $x_1x_2\ldots x_n\in T((\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\mathfrak{B})+T(\mathfrak{M})$. Таким образом все полиномы степени $n\geqq 6$, которые содержатся в правой части включения (2), содержатся и в левой. Для полиномов степени $n\leqq 5$ легко проверяется, что они получаются только в случае, когда многообразия $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}$ имеют норму 2, то есть определяющие их тождества минимальной степени имеют степень 2. Но все такие полиномы пятой степени находятся в идеале $T(\mathfrak{M})$, а для полиномов четвертой степени импликация обеспечивает верность равенства. Таким образом достаточность доказана.

В личном разговоре с Л. А. Бокутем мы узнали, что аналогичный результат был получен и Р. Гончигдоржем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Нейман. Многообразия групп. Москва, 1969.
2. М. Б. Гаврилов. Асоциативни алгебри с тъждествени съотношения. Дисертация. София, 1971.
3. А. П. Попов. Многообразия от асоциативни алгебри. Дисертация. София, 1976.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 20. 5. 1977