PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О МАКСИМУМЕ ЧИСЛА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ГРАФА

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Даются оценки сверху для числа треугольников графа, инцидентных с некоторым множеством вершин графа, в которых в качестве параметров участвуют число элементов этого множества, максимум степеней его вершин и максимум числа элементов клик графа с вершинами вне данного множества. Для полученных оценок найдены все экстремальные графы. Приведены применения для оценок сверху числа всех треугольников графа, подчиненного некоторым естественным требованиям.

1. Формулировка основного результата и идея доказательства. Пусть G — неориентированный граф без кратных ребер и без петель. Множество его вершин будем обозначать через $V(G)$, а если M — некоторое множество вершин графа, то через $\langle M\rangle$ будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством M. Степень вершины v обозначаем $d(v, G)$. Если M — конечное множество, то $|M|$ — число его элементов. Множество M, $M\subset V(G)$, называем h-кликой, если $|M|=h$ и любые две вершины этого множества смежны. Через $e(G)$ и $t(G)$ означаем соответственно число ребер и число треугольников графа G, а если $A\subset V(G)$, тогда $e(A)$ и $t(A)$ означают соответственно число ребер и число треугольников, имеющих хотя бы одну вершину в A. Будем говорить, что целые числа p и q почти равны, $p\doteq q$, если $|p-q|\leqq 1$. Полный h-хроматический граф с m вершинами, все хроматические классы которого имеют почти равные числа элементов, называем графом Турана и обозначаем $T(m, h)$, а число его ребер и треугольников — через $e(m, h)$ и $t(m, h)$. Число s-клик графа G обозначаем через $k(G, s)$, а число s-клик графа $T(m, h)$ — через $k(m, h, s)$, так что $k(G, 2)=e(G)$ и $k(G, 3)=t(G)$. Отметим (см. [1]), что $k(m, h, s)=\sum_{t=0}^{s^*}\binom{\nu}{t}\binom{h-t}{s-t}\varrho^{s-t}$, где $m=h\varrho+\nu$, $0\leqq\nu\leqq h-1$. В [1] мы доказали, что если граф G с m вершинами не содержит $(h+1)$-клик, тогда $k(G, s)\leqq k(m, h, s)$. Притом, если $2\leqq s\leqq h$, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $G=T(m, h)$. (Примечание при корректуре. Это доказано А. Зыковым в [6].) При $s=2$ этот результат переходит в классическую теорему Турана, доказанную им в 1940 г. [2].

Пусть A — некоторое множество вершин графа G, $|A|=\alpha$ и $d=\max\{d(v, G)\mid v\in A\}$. Тогда очевидно $e(A)\leqq\alpha d$. Аналогичную оценку для $t(A)$ можем получить, имея дополнительную информацию о графе $\langle V(G)\setminus A\rangle$. Если G — граф, через $k(G)$ будем обозначать максимум мощностей всех клик этого графа; $k(G)$ называем кликовым числом графа G. Та дополнительная информация, о которой шла речь выше, это точно кликовое число графа $\langle V(G)\setminus A\rangle$. Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат настоящей статьи:

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 134—142.

Теорема 1. *Пусть A — некоторое множество вершин графа G, $|A|=a$ и $d=\max\{d(v, G) \mid v\in A\}$. Если $s=k(\langle V(G)\setminus A\rangle)\geqq 2$, тогда имеет место неравенство*

$$t(A)\leqq a\,.\,e(d, s). \tag{1}$$

Изложим идею доказательства этой теоремы. Пусть $v\in A$; положим $d(v)=d(v, G)$, $\bar{d}(v)=d(v, \langle A\rangle)$, а через $D(v)$ обозначим совокупность всех вершин графа G, которые смежны вершине v и не содержатся в A. Через $t_i(v)$, $1\leqq i\leqq 3$, обозначим число всех треугольников графа G, проходящих через v и имеющих точно i вершин в A. Легко сообразить, что верны следующие три неравенства:

$$t_1(v)\leqq e(\langle D(v)\rangle), \tag{2}$$

$$t_2(v)\leqq \bar{d}(v)(d(v)-\bar{d}(v)), \tag{3}$$

$$t_3(v)\leqq \binom{\bar{d}(v)}{2}. \tag{4}$$

Так как $|V(\langle D(v)\rangle)|=d(v)-\bar{d}(v)$ и $k(\langle D(v)\rangle)\leqq s$, то, согласно теореме Турана, верно неравенство

$$e(\langle D(v)\rangle)\leqq e(d(v)-\bar{d}(v),\ s). \tag{5}$$

Легко проверить, что

$$t(A)=\sum_{v\in A}t_1(v)+\frac{1}{2}\sum_{v\in A}t_2(v)+\frac{1}{3}\sum_{v\in A}t_3(v). \tag{6}$$

Из неравенства

$$d(v)\leqq d \tag{7}$$

и (2) — (6) следует

$$t(A)\leqq \sum_{v\in A}e(d-\bar{d}(v), s)+\frac{1}{2}\sum_{v\in A}\bar{d}(v)(d-\bar{d}(v))+\frac{1}{3}\sum_{v\in A}\binom{\bar{d}(v)}{2}. \tag{8}$$

Остается доказать, что правая часть неравенства (8) не превосходит числа $ae(d, s)$, что, конечно, завершит доказательство теоремы 1. Нам будет удобнее сделать это отдельно в случаях $s=2$ и $s\geqq 3$. В первом случае воспользуемся конкретным видом числа $e(m, 2)$ (см. лемму 1), а во втором — одним неравенством для чисел ребер графов Турана (см. лемму 2).

Конечно, интересно установить, насколько неравенство (1) является точным. В известном смысле оно действительно оказывается точным. Это не означает, что для любого a, d и s существует граф, для которого неравенство (2) переходит в равенство. Такой граф, для которого (1) переходит в равенство, называем экстремальным для теоремы 1. В теоремах 2 и 3 указаны все экстремальные графы для теоремы 1. В следствиях 2, 3 и 4 особо рассматривается случай, когда $n-a=d$, где $n=|V(G)|$. В этом случае проще описать все экстремальные графы. Он интересен тем, что, во-первых, условие $n-a\geqq d$ является почти необходимым для экстремальных графов (см. вводные части пп. 6 и 8), и, во-вторых, один из интереснейших частных случаев, это когда множество A состоит из некоторой вершины v_1 и из всех вершин, которые не смежны ей, притом степень вершины v_1 является максимальной в A (см. следствие 8 и [3, 4, 5]).

В предположениях теоремы 1, из неравенства (1) тривиально получается оценка сверху для числа $t(G)$ (см. следствие 5). Из этой оценки и из упомянутой выше теоремы автора получена универсальная оценка сверху для числа $t(G)$, в которой участвуют только a, d и s (см. следствие 6). Снова применяя теорему автора из [1], получаем оценку сверху для числа $t(G)$, имеющую тот же тип, как и оценки автора с [1] (см. следствие 7).

Результаты настоящей работы докладованы на семинаре по теории графов на кафедре топологии и частично содержатся в сообщении, сделанном совместно с Неновым, на Шестом балканском математическом конгрессе в Варне, 1977 г. Другая часть этого сообщения состоит из совместных результатов и частично вышла в печать в [5].

2. Доказательство теоремы 1 в случае $s=2$. Снова сформулируем теорему 1 в случае $s=2$, заметив, что в этом случае $t(A)=t(G)$ и $e(d, 2)=[d^2/4]$.

Лемма 1. *Пусть A — некоторое множество вершин графа G, $|A|=a$ и $d=\max\{d(v, G)\mid v\in A\}$. Если граф $\langle V(G)\setminus A\rangle$ содержит ребра, но не содержит никаких треугольников, тогда имеет место неравенство:*

$$t(G)\leqq a[d^2/4]. \tag{9}$$

Доказательство. Положим

$$\nu(v)\equiv d-\bar{d}(v)\,(\mathrm{mod}\,2),\quad 0\leqq\nu(v)\leqq 1. \tag{10}$$

Очевидно

$$e(d-\bar{d}(v), 2)=((d-\bar{d}(v))^2-\nu(v))/4. \tag{11}$$

Подстановкой (11) в (8) и тождественным преобразованием правой части (8) нетрудно получить:

$$t(G)\leqq-\frac{1}{12}\sum_{v\in A}\bar{d}^2(v)-\frac{1}{6}\sum_{v\in A}\bar{d}(v)-\frac{1}{4}\sum_{v\in A}\nu(v)+ad^2/4. \tag{12}$$

Неравенства

$$\bar{d}^2(v)\geqq\bar{d}(v) \tag{13}$$

и (12) влекут

$$t(G)\leqq-\frac{1}{4}\sum_{v\in A}(\bar{d}(v)+\nu(v))+ad^2/4 \tag{14}$$

Следовательно,

$$t(G)\leqq ad^2/4. \tag{15}$$

Таким образом при четном d искомое неравенство (9) доказано. Пусть теперь d — нечетно. Тогда

$$\bar{d}(v)+\nu(v)\geqq 1. \tag{16}$$

Действительно, если $\bar{d}(v)$ — четно, тогда $\nu(v)=1$, а если $\bar{d}(v)$ — нечетно, тогда $\bar{d}(v)\geqq 1$. Из (14) и (16) следует

$$t(G) \leqq \alpha(d^2-1)/4. \tag{17}$$

Этим неравенство (9) доказано и при нечетном d.

Доказательство леммы 1 завершено.

3. Одно неравенство для числа ребер графов Турана. Для доказательства теоремы 1 при $s \geqq 3$ нам понадобится следующая

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$e(m-k, h) \leq e(m, h) - 2mk/3 + k(k+1)/3, \text{ где } 0 \leq k \leq m \text{ и } h \geqq 3. \tag{18}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$e(p, h) - e(p-1, h) \geqq 2(p-1)/3. \tag{19}$$

К некоторому минимальному хроматическому классу с β вершинами графа $T(p-1, h)$ присоединим новую вершину и соединим ее новыми ребрами со всеми вершинами остальных хроматических классов. Таким образом, получаем граф $T(p, h)$. Очевидно $\beta \leqq (p-1)/h$ и, следовательно, число новых ребер $p-1-\beta$ удовлетворяет неравенству:

$$p-1-\beta \geqq (h-1)(p-1)/h \geqq 2(p-1)/3. \tag{20}$$

С другой стороны, ясно, что

$$e(p, h) - e(p-1, h) = p-1-\beta. \tag{21}$$

Искомое неравенство (19) следует из (20) и (21).

Положим в (19) $p = m-i$ и потом просуммируем почленно по i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Таким образом, получим (18).

Лемма 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. При $s=2$ теорема 1 совпадает с леммой 1. Пусть теперь $s \geqq 3$. С помощью неравенств (8) и (18) нетрудно тождественным преобразованием установить, что

$$t(A) \leqq \alpha \,.\, e(d, s) + \frac{1}{6}(1-d)\sum_{v \in A} \bar{d}(v). \tag{22}$$

Этим неравенство (1), а заодно с ним и теорема 1 доказаны.

5. Экстремальные графы для леммы 1. Экстремальные графы для леммы 1 — это одно и то же, что экстремальные графы для теоремы 1 при $s=2$. Этим случаем занимаемся особо, так как в нем происходят явления, которые в случае $s \geqq 3$ не наблюдаются. Основным результатом настоящего параграфа является следующая

Теорема 2. *В предположениях леммы 1 равенство в (9) имеется тогда и только тогда, когда:*

I. *Если d — четно,*

I.1) $\langle A \rangle = \bar{K}_\alpha$ и

I.2) $\langle D(v) \rangle = T(d, 2)$ *для любого* $v \in A$;

II. *Если d — нечетно,* $d \geqq 3$,

II.1) $d(v, \langle A \rangle) \leqq 1$ *для любого* $v \in A$ и

II.2) $D(u) = D(v)$ *и* $\langle D(v) \rangle = T(d-1, 2)$ *в любом случае, когда u и v — смежные вершины из A, а* $\langle D(w) \rangle = T(d, 2)$ *в любом случае, когда у $w \in A$ нет смежных вершин в A.*

Замечание. Полный граф с α вершинами обозначаем через K_α, а дискретный граф с α вершинами — через $\bar{K}_\alpha$. При $d \leqq 1$ очевидно $t(G) = 0$ и $[d^2/4] = 0$, так что неравенство (9) переходит в тривиальное равенство.

Доказательство. Легко установить, что выполнение I.1) и I.2) или II.1) и II.2) влечет равенство в (9). Проверим это только в более неочевидном втором случае. Действительно, для доказательства равенства в (9) оказывается достаточным показать, что $2e(d-1, 2)+d-1=2e(d, 2)$, когда d — нечетно, а это очевидно.

Предположим теперь, наоборот, что в (9) имеет место равенство. Пусть сначала d — четно. Из равенства в (9) следует равенство в (14) и поэтому $\bar{d}(v)=0$ для любого $v \in A$; таким образом I.1) доказано. С другой стороны, должно быть равенство и в (7). Если $d=0$, это очевидно, а если $d \geqq 2$ и допустим, что в (7) неравенство строгое, тогда $e(d(v), 2)<e(d, 2)$ и, следовательно, в (8) неравенство тоже строгое, а это невозможно. Итак, $d(v)=d$. Кроме того, в (5) должно быть равенство, т. е. $e(\langle D(v)\rangle)=e(d, 2)$. Согласно теореме Турана $\langle D(v)\rangle=T(d, 2)$; этим и I.2) доказано.

Рассмотрим сейчас случай, когда d — нечетно, $d \geqq 3$. Из равенства в (9) следует равенство в (16) и, следовательно, $\bar{d}(v)=0$ или $\bar{d}(v)=1$; этим II.1) доказано. С другой стороны, равенство должно быть и в неравенстве (7). Действительно, если $d(v)<d$, тогда $d(v)-\bar{d}(v)<d-\bar{d}(v)$ и так как $d-\bar{d}(v) \geqq 2$, то $e(d(v)-\bar{d}(v), 2)<e(d-\bar{d}(v), 2)$, а это приводит к строгому неравенству в (8), что невозможно. Итак, $d(v)=d$. В (5) тоже имеет место равенство и согласно теореме Турана $\langle D(v)\rangle=T(d-\bar{d}(v), 2)$. Если для $w \in A$ имеем $\bar{d}(w)=0$, тогда $\langle D(w)\rangle=T(d, 2)$. Пусть $u \in A$, $v \in A$ и u и v — смежны. Тогда $\bar{d}(u)=\bar{d}(v)=1$ и, следовательно, $\langle D(v)\rangle=T(d-1, 2)$. С другой стороны, в (3) тоже имеется равенство, так что $t_2(u)=t_2(v)=d-1$. Из этого непосредственно следует, что $D(u)=D(v)$. Таким образом, и II.2) доказано.

Доказательство теоремы 2 завершено.

6. Экстремальные графы для леммы 1 в случае $n-a=d-1$ **и** $n-a=d$. В предложениях леммы 1, если в (9) имеет место равенство, тогда выполнено I.2) или II.2). Следовательно, при четном d имеем $n-a \geqq d$, а при нечетном d имеем $n-a \geqq d-1$, где $n=|v(G)|$. Притом, в случае нечетного d, если существует вершина $w \in A$, для которой $\bar{d}(w)=0$, тогда тоже $n-a \geqq d$. Интересно рассмотреть особо случай, когда $n-a=d-1$, который, как мы уяснили, может представиться только когда d — нечетно, и, кроме того, для любой вершины $v \in A$ имеет место равенство $\bar{d}(v)=1$. Выше мы доказали, что в этом случае $\langle D(v)\rangle=T(d-1, 2)$ и так как $D(v)=V(G) \setminus A$, то $\langle V(G) \setminus A\rangle=T(d-1, 2)$. Очевидно a — четно и $G=T(d-1, 2)+\langle A\rangle$.

Замечание. Если G_1 и G_2 — графы без общих вершин, тогда через G_1+G_2 обозначаем граф G, который имеет в качестве вершин все вершины графов G_1 и G_2, а в качестве ребер — все ребра графов G_1 и G_2 и, кроме того, все ребра, соединяющие вершины графа G_1 с вершинами графа G_2.

Итак, выше мы доказали следующее

Следствие 1. *В предположениях леммы 1, если* d *— нечетно и в* (9) *имеет место равенство, тогда* $n-a \geqq d-1$. *При тех же самых предположениях и* $n-a=d-1$ *равенство в* (9) *имеется для одного единственного графа* $G=T(d-1, 2)+\langle A\rangle$, *где* $\langle A\rangle=P(a, a/2)$.

Замечание. Через $P(a, \mu)$ обозначаем граф с a вершинами, который имеет точно μ ребер и они попарно не инцидентны.

В свете рассуждений, изложенных в начале этого параграфа, естественно рассмотреть и случай, когда d — нечетно и $n-a=d$.

Следствие 2. *В предположениях леммы* 1 *при нечетном* d *и* $n-a=d$ *неравенство* (9) *переходит в равенство тогда и только тогда, когда граф* G *получается некоторым из следующих двух алгоритмов:*

Первый алгоритм. *Для четного* α, *к графу* $G'=T(d-1,2)+P(\alpha,\alpha/2)$ *присоединяем новую вершину* a. *Потом берем произвольную совокупность вершин в одном и том же хроматическом классе подграфа* $T(d-1,2)$ *и присоединяем к* G' *новые ребра, соединяющие* a *с выбранными только что вершинами. Получаем искомый граф* G, *а* $\langle A\rangle=P(\alpha,\alpha/2)$.

Второй алгоритм. *Для произвольного* μ, $0\leqq 2\mu\leqq\alpha$, *через* G_μ *обозначим граф* $T(d,2)+P(\alpha,\mu)$. *Для всякого ребра* $[u,v]$ *подграфа* $P(\alpha,\mu)$ *выбираем произвольную вершину* w *из максимального хроматического класса подграфа* $T(d,2)$, *после чего удаляем из* G_μ *ребра* $[w,u)$ *и* $[w,v]$. *Получаем искомый граф* G, *а* $\langle A\rangle=P(\alpha,\mu)$.

Замечание. Когда α — четно и вершину a в первом алгоритме соединим со всеми вершинами некоторого хроматического класса подграфа $T(d-1,2)$, тогда получаем граф, который является конечным результатом и при подходящем проведении второго алгоритма. Тем не менее, отказаться от хотя бы одного из двух алгоритмов во формулировке следствия 2 нельзя.

Доказательство следствия 2. Согласно II.2) граф $\langle V(G)\setminus A\rangle$ имеет подграф $G_1=T(d-1,2)$. Пусть $a\in V(G)\setminus A$ и $a\notin V(G_1)$. Представляются две возможности, которые рассмотрим поочередно.

1. Вершина a не смежна никакой вершине из A.

В этом случае, согласно II.1) и II.2) имеем $\bar{d}(v)=1$ для любого $v\in A$ и, следовательно, $\langle A\rangle=P(\alpha,\alpha/2)$. Согласно II.2) вершины из A смежны всем вершинам из G_1. Сама вершина a не может быть смежной одновременно вершинам из разных хроматических классов графа G_1, так как в противном случае граф $\langle V(G)\setminus A\rangle$ будет содержать треугольник. Легко установить уже, что граф G получается первым алгоритмом.

2. Вершина a смежна хотя бы одной вершине из A.

Теперь, согласно II.2) a является вершиной некоторого подграфа $G_2=T(d-1,2)$ графа $\langle V(G)\setminus A\rangle$. Пусть $b\in V(G)\setminus A$ и $b\notin G_2$. Обозначим через H_1 и H_2 хроматические классы графа G_1; так как $d-1$ — четно, то $|H_1|=|H_2|$. Пусть, например, $b\in H_1$. Граф G_2 содержит хроматический класс H_2 и, следовательно, другим его хроматическим классом является множество $(H_1\setminus b)\cup a$. Следовательно, вершина a смежна всем вершинам из H_2 и не смежна никакой вершине из $H_1\setminus b$. Вершины a и b не смежны, потому что иначе в $\langle V(G)\setminus A\rangle$ будет треугольник с вершинами a, b и c, где c — произвольная вершина из H_2. Окончательно $\langle V(G)\setminus A\rangle=T(d,2)$. Уже нетрудно установить, что граф G получается вторым алгоритмом.

Мы пользовались теоремой 2, а при нечетном d в ее формулировке содержится ограничение $d\geqq 3$. Это ограничение в нашем случае удовлетворено, так как $d=n-\alpha$ и $k(\langle V(G)\setminus A\rangle)=2$, а $|V(G)\setminus A)|=n-\alpha$.

Доказательство следствия 2 завершено.

Проще всего рассматривается последний экстремный случай:

Следствие 3. *В предположениях леммы* 1, *если* d — *четно и в* (9) *имеет место равенство, тогда* $n-\alpha\geqq d$. *При предположении* $n-\alpha=d$ *равенство в* (9) *достигается для единственного графа* $G=T(d,2)+\bar{K}_\alpha$ *и* $\langle A\rangle=\bar{K}_\alpha$.

Первая часть утверждения уже доказана. Для доказательства второй части достаточно заметить, что если в (9) имеет место равенство, тогда выполнены I.1) и I.2), а в случае $D(v)=V(G)\setminus A$.

Замечание. Алгоритмы для построения всех экстремальных графов при $n-a>d$ сложнее, но они также строятся на основании теоремы 2.

7. Экстремальные графы для теоремы 1 при $s\geqq 3$.

Теорема 3. *В предположениях теоремы* 1 *при* $s\geqq 3$ *и* $d>1$ *равенство в* (1) *имеет место тогда и только тогда, когда*

1) $\langle A\rangle=\bar{K}_a$,

2) $\langle D(v)\rangle=T(d,s)$ *для любой вершины* $v\in A$.

Замечание. При $d\leqq 1$ неравенство (1) является тривиальным тождеством.

Доказательство. Нетрудно установить, что выполнение 1) и 2) влечет равенство в (1). Пусть теперь, наоборот, нам известно, что в (1) имеет место равенство. Согласно (22) имеем $\bar{d}(v)=0$ для любого $v\in A$; таким образом 1) доказано. В (7) и в (5) тоже должно быть равенство и, следовательно, $e(\langle D(v)\rangle)=e(d,s)$. Так как граф $\langle D(v)\rangle$ не содержит $(s+1)$-клик, то согласно теореме Турана выполнено 2). Доказательство теоремы завершено.

8. Экстремальные графы для теоремы 1 при $s\geqq 3$ **и** $n-a=d$.

Следствие 4. *В предположениях теоремы 1 при* $s\geqq 3$, *если в* (1) *имеет место равенство, тогда* $n-a\geqq d$. *Если* $n-a=d$, *то равенство в* (1) *имеет место тогда и только тогда, когда* $G=T(d,s)+\bar{K}_a$ *и* $\langle A\rangle=\bar{K}_a$.

Следствие 4 непосредственно вытекает из теоремы 3.

Итак, когда $n-a=d$, тогда экстремальный граф единствен. При $n-a>d$ алгоритм для построения всех экстремальных графов получается с помощью теоремы 3. В этом случае экстремальный граф единственный, если существует единственный подграф типа $T(d,s)$ графа $\langle V(G)\setminus A\rangle$. При $a>1$ и обратное утверждение верно.

9. Оценки сверху для числа треугольников графа. Отметим сначала следующее тривиальное следствие из теоремы 1:

Следствие 5. *В предположениях теоремы 1 верно неравенство:*

$$t(G)\leqq t(\langle V(G)\setminus A\rangle)+ae(d,s). \tag{23}$$

Экстремальные графы для следствия 5 даются теоремами 2 и 3.

Из следствия 5 и нашей теоремы из [1] тривиально следует

Следствие 6. *В предположениях теоремы* 1 *имеет место неравенство*

$$t(G)\leqq t(n-a,s)+ae(d,s). \tag{24}$$

Притом оно переходит в равенство тогда и только тогда, когда G *является экстремальным графом для теоремы 1 и при* $s\geqq 3$ *имеем* $\langle V(G)\setminus A\rangle=T(n-a,s)$.

Рассмотрим граф $G'=T(n-a,s)+\bar{K}_a$. Очевидно

$$t(G')=t(n-a,s)+ae(n-a,s). \tag{25}$$

Так как G' не содержит $(s+2)$-клик, то согласно нашей теоремы из [1] следует

$$t(G')\leqq t(n,s+1). \tag{26}$$

Таким образом, мы доказали первую часть следующего утверждения:

Следствие 7. *В предположениях теоремы 1 при* $n-a \geqq d$ *имеет место неравенство*

$$t(G) \leqq t(n, s+1). \tag{27}$$

При $s \geqq 3$ *равенство в* (27) *имеется тогда и только тогда, когда* $G = T(n, s+1)$ *и* A *является хроматическим классом этого графа,* $\langle A \rangle = \bar{K}_a$. *При* $s=2$ *и четном* $n-a$ *равенство в* (27) *имеется тогда и только тогда, когда* $G = T(n, 3)$ *и* A *является хроматическим классом этого графа,* $\langle A \rangle = \bar{K}_a$, $a = n/3$ *при* $n \equiv 0 \pmod 3$, $a = (n+2)/3$ *при* $n \equiv 1 \pmod 3$, $a = (n-2)/3$ *при* $n \equiv 2 \pmod 3$. *При* $s=2$ *и нечетном* $n-a$ *равенство в* (27) *имеется тогда и только тогда, когда* $n \not\equiv 0 \pmod 3$, $a = (n-1)/3$ *при* $n \equiv 1 \pmod 3$, $a = (n+1)/3$ *при* $n \equiv 2 \pmod 3$ *и* G *получается некоторым из двух алгоритмов следствия* 2.

Докажем вторую часть этого утверждения. Пусть в (27) имеет место равенство. Если $s \geqq 3$, утверждение получается с помощью следствия 6, следствия 4 и нашей теоремы из [1], принимая в виду, что из равенства в (27) следует $n-a=d$. Предоставляем доказательство читателю.

Пусть теперь в предположениях теоремы 1 при $s=2$ в (27) имеет место равенство. Тогда $d=n-a$, так как в противном случае $e(d, 2) < e(n-a, 2)$ (заметим, что $n-a \geqq 2$, так как $n-a = |V(G) \setminus A|$, а $k(\langle V(G) \setminus A \rangle = 2)$ и в (27) получится строгое неравенство. Представляются две возможности в зависимости от четности числа d. Если d — четно, тогда согласно следствию 3 имеем $G = T(d, 2) + \bar{K}_a = G'$ и $\langle A \rangle = \bar{K}_a$. Но в (26) тоже имеется равенство и согласно теореме из [1] имеем $G' = T(n, 3)$. Этим случай, когда $s=2$ и $n-a$ — четно, рассмотрен, так как остается только заметить, что хроматические классы вне A должны иметь одинаковую мощность. Остается вторая возможность: $s=2$ и $n-a$ — нечетно. Сейчас, согласно следствию 2, G получается одним из двух алгоритмов этого следствия. С другой стороны, в (26) имеется равенство и согласно теореме из [1] должны иметь $T(d, 2) + \bar{K}_a = T(n, 3)$. Так как $d=n-a$ и d — нечетно, то легко получить, что $n \not\equiv 0 \pmod 3$ и $a = (n-1)/3$ при $n \equiv 1 \pmod 3$, $a = (n+1)/3$ при $n \equiv 2 \pmod 3$.

Доказательство следствия 7 завершено.

Замечание 1. Отметим, что в предположениях следствия 7 при $s \geqq 1$ нами, совместно с Н. Неновым [3, 4, 5], доказано, что $e(G) \leqq e(n, s+1)$ и равенство имеется тогда и только тогда, когда $G = T(n, s+1)$.

Аналогично следствию 7 или с его помощью можно доказать:

Следствие 8. *Пусть* v_1 — *вершина графа* G, *которая содержится в* $(s+1)$*-клике, однако не содержится ни в какой* $(s+2)$*-клике,* $s \geqq 2$. *Если максимум степеней всех вершин из* G, *которые не смежны вершине* v_1, *не превышает степень* d *вершины* v_1, *тогда имеет место неравенство* (27). *Это неравенство переходит в равенство при* $s \geqq 3$ *тогда и только тогда, когда* $G = T(n, s+1)$, A *является хроматическим классом этого графа,* $\langle A \rangle = \bar{K}_a$ *и* $v_1 \notin A$. *Это утверждение верно и при* $s=2$ *и четном* d. *Сейчас* $d = 2n/3$ *при* $n \equiv 0 \pmod 3$, $d = 2(n-1)/3$ *при* $n \equiv 1 \pmod 3$ *и* $d = 2(n+1)/3$ *при* $n \equiv 2 \pmod 3$. *При нечетном* d *и* $s=2$ *неравенство* (27) *переходит в равенство тогда и только тогда, когда* G *получается вторым алгоритмом следствия* 2, $n \not\equiv 0 \pmod 3$, $d = (2n+1)/3$ *при* $n \equiv 1 \pmod 3$, $d = (2n-1)/3$ *при* $n \equiv 2 \pmod 3$.

Замечание 2. В предположениях следствия 8 при $s \geqq 1$ автором, совместно с Н. Неновым, доказано, что $e(G) \leqq e(n, s+1)$ и равенство имеет место только для $G = T(n, s+1)$, [3; 4; 5]. Впрочем замечания 1 и 2 по существу эквивалентны.

Наконец отметим, что результаты этой статьи могут быть перенесены для клик произвольных размерностей, но к этому вопросу мы вернемся позднее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Хаджииванов. Обобщение теоремы Турана о графах. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1567—1570.
2. P. Turán. Egy gráfelméleti szélsöértékfeladatról. *Mat. és fiz. lapok*, **48**, 1941, 436—452.
3. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1575—1578.
4. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Экстремальные задачи для s-графов и теорема Турана. *Сердика*, **3**, 1977, 117—125.
5. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. p-последовательности в графах и некоторые экстремальные свойства графов Турана. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 475—478.
6. А. Зыков. О некоторых свойствах линейных комплексов. *Мат. сб.*, **24**, 1949, 163—187.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 7. 1977