PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ВИДА С ИМПУЛЬСАМИ

ДРУМИ Д. БАЙНОВ, СВЕТЛА Д. МИЛУШЕВА

В работе обоснован метод усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсами вида

$$\dot{x}(t)=\varepsilon X(t,\, x(t),\, \int_0^t \varphi(t,\, s,\, x(s),\, \int_0^s f(t,\, s,\, \sigma,\, x(s),\, x(\sigma))d\sigma)ds),$$

где $x\in R^n$, $\varphi\in R^p$, $f\in R^q$, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Метод усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсами был обоснован А. М. Самойленко [1, 2]. В настоящей работе обоснован метод усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсами.

Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве (t, x), $x\in R^n$, заданы достаточно гладкие гиперповерхности

$$\sigma_i:\quad t=t_i(x),\quad i=1, 2, \dots ,$$

лежащие в полупространстве $t>0$ при $x\in D\subset R^n$ и удовлетворяющие условию

$$t_i(x)<t_{i+1}(x),\quad x\in D,\quad i=1, 2, \dots$$

Пусть в области $\{t\geqq 0,\, x\in D\}$ движется изображающая точка P_t с текущими координатами $(t, x(t))$. Будем предполагать, что закон движения точки P_t характеризуется:

а) системой интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t)=\varepsilon X(t,\, x(t),\, \int_0^t \varphi(t,\, s,\, x(s),\, \int_0^s f(t,\, s,\, \sigma,\, x(s),\, x(\sigma))d\sigma)ds), \tag{1}$$

где $\varphi\in R^p$, $f\in R^q$, $\varepsilon>0$ — малый параметр;

б) множеством гиперповерхностей σ_i, $i=1, 2, \dots$;

в) множеством n-мерных вектор-функций $I_i(x)$, $i=1, 2, \dots$, заданных в D.

Само движение происходит так. Выйдя из точки $(t=\tau_0=0,\, x(0)=x_0)$, $x_0\in D$, точка P_t движется по траектории $(t, x(t))$ описываемой решением $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0)=x_0$ до момента $\tau_1>0$, в котором траектория встречает в точки $(\tau_1,\, x_1^-=x(\tau_1))$ гиперповерхность σ_1. В момент τ_1 точка P_t мгновенно перебрасывается из положения $(\tau_1,\, x_1^-)$ в положение $(\tau_1,\, x_1^+=x_1^-+\varepsilon I_1(x_1^-))$ и движется дальше по траектории $(t, x(t))$ описываемой

ПЛИСКА Български математически студии. Том 3, 1981, с. 3—19.

решением $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(\tau_1)=x_1^+$ до встречи с гиперповерхности σ_2 и т. д.

Систему соотношений а), б), в), характеризирующую движение точки P_t, будем называть системой интегро-дифференциальных уравнений с импульсами, а кривую, описываемую точкой P_t в пространстве (t, x) — интегральной кривой или траекторией этой системы.

Таким образом, решение системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами есть функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) вне гиперповерхностей σ_i, $i=1, 2, \ldots$, со скачками, характеризуемые соотношением

$$x_i^+ = x_i^- + \varepsilon I_i(x_i^-), \quad i=1, 2, \ldots \tag{2}$$

Заметим, что точка (τ_i, x_i^+) не обязана лежать на гиперповерхности $\sigma_i (i=1, 2, \ldots)$.

Пусть существуют пределы

$$\begin{gathered}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(\theta, x, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x, x)d\sigma)ds)d\theta = X_0(x),\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T} I_i(x) = I_0(x).\end{gathered} \tag{3}$$

Тогда систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсами ставим в соответствии усредненную систему

$$\dot{\bar{x}}(t) = \varepsilon\,[X_0(\bar{x}(t)) + I_0(\bar{x}(t))]. \tag{4}$$

Отметим, что если $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$, то по определению

$$\|x\| = [\sum_{i=1}^n x_i^2]^{1/2}, \quad \|A\| = [\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}^2]^{1/2}.$$

Справедлива следующая теорема о близости решений системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами и усредненной системой с начальным условием $\bar{x}(0)=x(0)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция* $X(t, x, u)$ *непрерывна в области* $\{t\geqq 0, x\in D, u\in D_1\subseteq R^p\}$.
Функция $\varphi(t, s, x, v)$ *непрерывна в области* $\{t\geqq 0, s\geqq 0, x\in D, v\in D_2\subseteq R^q\}$.
Функция $f(t, s, \sigma, x, y)$ *непрерывна в области* $\{t\geqq 0, s\geqq 0, \sigma\geqq 0, x, y\in D\}$.
Функции $I_i(x)$, $i=1, 2, \ldots$, *непрерывны в области* D.
Функции $t_i(x)$, $i=1, 2, \ldots$, *два раза непрерывно дифференцируемые в области* D.

2. *Существуют положительные постоянные* M, C, K, M^*, N *и функции* $\mu(t, s)$ *и* $\nu(t, s, \sigma)$ *такие, что*

$$\left\|\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}\right\| + \|X(t, x, u)\| + \|I_i(x)\| \leqq M, \quad \left\|\frac{\partial^2 t_i(x)}{\partial x^2}\right\| \leqq C,$$

$$\|I_i(x) - I_i(x')\| \leqq K\|x-x'\|,$$

$$\begin{gathered}\|X(t, x, u) - X(t, x', u')\| \leqq K(\|x-x'\| + \|u-u'\|),\\ \|\varphi(t, s, x, v) - \varphi(t, s, x', v')\| \leqq \mu(t, s)(\|x-x'\| + \|v-v'\|),\\ \|f(t, s, \sigma, x, y) - f(t, s, \sigma, x', y')\| \leqq \nu(t, s, \sigma)(\|x-x'\| + \|y-y'\|),\end{gathered}$$

$$\int_0^t \mu(t, s)[1+2\int_0^s \nu(t, s, \sigma)d\sigma]ds \leq M^*,$$

$$t\int_0^t \mu(t, s)[1+2\int_0^s \nu(t, s, \sigma)d\sigma]ds \leq N$$

для всех $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\sigma \geq 0$; $x, x', y, y' \in D$; $u, u' \in D_1$; $v, v' \in D_2$; $i = 1, 2, \ldots$

3. *Равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in D$ *существуют конечные пределы* (3) *и предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<t_i<t+T} 1 = d_0, \quad d_0 = \mathrm{const} > 0.$$

4. *Система интегро-дифференциальных уравнений с импульсами, с начальным условием* $x(0) = x_0 \in D$, *для любого* $\varepsilon \in (0, \mathcal{E}]$, $\mathcal{E} = \mathrm{const} > 0$, *имеет единственное, непрерывное при* $t \geq 0$, $t \neq t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, *решение* $x(t)$.

5. *Усредненная система* (4) *с начальным условием* $\bar{x}(0) = x(0)$, *для любого* $\varepsilon \in (0, \mathcal{E}]$ *имеет решение* $\bar{x}(t)$, *которое при* $t \geq 0$ *принадлежит области* D *вместе с некоторой* ϱ-*окрестностью* ($\varrho = \mathrm{const} > 0$) *и удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\partial t_i(\bar{x}(t))}{\partial x} I_i(\bar{x}(t)) \leq \beta < 0, \quad \beta = \mathrm{const} \tag{5}$$

(*либо* $\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0$, *если* σ_i — *гиперплоскость*), *для всех* $t \in (t_i', t_i'')$, *где* $t_i' = \inf_{x \in D} t_i(x)$, $t_i'' = \sup_{x \in D} t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $t_d < L\varepsilon^{-1} < t_{d+1}$.

Тогда для любых чисел $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 \in (0, \mathcal{E}]$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L)$), *что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *выполнялось неравенство*

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| < \eta.$$

Доказательство. В силу условий теоремы I существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)$ ($\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$), что

$$\begin{gathered} \left\| \int_t^{t+T} [X(\theta, x, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x, x)d\sigma)ds) - X_0(x)]d\theta \right\| \leq \alpha(T)T/2, \\ \left\| \sum_{t<t_i<t+T} I_i(x) - TI_0(x) \right\| \leq \alpha(T)T/2. \end{gathered} \tag{6}$$

Пусть T — фиксированное, достаточно большое число и пусть в интервале $(0, T)$ лежат d_1 точек

$$t_1(x_0) = t_1^{(0)}, \ldots, t_{d_1}(x_0) = t_{d_1}^{(0)},$$

причем $t_i^{(0)} < t_{i+1}^{(0)}$, $i = \overline{1, d_1 - 1}$.

Обозначим через $x(t, \tau, c)$, $x(\tau, \tau, c) = c$ решение системы

$$\begin{gathered} x(t, \tau, c) = c + \varepsilon \int_\tau^t X(\theta, x(\theta, \tau, c), \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x(s, \tau, c), \\ \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x(s, \tau, c), x(\sigma, \tau, c))d\sigma)ds)d\theta. \end{gathered} \tag{7}$$

Представим $x(t, \tau, c)$ в виде

$$x(t, \tau, c)=c+\varepsilon\int_{\tau}^{t} X(\theta, c, \int_{0}^{\theta}\varphi(\theta, s, c, \int_{0}^{s}f(\theta, s, \sigma, c, c)d\sigma)ds)d\theta+R(t, \varepsilon, \tau)$$

и оценим выражение $R(t, \varepsilon, \tau)$. При $0<\tau\leq t\leq T$ имеем

$$\| R(t, \varepsilon, \tau) \|\leq\varepsilon \Big|\int_{\tau}^{t}\| X(\theta, x(\theta, \tau, c), \int_{0}^{\theta}\varphi(\theta, s, x(s, \tau, c), \int_{0}^{s}f(\theta, s, \sigma, x(s, \tau, c),$$

$$x(\sigma, \tau, c))d\sigma)ds)-X(\theta, c, \int_{0}^{\theta}\varphi(\theta, s, c, \int_{0}^{s}f(\theta, s, \sigma, c, c)d\sigma)ds)\| d\theta\Big|$$

$$\leq\varepsilon K\int_{0}^{t}\{\|x(\theta, \tau, c)-c\|+\int_{0}^{\theta}\mu(\theta, s)[\| x(s, \tau, c)-c\|$$

$$+\int_{0}^{s}\nu(\theta, s, \sigma)(\| x(s, \tau, c)-c\|+\|x(\sigma, \tau, c)-c\|)d\sigma]\, ds\}d\theta$$

$$=\varepsilon K\int_{\tau}^{t}\{\varepsilon\Big\|\int_{\tau}^{\theta}X(\theta_1, x(\theta_1, \tau, c), \int_{0}^{\theta_1}\varphi(\theta_1, s, x(s, \tau, c), \int_{0}^{s}f(\theta_1, s, \sigma, x(s, \tau, c),$$

$$x(\sigma, \tau, c))d\sigma)ds)d\theta_1\Big\|+\int_{0}^{\theta}\mu(\theta, s)[\varepsilon\Big\|\int_{\tau}^{s}X(\theta_1, x(\theta_1, \tau, c), \int_{0}^{\theta_1}\varphi(\theta_1, s_1,$$

$$x(s_1, \tau, c), \int_{0}^{s_1}f(\theta_1, s_1, \sigma, x(s_1, \tau, c), x(\sigma, \tau, c))d\sigma)\, ds_1)\, d\theta_1\Big\|$$

$$+\int_{0}^{s}\nu(\theta, s, \sigma)(\varepsilon\Big\|\int_{\tau}^{s}X(\theta_1, x(\theta_1, \tau, c), \int_{0}^{\theta_1}\varphi(\theta_1, s_1, x(s_1, \tau, c), \int_{0}^{s_1}f(\theta_1, s_1, \sigma,$$

$$x(s_1, \tau, c), x(\sigma, \tau, c))d\sigma)ds_1)d\theta_1\Big\|+\varepsilon\Big\|\int_{\tau}^{\sigma}X(\theta_1, x(\theta_1, \tau, c), \int_{0}^{\theta_1}\varphi(\theta_1, s_1,$$

$$x(s_1, \tau, c), \int_{0}^{s_1}f(\theta_1, s_1, \sigma_1, x(s_1, \tau, c), x(\sigma_1, \tau, c))d\sigma_1)\, ds_1)\, d\theta_1\Big\|\, d\sigma]ds\}d\theta$$

$$\leq\varepsilon^2KM\int_{\tau}^{t}\{\Big|\int_{\tau}^{\theta}d\theta_1\Big|+\int_{0}^{\theta}\mu(\theta, s)[\Big|\int_{\tau}^{s}d\theta_1\Big|+\int_{0}^{s}\nu(\theta, s, \sigma)(\Big|\int_{\tau}^{s}d\theta_1\Big|$$

$$+\Big|\int_{\tau}^{\sigma}d\theta_1\Big|)d\sigma]ds\}\, d\theta\leq\varepsilon^2KM\{\frac{(t-\tau)^2}{2}+\int_{\tau}^{t}[\int_{0}^{\theta}\mu(\theta, s)(|s-\tau|$$

$$+\int_{0}^{s}\nu(\theta, s, \sigma)(|s-\tau|+|\sigma-\tau|)d\sigma)ds]d\theta\}\leq\varepsilon^2KMT(T+2N)/2.$$

Рассмотрим решение $x(t)$ системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами на отрезке $[0, T]$. Это решение состоит из кусков, определяемых формулой (7). В силу полученной оценки для $\|R(t, \varepsilon, \tau)\|$ на отрезке $0<\tau\leq t\leq T$ решение $x(t)$ можно определить выражением

$$x(t)=x(t, \tau, c)=x_1(t, \tau, c)+O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

где

$$x_1(t, \tau, c) = c + \varepsilon \int_\tau^t X(\theta, c, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, c, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, c, c)d\sigma)ds)d\theta.$$

Отсюда следует что

$$x(t) = x(t, 0, x_0) = x_1(t, 0, x_0) + O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t < \tau_1,$$

где τ_1 — корень уравнения

(9) $$t = t_1(x(t, 0, x_0)).$$

Так как

$$t_1(x(t, 0, x_0)) = t_1(x_1(t, 0, x_0) + O(\varepsilon^2))$$

$$= t_1(x_0 + \varepsilon \int_0^t X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + O(\varepsilon^2))$$

$$= t_1(x_0) + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_0^t X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + O(\varepsilon^2)'$$

то из (9) находим $\tau_1 = t_1^{(0)} + \varepsilon\Theta_1^{(0)} + O(\varepsilon^2)$, где

$$\Theta_1^{(0)} = \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_0^{t_1^{(0)}} X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta.$$

Действительно,

$$t = t_1^{(0)} + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_0^{t_1^{(0)}} X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_{t_1^{(0)}}^t X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + O(\varepsilon^2)$$

$$= t_1^{(0)} + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_0^{t_1^{(0)}} X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta$$

$$+ \varepsilon(t - t_1^{(0)}) \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} X(\tilde{t}, x_0, \int_0^{\tilde{t}} \varphi(\tilde{t}, s, x_0, \int_0^s f(\tilde{t}, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds) + O(\varepsilon^2),$$

где $\tilde{t} = t_1^{(0)} + \tilde{\mu}(t - t_1^{(0)}), 0 \leq \tilde{\mu} \leq 1$ (для различных компонентов вектора X постоянная $\tilde{\mu}$ принимает различные значения из интервала [0, 1]).

В силу условий теоремы 1 $t_1^{(0)} > 0$ и, следовательно, если ε достаточно мало $(\varepsilon \leq \varepsilon_1^{(0)})$, $\tau_1 > \tau_0 = 0$.

Итак,

$$x(t) = x(t, 0, x_0) = x_1(t, 0, x_0) + O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t < \tau_1 = t_1^{(0)} + \varepsilon\Theta_1^{(0)} + O(\varepsilon^2).$$

Далее

$$x_1^+ = x(\tau_1, 0, x_0) + \varepsilon I_1(x(\tau_1, 0, x_0)) = x_1(\tau_1, 0, x_0) + \varepsilon I_1^{(0)} + O(\varepsilon^2)$$

$$= x_0 + \varepsilon \int_0^{\tau_1} X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + \varepsilon I_1^{(0)} + O(\varepsilon^2),$$

где $I_1^{(0)} = I_1(x(\tau_1, 0, x_0))$.

Решение $x(t)$ между гиперплоскостями σ_1 и σ_2 описывается формулой (8), в которой положено $\tau = \tau_1$ и $c = x_1^+$:

$$x(t) = x(t, \tau_1, x_1^+) = x_1(t, \tau_1, x_1^+) + O(\varepsilon^2) \tag{10}$$

$$= x_1^+ + \varepsilon \int_{\tau_1}^t X(\theta, x_1^+, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_1^+, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_1^+, x_1^+)d\sigma)ds)d\theta + O(\varepsilon^2)$$

$$= x_0 + \varepsilon \int_0^t X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + \varepsilon I_1^{(0)}$$

$$+ \varepsilon \int_{\tau_1}^t [X(\theta, x_1^+, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_1^+, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_1^+, x_1^+)d\sigma)ds) - X(\theta, x_0,$$

$$\int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)]d\theta + O(\varepsilon^2).$$

Так как

$$\varepsilon \| \int_{\tau_1}^t [X(\theta, x_1^+, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_1^+, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_1^+, x_1^+)d\sigma)ds) - X(\theta, x_0,$$

$$\int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0, \int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)]d\theta \| \leq \varepsilon K \Big| \int_{\tau_1}^t \{\| x_1^+ - x_0 \|$$

$$+ \int_0^\theta \mu(\theta, s)[\| x_1^+ - x_0 \| + 2\int_0^s \nu(\theta, s, \sigma) \| x_1^+ - x_0 \| d\sigma]ds\}d\theta \Big|$$

$$\leq \varepsilon K(1 + M^*) | t - \tau_1 | \, \| x_1^+ - x_0 \| \leq \varepsilon^2 K(1 + M^*) T \| \int_0^{\tau_1} X(\theta, x_0, \int_0^\theta \varphi(\theta, s, x_0,$$

$$\int_0^s f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + I_1^{(0)} + O(\varepsilon^2)\, \varepsilon^{-1} \| \leq \varepsilon^2 KM(1 + M^*)(1 + T)T + O(\varepsilon^3),$$

то ввиду (10) получаем

$$x(t) = x(t, \tau_1, x_1^+) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon I_1^{(0)} + O(\varepsilon^2).$$

Покажем, что траектория $(t, x(t))$ после момента τ_1 не встречает больше гиперповерхность σ_1.

Решая систему

$$x(t) = x(t, \tau_1, x_1^+),$$
$$t = t_1(x),$$

получаем

(11) $$t=t_1(x(t,\tau_1,x_1^+)).$$

Пусть $\bar{t}_1$ корень уравнения (11), т. е.

$$\bar{t}_1=t_1(x(\bar{t}_1,\tau_1,x_1^+)).$$

Из (11) находим

$$t=t_1(x(t,\tau_1,x_1^+))=t_1(x_1(t,0,x_0)+\varepsilon I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2))$$

$$=t_1(x_0+\varepsilon\int_0^t X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,s,x_0,\int_0^s f(\theta,s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)d\theta+\varepsilon I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2))$$

$$=t_1^{(0)}+\varepsilon\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x}[\int_0^{t_1^{(0)}}X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,s,x_0,\int_0^s f(\theta,s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)d\theta+I_1^{(0)}]$$

$$+\varepsilon(t-t_1^{(0)})\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x}X(\tilde{t},x_0,\int_0^{\tilde{t}}\varphi(\tilde{t},s,x_0,\int_0^s f(\tilde{t},s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)+O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{t}=t_1^{(0)}+\tilde{\mu}(t-t_1^{(0)}),\quad 0\leq\tilde{\mu}\leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{t}_1=\tau_1+\varepsilon\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x}I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2).$$

В силу условий теоремы 1 и непрерывности функции $I_1(x)$, если ε достаточно мало ($\varepsilon\leq\bar{\varepsilon}_1^{(0)}$), имеем $\bar{t}_1<\tau_1$.

Таким образом, при $t>\tau_1$ траектория $(t,x(t))$ покидает гиперповерхность σ_1.

Найдем момент, когда трактория $(t,x(t))$ достигает гиперповерхность σ_2. Для этого определим корень τ_2 уравнения $t=t_2(x(t,\tau_1,x_1^+))$. Имеем

$$t=t_2(x(t,\tau_1,x_1^+))=t_2(x_1(t,0,x_0)+\varepsilon I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2))$$

$$=t_2(x_0+\varepsilon\int_0^t X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,s,x_0,\int_0^s f(\theta,s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)d\theta+\varepsilon I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2))$$

$$=t_2^{(0)}+\varepsilon\frac{\partial t_2(x_0)}{\partial x}[\int_0^{t_2^{(0)}}X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,s,x_0,\int_0^s f(\theta,s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)d\theta+I_1^{(0)}]$$

$$+\varepsilon(t-t_2^{(0)})\frac{\partial t_2(x_0)}{\partial x}X(\tilde{t},x_0,\int_0^{\tilde{t}}\varphi(\tilde{t},s,x_0,\int_0^s f(\tilde{t},s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)+O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{t}=t_2^{(0)}+\tilde{\mu}(t-t_2^{(0)}),\quad 0\leq\tilde{\mu}\leq 1.$$

Следовательно, $\tau_2=t_2^{(0)}+\varepsilon\Theta_2^{(0)}+O(\varepsilon^2)$, где

$$\Theta_2^{(0)}=\frac{\partial t_2(x_0)}{\partial x}[\int_0^{t_2^{(0)}}X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,s,x_0,\int_0^s f(\theta,s,\sigma,x_0,x_0)d\sigma)ds)d\theta+I_1^{(0)}].$$

Так как по условии $t_2^{(0)}>t_1^{(0)}$, то если ε достаточно мало ($\varepsilon\leq\varepsilon_2^{(0)}$), то $\tau_2>\tau_1$ и, следовательно, $x(t)$ на интервале $\tau_1\leq t<\tau_2$ описывается формулой

$$x(t)=x(t,\tau_1,x_1^+)=x_1(t,0,x_0)+\varepsilon I_1^{(0)}+O(\varepsilon^2).$$

Далее

$$x_2^+ = x(\tau_2, \tau_1, x_1^+) + \varepsilon I_2(x(\tau_2, \tau_1, x_2^+)) = x_1(\tau_2, 0, x_0) + \varepsilon(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) + O(\varepsilon^2),$$

где $I_2^{(0)} \equiv I_2(x(\tau_2, \tau_1, x_1^+))$.

Нетрудно показать (как это видно из предыдующих вычислений), что система (1) с начальным условием $x(\tau_2) = x_2^+$ имеет на интервале $\tau_2 \leqq t < \tau_3$ решение

$$x(t) = x(t, \tau_2, x_2^+) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon(I_1^{(0)} + I_2^{(0)}) + O(\varepsilon^2),$$

где τ_3 определяется как корень уравнения

$$t = t_3(x(t, \tau_2, x_2^+)).$$

Как и раньше, имеем $\tau_3 = t_3^{(0)} + \varepsilon\Theta_3^{(0)} + O(\varepsilon^2)$, где

$$\Theta_3^{(0)} = \frac{\partial t_3(x_0)}{\partial x}\left[\int\limits_0^{t_3^{(0)}} X(\theta, x_0, \int\limits_0^{\theta}\varphi(\theta, s, x_0, \int\limits_0^{s} f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + I_1^{(0)} + I_2^{(0)}\right].$$

В силу условий (6) теоремы 1, если ε достаточно мало ($\varepsilon \leqq \bar{\varepsilon}_2^{(0)}$), траектория $(t, x(t))$ после момента τ_2 не встречает больше гиперповерхность σ_2.

Методом индукции легко убеждаемся, что для $x(t)$ получаем следующее выражение:

$$x(t) = x(t, \tau_{s-1}, x_{s-1}^+) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon\sum_{i=0}^{s-1} I_i^{(0)} + O(\varepsilon^2),$$

как при

$$t_{s-1}^{(0)} + \varepsilon\Theta_{s-1}^{(0)} + \gamma_{s-1}O(\varepsilon^2) = \tau_{s-1} \leqq t < \tau_s = t_s^{(0)} + \varepsilon\Theta_s^{(0)} + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Theta_s^{(0)} = \frac{\partial t_s(x_0)}{\partial x}\left[\int\limits_0^{t_s^{(0)}} X(\theta, x_0, \int\limits_0^{\theta}\varphi(\theta, s, x_0, \int\limits_0^{s} f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + \sum_{i=0}^{s-1} I_i^{(0)}\right],$$

$$t_0^{(0)} = \Theta_0^{(0)} = \gamma_0 = 0, \quad I_0^{(0)} = 0, \quad \gamma_s = 1, \quad s = \overline{1, d_1},$$

так и при

$$t_{d_1}^{(0)} + \varepsilon\Theta_{d_1}^{(0)} + O(\varepsilon^2) = \tau_{d_1} \leqq t < T.$$

Теперь можно вычислить

$$x(T) = x(T, \tau_{d_1}, x_{d_1}^+) = x_1(T, 0, x_0) + \varepsilon\sum_{i=0}^{d_1} I_i^{(0)} + O(\varepsilon^2) = x_0$$

$$+ \varepsilon\int\limits_0^T X(\theta, x_0, \int\limits_0^{\theta}\varphi(\theta, s, x_0, \int\limits_0^{s} f(\theta, s, \sigma, x_0, x_0)d\sigma)ds)d\theta + \varepsilon\sum_{i=0}^{d_1} I_i^{(0)} + O(\varepsilon^2).$$

В силу равенства

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon\int\limits_0^t [X_0(\bar{x}(\theta)) + I_0(\bar{x}(\theta))]d\theta$$

находим, что

$$\bar{x}(T) = x_0 + \varepsilon\int\limits_0^T [X_0(\bar{x}(\theta)) + I_0(\bar{x}(\theta))]d\theta,$$

Покажем близость $x(T)$ и $\bar{x}(T)$. Для этой цели, учитывая (7), представим $x(T)$ в виде

(12) $$x(T)=x_0+\varepsilon[X_0(x_0)+I_0(x_0)]T+\varepsilon\int_0^T[X(\theta,x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_0,$$

$$\int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_0,\ x_0)d\sigma)ds)-X_0(x_0)]d\theta+\varepsilon[\sum_{i=1}^{d_1}I_i^{(0)}-I_0(x_0)T]+O(\varepsilon^2).$$

Пусть оператор A_0 действует в области D по формуле

(13) $$A_0x=x+\varepsilon[X_0(x)+I_0(x)]T,\ \ x\in D.$$

Из (12), в силу (6) и условий теоремы 1, находим

(14) $$\|x(T)-A_0x_0\|\leq\varepsilon\|\int_0^T[X(\theta,\ x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_0,\int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,$$

$$x_0,\ x_0)d\sigma)ds)-X_0(x_0)]d\theta\|+\varepsilon\|\sum_{i=1}^{d_1}I_i^{(0)}-I_0(x_0)T\|+O(\varepsilon^2)$$

$$\leq\varepsilon\alpha(T)T/2+\varepsilon\|\sum_{i=1}^{d_1}I_i(x_0)-I_0(x_0)T\|+\varepsilon\|\sum_{i=1}^{d_1}(I_i^{(0)}-I_i(x_0))\|$$

$$+O(\varepsilon^2)\leq\varepsilon\alpha(T)T+\varepsilon\sum_{i=1}^{d_1}\|I_i(x(\tau_i,\ \tau_{i-1},\ x_{i-1}^+))-I_i(x_0)\|+O(\varepsilon^2)$$

$$\leq\varepsilon\alpha(T)T+\varepsilon K\sum_{i=1}^{d_1}\|x(\tau_i,\ \tau_{i-1},\ x_{i-1}^+)-x_0\|+O(\varepsilon^2)$$

$$\leq\varepsilon\alpha(T)T+\varepsilon^2KMd_1(2T+d_1-1)/2+O(\varepsilon^2)\leq\varepsilon\alpha(T)T+\varepsilon^2M_1,$$

где $M_1=M_1(T,\ d_1)$ — постоянная.

При $t\geq0$ и $x\in D$ имеем

$$\|X_0(x)\|\leq M,\ \ \|I_0(x)\|\leq Md_0,\ \ \|\bar{x}(t)-x_0\|\leq\varepsilon(1+d_0)MT,$$

$$\|X_0(\bar{x}(t))-X_0(x_0)\|\leq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\|\int_t^{t+T}[X(\theta,\ \bar{x}(t),\int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ \bar{x}(t),\int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,$$

$$\bar{x}(t),\ \bar{x}(t))d\sigma)ds)-X(\theta,\ x_0,\int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_0,\int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_0,\ x_0)d\sigma)ds)]d\theta\|$$

$$\leq K(1+M^*)\|\bar{x}(t)-x_0\|\leq\varepsilon(1+d_0)(1+M^*)KMT,$$

$$\|I_0(\bar{x}(t))-I_0(x_0)\|\leq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T}\|I_i(\bar{x}(t))-I_i(x_0)\|\leq\varepsilon(1+d_0)KMTd_0.$$

Тогда

(15) $$\|\bar{x}(T)-A_0x_0\|\leq\varepsilon\int_0^T[\|X_0(\bar{x}(\theta))-X_0(x_0)\|$$

$$+\|I_0(\bar{x}(\theta))-I_0(x_0)\|]d\theta\leq\varepsilon^2(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2,$$

$$\tilde{d}_0=d_0+M^*.$$

Из (14) и (15) следует

$$\|x(T)-\bar{x}(T)\|\leq\|x(T)-A_0x_0\|+\|\bar{x}(T)-A_0x_0\| \tag{16}$$

$$\leq\varepsilon\alpha(T)T+\varepsilon^2[M_1+(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2].$$

Этим близость $x(T)$ и $\bar{x}(T)$ установлена.

Так как $\bar{x}(T)$ принадлежит D с ϱ-окрестностью, то из (15) и (16) следует, что $x(T)$ и A_0x_0 принадлежат области D соответственно с окрестностями

$$\varrho_1=\varrho-\varepsilon\{\alpha(T)T+\varepsilon[M_1+(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2]\}$$

и

$$\varrho_1'=\varrho-\varepsilon^2(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2.$$

Предположим, что в интервале $(T, 2T)$ лежат d_2 точек

$$t_{d_1+1}(\bar{x}(T)),\ \dots,\ t_{d_1+d_2}(\bar{x}(T)),$$

причем $t_{d_1+i}(\bar{x}(T))<t_{d_1+i+1}(\bar{x}(T))$, $i=\overline{1, d_2-1}$.

Тогда в силу (16) и непрерывности функций $t_i(x)$, $i=1, 2, \dots$, следует, что если ε достаточно мало ($\varepsilon\leq\tilde{\varepsilon}_1$), на интервале $(T, 2T)$ лежат d_2 точек

$$t_{d_1+1}(x(T))=t_1^{(1)},\ \dots,\ t_{d_1+d_2}(x(T))=t_{d_2}^{(1)},$$

причем $t_i^{(1)}<t_{i+1}^{(1)}$, $t=\overline{1, d_2-1}$.

Из условий теоремы и (16) следует, что если ε достаточно мало ($\varepsilon\leq\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1$), существует постоянная $\beta_1\in[-\beta, 0)$, такая, что

$$\frac{dt_{d_1+i}(x(T))}{\partial x}I_{d_1+i}(x(T))\leq\beta_1<0,\quad i=\overline{1, d_2}. \tag{17}$$

Решение $x(t)$ системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами, построенное для $t\in[0, T)$, продолжим на интервале $[T, 2T]$, обозначая $x(T)$ через x_T. Имеем

$$x(t)=x(t, T, x_T)=x_1(t, T, x_T)+O(\varepsilon^2)$$

при $T\leq t<\tau_{d_1+1}$, где τ_{d_1+1} — корень уравнения

$$t=t_{d_1+1}(x(t, T, x_T)).$$

Так как

$$t=t_{d_1+1}(x(t, T, x_T))=t_{d_1+1}(x_1(t, T, x_T)+O(\varepsilon^2))$$

$$=t_1^{(1)}+\varepsilon\frac{\partial t_{d_1+1}(x_T)}{\partial x}\int_T^{t_1^{(1)}}X(\theta, x_T, \int_0^\theta\varphi(\theta, s, x_T, \int_0^s f(\theta, s, \sigma,$$

$$x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta+\varepsilon(t-t_1^{(1)})\frac{\partial t_{d_1+1}(x_T)}{\partial x}X(\widetilde{t},\ x_T,$$

$$\int_0^{\widetilde{t}}\varphi(\widetilde{t},\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\widetilde{t},\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)+O(\varepsilon^2),$$

$$\widetilde{t}=t_1^{(1)}+\widetilde{\mu}(t-t_1^{(1)}),\qquad 0\leqq\widetilde{\mu}\leqq 1,$$

то $\tau_{d_1+1}=t_1^{(1)}+\varepsilon\Theta_1^{(1)}+O(\varepsilon^2)$, где

$$\Theta_1^{(1)}=\frac{\partial t_{d_1+1}(x_T)}{\partial x}\int_T^{t_1^{(1)}}X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi\ (\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta.$$

Далее находим

$$\begin{aligned}x_{d_1+1}^+&=x(\tau_{d_1+1},\ T,\ x_T)+\varepsilon I_{d_1+1}(x(\tau_{d_1+1},\ T,\ x_T))\\&=x_1(\tau_{d_1+1},\ T,\ x_T)+\varepsilon I_1^{(1)}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

и

$$x(t)=x(t,\ \tau_{d_1+1},\ x_{d_1+1}^+)=x_{d_1+1}^+$$

$$+\varepsilon\int_{\tau_{d_1+1}}^t X(\theta,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_{d_1+1}^+,\ x_{d_1+1}^+)d\sigma)ds)d\theta+O(\varepsilon^2)$$

$$=x_T+\varepsilon\int_T^{\tau_{d_1+1}}X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta+\varepsilon I_1^{(1)}$$

$$+O(\varepsilon^2)+\varepsilon\int_{\tau_{d_1+1}}^T X(\theta,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_{d_1+1}^+,\ x_{d_1+1}^+)d\sigma)ds)d\theta$$

$$=x_T+\varepsilon\int_T^t X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta$$

$$+\varepsilon I_1^{(1)}+\varepsilon\int_{\tau_{d_1+1}}^t[X(\theta,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_{d_1+1}^+,\ x_{d_1+1}^+)d\sigma)ds)$$

$$-X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi\ (\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)]d\theta+O(\varepsilon^2).$$

Так как

$$\varepsilon\Big\|\int_{\tau_{d_1+1}}^t[X(\theta,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_{d_1+1}^+,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_{d_1+1}^+,\ x_{d_1+1}^+)d\sigma)ds)$$

$$-X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)]d\theta\Big\|$$

$$\leqq\varepsilon^2KM(1+M^*)(1+T)T+O(\varepsilon^3),$$

то для $x(t)$ получаем

$$x(t)=x(t,\tau_{d_1+1},\ x^+_{d_1+1})=x_1(t,\ T,\ x_T)+\varepsilon I_1^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

и т. д.

В общем случае

$$x(t)=x(t,\tau_{d_1+s-1},x^+_{d_1+s-1})=x_1(t,\ T,x_T)+\varepsilon\sum_{i=0}^{s-1}I_i^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

как при

$$t_{s-1}^{(1)}+\varepsilon\Theta_{s-1}^{(1)}+\gamma_{s-1}O(\varepsilon^2)\leqq t<t_s^{(1)}+\varepsilon\Theta_s^{(1)}+O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Theta_s^{(1)}=\frac{\partial t_{d_1+s}(x_T)}{\partial x}\Big[\int_T^{t_s^{(1)}}X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta+\sum_{i=0}^{s-1}I_i^{(1)}\Big],$$

$$t_0^{(1)}=T,\ \Theta_0^{(1)}=\gamma_0=0,\qquad I_0^{(1)}=0,\qquad \gamma_s=1,\qquad s=\overline{1,\ d_2},$$

так и при

$$t_{d_2}^{(1)}+\varepsilon\Theta_{d_2}^{(1)}+O(\varepsilon^2)\leqq t<2T.$$

Вычислим $x(2T)$ и $\bar{x}(2T)$:

$$x(2T)=x(2T,\tau_{d_1+d_2},\ x^+_{d_1+d_2})=x_1(2T,\ T,\ x_T)+\varepsilon\sum_{i=0}^{d_2}I_i^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

$$=x_T+\varepsilon\int_T^{2T}X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^s f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)d\theta$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{d_2}I_i^{(1)}+O(\varepsilon^2)=x_T+\varepsilon[X_0(x_T)+I_0(x_T)]T$$

$$+\varepsilon\int_T^{2T}[X(\theta,\ x_T,\ \int_0^\theta\varphi(\theta,\ s,\ x_T,\ \int_0^\theta f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_T,\ x_T)d\sigma)ds)-X_0(x_T)]d\theta$$

$$+\varepsilon\Big[\sum_{i=0}^{d_2}I_i^{(1)}-I_0(x_T)T\Big]+O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{x}(2T)=x_0+\varepsilon\int_0^{2T}[X_0(\bar{x}(\theta))+I_0(\bar{x}(\theta))]d\theta=\bar{x}(T)+\varepsilon\int_T^{2T}[X_0(\bar{x}(\theta))+I_0(\bar{x}(\theta))]d\theta.$$

В силу определения оператора A_0 представим $\|x(2T)-\bar{x}(2T)\|$ в виде

$$\|x(2T)-\bar{x}(2T)\|=\|(x(2T)-A_0x_T)+(A_0x_T-A_0\bar{x}(T))+(A_0\bar{x}(T)-\bar{x}(2T))\|.$$

Отсюда

(18)
$$\|x(2T)-\bar{x}(2T)\|\leqq\|x(2T)-A_0x\ \|$$
$$+\|A_0x_T-A_0\bar{x}(T)\|+\|A_0\bar{x}(T)-\bar{x}(2T)\|.$$

Для доказательства близости точек $x(2T)$ и $\bar{x}(2T)$ оценим каждое слагаемое в правой стороне неравенства (18).

Как и при выводе оценки (14) находим

$$\| x(2T) - A_0 x_T \| \leq \varepsilon\alpha(T)T + \varepsilon^2 M_2, \tag{19}$$

где $M_2 = M_2(T, d_2)$ — постоянная.

Далее

$$\begin{aligned} \| A_0 x_T - A_0 \bar{x}(T) \| &= \| x_T + \varepsilon[X_0(x_T) + I_0(x_T)]T \\ &\quad - \bar{x}(T) - \varepsilon[X_0(\bar{x}(T)) + I_0(\bar{x}(T))]T \| \\ &\leq \| x_T - \bar{x}(T) \| + \varepsilon T\{\| X_0(x_T) - X_0(\bar{x}(T)) \| \\ &\quad + \| I_0(x_T) - I_0(\bar{x}(T)) \|\} \leq [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT] \| x_T - \bar{x}(T) \| \\ &\leq [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT]\{\varepsilon\alpha(T)T + \varepsilon^2[M_1 + (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)KMT^2]\}; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\| \bar{x}(t) - \bar{x}(T) \| \leq \varepsilon \int_T^t [\| X_0(\bar{x}(\theta)) \| + \| I_0(\bar{x}(\theta)) \|] d\theta \leq \varepsilon(1 + d_0)MT, \quad T \leq t < 2T;$$

$$\begin{aligned} \| A_0 \bar{x}(T) - \bar{x}(2T) \| &\geq \varepsilon \int_T^{2T} [\| X_0(\bar{x}(\theta)) - X_0(\bar{x}(T)) \| + \| I_0(\bar{x}(\theta)) - I_0(\bar{x}(T)) \|] d\theta \\ &\leq \varepsilon^2 (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)KMT^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (18)—(21) получаем

$$\| x(2T) - \bar{x}(2T) \| \leq \varepsilon\{1 + [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT]\}[\alpha(T)T + \varepsilon\bar{M}], \tag{22}$$

где $\bar{M} = (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)KMT^2 + \max(M_1, M_2)$.

Следовательно, $x(2T)$ принадлежит области D вместе с ϱ_2-окрестностью

$$\varrho_2 = \varrho - \varepsilon \sum_{i=0}^{1} [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT]^i [\alpha(T)T + \varepsilon\bar{M}].$$

Теперь по $x(2T)$ построим решение $x(t)$ для $t \in [2T, 3T)$. Выполнив все x вычислений, находим

$$\begin{aligned} \| x(3T) - \bar{x}(3T) \| &\leq \varepsilon\{1 + [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT] \\ &\quad + [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT]^2\}[\alpha(T)T + \varepsilon\bar{M}], \\ \bar{M} &= (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)KMT^2 + \max_{i = \overline{1, 3}} M_i. \end{aligned}$$

Следовательно, $x(3T)$ принадлежит области D вместе с ϱ_3-окрестностью

$$\varrho_3 = \varrho - \varepsilon \sum_{i=0}^{2} [1 + \varepsilon(1 + \tilde{d}_0)KT]^i [\alpha(T)T + \varepsilon\bar{M}].$$

Продолжая описанный процесс на p-ом шаге, построим решение $x(t)$ для $[(p-1)T, pT]$, $pT \leq L\varepsilon^{-1}$.

При этом, методом индукции получаем оценку

$$\|x(pT)-\bar{x}(pT)\|\leq\varepsilon\sum_{i=0}^{p-1}[1+\varepsilon(1+\tilde{d}_0)KT]^i[\alpha(T)T+\varepsilon\bar{M}],$$

$$\bar{M}=(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2+\max_{i=\overline{1,\,p}}M_i.$$

Так как $d_i\leq c<\infty$, то

$$\bar{M}=(1+d_0)(1+\tilde{d}_0)KMT^2+\max_{i=\overline{1,\,p}}M_i\leq M_0(T)<\infty$$

и поэтому

$$\|x(pT))-\bar{x}(pT)\|\leq\varepsilon\sum_{i=0}^{p-1}[1+\varepsilon(1+\tilde{d}_0)KT]^i[\alpha(T)T+\varepsilon M_0(T)]$$

$$<\frac{[1+\varepsilon(1+\tilde{d}_0)KT]^p}{(1+\tilde{d}_0)KT}[\alpha(T)T+\varepsilon M_0(T)]$$

$$\leq\frac{[\alpha(T)T+\varepsilon M_0(T)]}{(1+\tilde{d}_0)KT}[\exp\{(1+\tilde{d}_0)KL\}+O(\varepsilon)].$$

Выберем T достаточно большое и $\hat{\varepsilon}>0$ достаточно малое, так что при $\varepsilon\leq\hat{\varepsilon}$ выполнялись неравенства

$$\frac{\alpha(T)}{(1+\tilde{d}_0)K}\exp\{(1+\tilde{d}_0)KL\}<\frac{\eta}{4}$$

и

$$O(\varepsilon)\frac{\alpha(T)}{(1+\tilde{d}_0)K}+\varepsilon[\exp\{(1+\tilde{d}_0)KL\}+O(\varepsilon)]\frac{M_0(T)}{(1+\tilde{d}_0)KT}<\frac{\eta}{4}.$$

Тогда

(23) $$\|x(pT)-\bar{x}(pT)\|<\eta/2,\quad p=0,\ 1,\dots,\ q,\quad q=[L/\varepsilon T].$$

На интервале $[(p-1)T, pT]$ имеем оценки

(24) $$\|\bar{x}(t)-\bar{x}((p-1)T)\|\leq\varepsilon\int_{(p-1)T}^{t}[\|X_0(\bar{x}(\theta))\|+\|I_0(\bar{x}(\theta))\|]d\theta\leq\varepsilon(1+d_0)MT,$$

(25) $$\|x(t)-x((p-1)T)\|=\|x_1(t,(p-1)T,x_{(p-1)T})+\varepsilon\sum_{i=0}^{s-1}I_i^{(p-1)}+O(\varepsilon^2)-x((p-1)T)\|$$

$$\leq\|\varepsilon\int_{(p-1)T}^{t}X(\theta,\ x_{(p-1)T},\ \int_0^{\theta}\varphi(\theta,\ s,\ x_{(p-1)T},\ \int_0^{s}f(\theta,\ s,\ \sigma,\ x_{(p-1)T},\ x_{(p-1)T})d\sigma)ds)d\theta$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{s-1}I_i^{(p-1)}+O(\varepsilon^2)\|\leq\varepsilon M(T+c)+O(\varepsilon^2),$$

где $x_{(p-1)T}=x((p-1)T)$, $s=\overline{1,\ d_p}$.

Очевидно, если ε достаточно мало ($\varepsilon<\hat{\hat{\varepsilon}}$), то для правой стороны неравенства (25) выполнено

$$\varepsilon M(T+c)+O(\varepsilon^2)<\varepsilon M(T+c)+\varepsilon Q, \tag{26}$$

где Q — некоторая положительная постоянная.

Из (23)—(26) видно, что если T достаточно большое и ε достаточно малое число,

$$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0=\min\Big(\mathcal{E}, \varepsilon_i^{(p-1)}, \bar{\varepsilon}_i^{(p-1)}, \tilde{\varepsilon}_{p-1}, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_{p-1}, \hat{\varepsilon}, \hat{\hat{\varepsilon}},$$

$$\frac{\eta}{4[M(T+c)+Q]}, \frac{\eta}{4(1+d_0)MT}, \quad i=\overline{1, d_p}, \quad p=\overline{1, q}\Big),$$

то на интервале $[(p-1)T, pT]$ будет справедлива оценка

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leq\|x(t)-x((p-1)T)\|$$

$$+\|x((p-1)T)-\bar{x}((p-1)T)\|+\|\bar{x}((p-1)T)-\bar{x}(t)\|<\eta/4+\eta/2+\eta/4=\eta.$$

Следовательно, при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ на всем интервале $0\leq t\leq L\varepsilon^{-1}$ выполнено неравенство

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<\eta.$$

Этим теорема 1 доказана.

Вопрос о качественного соответствия между точными решениями системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами и ее приближениями — решениями усредненной системы, выясняется следующей теоремой.

Предположим, что усредненная система (4) имеет изолированное положение равновесия $\bar{x}=x^0$:

$$X_0(x^0)+I_0(x^0)=0,$$

и что x^0 принадлежит области D вместо с некоторой своей окрестностью.

Обозначим далее для удобства через $x(t+\tau; \tau, x)$ значение решения $x(t)$ системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами в момент времени $t+\tau$, проходящее в момент времени τ через точки x, а через $\bar{x}(t; x)$ решение усредненной системы (4) с начальным условием $\bar{x}(0; x)=x(\tau; \tau, x)=x$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия 1—4 теоремы 1. Тогда, если положение равновесия $\bar{x}=x^0$ усредненной системы (4) асимптотически устойчиво и*

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}I_i(x)\leq\beta<0, \qquad \beta=\text{const}. \tag{27}$$

(*либо* $\partial t_i(x)/\partial x\equiv 0$, *если* σ_i — *гиперплоскость*), *для всех* $i=1, 2, \ldots$ *и всех* x *из некоторой* ϱ_0-*окрестности точки* x^0, *то существует такая* ϱ-*окрестность* D_ϱ ($\varrho\leq\varrho_0$) *точки* x^0 *и такое число* ε^0, *что при всех* $0<\varepsilon\leq\varepsilon^0$ *и всех* $x\in D_\varrho$ *решения* $x(t)$, $x(0)=x$ *системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсами равномерно ограничены при* $t\in(0, \infty)$.

Доказательство. Поскольку $\bar{x}=x^0$ является асимптотически устойчивым решением усредненной системы, то из этого и непрерывной зависимости решений от начальных условий следует существование такого $\varrho'=\varrho'(\varrho_0)$, что для всех $t\geq 0$

$$\|\bar{x}(t;\ x)-x^0\|\leq\varrho_0 \tag{28}$$

при $\|x-x^0\|\leq\varrho'$.

Неравенство (28) с учетом (27) показывает, что для решений $\bar{x}(t, x)$ при $x\in T_{\varrho'}=\{x:\|x-x^0\|\leq\varrho\}$ выполнено условие 5 теоремы 1 для всех $t>0$. Но тогда, в силу утверждения теоремы 1, можно указать такое число $\varepsilon^0=\varepsilon^0(\varrho, L)>0$, что при $\varepsilon\leq\varepsilon^0$, $t\in[0, L\varepsilon^{-1}]$ и некоторого ϱ ($\varrho\leq\min(\varrho_0, \varrho')$), выполнялось неравенство

$$\|x(t+\tau;\ \tau,\ x)-\bar{x}(t;\ x)\|\leq\varrho/2. \tag{29}$$

Выберем ϱ так, чтобы T_ϱ принадлежало области асимптотической устойчивости решения x^0, а L так, чтобы

$$\|\bar{x}(t;\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leq\varrho/2 \tag{30}$$

при $t\geq L\varepsilon^{-1}$.

Тогда неравенства (28)—(30) приводят к оценкам

$$\begin{aligned}\|x(t+\tau;\tau, x\in T_\varrho)-x^0\|&\leq\|x(t+\tau;\ \tau, x\in T_\varrho)-\bar{x}(t;\ x\in T_\varrho)\|\\&+\|\bar{x}(t;\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leq\varrho/2+\varrho_0\end{aligned} \tag{31}$$

при $t\in[0, L\varepsilon^{-1})$ и

$$\begin{aligned}\|x(L\varepsilon^{-1};0, x\in T_\varrho)-x^0\|&\leq\|x(L\varepsilon^{-1};0,\ x\in T_\varrho)-\bar{x}(L\varepsilon^{-1};\ x\in T_\varrho)\|\\&+\|\bar{x}(L\varepsilon^{-1};\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leq\varrho.\end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что

$$x(L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)\in T_\varrho. \tag{32}$$

Учитывая (32), а также то, что

$$x(t+\tau;\ 0,\ x)=x(t+\tau;\ \tau,\ x(\tau;\ 0,\ x)),$$

имеем

$$x(t+L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)=x(t+L\varepsilon^{-1};\ L\varepsilon^{-1},\ x(L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho))=x(t+L\varepsilon^{-1};\ L\varepsilon^{-1}, x'\in T_\varrho),$$

где $x'=x(L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)$.

Отсюда, с учетом (31) следует

$$\|x(t+L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leq\varrho/2+\varrho_0$$

при $t\in[0, L\varepsilon^{-1})$ и

$$\|x(2L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leq\varrho.$$

Последнее неравенство означает, что

$$x(2L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)\in T_\varrho.$$

Далее методом индукции получаем

$$\begin{gathered}\|x(t+kL\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leqq\varrho/2+\varrho_0,\\ \|x((k+1)L\varepsilon^{-1};\ 0,\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leqq\varrho\end{gathered}\tag{33}$$

при $t\in[0,\ L\varepsilon^{-1})$ и $k=0,\ 1,\ 2,\dots$

Неравенства (33) показывают, что

$$\|x(t;\ 0,\ x\in T_\varrho)-x^0\|\leqq\varrho/2+\varrho_0$$

при $t\in[0,\ \infty)$.

Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Самойленко. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. — В: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев, 1963.

2. А. М. Самойленко. К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию. *Украинский мат. ж.*, 19, 1967, № 5, 96—104.

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Высший машинно-элекротехнический институт имени В. И. Ленина, София

Поступила 8. 7. 1975

В переработанном виде 18. 6. 1980