PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ ОТЫСКАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

ГЕННАДИЙ М. ВАЙНИККО, НЕДЯЛКА Г. КАЗАКОВА

В работе исследуется сходимость одного естественного класса методов при отыскании периодических решений уравнений нейтрального типа вида $x'(t)=f(t, x_t, x'_t)$, где $f: R\times C([a, b], R^m)\times C([a, b], R^m)\to R^m$ непрерывный оператор, ω-периодичен по первому аргументу и удовлетворяет условию Липшица с константой $k<1$ по последнему аргументу. Здесь $x_t(s)=x(t+s)$ — функция, $a\leqq s\leqq b$, a и $b(a<b)$ — заданные числа.

Используется понятие вращения предельно компактных векторных полей и инвариантность вращения при аппроксимации таких полей. Приближаемые операторы не обязательно компактные.

1. Постановка задачи. Следуя [1], рассмотрим уравнение

$$x'(t)=f(t, x_t, x'_t), \tag{1}$$

где $f: R\times C([a, b], R^m)\times C([a, b], R^m)\to R^m$ непрерывный оператор, ω-периодичен по первому аргументу и удовлетворяет условию Липшица с константой $k<1$ по последнему аргументу. Здесь $x_t(s)=x(t+s)$ — функция, $a\leqq s\leqq b$, a и $b(a<b)$ — заданные числа. Ищутся ω-периодические решения уравнения (1).

Пусть C_ω — пространство непрерывных ω-периодических векторных функций $y: R\to R^m$ с обычной нормой

$$\| y \| = \max_{0\leqq t\leqq\omega} \| y(t) \|_{R^m}.$$

Для любой функции $y\in C_\omega$ обозначим среднее значение через $\mathfrak{M}(y)=\omega^{-1}\int_0^\omega y(s)ds$ и $(Jy)(t)=\int_0^t y(s)ds-t\mathfrak{M}(y)$.

Заменой $u=x(0)$, $y=x'$ задача о периодических решениях уравнения (1) сводится к системе $y(t)=f(t, u+(Jy)_t, y_t)$, $u=u-\mathfrak{M}(y)$, которую можно записать в виде операторного уравнения

$$z=Tz, \quad z=\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, \quad z\in E=R^m\times C_\omega. \tag{2}$$

Оператор T действует по формуле

$$T\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u-\mathfrak{M}(y) \\ f(t, u+(Jy)_t, y_t) \end{pmatrix}.$$

Пусть множества $U\subset R^m$, $M\subset C_\omega$ открыты и ограничены. При наложенных на f ограничениях оператор $T: \bar{U}\times\bar{M}\to R^m\times C_\omega$ непрерывен и уплотняющий по мере некомпактности Хаусдорфа χ. Допустим, что T не имеет на границе области $\Omega=U\times M\subset E$ неподвижных точек. Тогда определено вращение $\gamma(I-T;\ \partial\Omega)$ [1]. Предполагается, что $\gamma(I-T;\ \partial\Omega)\neq 0$. В различных частных случаях можно указать эффективные условия выполнения последнего предположения. Так, например, $\gamma(I-T;\ \partial\Omega)=1$, если T переводит Ω в себя.

2. Конечно-разностный метод. Обозначим $h=\omega/n$, где n — натуральное число. Введем пространство $C_{\omega,h}$ ω-периодических сеточных векторных функций y_h: $R_h\to R^m$ с нормой

$$\|y_h\|=\max_{t\in[0,\ \omega]\cap R_h}\|y_h(t)\|_{R^m}.$$

Здесь R_h — сеточное пространство R, состоящее из точек вида jh, $j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$

В отличие от функций $y\in C_\omega$ функции $y_h\in C_{\omega,h}$ определены лишь в узлах сетки, т. е. их можно при желании отождествить с ω-периодическими векторами.

Обозначим через ∂_h простейшую разностную производную

$$(\partial_h x_h)(t)=[x_h(t+h)-x_h(t)]/h,\ t\in R_h,\ x_h\in C_{\omega,h}.$$

Задаче (1) сопоставим разностную задачу

$$(\partial_h x_h)(t)=f(t,(\widehat{x}_h)_t,(\widehat{\partial_h x_h})_t),\ t\in R_h. \tag{3}$$

Здесь $\widehat{x}_h=\pi_h x_h$ — ломаная, проходящая через точки $(t,x_h(t))$, $t\in R_h$, и линейная на каждом из отрезков $[t,t+h]$, $t\in R_h$.

Ищутся ω-периодические решения $x_h\in C_{\omega,h}$ уравнения (3).

Введем обозначения

$$\mathfrak{M}_h(y_h)=\omega^{-1}\Sigma h y_h(s),\ s\in(0,\omega]\cap R_h,$$

$$(J_h y_h)(t)=\Sigma h y_h(s)-t\mathfrak{M}_h(y_h),\ s\in(0,t]\cap R_h,\ t\in R_h.$$

Нетрудно видеть, что $J_h y_h\in C_{\omega,h}$ для $y_h\in C_{\omega,h}$.

Заменой $u_h=x_h(0)$, $y_h=\partial_h x_h$ задача о ω-периодических решениях уравнения (3) сводится к системе

$$y_h(t)=f(t,u_h+(\widehat{J_h y_h})_t,(\widehat{y}_h)_t),\ t\in R_h,\ u_h=u_h-\mathfrak{M}_h(y_h),$$

которая равносильна операторному уравнению

$$z_h=T_h z_h,\ z_h=\begin{pmatrix}u_h\\ y_h\end{pmatrix},\quad z_h\in E_h=R^m\times C_{\omega,h}.$$

Оператор T_h действует по формуле

$$T_h\begin{pmatrix}u_h\\ y_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_h-\mathfrak{M}_h(y_h)\\ f(t,u_h+(\widehat{J_h y_h})_t,(\widehat{y}_h)_t)\end{pmatrix}.$$

3. Формулировка основного результата.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия пункта 1. Тогда уравнение* (1) *имеет хотя бы одно ω-периодическое решение $x(t)$, такое, что $x(0)\in U$, $x'\in M$. При достаточно больших n уравнение* (3) *имеет хотя* *бы одно ω-периодическое решение x_h, такое, что $x_h(0)\in U$, $\widehat{\partial_h x_h}\in M$. Если $\{x_h\}_{n\in N}$ — любая последовательность ω-периодических решений уравнений* (3), *то последовательности $\{\widehat{x_h}\}$ и $\{\widehat{\partial_h x_h}\}$ относительно компактны в C_ω и их предельными точками являются соответственно x и x', где x — ω-периодические решения уравнения* (1). *В частности, если множествами U, M выделяется единственное ω-периодическое решение x уравнения* (1), *то $\|\widehat{x_h}-x\|\to 0$, $\|\widehat{\partial_h x_h}-x'\|\to 0$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. Существование ω-периодических решений x уравнения (1) при сделанных предположениях известно из [1]. Доказательство существования ω-периодических решений x_h уравнений (3), компактность последовательностей $\{\widehat{x_h}\}$ и $\{\widehat{\partial_h x_h}\}$ и утверждение теоремы об их предельных точках основывается на следующей теореме:

Пусть E и $E_n(n\in N=\{1, 2, \ldots\})$ — произвольные вещественные банаховы пространства, а $P=(p_n)_{n\in N}$ — система линейных операторов $p_n\colon E\to E_n$ и таких, что $\|p_n z\|\to\|z\|\,(n\in N)\;\forall\, z\in E$.

Рассмотрим операторы $T\colon \bar\Omega\to E$ и $T_n\colon \bar\Omega_n\to E_n$, где $\Omega\subset E$ и $\Omega_n\subset E_n$ ограниченные открытые множества с границами $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_n$ и замыканиями $\bar\Omega$ и $\bar\Omega_n$ соответственно:

$$\begin{array}{ccc} E & \supset\bar\Omega \xrightarrow{T} & E\\ p_n\downarrow & & \downarrow p_n\\ E_n & \supset\bar\Omega_n \xrightarrow{T_n} & E_n. \end{array}$$

Множество $\Sigma\subset E$ называется фундаментальным для T, если выполнены следующие условия 1)—3):

1) Σ выпукло, компактно и содержит все неподвижные точки T;

2) T непрерывен на $\bar\Omega\cap\Sigma$ и $T(\bar\Omega\cap\Sigma)\subseteq\Sigma$;

3) $x_0\in\bar\Omega$, $x_0\notin\Sigma\Longrightarrow x_0\notin \operatorname{co}\{Tx_0, \Sigma\}$(co — выпуклая оболочка). Пустое множество $\varnothing$ считаем фундаментальным для T, если T не имеет в $\bar\Omega$ неподвижных точек.

Последовательность $(z_n)_{n\in N'\subset N}$ с $z_n\in E_n$ называется P-сходящейся (или дискретно сходящейся) к $z\in E$, если $\|z_n-p_n z\|\to 0(n\in N')$. Обозначаем $z_n\to z(n\in N')$. Последовательность $(z_n)_{n\in N'}$ с $z_n\in E_n$ называется P-компактной (или дискретно компактной), если для любого бесконечного множества $N''\subset N'$ существует бесконечное подмножество $N'''\subset N''$ и такое, что подпоследовательность $(z_n)_{n\in N'''}$ P-сходится к некоторому $z\in E$. Подробнее об этих понятиях можно найти, например, в [2].

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор $T\colon\bar\Omega\to E$ имеет фундаментальное множество Σ и не имеет неподвижных точек на границе $\partial\Omega$, причем вращение $\gamma(\imath-T;\partial\Omega)\neq 0$;*

2) *множества Ω и Ω_n согласованы:*

$$z\in\bar\Omega\cap\Sigma\Longrightarrow\exists\, z_n\in\bar\Omega_n,\ z_n\to z\,(n\in N),$$

$$z_n\in\bar\Omega_n,\ z_n\to z\,(n\in N'\subseteq N)\Longrightarrow z\in\bar\Omega,$$

$$z_n\in\partial\Omega_n,\ z_n\to z\,(n\in N'\subseteq N)\Longrightarrow z\in\partial\Omega;$$

3) *операторы* $T_n\colon \bar{\Omega}_n \to E_n$ *вполне непрерывны, равномерно ограничены* (*т. е.* $\sup\{\|T_n z_n\|\colon z_n \in \Omega_n\} \le \mathrm{const}\,(n \in N)$) *и сходятся к* T:

$$z_n \in \bar{\Omega}_n,\ z_n \to z \Longrightarrow T_n z_n \to Tz;$$

4) *при* $0 < \lambda \le 1$ *выполнено следующее условие регулярности*: $z_n \in \bar{\Omega}_n$, $(z_n - \lambda T_n z_n)_{n \in N'}$ *P-компактна* $\Longrightarrow (z_n)_{n \in N'}$ *P-компактна.*

Тогда при почти всех n оператор T_n имеет хотя бы одну неподвижную точку z_n^* в $\bar{\Omega}_n$. Каждая последовательность (z_n^*) неподвижных точек P-компактна и ее предельные точки являются неподвижными точками оператора T. В частности, $z_n^* \to z^*$, если T имеет в $\bar{\Omega}$ лишь одну неподвижную точку z^*.

Условие (1) теоремы 2 выполнено в силу предположения п. 1 (уплотнения оператора T и $\gamma(I-T);\ \partial\Omega) \neq 0$).

Покажем сначала согласованость областей Ω и Ω_n. Положим (см. 1), 2))

$$E = R^m \times C_\omega, \quad E_h = R^m \times C_{\omega,\,h}, \quad \Omega = U \times M, \quad \Omega_h = U \times M_h,$$

$$M_h = \{x_h \in C_{\omega,\,h} \mid \widehat{x}_h \in M\}.$$

Напомним, что U и M — открытые ограниченные множества в R^m и C_ω соответственно; величины n и h всюду связаны соотношением $h = \omega/n$. Операторы $p_h\colon E \to E_n$ определяем соотношением

$$p_h\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ r_h y \end{pmatrix}, \quad u \in R^m, \quad y \in C_\omega,$$

где $r_h y$ — сужение функции y на R_h. Заметим, что в данном случае дискретная сходимость $y_h \to y$ равносильна сходимости $\|\widehat{y}_h - y\| \to 0$; аналогично, дискретная компактность последовательности (y_h) равносильна относительной компактности $(\widehat{y}_h)$ в C_ω.

Ясно, что согласованность областей Ω и Ω_h (условие 2) теоремы 2) сводится к аналогичному условию для вторых компонент:

$$y \in \bar{M} \Longrightarrow \exists\, y_h \in \bar{M}_h, \quad y_h \to y\ (n \in N'); \tag{4}$$

$$y_h \in \bar{M}_h, \quad y_h \to y \Longrightarrow y \in \bar{M}; \tag{5}$$

$$y_h \in \partial M_h, \quad y_h \to y \Longrightarrow y \in \partial M. \tag{6}$$

Докажем (4). Пусть $y \in M$. Тогда при достаточно больших n $Q_h y \in M$, где Q_h — оператор, ставящий функции $y \in C_\omega$ в соответствии интерполирующую ломаную $Q_h y$, $(Q_h y)(t) = y(t)$, $t \in R_h$.

В силу определения множества M_h имеем, что $r_h y \in M_h (n \in N)$. Очевидно имеет место дискретная сходимость $r_h y \to y (n \in N)$. Итак, аналог условия (4) доказан для M и M_h. Отсюда просто следует (4).

Докажем (5). Пусть $y_h \in \bar{M}_h$ и $y_h \to y$. Следовательно, выполнено $\|\widehat{y}_h - y\| \to 0$, а так как $\widehat{y}_h \in \bar{M}$, то и $y \in \bar{M}$.

Докажем (6). Пусть $y_h \in \partial M_h$, $y_h \to y$. В силу (5) $y \in \bar{M}$. Допустим, что $y \notin \partial M$, т. е. $y \in M$. Ввиду открытости M при достаточно больших n имеем также $\widehat{y}_h \in M$, т. е. $y_h \in M_h$, вопреки условию $y_h \in \partial M_h$.

Докажем сходимость операторов T_h (проверка условия 3) теоремы 2). Ввиду конечномерности пространств E_h операторы T_h вполне непрерывны, а их равномерная ограниченность вытекает из свойств оператора f.

Ясно, что для сходимости T_h к T достаточно доказать сходимость вторых компонент операторов: $y_h \in \bar{\Omega}_h$, $u_h \to u$, $y_h \to y \Longrightarrow F_h z_h \to Fz$, где

$$z = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, \quad z_h = \begin{pmatrix} u_h \\ y_h \end{pmatrix};$$

$$(Fz)(t) = f(t, u + (Jy)_t, y_t), \quad t \in R; \ (F_h z_h)(t) = f(t, u_h + (\widehat{J_h y_h}, (\hat{y}_h)_t), \ t \in R_h.$$

Ввиду непрерывности оператора f для этого достаточно показать, что $y_h \to y \Longrightarrow J_h y_h \to J_y$ или, что то же самое, $\| \hat{y}_h - y \| \to 0 \Longrightarrow \| \widehat{J_h y_h} - Jy \| \to 0$.

Для этого в силу ограниченности оператора J достаточно установить оценку

$$\| \widehat{J_h y_h} - J \hat{y}_h \| \leqq 3 \| y_h \| h. \tag{7}$$

Оценим сначала разность $\| \widehat{J_h y_h} - J \hat{y}_h \|$ в узлах $t \in R_h$. Имеем

$$(\widehat{J_h y_h} - J \hat{y}_h)(t) = h \sum_{s \in (0, t] \cap R_h} y_h(s) - t\omega^{-1} h \sum_{s \in (0, \omega] \cap R_h} y_h(s)$$

$$- \int_0^t \hat{y}_h(s) ds + t\omega^{-1} \int_0^\omega \hat{y}_h(s) ds.$$

Так как

$$\int_0^t \hat{y}_h(s) ds = h \left\{ \frac{1}{2} y_h(0) + y_h(h) + y_h(2h) + \cdots + y_h(t-h) + \frac{1}{2} y_h(t) \right\},$$

то

$$\int_0^t \hat{y}_h(s) ds - h \sum_{s \in (0, t] \cap R_h} y_h(s) = h \left\{ \frac{1}{2} y_h(0) - \frac{1}{2} y_h(t) \right\}$$

и, следовательно,

$$\max_{t \in R_h} \| ((\widehat{J_h y_h}) - (J \hat{y}_h))(t) \|_{R^m} \leqq \| y_h \| h. \tag{8}$$

В случае, когда $t \notin R_h$, т. е. $jh < t < (j+1)h$ ($j \in \{1, 2, \ldots, n\}$), имеем в силу определения функции $(\hat{y}_h)(t) = \lambda y_h(jh) + (1-\lambda) y_h((j+1)h)$, $\lambda \in (0, 1)$, и тогда

$$(\widehat{J_h y_h})(t) - (J \hat{y}_h)(t) = \lambda (J_h y_h)(jh) + (1-\lambda)(J_h y_h)((j+1)h) - \lambda (J \hat{y}_h)(jh)$$

$$- (1-\lambda)(J \hat{y}_h)((j+1)h) + \lambda \{(J \hat{y}_h)(jh) - (J \hat{y}_h)(t)\} + (1-\lambda)\{(J \hat{y}_h)((j+1)h)$$

$$- (J \hat{y}_h)(t)\} = \lambda \{(J_h y_h)(jh) - (J \hat{y}_h)(jh)\} + (1-\lambda)\{(J_h y_h)((j+1)h)$$

$$- (J \hat{y}_h)((j+1)h)\} + \lambda \{(J \hat{y}_h)(jh) - (J \hat{y}_h)(t)\} + (1-\lambda)\{(J \hat{y}_h)((j+1)h) - (J \hat{y}_h)(t)\},$$

откуда в силу (8) и равенства

$$(J \hat{y}_h)(jh) - (J \hat{y}_h)(t) = \int_t^{jh} \hat{y}_h(s) ds - \omega^{-1}(jh - t) \int_0^\omega \hat{y}_h(s) ds$$

следует (7).

Наконец, осталось проверить условие регулярности. Мы покажем, что в случае некомпактной последовательности $(\widehat{y}_h)$ имеет место неравенство

(9) $$\chi((\widehat{F_h z_h}))<\chi((\widehat{y}_h)).$$

Отсюда непосредственно следует условие регулярности, ибо из дискретной компактности последовательности $(y_h-\lambda F_h z_h)$ вытекает равенство $\chi((\widehat{y}_h))=\lambda\chi((\widehat{F_h z_h}))$.

Заметим, прежде всего, что для любой последовательности $(y_n)\subset C_\omega$ имеем

(10) $$\chi((Q_h y_n))\leqq\chi((y_n)).$$

Действительно, если $\{y^1, y^2, \ldots, y^k\}$ — конечная ε-сеть для (y_n), то $\{Q_h y^1, Q_h y^2, \ldots, Q_h y^k\}$ — компактная ε-сеть для $(Q_h y_n)$.

Из (7) и (10) в силу непрерывности и свойства уплотнения оператора f (оператора T) следует (9)

$$\chi((\widehat{F_h z_h}))=\chi((\pi_h f(t, u_h+(\widehat{J_h y_h})_t, (\widehat{y}_h)_t)))$$

$$=\chi((\pi_h f(t, u_h+(J\widehat{y}_h)_t, (\widehat{y}_h)_t)))=\chi((Q_h f(t, u_h+(J\widehat{y}_h)_t, (\widehat{y}_h)_t)))$$

$$\leqq\chi((f(t, u_h+(J\widehat{y}_h)_t, (\widehat{y}_h)_t)))<\chi((\widehat{y}_h)).$$

Итак, для T и T_h выполняются все условия теоремы 2. Отсюда следует теорема 1. Заметим, что из $u_h=x_h(0)\to u$, $y_h=\partial_h x_h\to y$ следует, что $x_h\to x$, $x'=y$.

4. Некоторые частные задачи. Рассмотрим одномерный случай $m=1$. Пусть оператор f: $R\times C([a, b], R)\times C([a, b], R)\to R$ имеет вид

$$f(t, x, y)=g(t, \int_a^b x(s)d\mu(s), \int_a^b x'(s)d\nu(s))\,;\quad x, y\in C([a, b], R),$$

где μ и ν — положительные меры, нормированные условием $\int_a^b d\mu(s)=1$, $\int_a^b d\nu(s)=1$ (например, это могут быть меры Дирака, т. е. $\int_a^b x(s)d\mu(s)=x(s_1)$, $\int_a^b y(s)d\nu(s)=y(s_2)$ с некоторыми $s_1, s_2\in[a, b]$), а $g(t, \xi, \eta)$ — непрерывная функция из $R\times R\times R$ в R, ω-периодическая по первому аргументу и удовлетворяющая условию Липшица с постоянной $k<1$ по третьему аргументу. Тем самым выполнены условия, введенные в начале п. 1; уравнение (1) в данном случае имеет вид

(11) $$x'(t)=g(t, \int_a^b x(t+s)d\mu(s), \int_a^b x'(t+s)d\nu(s))$$

(в случае мер Дирака: $x'(t)=g(t, x(t+s_1), x'(t+s_2))$).

Введем еще два условия на функцию g:

(12) $$|g(t, \xi, \eta)|<c$$

для любого $(t, \xi, \eta)\in R^3$, $c=\text{const}$;

(13) $$g(t, \xi, \eta)$$

отлична от нуля и по знаку совпадает с ξ при

$$t\in R,\ |\xi|\geqq l,\ |\eta|\leqq c\ (l=\text{const}).$$

Положим $\Omega=\{z=\binom{u}{y}\in E=R\times C_\omega/|u|<l+\omega c, \|y\|_{C_\omega}<c\}$ и покажем, что оператор

$$T\binom{u}{y}=\binom{u-\mathfrak{M}(y)}{f(t, u+(Jy)_t, y_t)}$$

на $\partial\Omega$ не имеет неподвижных точек, $\gamma(I-T; \partial\Omega)=1$. (Тем самым все условия п. 1 будут выполнены.) Для этого достаточно, чтобы не существовало точки $z\in\partial\Omega$ и числа $\lambda\geqq 1$, таких, что $Tz=\lambda z$. (Здесь существенно, что ноль — внутренняя точка Ω; приведенный признак хорошо известен для вполне непрерывных операторов; для уплотняющих операторов этот признак распространен в [3].) Рассуждая от противного, допустим, что такие $z\in\partial\Omega$ и $\lambda\geqq 1$ найдутся:

$$u-\mathfrak{M}(y)=\lambda u \tag{14}$$

$$f(t, u+(Jy)_t, y_t)=\lambda y. \tag{15}$$

Условие $z\in\partial\Omega$ означает, что либо $|u|\leqq l+\omega c$, $\|y\|_{C_\omega}=c$, либо $|u|=l+\omega c$, $\|y\|_{C_\omega}\leqq c$. Первый случай отпадает сразу: из (15) и (12) имеем $\|y\|_{C_\omega}<c$. Во втором случае мы покажем, что

$$\mathfrak{M}(y)\neq 0, \quad \operatorname{sign}\mathfrak{M}(y)=\operatorname{sign} u, \tag{16}$$

поэтому нарушается (14). Действительно, при $0\leqq t\leqq\omega$ (а, значит, при всех $t\in R$) имеем

$$|(Jy)(t)|=\left|\int_0^t y(s)ds-t\mathfrak{M}(y)\right|=\left|\int_0^t\{y(s)-\mathfrak{M}(y)\}ds\right|$$

$$\leqq\int_0^\omega|y(s)-\mathfrak{M}(y)|ds\leqq\sqrt{\omega}\left(\int_0^\omega[y(s)-\mathfrak{M}(y)]^2ds\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{\omega}\,\|y-\mathfrak{M}(y)\|_{L_2(0,\omega)}\leqq\omega\|y\|_{C_\omega}$$

($\mathfrak{M}(y)$ является ортогональной проекцией y на одномерное подпространство в L_2 с базисной функцией 1), $|u+(Jy)_t|\geqq|u|-|(Jy)_t|\geqq(l+\omega c)-\omega c=l$.

Из (15) имеем

$$\mathfrak{M}(y)=\lambda^{-1}\mathfrak{M}(f(t, u+(Jy)_t, y_t))$$

$$=\lambda^{-1}\omega^{-1}\int_0^\omega g\left(t, \int_a^b[u+(Jy)(t+s)]d\mu(s), \int_a^b y(t+s)d\nu(s)\right)dt.$$

Выражение $\int_a^b[u+(Jy)(t+s)]d\mu(s)$ по абсолютной величине больше или равно l, его знак совпадает с знаком u. Поэтому в силу условия (13) подынтегральная функция $g(t, \int_a^b[u+(Jy)(t+s)]d\mu(s), \int_a^b y(t+s)d\nu(s))$ отлична от нуля и имеет тот же знак, что и u.

Тем самым (16) доказано.

Рассмотрим конкретный пример функции g:

$$g(t, \xi, \eta,)=\alpha(\varphi_0(t)+\varphi_1(t)\xi+\varphi_2(t)\eta)/(\psi_0(t)+\psi_1(t)\xi^2+\psi_2(t)\eta^2),$$

где $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)\,(i=0, 1, 2)$ — непрерывные ω-периодические функции; α — положительный параметр, такой, чтобы $|\partial g/\partial\eta| < 1$ при любом $(t, \xi, \eta) \in R^3$ (легче видеть, что это достижимо). Все наложенные в предыдущем пункте условия тогда выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Садовский. Предельно компактные и уплотняющие операторы. *Успехи мат. наук*, **27**, 1972, № 1, 81—146.
2. Г. М. Вайникко. Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
3. А. С. Потапов. О некоторых классах нелинейных операторов. Диссертация, Воронеж, 1975.

Тартурский государственный университет, ЭССР, г. Тарту ул. Юликооли 18

Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Поступила 20. 8. 1976