PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПФАФФА

ЙОРДАН Б. ТАБОВ

В настоящей работе рассматриваются системы Пфаффа вида

$$\omega^1(dx)=0,\ \omega^2(dx)=0,\ \dots,\ \omega^{n-4}(dx)=0,$$

в R^n $(n\geqq 6)$ в инволюции по отношению к двумерным распределениям. Среди них выделяется класс систем, называемых гиперболическими, и доказывается, что у таких систем имеется семейство двумерных интегральных поверхностей.

В теории Пфаффовых систем центральное место занимает теория Э. Картана, которая для случая систем с аналитическими коэффициентами решает классическую проблему Пфаффа. Однако в общем случае, когда коэффициенты системы не являются аналитическими, а только достаточно гладкими функциями, проблема Пфаффа не решена до сих пор. Тем не менее существует немало результатов, относящихся к некоторым частным видам Пфаффовых систем и к частичному решению общей проблемы Пфаффа и в случае систем с неаналитическими коэффициентами. Такими результатами являются, например, теория одного уравнения Пфаффа, известная „теорема Фробениуса“ и др.

Развитая Э. Картаном теория Пфаффовых систем основана на применении теоремы Коши — Ковалевской о существовании решения у системы дифференциальных уравнений с частными производными. Кроме этой теоремы, в теории дифференциальных уравнений имеется еще одна общая теорема о существовании решения для таких систем, относящаяся уже к неаналитическим функциям. Это — теорема И. Г. Петровского о гиперболических системах.

Здесь излагается попытка решить проблему Пфаффа для некоторых Пфаффовых систем специального вида — с числом уравнений, зависящим от размерности пространства, и обладающих некоторыми дополнительными свойствами — на основе теоремы Петровского, для случая неаналитических коэффициентов.

Естественно, что сами системы Пфаффа, решение которых приводится к гиперболическим системам дифференциальных уравнений с частными производными, будут названы гиперболическими.

1. Основные определения и постановка задачи. Всякая система Пфаффа

$$\omega^i(dx)=0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\dots,\ r, \tag{1.1}$$

ранга r в R^n задает $n-r$-мерное распределение $\theta=\theta(x)$, т. е. $n-r$-мерную плоскость $\theta(x)$ в каждой точке x.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 3, 1981, с. 28—46.

Если существует семейство $n-r$-мерных поверхностей $\{X(x)\}$, такое, что в любой точке x_0 касательная плоскость $E(x_0)$ к поверхности $X(x)$ совпадает с $\theta(x_0)$, система (1.1) называется вполне интегрируемой. Необходимые и достаточные условия для полной интегрируемости даются теоремой Фробениуса (см. [1, гл. III, § 26] или [2, гл. VI]).

Если система (1.1) не является вполне интегрируемой, можно поставить вопрос: как определить максимальное число m, для которого существует семейство m-мерных поверхностей $\{X_m(x)\}$, такое, что в любой точке x_0 касательная плоскость $E_m(x_0)$ к соответствующей поверхности $X_m(x)$ содержится в $\theta(x)$? Этот вопрос составляет содержание так называемой „проблемы Пфаффа". Как и вопрос о существовании решений для обыкновенных дифференциальных уравнений, эта проблема имеет локальный характер.

На основе теоремы Фробениуса можно придать проблеме Пфаффа более строгую и удобную для наших целей форму. Мы воспользуемся тем, что совокупность касательных плоскостей $\{E_m(x)\}$ к семейству поверхностей $\{X_m(x)\}$ образует инволютивное распределение, и, наоборот, если некоторое распределение $\{E_m(x)\}$ инволютивно, то имеется семейство поверхностей $\{X_m(x)\}$, касательные плоскости к которым совпадают с плоскостями распределения $\{E_m(x)\}$. Таким образом, вопрос о существовании семейства поверхностей $\{X_m(x)\}$ можно заменить эквивалентным вопросом о существовании инволютивного распределения $\{E_m(x)\}$.

Определение. *Распределение $\theta'(x)$ называется разрешающим для системы* (1.1) *если $\theta'(x)$ инволютивно и в каждой точке x выполняется соотношение $\theta'(x)\subset\theta(x)$.*

В терминах разрешающих распределений проблема Пфаффа для системы (1.1) формулируется следующим образом: определить максимальное число m, для которого в окрестности данной точки x_0 существует m-мерное разрешающее для системы (1.1) распределение.

Напомним, что характеристической системой системы (1.1) называется следующая система:

$$\omega^i(\xi)=0,\ \partial\omega^i(\xi_j,\ \xi)=0,\quad i=1,\ 2,\dots,r,\quad j=1,2,\dots,n-r,$$

где ξ — неизвестное векторное поле, а $\xi_1,\ \xi_2,\dots,\xi_{n-r}$ — произвольный набор векторных полей, образующих базис подпространства $\theta(x)$ в каждой точке x.

Характеристическим вектором системы (1.1) в точке x называется всякий вектор ξ, удовлетворяющий взятой в точке x характеристической системе системы (1.1).

Мы будем предполагать в дальнейшем, что система (1.1) не имеет ненулевых характеристических векторов ни в одной точке своей области определения. Это предположение оправдывается тем, что, если у системы (1.1) имеется в некоторой окрестности U данной точки x_0 ненулевое характеристическое поле, то существует окрестность V точки x_0 и система координат в V, так что в этой системе координат в записи системы (1.1) одна из координат переменной точки x не участвует (см., например, [1, стр. 117]), т. е. по существу в V система (1.1) сводится к системе в пространстве размерности $n-1$. Таким образом, систему, у которой есть ненулевое характеристическое поле, локально можно упростить. Процесс упрощения или „устранения" ненулевых характеристических полей можно продолжать до тех пор, пока не получится система без таких полей; поэтому можно без ограничения общности предполагать, что система (1.1) не имеет ненулевых характеристических векторных полей; мы требуем выполнения более сильного условия — чтобы система (1.1) не имела даже ненулевых характеристических векторов.

Основным объектом наших дальнейших рассмотрений является следующая система Пфаффа (частный случай системы (1.1) при $r=n-4$):

$$\omega^1(dx)=0,\ \omega^2(dx)=0, \ldots, \omega^{n-4}(dx)=0, \tag{1.2}$$

из $n-4$ независимых уравнений с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, заданная в некоторой области $D \subset R^n$ $(n \geqq 6)$. Ей соответствует 4-мерное дважды непрерывно дифференцируемое распределение $\theta(x)$, которое является линейной оболочкой всех векторных полей, удовлетворяющих системе (1.2).

В дальнейшем мы не будем особо оговаривать дифференцируемость рассматриваемых объектов, если на то нет особых причин, предполагая, что они обладают достаточным количеством производных.

Скажем, что точка $y \in D$ является особой точкой для системы (1.2), если существуют три линейно-независимых вектора ξ_1, ξ_2 и ξ_3, такие, что в точке y выполнены равенства

$$\omega^i(\xi_j)=0,\ \partial\omega^i(\xi_j,\ \xi_k)=0, \quad i=1,\ 2, \ldots, n-4,\ j, \quad k=1,\ 2,\ 3.$$

Мы будем предполагать, что в области D нет особых для системы (1.2) точек. Свойства системы (1.2) в области из особых точек будут рассмотрены позднее в п. 7.

Предполагаем также, что система (1.2) не имеет ненулевых характеристических векторов.

Скажем, что система (1.2) находится в инволюции по отношению к двумерным распределениям или что система (1.2) обладает свойством И2, если для любого поля $\xi(x) \in \theta(x)$ ранг системы

$$\omega^i(\eta)=0,\ \partial\omega^i(\xi,\ \eta)=0, \quad i=1,\ 2, \ldots, n-4$$

(η — неизвестное векторное поле) не меньше 2.

Если система (1.2) с аналитическими коэффициентами обладает свойством И2, из теории Э. Картана вытекает (см., например, [1, гл. XI]), что у нее в окрестности данной точки x_0 имеется двумерное разрешающее распределение. По аналогии с теорией Картана и с целью получить аналогичный результат мы будем предполагать, что система (1.2) обладает свойством И2 в D.

Зафиксируем произвольную точку $y \in D$ и рассмотрим билинейную кососимметрическую форму $\partial\omega^1(y;\ *,\ *)$. Через $\Omega_1(y)$ будем обозначать линейный кососимметрический оператор в подпространстве $\theta(y)$, соответствующий сужению $\partial\omega^1(y;\ *,\ *)$ на подпространство $\theta(y)$. Этот оператор определяется однозначно соотношением

$$(\Omega_1(y)\xi,\ \eta)=\partial\omega^1(y;\ \xi,\ \eta)$$

для любых $\xi \in \theta(y)$, $\eta \in \theta(y)$. При этом считаем, что скалярное произведение в подпространстве $\theta(y)$ индуцируется скалярным произведением пространства R^n, порожденным исходной системой координат, чьи единичные координатные векторы принимаем за ортонормированный базис.

Аналогично получаются и операторы $\Omega_i(y)$ $(i=1,\ 2, \ldots, n-4)$.

Пусть a — вектор $n-4$-мерного арифметического пространства A^{n-4} с координатами $a^1, a^2, \dots, a^{n-4}$. Рассмотрим оператор

$$\Omega_a(y)=\sum_{i=1}^{n-4} a^i \Omega_i(y).$$

Всюду в дальнейшем через $E_a(y)$ будем обозначать ядро оператора $\Omega_a(y)$.

Определение. *Скажем, что вектор $a \in A^{n-4}$ является правильным для системы* (1.2) *в точке y, если* $\det \Omega_a(y)=0$.

Определение. *Скажем, что система* (1.2) *без ненулевых характеристических векторов и особых точек в D является гиперболической в точке $y \in D$, если у нее в точке y есть $n-4$ линейно независимых правильных векторов.*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. *Если система* (1.2) *обладает свойством И2 в окрестности точки x_0 и является гиперболической в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки система* (1.2) *имеет разрешающее распределение размерности* 2.

Эта теорема будет доказана позднее, в п. 6, а перед этим в следующем п. 2 рассмотрим подробно частный случай системы (1.2), когда $R^n=R^6$ и сама система (1.2) состоит из двух уравнений, и докажем модификацию теоремы 1.1 для этого случая.

2. Гиперболические системы Пфаффа из двух уравнений в R^6. Системы Пфаффа из двух уравнений в R^6 занимают особое место среди всех систем Пфаффа, потому что они являются простейшими системами, для которых проблема Пфаффа не решена для случая неаналитических коэффициентов.

Ответ на вопрос, когда у таких систем есть разрешающее распределение размерности четыре, дает теорема Фробениуса; необходимые и достаточные условия для существования 3-мерных разрешающих распределений имеются в работе [3]; наконец, одномерные разрешающие распределения существуют всегда.

Таким образом, для полного решения проблемы Пфаффа для таких систем нужно найти необходимые и достаточные условия для существования двумерного разрешающего распределения. Мы докажем, что у гиперболических систем этого вида такие распределения всегда есть. Отметим, что аналогичный результат имеет место в случае систем с аналитическими коэффициентами, без требования о гиперболичности.

Итак, рассматриваем систему

$$\begin{aligned} \omega^1(dx) &\equiv \omega_1^1(x)dx^1+\omega_2^1(x)dx^2+\dots+\omega_6^1(x)dx^6=0, \\ \omega^2(dx) &\equiv \omega_1^2(x)dx^1+\omega_2^2(x)dx^2+\dots+\omega_6^2(x)dx^6=0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

заданую в некоторой области $D\subset R^6$ и не имеющую ненулевых характеристических векторов.

Тривиальная проверка убеждает нас в том, что система (2.1) обладает свойством И2.

Рассмотрим подробнее условия для гиперболичности системы (2.1) в некоторой произвольной фиксированной точке $y \in D$. Для этого мы должны найти, при каких условиях она имеет два линейно-независимых правильных вектора в точке y.

Лемма 2.1. *Существует вектор $c \in A^2$ с координатами $\{c^1, c^2\}$, такой, что оператор $\Omega_c(y) = c^1\Omega_1(y) + c^2\Omega_2(y)$ невырожден, т. е.* $\det \Omega_c(y) \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что для всех $a \in A^2$ оператор $\Omega_a(y)$ вырожден. Тогда это должно иметь место, в частности, при $a = \{1, 0\}$ и $a = \{0, 1\}$, а это означает, что операторы $\Omega_1(y)$ и $\Omega_2(y)$ вырождены. Рассмотрим ядра $E_1(y)$ и $E_2(y)$ операторов $\Omega_1(y)$ и $\Omega_2(y)$. Так как эти операторы действуют в пространстве $\theta(y)$ размерности 4 и являются кососимметрическими, то размерность каждого из подпространств $E_1 = E_1(y)$ и $E_2 = E_2(y)$ не меньше 2; с другой стороны, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, потому что каждый вектор из $E_1 \cap E_2$ является характеристическим для (2.1), а по условию система (2.1) не имеет ненулевых характеристических векторов. Следовательно, в силу того, что $E_1 \subset \theta(y)$ и $E_2 \subset \theta(y)$ получаем, что $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$.

Так как $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, размерность линейной оболочки E_1 и E_2 равна $\dim E_1 + \dim E_2 = 4$, следовательно, по соображениям размерности совпадает с $\theta(y)$; стало быть, любой вектор ξ из $\theta(y)$ разлагается в виде суммы $\xi = \xi' + \xi''$, где $\xi' \in E_1$, $\xi'' \in E_2$.

Рассмотрим оператор $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, соответствующий вектору из A^2 с координатами $\{1, 1\}$. По предположению он должен быть вырожденным, следовательно, существует ненулевой вектор $\eta \in \theta(y)$, такой, что $\Omega y = 0$. Учитывая, что $\eta = \eta' + \eta''$, где $\eta' \in E_1$, $\eta'' \in E_2$, получаем

$$0 = \Omega\eta = (\Omega_1 + \Omega_2)(\eta' + \eta'') = \Omega_1\eta'' + \Omega_2\eta'; \quad \Omega_1\eta'' = -\Omega_2\eta'.$$

Так как операторы Ω_1 и Ω_2 являются кососимметрическими, то образы $\theta(y)$ при отображениях Ω_1 и Ω_2 суть соответственно подпространство $E_1^\perp$ (ортогональное дополнение ядра E_1 в подпространстве $\theta(y)$) и подпространство $E_2^\perp$. Следовательно, $\Omega_1\eta'' \in E_2^\perp$, $\Omega_2\eta' \in E_2^\perp$, но $\Omega_1\eta'' = -\Omega_2\eta'$ и, значит, $\Omega_1\eta'' \in E_1^\perp \cap E_2^\perp$. Иными словами, вектор $\Omega_1\eta''$ ортогонален сразу и E_1, и E_2, а так как их линейная оболочка есть все $\theta(y)$, то $\Omega_1\eta'' = 0$.

Из этого вытекает, что $\eta'' \in E_1$; по определению $\eta'' \in E_2$, а $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Следовательно, $\eta'' = 0$. Аналогично получается и $\eta' = 0$, откуда уже вытекает, что $\eta = 0$, а это противоречит выбору η. Полученное противоречие показывает, что сделанное нами предположение неверно. Лемма доказана.

В точке y выберем произвольный ортонормированный базис подпространства $\theta(y)$ и рассмотрим уравнение

$$\det \| a^1\Omega_1(y) + a^2\Omega_2(y) \| = 0, \tag{2.2}$$

где a^1 и a^2 суть координаты неизвестного искомого вектора $a \in A^2$. Пусть матрицы опораторов $\Omega_i = \Omega_i(y)$ $(i = 1, 2)$ в выбранном базисе имеют вид

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} 0 & A_i & B_i & C_i \\ -A_i & 0 & D_i & F_i \\ -B_i & -D_i & 0 & G_i \\ -C_i & -F_i & G_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.2) запишется подробно так:

$$[(a^1A_1 + a^2A_2)(a^1G_1 + a^2G_2) + (a^1C_1 + a^2C_2)(a^1D_1 + a^2D_2)$$
$$-(a^1B_1 + a^2B_2)(a^1F_1 + a^2F_2)]^2 = 0,$$

или

$$(A_1G_1+C_1D_1-B_1F_1)(a^1)^2+(A_2G_2+C_2D_2-B_2F_2)(a^2)^2 \\ +(A_1G_2+A_2G_1+C_1D_2+C_2D_1-B_1F_2-B_2F_1)a^1a^2=0. \tag{2.3}$$

Из проведенной выкладки получаем, что $\det \Omega_a(y)=0$ тогда и только тогда, когда a^1 и a^2 удовлетворяют уравнению (2.3). Отсюда вытекают следующие выводы:

Лемма 2.2. *Уравнение* (2.3) *невырождено, т. е. ему удовлетворяют не все векторы* $a\in A^2$, *и, следовательно, не все его коэффициенты нулевые* — *следует непосредственно из леммы* 2.1.

Лемма 2.3. *Система Пфаффа* (2.1) *является гиперболической в точке* y *тогда и только тогда, когда координаты двух линейно-независимых векторов* a_1 *и* a_2 *удовлетворяют уравнению* (2.3).

Из леммы 2.3 можно получить и более конкретное утверждение, которое дает простой способ для проверки гиперболичности системы (2.1) в точке y:

Лемма 2.4. *Система* (2.1) *является гиперболической в точке* y *тогда и только тогда, когда*

$$(A_1G_2+A_2G_1+C_1D_2+C_2D_1-B_1F_2-B_2F_1)^2 \\ -4(A_1G_1+C_1D_1-B_1F_1)(A_2G_2+C_2D_2-B_2F_2)>0. \tag{2.4}$$

Это утверждение следует непосредственно из лемм 2.2 и 2.3.

Дадим пример гиперболической системы Пфаффа из двух уравнений в R^6. Проверим, что такой является система

$$\begin{aligned} dx^1+x^3dx^5+x^4dx^6&=0,\\ dx^2+x^4dx^5+x^3dx^6&=0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

в точке $x=0$.

В базисе

$$\begin{aligned} l_1&=\{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\},\\ l_2&=\{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\},\\ l_3&=\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\},\\ l_4&=\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\} \end{aligned}$$

подпространства $\theta(0)\subset R^6$ матрицы операторов $\Omega_1(0)$ и $\Omega_2(0)$ имеют соответственно вид

$$\Omega_1(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \Omega_2(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $A_1=A_2=C_1=B_2=D_1=F_2=G_1=G_2=0$, $B_1=C_2=F_1=D_2=1$. Подставляя в левую часть неравенства (2.4), получаем

$$(A_1G_2+A_2G_1+C_1D_2+C_2D_1-B_1F_2-B_2F_1)^2-4(A_1G_1+C_1D_1-B_1F_1)(A_2G_2+C_2D_2 \\ -B_2F_2)=-4(-1)(+1)=4>0,$$

т. е. неравенство (2.4) удовлетворяется; следовательно, система (2.5) является гиперболической в точке $x=0$.

Из лемм 2.2, 2.3, 2.4 вытекает следующий результат:

Лемма 2.5. *Если система* (2.1) *гиберболична в точке* y, *и для линейно-независимых векторов* $a \in A^2$, $b \in A^2$ *операторы* $\Omega_a(y)$ *и* $\Omega_b(y)$ *вырождены, то любой вектор* $c \in A^2$, *для которого* $\Omega_c(y)$ *вырожден, коллинеарен либо* a, *либо* b. *Иными словами, векторы* a *и* b *определены однозначно с точностью до множителя и перестановки.*

Если точка y пробегает достатъчно малую окрестность точки x_0, в силу гладкой зависимости $\theta(y)$ по y, можно выбрать гладко зависящий ортонормированный базис подпространства $\theta(y)$; тогда элементы матриц $\Omega_i(y)$ $(i=1, 2)$ гладко зависят от y, и в силу неравенства (2.4) множество точек гиперболичности для системы (2.1) открыто. Если в x_0 система (2.1) гиперболична, то опять в силу гладкости элементов матриц $\Omega_i(y)$ и неравенства (2.4) можно считать, что линейно-независимые векторы $a(y) \in A^2$ и $b(y) \in A^2$, для которых ядра операторов $\Omega_a(y)$ и $\Omega_b(y)$ нетривиальны, гладко зависят от y в окрестности x_0.

Рассмотрим систему Пфаффа

$$\widetilde{\omega}^1(dx)=0, \quad \widetilde{\omega}^2(dx)=0, \tag{2.6}$$

где $\widetilde{\omega}^1=a^1(x)\omega^1+a^2(x)\omega^2$, $\widetilde{\omega}^2=b^1(x)\omega^1+b^2(x)\omega^2$. Эта система эквивалентна системе (2.1), так как

$$\det\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Линейный кососимметрический оператор $\widetilde{\Omega}_1(y)$, соответствующий сужению формы $\partial\widetilde{\omega}^1(y;\ *,\ *)$ на $\theta(y)$, совпадает с оператором $a^1(y)\Omega_1(y)+a^2(y)\Omega_2(y)$, потому что само сужение формы $\partial\widetilde{\omega}^1(y;\ *,\ *)$ на $\theta(y)$ совпадает с сужением на $\theta(y)$ формы

$$a^1(y)\partial\omega^1(y;\ *,\ *)+a^2(y)\partial\omega^2(y;\ *,\ *).$$

Стало быть, $\widetilde{\Omega}_1(y)$ имеет нетривиальное ядро $\widetilde{E}_1(y)$. Аналогично, $\widetilde{\Omega}_2(y)$ имеет нетривиальное ядро $E_2(y)$. Итак, мы получаем следующий результат:

Лемма 2.6. *Если система* (2.1) *является гиперболической в точке* x_0, *то в некоторой окрестности* U *точки* x_0 *она приводится к эквивалентной системе* (2.6), *обладающей тем свойством, что ядра* $\widetilde{E}_1(x)$ *и* $\widetilde{E}_2(x)$ *операторов* $\widetilde{\Omega}_1(x)$ *и* $\widetilde{\Omega}_2(x)$ *нетривиальны в каждой точке* $x \in U$.

До конца этого параграфа мы будем рассматривать только системы, гиперболические в некоторой точке x_0; поэтому, начиная с этого места, будем предполагать, что система (2.1) обладает свойствами системы (2.6), т. е. что в каждой точке x окрестности U точки x_0 ядра $E_1(x)$ и $E_2(x)$ операторов $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ нетривиальны. Из кососимметричности этих операторов, как и в доказательстве леммы 2.1, получаем, что размерность каждого из подпространств $E_1(x)$ и $E_2(x)$ равна 2 и что их пресечение состоит только из нулевого вектора.

Операторы $\Omega_i(x)$ $(i=1, 2)$ гладко зависят от x, следовательно, подпространства $E_i(x)$ $(i=1, 2)$ тоже гладко зависят от x. Поэтому можно считать, что $E_1(x)$ является линейной оболочкой гладких векторных полей $\xi_1=\xi_1(x)$

и $\xi_2=\xi_2(x)$, а $E_2(x)$ — линейной оболочкой $\xi_3=\xi_3(x)$ и $\xi_4=\xi_4(x)$. В силу упомянутых выше свойств подпространств $E_i(x)$ $(i=1, 2)$ векторы $\xi_j(x)$ $(j=1, 2, 3, 4)$ образуют в каждой точке x базис подпространства $\theta(x)$.

Отметим важное свойство подпространств E_i $(i=1, 2)$: для любого вектора $\eta \in E_i$ форма $\partial\omega^i(\eta, *)$ нулевая на подпространстве θ, так как для любого $\xi \in \theta$ имеем $\partial\omega^i(\eta, \xi)=(\Omega_i \eta, \xi)=0$. Мы часто будем пользоваться этим свойством без специальной ссылки на него.

Лемма 2.7. *Ранг совокупности форм*

$$\omega^1(*),\ \omega^2(*),\ \partial\omega^1(\xi_3, *),\ \partial\omega^1(\xi_4, *),\ \partial\omega^2(\xi_1, *),\ \partial\omega^2(\xi_2, *)$$

равен 6 *в* U.

Доказательство. Допустим, что в некоторой точке $x \in U$ ранг этой совокупности форм меньше 6. Тогда система

$$\omega^i(\eta)=0, \quad i=1, 2,$$
$$\partial\omega^1(\xi_j, \eta)=0, \quad j=3, 4, \tag{2.7}$$
$$\partial\omega^2(\xi_k, \eta)=0, \quad k=1, 2,$$

где η — неизвестный вектор, взятая в точке x, имеет ненулевое решение η_0; в силу первых двух уравнений $\eta_0 \in \theta(x)$. Добавив к системе (2.7) равенства

$$\partial\omega^1(\xi_i, \eta_0)=0, \quad i=1, 2.$$
$$\partial\omega^2(\xi_k, \eta_0)=0, \quad k=3, 4,$$

(вспомним, что $\xi_1 \in E_1$, $\xi_2 \in E_1$, $\xi_3 \in E_2$, $\xi_4 \in E_2$), получаем, что η_0 удовлетворяет и характеристической системе системы (2.1), что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

Пусть $u_1=u_1(x)$ и $u_2=u_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции в U. Рассмотрим поля

$$\zeta_1=\xi_1+u_1\xi_2 \in E_1,\ \zeta_2=\xi_3+u_2\xi_4 \in E_2.$$

Обозначим через $\theta_2(u_1, u_2;\ x)$ распределение, натянутое на ζ_1 и ζ_2. Из линейной независимости полей ξ_j $(j=1, 2, 3, 4)$ в каждой точке $x \in U$ следует, что и $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ линейно-независимы в каждой точке $x \in U$ при любом выборе $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Стало быть, распределение $\theta_2(u_1, u_2;\ x)$ всегда двумерно в U.

Рассмотрим систему Пфаффа

$$\omega^i(dx)=0, \quad i=1, 2,$$
$$\partial\omega^1(\zeta_2, dx)=0,\ \partial\omega^2(\zeta_1, dx)=0. \tag{2.8}$$

Так как по лемме 2.7 ранг совокупности форм $\omega^1(*)$, $\omega^2(*)$, $\partial\omega^1(\xi_3, *)$, $\partial\omega^1(\xi_4, *)$, $\partial\omega^2(\xi_1, *)$, $\partial\omega^2(\xi_2, *)$ равен 6, а, с другой стороны,

$$\partial\omega^1(\zeta_2, dx)=\partial\omega^1(\xi_3, dx)+u_2\partial\omega^1(\xi_4, dx),\ \partial\omega^2(\zeta_1, dx)+\partial\omega^2(\xi_1, dx)+u_1\partial\omega^2(\xi_2, dx),$$

то ранг системы (2.8) равен 4 в U при любом выборе u_1 и u_2.

Докажем, что система (2.8) задает распределение $\theta_2(u_1, u_2;\ x)$. По соображениям размерности для этого достаточно проверить, что $\zeta_1(x)$ и $\xi_2(x)$ удовлетворяют системе (2.8). И в самом деле, $\omega^i(\zeta_1)=\omega^i(\xi_1)+u_1\omega^i(\xi_2)=0$

($i=1, 2$), $\partial\omega^2(\zeta_1, \zeta_1)=0$, и так как $\zeta_1 \in E_1$, а $\zeta_2 \in \theta$, то $\partial\omega^1(\zeta_2, \zeta_1)=-\partial\omega^1(\zeta_1, \zeta_2)=0$. Следовательно, ζ_1 удовлетворяет системе (2.8). Аналогичным образом можно проверить, что и ζ_2 удовлетворяет системе (2.8).

Итак, система Пфаффа (2.8) задает распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$. Последнее является инволютивным в том случае, если для любых двух векторов $\xi \in \theta_2(u_1, u_2; x)$ и $\eta \in \theta_2(u_1, u_2; x)$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\partial\omega^i(\xi, \eta)=0, \quad i=1, 2,\\ \partial(\partial\omega^1(\zeta_2, *))(\xi, \eta)=0, \ \partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\xi, \eta)=0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Поскольку поля ζ_1 и ζ_2 образуют базис $\theta_2(u_1, u_2; x)$ в каждой точке $x \in U$, то для инволютивности $\theta_2(u_1, u_2; x)$ достаточно выполнение соотношений (2.9) при $\xi=\zeta_1$, $\eta=\zeta_2$. Кроме того, $\partial\omega^i(\zeta_1, \zeta_2)=0$, $i=1, 2$, так как $\zeta_1 \in E_1$, $\zeta_2 \in E_2$. Следовательно, справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.8. *Для инволютивности $\theta_2(u_1, u_2; x)$ в U достаточно выполнение соотношений*

$$\partial(\partial\omega^1(\zeta_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0, \ \partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0. \tag{2.10}$$

Соотношения (2.10) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями u_1 и u_2; мы выпишем подробно эту систему и докажем, что она имеет решение. Тем самым мы получим, что можно подобрать функции u_1 и u_2 так, чтобы распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$ было инволютивным. Отсюда следует результат, являющийся целью наших рассмотрений в настоящем параграфе:

Теорема. *Система* (2.1) *без ненулевых характеристических векторов, гиперболическая в точке x_0, имеет в некоторой окрестности x_0 разрешающее распределение размерности 2.*

Прежде всего, приведем левую часть второго уравнения системы (2.10) к удобному виду. При этом мы будем пользоваться обычными действиями над внешними формами и следующим конкретным фактом: $\partial\omega^2(\xi, \zeta_2)=0$, так как $\zeta_2 \in E_2$, $\xi_2 \in \theta$. Имеем

$$\begin{aligned}\partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)&=\partial(\partial\omega^2(\xi_1+u_1\xi_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)\\ &=\partial(\partial\omega^2(\xi_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)+\partial(u_1\partial\omega^2(\xi_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)\\ &=\partial(\partial\omega^2(\xi_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)=[(\partial u_1)\wedge(\partial\omega^2(\xi_2, *))](\zeta_1, \zeta_2)+u_1\partial(\partial\omega^2(\xi_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)\\ &=\partial(\partial\omega^2(\xi_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)+(\partial u_1)(\zeta_1)\partial\omega^2(\xi_2, \zeta_2)-(\partial u_1)(\zeta_2)\partial\omega^2(\xi_2, \zeta_1)+u_1\partial(\partial\omega^2(\xi_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)\\ &=-(\partial u_1)(\zeta_2)\partial\omega^2(\xi_2, \xi_1+u_1\xi_2)+F_1\\ &=-(\partial u_1)(\zeta_2)\partial\omega^2(\xi_2, \xi_1)-(\partial u_1)(\zeta_2)\partial\omega^2(\xi_2, \xi_2)+F_1\\ &=[\sum_{i=1}^{6}(\xi_3^i+u_2\xi_4^i)\ \frac{\partial u_1}{\partial x^i}]\partial\omega^2(\xi_1, \xi_2)+F_1,\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $F_1=\partial(\partial\omega^2(\xi_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)+u_1\partial(\partial\omega^2(\xi_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)$.

Выражение F_1 записывается через координаты формы ω^2 и полей ξ_1 и ξ_2 и их производные до второго порядка и через координаты полей $\zeta_1=\xi_1+u_1\xi_2$ и $\zeta_2=\xi_3+u_2\xi_4$. Стало быть, F_1 не содержит производных от неизвестных функций u_1 и u_2. Следовательно, $F_1=F_1(x, u_1, u_2)$.

Отметим, что $\partial\omega^2(\xi_1, \xi_2)$ не обращается в 0, потому что, если допустить, что в точке x имеем $\partial\omega^2(\xi_1, \xi_2)=0$, то, добавив к этому равенству тождества $\partial\omega^2(\xi_1, \xi_1)=0$, $\partial\omega^2(\xi_1, \xi_j)=0$ $(j=3, 4)$ (ввиду того, что $\xi_3 \in E_2$, $\xi_4 \in E_2$), получим, что и $\xi_1 \in E_2$, т. е. $\xi_1 \in E_1 \cap E_2$ — противоречие.

Без ограничения общности можно считать, что $\xi_1^6(x_0)=\xi_3^6(x_0)=1$; этого можно легко добиться линейной заменой системы координат. Теперь из соотношения $\xi_3^6(x_0)=1$ получаем, что в достаточно малой окрестности V_1 точки x_0 и при достаточно малом $\delta_1>0$ функция $\varphi(x, u_2)=\xi_3^6-u_2\xi_4^6$ не обращается в нуль при $|u_2|<\delta_1$. Тогда функции

$$a_{1i}=-(\xi_3^i-u_2\xi_4^i/(\xi_3^6-u_2\xi_4^6), \quad i=1, 2, \dots, 6,$$

$$F=F_1/\partial\omega^2(\xi_1, \xi_2)(\xi_3^6-u_2\xi_4^6)] \tag{2.12}$$

является непрерывными в V_1 при $|u_2|<\delta_1$. Итак, второе уравнение системы (2.10) ввиду формул (2.11) и (2.12) записывается в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^6}=\sum_{i=1}^{5} a_{1i}\frac{\partial u_1}{\partial x^i}+F.$$

Аналогично получаем, что первое уравнение системы (2.10) записывается в окрестности x_0 при $|u_1|<\delta_2$ в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial x^6}=\sum_{i=1}^{5} a_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x^i}+G.$$

В итоге мы привели систему (2.10) к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^6}=\sum_{i=1}^{5} a_{1i}\frac{\partial u_1}{\partial x^i}+F, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x^6}=\sum_{i=1}^{5} a_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x^i}+G, \tag{2.13}$$

где функции a_{1i}, a_{2i}, F и G являются непрерывными функциями от u_1, u_2 и x в некоторой окрестности U точки x_0 и при условии, что $|u_1|<\delta$, $|u_2|<\delta$, где $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Сейчас мы убедимся, что система дифференциальных уравнений с частными производными (2.13) является гиперболической по Петровскому в окрестности x_0, с нулевыми начальными условиями на гиперплоскости $x^6=x_0^6$.

По классическому определению Петровского (см. [4]) квазилинейная система дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a^k_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x^k}+H_i, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

где a^k_{ij} и H_i — функции от $x \in R^l$ и $u_1, u_2, \dots, u_m$ называется гиперболической в окрестности x_0, если для всех $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ матрица $\|\Sigma_{k=1}^{n-1} a^k_{ij}\mu_k\|-\lambda E$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} |M_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |M_2| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & |M_l| \end{pmatrix},$$

где все элементы, не попавшие ни в одну из матриц M_s, тождественно равны нулю, а все корни (λ) детерминантов всех матриц M_s всегда действительны, и разность каждой пары корней одного и того же детерминанта превосходит по абсолютной величине некоторую положительную постоянную.

Заметим, что в нашем конкретном случае системы (2.13) вышеуказанная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} a_{1i}\mu_i-\lambda & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{5} a_{2i}\mu_i-\lambda \end{pmatrix},$$

. е. она является диагональной. Следовательно, матрицы M_1 и M_2 состоят тз одного элемента и, значит, удовлетворяют всем перечисленным выше итребованиям, так что система (2.13) является гиперболической в окрестности точки x_0.

Следовательно, по доказанной в работе Петровского [4] классической теореме система (2.13) имеет решение в окрестности x_0. Отсюда следует утверждение сформулированной в настоящем параграфе теоремы.

3. Предварительный анализ гиперболической системы Пфаффа из $n-4$ уравнений в R^n. Мы переходим к рассмотрению общего случая системы (1.2) из $n-4$ уравнений в R^n; предполагаем, что ранг системы равен $n-4$. Как и раньше, через $\theta(x)$ обозначаем четырехмерное распределение, которое является линейной оболочкой всех векторных полей, удовлетворяющих системе (1.2).

Напомним, что для системы (1.2) предполагаются выполненными следующие условия:

а) система (1.2) не имеет ненулевых характеристических векторов в своей области определения D;

б) система (1.2) не имеет особых точек в D.

Кроме того, отсюда и до конца этого параграфа будем считать, что система (1.2) является гиперболической в точке y, т. е. имеет в точке y $n-4$ линейно-независимых правильных векторов из пространства A^{n-4}, которые будем обозначать через $a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$. Для краткости через Ω^i будем обозначать операторы $\Omega_{a_i}(y)$ при $i=1, 2, \ldots, n-4$, а через E^i соответствующие им ядра.

Система Пфаффа

$$\omega_A^i(dx)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4, \tag{3.1}$$

где
$$\omega_A^i=\sum_{j=1}^{n-4} a_i^j\,\omega^j \quad (i=1, 2, \ldots, n-4),$$

а через a_i^j обозначены координаты векторов a_i в пространстве A^{n-4}, эквивалентна системе (1.2). Системы (1.2) и (3.1) задают одно и то же распределение $\theta(x)$, имеют одни и те же характеристические векторы, одни и те же особые точки и одни и те же разрешающие распределения. Кроме того, так как

$$\partial\omega_A^i=\sum_{j=1}^{n-4} a_i^j\,\partial\omega^j, \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$

то операторы $\Omega_j^A(y)$, соответствующие $\partial\omega_A^i$ $(i=1, 2, \ldots, n-4)$, совпадают соответственно с операторами Ω^i, а подпространства $E_i^A(y)$ (ядра $\Omega_i^A(y)$) — с E^i.

Лемма 3.1. $\bigcap_{i=1}^{n-4} E^i=\{0\}$.

Это утверждение следует из условия а) об отсутствии ненулевых характеристических векторов у системы (1.2).

Лемма 3.2. *При любом* $i=1, 2, \ldots, n-4$ *размерность подпространства* E^i *равна либо* 2, *либо* 4.

Это утверждение вытекает непосредственно из вырожденности и косой симметрии операторов Ω^i $(i=1, 2, \ldots, n-4)$ и из того, что $\dim\theta(y)=4$.

Лемма 3.3. *Линейная оболочка* E *тех подпространств* E^i $(i=1, 2, \ldots, n-4)$ *чья размерность равна в точности* 2, *совпадает с* $\theta(y)$

Доказательство. Допусим, что $\dim E<4$. Тогда существует подпространство E' размерности 3, такое, что $E'\supset E$. Пусть ξ и η — произвольные два вектора из E, j — произвольное целое число, $1\leq j\leq n-4$. Рассмотрим число $\partial\omega_A^j(\xi, \eta)$.

Размерность подпространства E^j по лемме 3.2 равна либо 2, либо 4. Если $\dim E^j=4$, то $\partial\omega_A^j(\xi, \eta)=\Omega^i\xi, \eta)=0$, если же $\dim E^j=2$, то $E^j\subset E'$, и $\xi=\alpha\xi_1=\xi'$, $\eta=\beta\xi_1+\eta'$, где $\xi_1\perp E^j$, $\xi'\in E^j$, $\eta'\in E^j$; следовательно,

$$\partial\omega_A^j(\xi, \eta)=\partial\omega_A^j(\alpha\xi_1+\xi', \beta\xi_1+\eta')$$

$$=\alpha\beta\partial\omega_A^j(\xi_1, \xi_1)+\partial\omega_A^j(\xi', \beta\xi_1+\eta')+\partial\omega_A^j(\alpha\xi_1, \eta')=0,$$

так как $\xi'\in E^j$, $\eta'\in E^j$.

Иными словами, $\partial\omega_A^j(\xi, \eta)=0$.

Если теперь ξ_2, ξ_3 и ξ_4 образуют базис E', то по доказанному $\partial\omega_A^j(\xi_i, \xi_k)=0$ $(j=1, 2, \ldots, n-4,$ $k=2, 3, 4)$. Эти равенства показывают, что точка y является особой для системы (3.1), а, значит, и для системы (1.2), что противоречит условию б). Полученное противоречие показывает, что $\dim E\geq 4$ и по соображениям размерности следует, что $E=\theta(y)$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Существуют целые числа* k *и* m $(1\leq k\leq n-4$, $1\leq m\leq n-4)$, *такие, что*:

А) $\dim E^k=\dim E^m=2$;

Б) $E^k\cap E^m=\{0\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что хотя бы два из подпространств $E^i (i=1, 2, \ldots, n-4)$ имеют размерность 2 и различны, потому что в противном случае $\bigcap_{i=1}^{n-4} E^i\neq\{0\}$, а это противоречит лемме 3.1. Поэтому можно считать, что первые s подпространств $E^1, E^2, \ldots, E^s$ суть подпространства размерности 2, а размерность остальных — E^{s+1}, $E^{s+2}, \ldots, E^{n-4}$ — равна 4; как мы уже заметили, $s\geq 2$.

Пусть $E^1\neq E^2$.

Допустим, что для любых i и j $(i, j=1, 2, \ldots, s)$ имеют место соотношения

$$E^i\cap E^j\neq\{0\}, \tag{3.2}$$

т. е. $E^i\cap E^j$ содержит, по крайней мере, один ненулевой вектор e_{ij}.

Рассмотрим подпространства E^1 и E^2. Так как $E^1 \neq E^2$, а $E^1 \cap E^2 = \{0\}$, то размерность линейной оболочки L подпространств E^1 и E^2 равна 3. С другой стороны, по лемме 3.3, размерность линейной оболочки E подпространств $E^1, E^2, \ldots, E^s$ равна размерности $\theta(y)$, т. е. 4. Следовательно, для некоторого целого $j (3 \leq j \leq s)$ E^j не содержится в L, и по соображениям размерности ($\dim E^j = 2$; $\dim L = 3$; $\dim \theta = 4$) следует, что $\dim E^j \cap L = 1$. Можно считать, что $j = 3$. По сделанному предположению, $\dim E^1 \cap E^3 \geq 1$ $\dim E^2 \cap E^3 \geq 1$; но $E^1 \subset L$, $E^2 \subset L$. Следовательно, векторы из пресечения E^1 с E^3, а также и векторы из $E^2 \cap E^3$ коллинеарны с вектором из $E^3 \cap L$, т. е. с точностью до множителя $e_{12} = e_{13} = e_{23}$.

Если теперь для любого $j = 1, 2, \ldots, s$ рассмотрим подпространство E^j, то либо E^j не содержится в L и тогда, как и в случае $j = 3$, имеем $e_{1j} = e_{2j} = e_{12}$, либо $E^j \subset L$ и тогда $E^j \subset E^3 = L \cap E^3$, т. е. $e_{3j} = e_{12}$.

Иными словами, мы получаем, что все подпространства $E^j (j = 1, 2, \ldots, s)$, содержат ненулевой вектор e_{12}. Но тогда и $\cap_{j=1}^{n-4} E^j$ содержит ненулевой вектор e_{12}, что противоречит лемме 3.2. Это показывает, что сделанное нами предположение (3.2) не верно, и, стало быть, для некоторой пары целых чисел m и k, $1 \leq k \leq s$, $1 \leq m \leq s$ выполняется условие $E^k \cap E^m = \{0\}$, т. е. условие Б) леммы. А условие А) следует из того, что $k \leq s$ и $m \leq s$ и определения числа s. Лемма доказана.

4. Условия гипорболичности в точке и окрестности. В этом параграфе сформулировано несколько утверждений, которые можно доказать без труда стандартными методами и поэтому их доказательства не приводятся.

Предполагаем, что выполнены условия а) и б) из п. 3.

Рассмотрим подробнее уравнение

$$\det \sum_{i=1}^{n-4} \alpha^i \Omega_i(y) = 0, \tag{4.1}$$

где y — фиксированная точка, $\alpha \in A^{n-4}$ — неизвестный вектор. Как и в случае двух уравнений Пфаффа, в произвольном фиксированном ортонормированном базисе подпространства $\theta(y)$ матрица оператора $\Sigma_{i=1}^{n-4} \alpha^i \Omega_i(y)$ является кососимметрической, и уравнение (4.1) можно представить в виде $(Q(y; \alpha))^2 = 0$, где $Q(y; \alpha)$ есть квадратичная форма от $\alpha \in A^{n-4}$ с коэффициентами, зависящими от элементов матриц операторов $\Omega_i(y)$, т. е. от производных координат форм $d\omega^i(y; *, *)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-4)$. Таким образом, мы получаем следующий результат:

Лемма 4.1. *Для того, чтобы система (1.2) была гиперболической в точке y, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис пространства A^{n-4}, элементы которого аннулируют вышеуказанную форму $Q(y; \alpha)$,*

Лемма 4.2. *Форма $Q(y; \alpha)$ ненулевая, т. е. существует вектор α_0, такой, что $Q(y; \alpha_0) \neq 0$.*

Определение. *Квадратичная форма $q(\beta)$ в пространстве A^k называется полуопределенной, если она на всех векторах из A^k принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения.*

Лемма 4.3. *Для существования базиса пространства A^k, чьи элементы аннулируют заданную ненулевую квадратичную форму $q(\beta)$ необхо-*

димо и достаточно, чтобы форма $q(\beta)$ не являлась полуопределенной в пространстве A^k.

Лемма 4.4. *Пусть $q(x;\ \beta)$ — квадратичная форма в пространстве A^k с коэффициентами, являющимися C^p-функциями от точки x области $U\subset R^n$, и пусть $q(x_0;\beta)$, где $x_0\in U$, не является полуопределенной. Тогда:*

а) *$q(x;\ \beta)$ не является полуопределенной и в некоторой окрестности точки x_0;*

б) *существует набор из k, зависящих от x векторов $\beta_i(x)\in A^k$ $(i=1,\ 2,\dots,k)$ класса C^p, заданных в некоторой окрестности V точки x_0 и линейно-независимых при каждом значении $x\in V$.*

5. Приведение системы Пфаффа из $n-4$ уравнений в R^n, гиперболической в данной точке, к каноническому виду. Возвращаемся к системе (1.2) для которой предполагаем выполненными условия а) и б) из п.3. Кроме того, предполагаем, что система (1.2) является гиперболической в точке x_0.

Если точка x пробегает достаточно малую окрестность точки x_0, в силу достаточно гладкой зависимости подпространства $\theta(x)$ от x можно выбрать достаточно гладкий базис $\theta(x)$; тогда элементы матриц $\Omega_i(x)$ достаточно гладко зависят от x. Применяя леммы 4.1, 4.2, 4.3, получаем, что:

1) множество точек гиперболичности для системы (1.2) является открытым;

2) в некоторой окрестности U точки x_0 существуют достаточно гладкие линейно-независимые векторы $\alpha_i(x)\in A^{n-4}$ $(i=1,\ 2,\dots,n-4)$, для которых ядра операторов

$$\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j\,\Omega_j(x),\quad i=1,\ 2,\dots,n-4,$$

нетривиальны.

В окрестности U рассмотрим систему Пфаффа

(5.1) $$\bar\omega^i(dx)=0,\quad i=1,\ 2,\dots,n-4,$$

где

$$\bar\omega^i(x;\ *)=\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j(x)\omega^j(x;\ *).$$

Эта система эквивалентна системе (1.2), так как $\det\|\alpha_i^j(x)\|\neq 0$.

Каждый линейный кососимметрический оператор $\bar\Omega_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n-4)$, соответствующий сужению $\partial\bar\omega^i(x;\ *,\ *)$ на $\theta(x)$, совпадает с оператором $\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j(x)\Omega_i(x)$, потому что само сужение формы $\partial\bar\omega^i(x;\ *,\ *)$ на $\theta(x)$ совпадает с сужением на $\theta(x)$ формы $\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j\partial\omega^j(x;\ *,\ *)$. В самом деле, пусть $\xi\in\theta(x)$, $\eta\in\theta(x)$; тогда

$$\partial\bar\omega^i(x;\ \xi,\ \eta)=\partial\Big(\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j(x)\omega^j(x;\ *)\Big)(\xi,\ \eta)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-4}[(\partial\alpha_i^j)\ (x;\ \xi)\omega^j(x;\ \eta)-(\partial\alpha_i^j)\ (x;\ \eta)\omega^j(x;\ \xi)+\alpha_i^j(x)\partial\omega^j(x;\ \xi,\ \eta)]$$

$$=\sum_{j=1}^{n-4}\alpha_i^j(x)\partial\omega^j(x;\ \xi,\ \eta),$$

так как $\omega^j(x;\ \xi)=\omega^j(x;\ \eta)=0$ при $j=1,\ 2,\dots,n-4$.

Следовательно, ядро оператора $\Omega_i(x)$ нетривиально. Итак, мы получаем следующий результат:

Лемма 5.1. *Если система* (1.2) *является гиперболической в точке* x_0, *то в некоторой окрестности* U *точки* x_0 *она приводится к эквивалентной системе* (5.1), *обладающей тем свойством, что ядра операторов* $\Omega_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n-4)$ *нетривиальны в каждой точке* $x \in U$.

6. Существование разрешающего распределения размерности 2 у гиперболической системы Пфаффа из $n-4$ уравнений в R^n. Опять рассматриваем систему Пфаффа (1.2), предполагая, что для нее выполнены а) и б) из п. 3 и что она является гиперболической в точке x_0. Основываясь на результатах п. 5, так как нас интересует существование двумерного разрешающего распределения только в окрестности точки x_0, можем без ограничения общности считать, что система (1.2) обладает свойствами системы (5.1), т. е. ядра $E_i(x)$ всех операторов $\Omega_i(x)$ нетривиальны для любого x и любого $i=1, 2, \ldots, n-4$.

Кроме того, мы будем предполагать, что система (1.2) обладает свойством И2 в рассматриваемой окрестности точки x_0.

По лемме 3.4 существуют целые числа k и m $(1 \leq k \leq n-4,\ 1 \leq m \leq n-4)$, такие, что

$$\dim E_k(x_0) = \dim E_m(x_0) = 2, \quad E_k(x_0) \cap E_m(x_0) = \{0\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $k=1$, $m=2$. Итак,

$$\dim E_1(x_0) = \dim E_2(x_0) = 2, \quad E_1(x_0) \cap E_2(x_0) = \{0\}.$$

Убедимся теперь, что такими же свойствами подпространства $E_1(x)$ и $E_2(x)$ обладают не только в точке x_0, но и в некоторой ее окрестности. В самом деле, ранг $\Omega_1(x_0)$ равен 2 и по непрерывности $\Omega_1(x)$ ранг последнего не меньше 2 в окрестности x_0; с другой стороны, $\Omega_1(x)$ вырожден и поэтому его ранг не может быть больше 2; следовательно, он равен в точности 2, т. е. $\dim E_1(x) = 2$ в окрестности точки x_0. Аналогично и $\dim E_2(x) = 2$ в окрестности x_0.

Кроме того, $E_1(x)$ и $E_2(x)$ не пересекаются (за исключением ненулевого вектора) при $x = x_0$ и по непрерывности не пересекаются в окрестности x_0. Следовательно, мы можем считать, ограничиваясь подходящей окрестностью точки x_0, что

$$\dim E_1(x) = \dim E_2(x) = 2, \tag{6.1}$$

$$E_1(x) \cap E_2(x) = \{0\}. \tag{6.2}$$

Операторы $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$, как и подпространство $\theta(x)$, зависят от x достаточно гладко, следовательно, подпространства $E_1(x)$ и $E_2(x)$ обладают аналогичными свойствами. Поэтому можно считать, что $E_1(x)$ является линейной оболочкой достаточно гладких векторных полей $\xi_1 = \xi_1(x)$ и $\xi_2 = \xi_2(x)$, а $E_2(x)$ — полей $\xi_3 = \xi_3(x)$ и $\xi_4 = \xi_4(x)$. В силу полученных выше свойств (6.1) и (6.2) подпространств $E_1(x)$ и $E_2(x)$, в каждой точке x векторы $\xi_i(x)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ образуют базис подпространства $\theta(x)$.

В дальнейшем систему (1.2) будем рассматривать в такой окрестности точки x_0, в которой выполнены все перечисленные до сих пор в этом пункте условия.

Отметим важное свойство подпространств $E_i(x)$, $(i=1, 2)$: для любого вектора $\eta(x) \in E_i(x)$ форма $\partial\omega^i(\eta, *)$ нулевая на $\theta(x)$, так как для любого $\xi(x) \in \theta(x)$ имеем $\partial\omega^i(\eta, \xi) = (\Omega_i\eta, \xi) = 0$, ввиду того, что $\eta(x)$ — элемент ядра оператора $\Omega_i(x)$. Мы будем часто пользоваться этим свойством без специальной ссылки на него.

Лемма 6.1. *Ранг системы форм*

$$\omega^i(*),\ (i=1,\ 2, \ldots, n-4),\ \partial\omega^1(\xi_3, *),\ \partial\omega^1(\xi_4, *),\ \partial\omega^2(\xi_1, *),\ \partial\omega^2(\xi_2, *)$$

равен n в U.

Доказательство. Допустим, что в некоторой точке $x \in U$ ранг этой системы меньше n. Тогда система уравнений

$$\omega^i(\eta) = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n-4,$$

$$\partial\omega^1(\xi_j,\ \eta) = 0, \quad j = 3,\ 4,$$

$$\partial\omega^2(\xi_k,\ \eta) = 0, \quad k = 1,\ 2,$$

где η — неизвестный вектор, взятая в точке x, имеет ненулевое решение η_0 В силу первых $n-4$ уравнений $\eta_0 \in \theta(x)$. Если к вытекающим из этой системы равенствам $\partial\omega^1(\xi_j, \eta_0) = 0$ $(j=3, 4)$, добавить равенства $\partial\omega^1(\xi_j, \eta_0) = 0$ $(j=1, 2)$, которые вытекают из того, что $\xi_1(x) \in E_1(x)$, $\xi_2(x) \in E_2(x)$, то получим, что форма $\partial\omega^1(\eta_0, *)$ нулевая на базисе подпространства $\theta(x)$, стало быть и на всем $\theta(x)$. Следовательно, $\eta_0 \in E_1(x)$.

Но аналогично $\eta_0 \in E_2(x)$; а так как мы имеем $E_1(x) \cap E_2(x) = \{0\}$, то. $\eta_0 - 0$, что противоречит выбору η_0. Из полученного противоречия вытекает справедливость утверждения этой леммы.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — достаточно гладкие функции, определенные в U. Рассмотрим поля

$$\zeta_1 = \zeta_1 + u_1\xi_2 \in E_1,\ \zeta_2 = \xi_3 + u_2\xi_4 \in E_2.$$

Обозначим через $\theta_2(u_1, u_2; x)$ распределение, натянутое на $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$. Из линейной независимости полей $\xi_i(x)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ в каждой точке $x \in U$ вытекает, что $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ линейно-независимы в каждой точке $x \in U$. Следовательно, распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$ всегда двумерно в U.

Рассмотрим систему Пфаффа

$$\omega^i(dx) = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n-4, \tag{6.3}$$

$$\partial\omega^1(\zeta_2,\ dx) = 0,\ \partial\omega^2(\zeta_1,\ dx) = 0.$$

Так как по лемме 6.1 ранг системы форм $\omega^i(*) (i=1, 2, \ldots, n-4)$, $\partial\omega^1(\xi_3, *)$, $\partial\omega^1(\xi_4, *)$, $\partial\omega^2(\xi_1, *)$, $\partial\omega^2(\xi_2, *)$, равен n, а, с другой стороны,

$$\partial\omega^1(\zeta_2,\ dx) = \partial\omega^1(\xi_3,\ dx) + u_2\partial\omega^1(\xi_4,\ dx),\ \partial\omega^2(\zeta_1,\ dx) = \partial\omega^2(\xi_1, dx) + u_1\partial\omega^2(\xi_2,\ dx),$$

то ранг системы (6.3) равен $n-2$ в U при любом выборе u_1 и u_2.

Проверим, что система (6.3) задает распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$. Исходя из соображений размерности, для этого достаточно проверить, что $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ удовлетворяют системе (6.3). В самом деле,
$\omega^i(\zeta_1) = \omega^i(\xi_1) + u_1\omega^i(\xi_2) = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-4)$, $\partial\omega^2(\zeta_1, \zeta_1) = 0$, и так как $\zeta_1 \in E_1$, а $\zeta_2 \in E_2 \subset \theta$, то $\partial\omega^1(\zeta_2, \zeta_1) = 0$. Следовательно, ζ_1 удовлетворяет системе (6.3). Аналогичным образом доказывается, что и ζ_2 удовлетворяет системе (6.3), и, значит, система (6.3) действительно задает распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$.

Лемма 6.2. *Для инволютивности* $\theta_2(u_1, u_2; x)$ *в* U *достаточно выполнение условий*

(6.4) $$\partial(\partial\omega^1(\zeta_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0, \ \partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0.$$

Доказательство. Распределение $\theta_2=\theta_2(u_1, u_2; x)$, которое задает система Пфаффа (6.3), по определению является инволютивным тогда и только тогда, когда для любых полей $\xi\in\theta_2$, $\eta\in\theta_2$ выполнены следующие условия:

$$\partial\omega^i(\xi, \eta)=0, \ i=1, 2, \ldots, n-4,$$

$$\partial(\partial\omega^1(\zeta_2, *))(\xi, \eta)=0, \ \partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\zeta, \eta)=0.$$

Так как ζ_1 и ζ_2 образуют базис θ_2, то ξ и η — суть линейной комбинации ζ_1 и ζ_2; следовательно, для инволютивности θ_2 достаточно выполнение этих равенств только при $\xi=\zeta_1$, $\eta=\zeta_2$:

(6.5) $$\partial\omega^i(\zeta_1, \zeta_2)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$
$$\partial(\partial\omega^1(\zeta_2, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0, \ \partial(\partial\omega^2(\zeta_1, *))(\zeta_1, \zeta_2)=0.$$

Мы сейчас проверим, что первые $n-4$ условий из (6.5) выполняются как следствие того, что система (1.2) обладает свойством И2. Так как $\zeta_1\in E_1$, то

(6.6) $$\partial\omega^1(\zeta_1, \zeta_2)=0.$$

Аналогично, из того, что $\zeta_2\in E_2$, вытекает, что

(6.7) $$\partial\omega^2(\zeta_1, \zeta_2)=0.$$

Если $n=6$, т. е. $n-4=2$, то все доказано. Пусть $n>6$. Зафиксируем произвольное целое число j $(3\leq j\leq n-4)$ и точку $x\in U$. Система (1.2) обладает свойством И2, следовательно, ранг системы

$$\omega^i(\eta)=0, \ \partial\omega^i(\zeta, \eta)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$

взятой в точке x, где η — неизвестный вектор, для любого $\zeta\in\theta$ не больше, чем $n-2$. Тем более ранг системы

$$\omega^i(\eta)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$
$$\partial\omega^k(\zeta, \eta)=0, \quad k=1, 2,$$
$$\partial\omega^j(\zeta, \eta)=0,$$

не больше, чем $n-2$. В этой системе $n-1$ уравнений, следовательно, формы

(6.8) $$\omega^i(*), \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$
$$\partial\omega^1(\zeta, *), \ \partial\omega^2(\zeta, *), \ \partial\omega^j(\zeta, *)$$

линейно-зависимы.

Положим сначала в линейно-зависимую систему форм (6.8) $\zeta=\zeta_1+\zeta_2$ и получим, что формы

$$\omega^i(*), \quad i=1, 2, \ldots, n-4,$$
$$\partial\omega^1(\zeta_1+\zeta_2, *)=\partial\omega^1(\zeta_1, *)+\partial\omega^1(\zeta_2, *)=\partial\omega^1(\zeta_2, *),$$
$$\partial\omega^2(\zeta_1+\zeta_2, *)=\partial\omega^2(\zeta_1, *)+\partial\omega^2(\zeta_2, *)=\partial\omega^2(\zeta_1, *),$$
$$\partial\omega^j(\zeta_1+\zeta_2, *)=\partial\omega^j(\zeta_1, *)+\partial\omega^j(\zeta_2, *)$$

линейно-зависимы. Первые $n-2$ из них совпадают с формами в левых частях уравнений системы (6.3) и, как мы видели, являются линейно-независимыми. Следовательно, сумма $\partial\omega^j(\zeta_1, *)+\partial\omega^j(\zeta_2, *)$ выражается линейно через первые $n-2$ из этих форм.

Положим теперь $\zeta=\zeta_1-\zeta_2$ и аналогичными рассуждениями придем к выводу, что через эти же самые формы выражается линейно и разность $\partial\omega^j(\zeta_1, *)-\partial\omega^j(\zeta_2, *)$.

Следовательно, каждая из форм $\partial\omega^j(\zeta_1, *)$ и $\partial\omega^j(\zeta_2, *)$ выражается линейно через формы $\omega^i(*)$ $(i=1, 2, \ldots, n-4, \partial\omega^1(\zeta_2, *), \partial\omega^2(\zeta_1, *)$, участвующие в системе (6.3). И вектор ζ_1, и вектор ζ_2 удовлетворяют, как мы уже проверяли, системе (6.3), следовательно, они аннулируют формы $\partial\omega^j(\zeta_1, *)$ и $\partial\omega^j(\zeta_2, *)$, т. е. $\partial\omega^j(\zeta_i, \zeta_k)=0$ $(i, k=1, 2)$.

Мы получили эти равенства для произвольного целого j $(3\leqq j\leqq n-4)$ и в произвольной точке x. Следовательно, в U имеют место равенства $\partial\omega^l(\zeta_i, \zeta_k)=0$, $(l=3, 4, \ldots, n-4, i, k=1, 2)$. Эти равенства, вместе с равенствами (6.6) и (6.7), показывают, что первые $n-4$ равенства в условиях (6.5) выполняются всегда в силу сделанных предположений. Лемма доказана.

В п. 2 мы получили соотношения, аналогичные соотношениям (6.4) для случая $n=6$, и показали, что всегда можно найти функции u_1 и u_2 так, чтобы распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$ было инволютивным. Повторяя в точности те же рассуждения, что были сделаны для случая $n=6$, в общем случае мы тоже можем рассмотреть условия (6.5) как систему дифференциальных уравнений с неизвестными функциями u_1 и u_2; только число аргументов теперь будеть больше. Эта система тоже приводится, как в п. 2, к виду, удобному для применения теоремы Петровского. Применяя эту теорему, мы получим, что система (6.5) имеет решение, а это решение в свою очередь даст нам инволютивное распределение $\theta_2(u_1, u_2; x)$, т. е. разрешающее распределение размерности 2 для системы (1.2). Этим доказан основной результат нашей работы — теорма 1.1, сформулированная в п. 1.

7. Области из особых точек. До сих пор мы исключали из рассмотрения особые точки для системы (1.2), т. е. такие точки, в которых некоторые три линейно-независимых вектора ζ_1, ζ_2 и ζ_3 из θ определяют подпространство, на котором сужение всех форм $\partial\omega^i(*, *)$ $(i=1, 2, \ldots, n-4)$. является нулевым. Теперь мы убедимся, что особые точки являются „более благоприятными“ с точки зрения существования двумерных разрешающих распределений, независимо от того, является ли система (1.2) гиперболической или нет.

Будем рассматривать систему (1.2) в области из особых точек с некоторыми естественными дополнительными предположениями о достаточно гладкой зависимости некоторого подпространства и о постоянстве ранга некоторой 2-формы.

Пусть окрестность U точки $x_0 \in R^n$ состоит из особых для системы (1.2) точек и пусть некоторое распределение $\theta_3(x)$ размерности 3 обладает в U следующими свойствами:

а) $\theta_3(x)\subset\theta(x)$;

б) для любых $\xi \in \theta_3$, $\eta \in \theta_3$ выполняются равенства:

$$\partial\omega^i(\xi, \eta)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4.$$

Так как $\theta_3\subset\theta$, то в некоторой окрестности U' точки x распределение θ_3 можно задать системой Пфаффа, содержащей уравнения системы (1.2) и еще едно уравнение:

$$\omega^i(dx)=0, \quad i=1,\ 2, \ldots, n-4, \tag{7.1}$$
$$\bar{\omega}(dx)=0.$$

Пусть ранг сужения формы $\partial\bar{\omega}$ на подпространство $\theta_3(x)$ постоянен в окрестности $U''\subset U'$ точки x_0. Мы сейчас убедимся, что если выполнены все эти предположения, то в некоторой окрестности U_1 точки x_0 найдется двумерное разрешающее распределение для системы (1.2). Для этого достаточно проверить, что система (7.1) обладает в окрестности x_0 характеристическим полем, так как в этом случае система (7.1), а вместе с ней и система (1.2) будут иметь в окрестности x_0 разрешающее распределение искомой размерности.

Рассмотрим сужение $A(*,*)$ формы $\partial\bar{\omega}(*, *)$ на подпространстве θ_3; форма $A(*, *)$ коссимметрична и поэтому ранг ее является четным; кроме того, он постоянен в окрестности x_0; и наконец, размерность подпространства θ_3 нечетная. Следовательно, уравнение $A(x;\ \xi,\ *)=0$, где $\xi=\xi(x)\in\theta_3(x)$ — неизвестное векторное поле, имеет ненулевое решение $\xi_0(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Проверим, что поле ξ_0 является характеристическим для системы (7.1). Пусть $\eta=\eta(x)$ — произвольное поле из θ_3, т. е. $\eta\in\theta_3$. Тогда, во-первых, так как $\xi_0\in\theta_3$, то $\omega^i(\xi_0)=0$ $(i=1, 2, \ldots, n-4)$, $\bar{\omega}(\xi_0)=0$; во-вторых, так как $\xi_0\in\theta_3$ $\eta\in\theta_3$, то $\partial\omega^i(\xi_0,\ \eta)=0$ $(i=1,\ 2, \ldots, n-4)$; в-третьих, в силу уравнения (7.3) $\partial\bar{\omega}(\xi_0,\ \eta)=0$. Из этих равенств вытекает, что поле ξ_0 является характеристическим для системы (7.1), и наше утверждение доказано.

В заключении хочу отметить с чувством глубокой признательности, что эта работа стала во многом возможной благодаря идеям и заботам покойного профессора Московского университета Г. Е. Шилова. Приношу благодарность и профессору Р. Денчеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, 1947.
2. С. Ленг. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Москва, 1967.
3. Й. Б. Табов. О существовании разрешающих распределений размерности $n-r-1$ и $n-r-2$ системы Пфаффа ранга r в R^n. *Успехи мат. наук,* 30, 1975, №6, 181—188.
4. И. Г. Петровский. О проблеме Коши для системы уравнений с частными производными. *Мат. сб.,* 2, 1937, 825—870.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 20. 9. 1976