PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

SUR UNE CLASSE DE VARIÉTÉS PRESQUE-COMPLEXES

OLEG K. MUSHKAROV

On introduit la classe des variétés de type Hopf et on prouve que sur ces variétés il existe suffisamment de fonctions presque-holomorphes et de sous-variétés presque-complexes.

Introduction. On sait bien que la sphère de dimension 6, munie de la structure presque-complexe induite par la multiplication des nombres de Kalley, a les deux propriétés suivantes établies respectivement par Ehresemann (voir [5]) et Gray [7].

1) Sur tout sous-ensemble ouvert de S^6 il n'existe pas de fonctions presque-holomorphes non-constantes.

2) Il n'existe pas de sous-variétés presque-complexes de S^6.

Dans cet article sont construites des variétés presque-complexes non-intégrables sur lesquelles on a des riches familles de fonctions presque-holomorphes et de sous-variétés presque-complexes. Les constructions sont effectuées par un procédé analogue à celui de la construction des variétés de Hopf.

Dans 1 sont rappelées quelques notions générales nécessaires pour l'exposé. Dans 2 est donnée la construction générale du quotient d'une variété presque-complexe par rapport à un groupe d'automorphismes presque-holomorphes, qui opère librement et discrètement. 3 est consacré à une structure presque-complexe non-intégrable sur $\mathbf{R}^{2n}$ qu'on emploie dans 4, où sont construites les variétés de type Hopf, possédant les bonnes propriétés indiquées ci-dessus.

L'auteur remercie S. Dimiev de plusieurs suggestions utiles.

1. Quelques notions fondamentales liées avec les variétés presque-complexes. Soient (X, J) et (Y, K) deux variétés presque-complexes; X, Y sont les variétés indéfiniment différentiables sous-jacentes et J, K sont respectivement les structures presque-complexes déterminantes. L'application indéfiniment différentiable $f: X \to Y$ s'appelle presque-holomorphe [1, 4] si pour tout $x \in X$ on a

$$f_{*,x} \circ J_x = K_{f(x)} \circ f_{*,x} \tag{1.1}$$

où par $f_{*,x}$ est désignée l'application tangente de f au point x. Dans le cas particulier $Y = \mathbf{R}^2$ et $K = S$ (la structure presque-complexe standard sur $\mathbf{R}^2$), f s'appelle fonction presque-holomorphe sur la variété presque-complexe X. Les notions d'application et de fonction presque-holomorphe se réduisent respectivement aux notions d'application et de fonction holomorphe dans le cas où J et K sont intégrables tous les deux (c'est-à-dire X et Y sont des variétés complexes).

Soit (i, Y) une sous-variété indéfiniment différentiable de X, c'est-à-dire $i: Y \to X$ est un plongement indéfiniment différentiable. On dit que (i, Y) est une sous-variété presque-complexe de (X, J) s'il existe une structure presque-complexe K sur Y telle que le plongement i soit une application presque-holomorphe. On remarquera que si une telle structure existe elle est déterminée uniquement par i et J.

La proposition suivante nous donne un moyen de construire des variétés presque-complexes.

P r o p o s i t i o n 1.1. *Soient (X, Y) une variété presque-complexe, Y un espace topologique séparé et $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de Y formé d'ensemble ouvert de Y. Soit donné encore une famille d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$, $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$ telle que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ la composition $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ soit une application presque-holomorphe. Alors Y peut être munie d'une structure presque-complexe indéfiniment différentiable par rapport de laquelle toutes les applications φ_α sont presque-holomorphes.*

D é m o n s t r a t i o n. D'abord on munie Y d'une structure de variété indéfiniment différentiable, par rapport de laquelle les homéomorphismes φ_α sont indéfiniment différentiables. Cette structure est uniqument déterminée par les exigences pour les φ_α.

Si $y \in Y$, il existe un indice $\alpha \in A$ tel que $y \in U_\alpha$. Posons $K_y = (\varphi_\alpha)_{*,y}^{-1} \circ J_{\varphi_\alpha(y)} \circ (\varphi_\alpha)_{*,y}$. Ainsi la structure K est définie correctement parce que pour $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ on a

$$(\varphi_\alpha)_{*,y}^{-1} \circ J_{\varphi_\alpha(y)} \circ (\varphi_\alpha)_{*,y} = (\varphi_\beta)_{*,y}^{-1} \circ J_{\varphi_\beta(y)} \circ (\varphi_\beta)_{*,y}$$

grâce à la condition que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ est une application presque-holomorphe. On voit facilement que K est indéfiniment différentiable.

C o r o l l a i r e 1.2. *Si $\{\varphi_\alpha\ (U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de X, alors la structure presque-complexe K est intégrable si et seulement si J est intégrable.*

En effet, il suffit de prendre en considération que J est intégrable si et seulement si dans tout voisinage assez petit d'un point arbitraire $x \in X$ ils existent des fonctions presque-holomorphes $f_1, \ldots, f_n$ pour lesquelles les différentiels en x, $(df_1)_x, \ldots, (df_n)_x$, sont linéairement indépendentes [2].

2. Quotient d'une variété presque-complexe. Soient (X, J) une variété presque-complexe et f un difféomorphisme de X. On dit que f est un automorphisme presque-holomorphe de (X, J), si f est une application presque-holomorphe $f: X \to X$ par rapport à la structure presque-complexe J. C'est de (1.1) qu'il suit que f^{-1} est aussi un automorphisme presque-holomorphe. Ayant en vue que la composition de deux automorphismes presque-holomorphes est aussi un automorphisme presque-holomorphe on conclut que les automorphismes presque-holomorphes forment un groupe.

Soit G un groupe d'automorphismes presque-holomorphes. On dit que G opère librement sur X si à l'exception de l'identit de X, il n'y a pas d'éléments de G qui ont des points fixes. D'autre part, on dit que G opère discrètement sur X si pour toutes parties compactes L et N de X et pour tout $g \in G$ à l'exception d'un nombre fini, on a $g(L) \cap N = \emptyset$.

T h é o r è m e 2.1. *Soient (X, J) une variété presque-complexe et G un groupe d'automorphismes presque-holomorphes qui opère librement et discrètement sur X. On affirme que sur la variété quotient X/G il existe une* *structure presque-complexe $\tilde{J}$ uniquement déterminée, par rapport à laquelle la projection $\pi: X \to X/G$ est une application presque-holomorphe.*

Démonstration. Comme on sait bien, les conditions imposées sur G impliquent que la topologie quotient de X/G est séparée et que la projection canonique $\pi: X \to X/G$ est une application ouverte et continue. On va montrer que tout point $x_0 \in X$ possède un voisinage relativement compact V_0 tel que $g(V_0) \cap V_0 = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$. En effet, il existe un voisinage compact N de x_0 pour lequel $g(x_0) \notin N$ pour tout $g \in G$, $g \neq \mathrm{id}$. Il existe un nombre fini d'éléments $g_1, \ldots, g_m$ de G tels que $N \cap g_i(N) \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Alors le voisinage cherché de x_0 est

$$V_0 = \bigcap_{i=1}^{m} (\mathring{N} \setminus g_i(N))$$

où $\mathring{N}$ est l'intérieur de l'ensemble N.

Posons $W_0 = \pi(V_0)$. Il est clair que la restriction $\pi/_{V_0}: V_0 \to W_0$ est un homéomorphisme. Désignons par φ_{x_0} l'application inverse de $\pi/_{V_0}$. Soient x_0, x_1 deux points arbitraires dans X et W_0, W_1 les ouverts correspondants dans X/G construits comme ci-dessus. Supposons que $W_0 \cap W_1 \neq \emptyset$. On montrera que l'application

$$\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}: V_0 \cap \varphi_{x_0}(W_1) \to V_1 \cap \varphi_{x_1}(W_0)$$

est une application presque-holomorphe. En effet, soit $x \in V_0 \cap \varphi_{x_0}(W_1)$ alors $\pi(x) = \varphi_{x_0}^{-1}(x) \in W_1$ et si $\varphi_{x_1}(\pi(x)) = y$ on obtient que $y \in V_1$ et $\pi(x) = \pi(y)$. Il suit qu'on pout trouver un élément g_x de G uniquement déterminé, pour lequel on a $y = g_x(x)$. Nous avons montré que pour tout point $x \in V_0 \cap \varphi_{x_0}(W_1)$ on a $\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}(x) = g_x(x)$, mais g_x dépend éventuellement du choix de x. On verra maintenant qu'il existe un voisinage U de x tel qu'on a $\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}(y) = g_x(y)$ pour tout $y \in U$, c'est-à-dire g_x ne dépend pas de x sur U. Pour ce but on prend en vue qu'il existe un nombre fini d'éléments g de G, $g \neq \mathrm{id}$, pour lesquels on a $g(V_0) \cap V_1 \neq \emptyset$ (c'est parce que V_0 et V_1 sont relativement compacts). Ayant en vue que pour tout $y \in V_0 \cap \varphi_{x_0}^{-1}(W_1)$ on a $g_y(V_0 \cap \varphi_{x_0}^{-1}(W_1)) \cap V_1 \neq \emptyset$, on conclut qu'à chaque point de $V_0 \cap \varphi_{x_0}^{-1}(W_1)$ correspond un nombre fini d'éléments de G. Soient $g_x, g_1, \ldots, g_m$ les automorphismes en question, $g_i \neq g_x$, $i = 1, \ldots, m$. Supposons que pour tout voisinage U de x il existe un point $x_U \in U$ et un index i_U, $1 \leq i_U \leq m$, tels que $\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}(x_U) = g_{i_U}(x_U)$. Comme le nombre des index i_U est fini, il suit qu'existe un index $i, 1 \leq i \leq m$, et un filtre de voisinages de x (convergent vers x) dont les éléments correspondent à i. Mais on a $\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}(x_U) = g_i(x_U)$ et après le passage aux limites on obtient $g_x(x) = \varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}(x) = g_i(x)$. Comme G opère librement, il suit que $g_x = g_i$, ce qui est une contradiction. Ainsi nous avons démontré que pour tout point $x \in V_0 \cap \varphi_{x_0}^{-1}(W_1)$ il existe un voisinage de x sur lequel $\varphi_{x_1} \circ \varphi_{x_0}^{-1}$ coïncide avec un automorphisme presque-holomorphe.

Pour finir la démonstration il reste de prendre en vue qu'on a

$$\bigcup_{x_0 \in X} W_0 = X/G$$

et encore d'appliquer la proposition (1.1).

Le théorème est demontré complètement.

Corollaire 2.2. *La structure presque-complexe J de X est intégrable si et seulement si la structure presque-complexe $\tilde{J}$ de X/G est intégrable.*

Soient (i, Y) une sous-variété presque-complexe fermée de (X, J) et K la structure presque-complexe induite par i et J. Supposons que G est un groupe d'automorphismes presque-holomorphes de (X, J) qui opère librement et discrètement sur X et encore que la restriction de tout élément de G sur Y est un difféomorphisme de Y. Ça signifie que pour tout $g \in G$ on a $g \circ i(Y) \subset i(Y)$, c'est-à-dire l'application $i^{-1} \circ g \circ i : Y \to Y$ est correctement définie. Il n'est pas difficile de vérifier que ces applications sont des automorphismes presque-holomorphes de (Y, K). Désignons par H le groupe $H = \{i^{-1} \circ g \circ i / g \in G\}$. Comme (i, Y) est une sous-variété fermée, il est facile de voir que H opère librement et discrètement sur Y. Il suit du théorème (2.1) que Y/H est une variété presque-complexe.

Théorème 2.3. *La variété Y/H est une sous-variété presque-complexe fermée de X/G.*

Démonstration. Soient $\pi_X : X \to X/$ et $\pi_Y : Y \to Y/H$ les projections canoniques. On définit l'application $\tilde{i} : Y/H \to X/G$ comme il suit: $\tilde{y} \in Y/H$ on pose $\tilde{i}(\tilde{y}) = \widetilde{i(y)}$, où $y \in \tilde{y}$ et $\widetilde{i(y)}$ l'élément de X/G déterminé par $i(y) \in X$. Il est clair que $\tilde{i}$ est correctement définie et encore que $\tilde{i}$ est continue. On va montrer que $\tilde{i}$ est une application presque-holomorphe régulière entre les deux espaces quotients. Grâce à la continuité de $\tilde{i}$ il suit que pour tout point $\tilde{y} \in Y/H$ il existe un voisinage U de $\tilde{y}$ tel que:

1) $\tilde{i}(U)$ est contenu dans un voisinage de $\tilde{i}(\tilde{y})$ dans X/G sur lequel π_X est inversible.

2) π_Y est inversible sur U.

Alors, sur U on a l'égalité suivante $\tilde{i} = \pi_X \circ i \circ \pi_Y^{-1}$. D'ici on obtient que $\tilde{i}$ est une application presque-holomorphe régulière. Finalement, Y/H est une sous-variété fermée de X/G parce que la dernière égalité ci-dessus montre que $\tilde{i}$ est localement propre [3].

Le théorème est démontré complètement.

3. Une structure presque-complexe sur $\mathbf{R}^{2n}$. On rappellera que si (X, J) est une variété presque-complexe, alors le tenseur de Nijenhuis pour J s'appelle un champ tensoriel N de type $(1, 2)$ défini par l'égalité

$$N(A, B) = [A, B] + J[JA, B] + J[A, JB] - [JA, JB]$$

où A et B sont des champs vectoriels sur X et $[\,,\,]$ est le crochet de Lee. C'est du théorème de Newlander et Nirenberg [6] qu'il suit que la structure J est intégrable si et seulemennt si $N \equiv 0$. Si (U, x), $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ est une carte (système de coordonnées locales) sur X et la matrice correspondante à J est $\|a_k^j(x)\|$, $1 \leq j,\ k \leq 2n$ il n'est pas difficile de voir qu'on peut calculer les composantes $t_{k,l}^j$ du N d'après la formule suivante:

$$t_{k,l}^j = \sum_{p=1}^{2n}\left[\left(\frac{\partial a_k^j}{\partial x_p} - \frac{\partial a_p^j}{\partial x_k}\right) a_l^p - \left(\frac{\partial a_l^j}{\partial x_p} - \frac{\partial a_p^j}{\partial x_l}\right) a_k^p\right] \tag{3.1}$$

où $1 \leq j, k, l \leq 2n$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ les coordonnées canoniques (cartésiennes) de $\mathbf{R}^{2n}$ et $L = \|l_j^i\|$, $1 \leq i,\ j \leq 2n$ est une matrice pour laquelle on a $l_2^n = -l_{n+2}^{2n} = 1$ et tous les autres éléments sont égals à 0. Considérons la matrice:

(3.2) $$J_k(x)=kx_1^kL+S$$

où S est la structure presque-complexe standard sur $\mathbf{R}^{2n}$ et $k\geqq 0$ est un nombre entier. On voit directement que si $n\geqq 3$ on a $J_k^2(x)=-E_{2n}$, qui signifie que cette matrice détermine une structure presque-complexe J_k sur $\mathbf{R}^{2n}$.

Lemme 3.1. *Si $k\neq 0$ la structure presque-complexe J_k est non-intégrable.*

Démonstration. On peut calculer à l'aide de (3.1) et de (3.2) qu' on a $t^n_{2,n+1}(x)=-k^2x_1^{k-1}$. C'est-à-dire $N\neq 0$.

Lemme 3.2. *Soit $a\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ et $g_a:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ l'application suivante:*

$$g_a(x_1,\ldots,x_{2n})=(ax_1,\ldots,ax_{n-1},a^{k+1}x_n,ax_{n+1},\ldots,ax_{2n-1},a^{k+1}x_{2n}).$$

On affirme que g_a est un automorphisme presque-holomorphe de $(\mathbf{R}^{2n},J_k)$.

Démonstration. La démonstration suit du (1.1) et du (3.2).

Pour finir ce paragraphe on décrira toutes les fonctions presque-holomorphes sur $(\mathbf{R}^{2n},J_k)$.

Proposition 3.3. *Soit $U\subset\mathbf{R}^{2n}$ un ouvert connexe et $f:U\to\mathbf{R}^2$ une fonction infiniment différentiable. Alors pour que f soit une fonction presque holomorphe par rapport J_k, $k\neq 0$ il est nécessaire et suffisant que les deux conditions suivantes soient remplies:*

a) *f ne dépend pas des variables x_n et x_{2n}.*

b) *f vérifie les équations de Cauchy—Riemann par rapport aux autres variables $x_p(p\neq n,2n)$.*

Démonstration. Soit $f=(u,v)$, où u et v sont des fonctions réelles sur U. La condition nécessaire et suffisante pour que soit une fonction presque-holomorphe est la suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x_s}(x)=\sum_{i=1}^{2n}a_s^i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x),\quad s=1,2,\ldots,2n,$$

où $a_s^i(x)$ sont les composantes du J_k. De la définition du J_k (voir (3.2)) on obtient:

(3.3) $$\frac{\partial u}{\partial x_s}=\frac{\partial v}{\partial x_{n+s}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_{n+s}}=-\frac{\partial v}{\partial x_s},\quad 1\leqq s\leqq n,\ s\neq 2,$$

et encore

(3.4) $$\frac{\partial u}{\partial x_2}=k\,x_1^k\frac{\partial v}{\partial x_n}+\frac{\partial v}{\partial x_{n+2}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_{n+2}}=-kx_1^k\frac{\partial v}{\partial x_{2n}}-\frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

On verra que $\partial v/\partial x_n=\partial v/\partial x_{2n}=\partial u/\partial x_n=\partial u/\partial x_{2n}=0$. En effet, ce n'est pas difficile de voir à l'aide de (3.4) qu'on a

(3.5) $$\frac{\partial^2u}{\partial x_{n+1}\partial x_2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_{n+2}}=kx_1^k\frac{\partial^2v}{\partial x_{n+1}\partial x_n}+\frac{\partial^2v}{\partial x_{n+1}\partial x_{n+2}}-kx_1^k\frac{\partial^2v}{\partial x_1\partial x_{2n}}$$
$$-k^2x_1^{k-1}\frac{\partial v}{\partial x_{2n}}-\frac{\partial^2v}{\partial x_1\partial x_2}.$$

Evidemment on a encore

$$\partial^2u/\partial x_{n+1}\partial x_2=-\partial^2v/\partial x_2\partial x_1,\quad \partial^2u/\partial x_1\partial x_{n+2}=\partial^2v/\partial x_{n+2}\partial x_{n+1},$$
$$\partial^2u/\partial x_{n+1}\partial x_n=\partial^2v/\partial x_1\partial x_{2n}.$$

Il suit de (3.5) que $x_1^{k-1}\partial v/\partial x_{2n}=0$. Parce que v est une fonction analytique [4], on obtient que $\partial v/\partial x_{2n}=0$. De la même façon on prouve que $\partial v/\partial x_n=0$. Il suit de (3.3) que $\partial u/\partial x_n=\partial u/\partial x_{2n}=0$. Pour finir la démonstration il reste de prendre en vue que (3.3) et (3.4) sont exactement les équations de Cauchy — Riemann.

4. Variétés presque-complexes de type Hopf. D'abord est donnée une version réelle de notion de la variété de Hopf. Désignons $\mathbf{R}^{2n}\setminus\{0\}$ par $\mathbf{R}_*^{2n}$ et par $H=\{h_a, a\in\mathbf{Z}\}$ le groupe d'automorphismes presque-complexes de $(\mathbf{R}_*^{2n}, S)$ défini comme il suit: $h_a(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})=(e^a x_1, e^a x_2, \ldots, e^a x_{2n})$. On sait que H opère librement et discrètement sur $\mathbf{R}_*^{2n}$. Du théorème 2.1 et du corollaire 2.2 on obtient que $H_{2n}=\mathbf{R}_*^{2n}/H$ est une variété presque-complexe dont la structure presque-complexe est intégrable. On remarquera que H_{2n} considérée comme une variété complexe de dimension n s'appelle variété de Hopf [9].

Soit $n\geqq 3$. Il suit du lemme 3.2 que pour tout nombre réel l'application $g_a:\mathbf{R}_*^{2n}\to\mathbf{R}_*^{2n}$ définie ci-dessous

$$(4.1)\quad g_a(x_1, \ldots, x_{2n})=(e^a x_1, \ldots, e^a x_{n-1}, e^{(k+1)a}x_n, e^a x_{n+1}, \ldots, e^a x_{2n-1}, e^{(k+1)a}x_{2n})$$

est un automorphisme presque-holomorphe de $(\mathbf{R}_*^{2n}, J_k)$. Notons par $G_{2n}^{(k)}$ l'ensemble $G_{2n}^{(k)}=\{g_a, a\in\mathbf{Z}\}$. Evidemment $G_{2n}^{(k)}$ est un groupe d'automorphismes presque-holomorphes de $(\mathbf{R}_*^{2n}, J_k)$.

L e m m e 4.1. *Le groupe $G_{2n}^{(k)}$ opère librement et discrètement sur $\mathbf{R}_*^{2n}$.*

D é m o n s t r a t i o n. La première assertion est évidente. Soit $x\in\mathbf{R}_*^{2n}$. L'orbite de x par rapport a G_{2n}^k est la suite $\{g_p(x)\}_{p=-\infty}^{\infty}$. La suite des normes euclidiennes $\{\|g_p(x)\|\}_{p=-\infty}^{\infty}$ est une suite de nombres positifs, ayant 0 et $+\infty$ comme points d'accumulation, ce qui signifie que $G_{2n}^{(k)}$ opère discrètement.

Il suit du théorème 2.1 et du lemme 4.1 que le quotient $H_{2n}^{(k)}=\mathbf{R}_*^{2n}/G_{2n}^{(k)}$ est une variété presque-complexe. Si l'on prend en vue le lemme 3.1 et le corollaire 2.2 on trouve que $\widetilde{J}_k$ est une structure presque-complexe non-intégrable sur $H_{2n}^{(k)}$.

Evidemment $G_{2n}^{(k)}$ est un groupe d'automorphismes presque-holomorphes de $(\mathbf{R}_*^{2n}, S)$. Alors $H_{2n}^{(k)}$ est muni de la structure quotient $\widetilde{S}$, qui est intégrable. Considérons la variété suivante:

$$V_{2n-1}^{(k)}=\{x\in\mathbf{R}^{2n}/x_1^{2(k+1)}+\cdots+x_{n-1}^{2(k+1)}+x_n^2+x_{n+1}^{2(k+1)}+\cdots+x_{2n-1}^{2(k+1)}+x_{2n}^2=1\}.$$

P r o p o s i t i o n 4.2. *La variété $H_{2n}^{(k)}$ est difféomorphe à $S^1\times V_{2n-1}^{(k)}$ où S^1 est la circonférence de rayon* 1.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $g:\mathbf{R}\times V_{2n-1}^{(k)}\to\mathbf{R}_*^{2n}$ l'application définie par $g(a, x)=g_a(x)$ où g_a est l'application de (4.1). Il est évident que g est un difféomorphisme. Le groupe additif des nombres entiers $\mathbf{Z}$ opère sur $\mathbf{R}\times V_{2n-1}^{(k)}$ de la façon suivante: $(t, x)\mapsto(t+m, x)$ et la quotient $\mathbf{R}\times V_{2n-1}^{(k)}/\mathbf{Z}$ est difféomorphe à $S^1\times V_{2n-1}^{(k)}$. A l'aide de g l'action de $\mathbf{Z}$ peut être transporté sur $\mathbf{R}_*^{2n}$. Cette action est la même que l'action du groupe $G_{2n}^{(k)}$. Il suit que $\mathbf{R}\times V_{2n-1}^{(k)}/\mathbf{Z}$ est difféomorphe à $H_{2n}^{(k)}$, ce qui complète la démonstration.

T h é o r è m e 4.3. *La variété $(H_{2n}^{(k)}, \widetilde{S})$ est sous-variété presque-complexe fermée de $(H_{2n+2}^{(k)}, \widetilde{J}_k)$.*

Démonstration. Désignons par Y la sous-variété fermée du $\mathbf{R}_*^{2n+2}$ définie par $Y=\{x\in\mathbf{R}_*^{2n+2}\mid x_2=x_{n+2}=0\}$. Il est facile de vérifier que Y est une sous-variété presque-complexe du $(\mathbf{R}_*^{2n+2}, J_k)$. En identifiant Y avec $\mathbf{R}_*^{2n}$, la restriction de J_k sur $\mathbf{R}_*^{2n}$ coïncide avec S. D'autre part la restriction de $G_{2n+2}^{(k)}$ sur $\mathbf{R}_*^{2n}$ (identifiée avec Y) est exactement $G_{2n}^{(k)}$, donc la proposition suit du théorème 2.3.

Théorème 4.4. Variété de Hopf H_{2n} est une sous-variété presque-complexe fermée de $(H_{2n+4}^{(k)}, \tilde{J}_k)$.

Démonstration. Considérons $\mathbf{R}_*^{2n}$ comme une sous-variété fermée de $\mathbf{R}_*^{2n+4}$ définie par $\mathbf{R}_*^{2n}=\{x\in\mathbf{R}_*^{2n+4}/x_2=x_{n+2}=x_{n+4}=x_{2n+4}=0\}$. En suite la démonstration est semblable à celle de théorème 4.3. Il faut encore vérifier que la restriction du groupe $G_{2n+4}^{(k)}$ sur $\mathbf{R}_*^{2n}$ est exactement le groupe H qui donne H_{2n}.

Théorème 4.5. *Pour tout point* $x\in(H_{2n}^{(k)}, \tilde{J}_k)$ *il y a un voisinage de* x *sur lequel existent des fonctions presque-holomorphe* $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ *pour lesquelles les différentiels* $df_1, df_2, \ldots, df_{n-1}$ *sont linéairement indépendentes.*

Démonstration. La démonstration suit du théorème 2.1 et du proposition 3.3.

Rémarque. De la proposition 4.2 et de la proposition 1.1 il résulte que la variété $S^1\times V_5^{(k)}$ possède une structure presque-complexe non-intégrable $\tilde{J}_k$. D'autre part $S^1\times V_5^{(k)}$ est une hypersurface de $\mathbf{R}^7$, et d'après la méthode générale de Calabi [8] on peut munir cette hypersurface d'une structure presque-complexe K. Les structures K et J_k sont différents parce que dans le cas contraire à l'aide d'un théorème de Calabi ([8, p. 429]) on trouve un contradiction avec le théorème 4.5.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Heigason. Differential Geometry and Symetric Spaces, New York, 1962.
2. S. Kobayachi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry, v, II. New York, 1969.
3. R. Narasimhan. Analysis on Real and Complex Manifolds. Amsterdam, 1968.
4. W. Bootby, S. Kobayachi, H. C. Wang. A note on mapings and automorphisms of almost complex manifolds. *Ann. Math.*, **77**, 1963, 329—334.
5. R. Hermann. Compact homogeneous almost complex spaces of positive characteristic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83, 1956, 471—481.
6. A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. Math.*, **65**, 1957, 391—404.
7. A. Gray. Almost complex submanifolds of the six sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**, 1969, 277—279.
8. E. Calabi. Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87, 1958, 407—438.
9. M. Ise. On the geometry of Hopf manifolds. *Osaca Math., J.*, **12**, 1960, 387—402.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 26. 12. 1978