PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ENSEMBLES BIEN SITUÉS DANS LES ALGEBRES COMPLEXES

PETER V. STOEV

On étudie l'ensemble des points extrémaux de certains ensembles convexes fermés non-compacts (en fait: les boules unité fermées dans une classe d'algèbres commutatives complexes). Un cas particulier de C^*-algèbre non-commutative est abordé aussi.

Désignons par E un espace localement convexe réel. Soient P et Q deux sous-ensembles de E. Rappelons [1; 7] qu'on dit que le sous-ensemble Q est bien situé par rapport à P si pour toute forme linéaire continue f sur E et pour tout nombre réel c pour lequel on a un point $x \in P$ vérifiant l'égalité $f(x) > c$ on peut trouver aussi un point $y \in Q$ tel que $f(y) > c$ soit remplie. En d'autres termes Q est bien situé par rapport à P si et seulement si tout semi-espace ouvert de E, qui contient des points de P, contient aussi des points de Q.

Dans cet article on montre que la notion d'ensembles bien situés s'adapte sans difficultés pour les espaces vectoriels complexes localement convexes.

Etant donné un espace vectoriel complexe E désignons par E_0 l'espace réel obtenu de E à l'aide de la restriction du champ de nombres complexes $\mathbf{C}$ au champ des nombres réels $\mathbf{R}$; c'est-à-dire E_0 est l'espace sous-jacent de E considéré comme un espace vectoriel sur la champ $\mathbf{R}$.

Soient P et Q deux sous-ensembles de E. On dira que Q est bien situé par rapport à P dans E, si Q est bien situé par rapport à P dans E_0.

A l'aide du théorème de Hanh-Banach on obtient l'assertion suivante:

Proposition 1. *Le sous-ensemble Q est bien situé par rapport à P si et seulement si l'inclusion $P \subset \overline{\approx} Q$ a lieu.*

La démonstration est immédiate.

Soit X un espace topologique séparé. Désignons par $C(X)$ l'algèbre de toutes les fonctions continues à valeurs complexes définies sur X. Dans le cas où X est un ensemble compact l'algèbre considérée $C(X)$ est une algèbre normée par rapport à sup-norme. Désignons par $B_{C(X)}$ la boule unité fermée de $C(X)$ et par $\mathcal{E}(B_{C(X)})$ l'ensemble de points extrémaux de $B_{C(X)}$. On voit sans peine que la proposition suivante est vraie:

Proposition 2. *L'élément f de $B_{C(X)}$ est un point extrémal de $B_{C(X)}$ si et seulement si pour tout $x \in X$ on a $|f(x)| = 1$.*

On doit à R. Phelps [2] le théorème suivant:

L'ensemble $\mathcal{E}(B_{C(X)})$ des points extrémaux de la boule unité fermée de l'algèbre $C(X)$ est bien situé par rapport à l'ensemble des tous les points de $B_{C(X)}$.

Dans la suite on étudiera les questions de l'existence et de „la bonne situation" de points extrémaux de la boule unité dans une classe d'algèbres commutatives complexes.

PLISKA Studia mathematica bulgarica. Vol. 4, 1981, p. 80—83.

Théorème 1. *Soit A une C^*-algèbre commutative. Alors, si A admet un élément unité on affirme que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée B_A est bien situé par rapport à l'ensemble de tous les points de B_A. Si A n'admet pas d'élément unité l'ensemble des points extrémaux de B_A est vide ($\mathcal{E}(B_A)=\emptyset$).*

Démonstration. D'après le théorème de Gelfand—Neumark l'algèbre A est isométrique à l'algèbre $C_0(M)$ des fonctions continues à valeurs complexes, convergent vers zéro dans l'infinie, définies sur l'espace M des idéaux maximaux de A, qui est muni de la topologie de Gelfand. Si l'algèbre A admet un élément unité, l'espace M est compact et comme il suit du théorème de Phelps que les points extrémaux de la boule unité ont la propriété énoncée.

Maintenant considérons le cas où l'algèbre A n'admet pas d'élément unité. Soit $M^*=M\cup\{\infty\}$ la compactification d'Alexandroff de l'espace M. Comme M est localement compact, M^* est séparé et par conséquent normal. On peut supposer que l'algèbre A est plongée dans l'algèbre $C(M^*)$ des fonctions continues sur M^*.

Soit f un élément de B_A. S'il existe un point x_0 de M pour lequel on a $0<|f(x_0)|<1$. considérons l'ensemble $K=\{x\in M \mid |f(x)|\geq|f(x_0)|\}$. Cet ensemble est fermé dans M^*. D'après le théorème de Titze-Urison on construit la fonction continue

$$g(x)=\begin{cases} 1-|f(x)|, & x\in K; \\ 0 & , x=\infty. \end{cases}$$

Comme $g\in B_A$ et $g\neq 0$, on a $|f|+|g|\leq 1$. Maintenant on voit sans peine que f n'est pas un point extrémal de B_A.

Si $|f|$ ne prend que les valeurs 0 et 1, considérons l'ensemble $K_1=\{x\in M \mid |f(x)|=1\}$. On prend un point $x_1\in M\setminus K_1$ et la fonction

$$h(x)=\begin{cases} 0, & x\in K_1\cup\{\infty\}; \\ 1, & x=x_1. \end{cases}$$

On a $h\in B_A$, $b\neq 0$ et $|f|+|h|\leq 1$, c'est-à-dire $f\in\mathcal{E}(B_A)$.

Le théorème est démontré.

Une conséquence du théorème ci-dessus et du théorème de Phelps est le théorème suivant:

Théorème 2. *Soient T un ensemble non-vide et A l'algèbre autoadjointe uniformément fermée des fonctions à valeurs complexes définies sur T. Alors, si $\mathcal{E}(B_A)\neq\emptyset$, l'assertion „$\mathcal{E}(B_A)$ est bien situé par rapport à B_A" est équivalente à l'assertion „B_A possède un élément unité". Si dans l'algèbre A il n'y a pas d'élément unité, la boule B_A n'a pas de points extrémaux.*

Démonstration. En effet les conditions du théorème énoncé assurent que l'algèbre A est une C^*-algèbre commutative.

Corollaire 1. *Si X est un espace topologique, considérons l'algèbre $BC(X)$ des fonctions continues bornées à valeurs complexes sur X. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de l'algèbre $BC(X)$ est bien situé par rapport à l'ensemble de tous les points de la boule en question.*

Corollaire 2. *Si (S,Σ,μ) est un espace muni d'une mesure positive, alors dans l'espace $L^\infty(S,\Sigma,\mu)$ des fonctions à valeurs complexes essentiellement μ-bornées, l'ensemble des points extrémaux de sa boule unité fermée est bien situé par rapport à l'ensemble de tous les points de la boule unité fermée.*

En effet, il suffit de prendre en vue que $L^{\infty}(S, \Sigma. \mu)$ est isométriquement isomorphe à un espace de type $C(S_1)$ pour un compact S_1 convenablement choisi [3].

On remarquera que les espaces $L^p(S, \Sigma, \mu)$ ont la même propriété pour tout p, $1<p<\infty$. En effet, ces espaces sont réflexifs et par conséquent leurs boules unité fermées sont faiblement compactes. Il reste d'appliquer le théorème de Krein—Milman. D'autre part on n'affirme pas que chaque algèbre de Banach A, possédant la propriété que „l'ensemble des points extrémaux de sa boule unité fermée B_A est bien situé par rapport à l'ensemble de tous les points de B_A", est une C^*-algèbre. Par exemple, l'algèbre des fonctions complexes continues sur le cercle unité fermé du plan complexe et analytique dans l'intérieur possède cette propriété, mais pour cette algèbre il n'existe aucune réalisation comme C^*-algèbre [4].

Signalons que les questions de l'existence et de la description des points extrémaux de la boule unité fermée dans une C^*-algèbre non-commutative sont abordées dans [5] et [6]. On a les résutats suivants:

1. La boule unité fermée B_A de A possède des points extrémaux si et seulement si A admet un élémenf unité e [5].

2. Pour que le point x de B_A soit un élément extrémal de B_A il faut et il suffit que l'ensemble $(e=x^*x)A(e-xx^*)=\{(e-x^*x)y(e-xx^*) \mid y \in A\}$, ne contienne que l'origine o de A.

Ici on donne la condition suffisante suivante:

Théorème 3. *Soit A une C^*-algèbre non-commutative avec un élément unité e, vérifiant la propriété que tous ses éléments sont normaux. Alors sa boule unité fermée B_A a la propriété que l'ensemble des ses points extrémaux est bien situé par rapport à l'ensemble des tous les points de B_A.*

Démonstration. Si x est un élément unitaire de A (i. e. $xx^*=x^*x=e$), d'après 2 on a $x \in \mathcal{E}(B_A)$. On va démontrer que les points unitaires de A forment un ensemble qui est bien situé par rapport à l'ensemble de tous les points de B_A. Soit y un élément normal de B_A (i. e. $yy^*=y^*y$) et soit la C^*-algèbre engendrée par les éléments e, y et y^*. L'algèbre D est une algèbre commutative et d'après la proposition 2 et le théorème 1 on peut approcher y en norme par des combinaisons convexes de points extrémaux de la boule unité de D. En tenant compte de la réalisation de D comme une algèbre de fonctions complexes continues on voit, que chaque point extrémal de B_D est un élément unitaire de D, qui de sa part, est unitaire aussi dans A. Donc B_A coïncide avec la clôture convexe des éléments unitaires de A, ce que démontre le théorème.

Remarque. On peut introduire la notion d'ensembles bien situés aussi dans les espaces vectoriels sur un corps quaternionique. En utilisant la méthode de Phelps on peut obtenir un théorème analogue au théorème de Phelps, concernant l'algèbre des fonctions continues à valeurs quaternioniques, sur un espace topologique compact séparé, muni de la sup-norme.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Dimiev. Espaces vectoriels topologiques convexement préordonnés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **274**, 1972. 1156—1159.
2. R. Phelps. Extreme points in function algebras. *Duke Math. J.* **32**, 1965. 267—277.
3. N. Dunford, J. Schwartz. Linear operators, part I. New York, 1958.

4. K. Hoffman. Analytic functions and logmodular Banach algebras. *Acta Math.*, 108 271—317.
5. W. Zelazko. Banach algebras. Warszawa, 1973.
6. Ph. Miles. B^*-algebras unit ball extremal points. *Pacific J. Math.*, 17, 1964, 627—637.
7. С. Димиев, Р. Лазов, К. Петров. Някои въпроси за добре разположените множества. *Математика и математическо образование* (Доклади на Четвърта пролетна конференция на БМД, Перник, 2—4 април 1975 г.). София, 1978, 105—118.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 29. 12. 1978