PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СО СВОБОДНЫМИ ПОЛЮСАМИ

ПЕТР Г. БОЯДЖИЕВ

Изучается сходимость по емкости последовательностей рациональных функций порядка (n, m) со свободными полюсами, интерполирующие данную аналитическую функцию в нулях многочленов Чебышева, ассоциированных с данным компактом комплексной плоскости.

1. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в окрестности нуля; это эквивалентно заданию степенного ряда $f(z)=\Sigma f_\nu z^\nu$. Пусть n и m — неотрицательные целые числа. Очевидно существуют многочлены $p_{n,m}$ и $q_{n,m}$ степени (степень многочлена p будем обозначать через ∂p) $\partial p_{n,m} \leqq n$ и $\partial q_{n,m} \leqq m$, такие, что

$$(1) \qquad q_{n,m}(z) f(z) - p_{n,m}(z) = Az^{n+m+1} + \ldots,$$

где справа стоит ряд по возрастающим степеням z. Коэффициенты этих многочленов определяются решением линейной системы из $n+m+1$ уравнений с $n+m+2$ неизвестными. Эти многочлены может быть не единственны, но рациональная функция $\pi_{n,m}=p_{n,m}/q_{n,m}$ единственна; если $s_{n,m}$ и $t_{n,m}$ — другое решение (1), то $s_{n,m}/t_{n,m} \equiv p_{n,m}/q_{n,m}$. Рациональная функция $\pi_{n,m}$ называется (n, m)-той аппроксимации Паде для функции f; таблица $\{\pi_{n,m}\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $m=0, 1, 2, \ldots$ называется таблицей Паде функции f. Очевидно $\pi_{n,0}$ совпадает с n-той частичной суммой ряда Тейлора функции f. Таким образом таблица Паде содержит как одну из своих строк Тейлоровские многочлены функции f, и можно ожидать, что изучение этой таблицы даст более обширную информацию об f чем $\pi_{n,0}$.

Первый значительный результат о таблице Паде был получен Монтесу де Балором [1], который доказал следующую теорему.

Теорема (Монтесу де Балор). *Пусть голоморфная в окрестности нуля функция f продолжается до мероморфной в круге D функции и пусть продолжение имеет в этом круге ровно m полюсов (любой полюс считается столько раз, сколько его кратность). Пусть D' — область, получающаяся из D удалением полюсов f. Тогда*

а) *$\pi_{n,m}(z)$ равномерно сходится к f на компактных подмножествах D';*

б) *если z_0 — полюс f кратности l и V — окрестность z_0, не содержащая других полюсов f, то найдется n_0 такое, что при $n \geqq n_0$ $\pi_{n,m}$ имеет в V ровно l полюсов.*

ПЛИСКА Български математически студии. Том 4, 1981, с. 84—97.

Утверждение б) выражает иными словами тот факт, что полюсы $\pi_{n,m}$ накапливаются к полюсам f, при этом с соблюдением кратности.

Если, однако, функция f имеет меньше чем m полюсов в круге D, то, вообще говоря, $\pi_{n,m}(z)$ не сходится равномерно к f на компактных подмножествах D'. Так, например, Валлин [2] показал, что какова бы ни была последовательность натуральных чисел $\{m_n\}$, $m_n \geqq 1$, можно построить целую функцию, такую, что множество полюсов π_{n,m_n}, $n=1, 2, \ldots$, всюду плотно в $\mathbf{C}$. Таким образом возникает необходимость искать другие более удачные способы сходимости $\pi_{n,m}$.

Определение 1. *Пусть $\mu(E)$ — функция множества, определенная на подмножествах комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится к f по функции μ на компактных подмножествах множества D, если для любого компакта $K \subset D$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение $\mu\{z \in K: |f(z) - f_n(z)| \geqq \varepsilon\} \to 0$, $n \to \infty$.*

Определение 2. *Для любого $E \subset \mathbf{C}$ положим $m_1(E) = \inf\{\Sigma_\nu |U_\nu|\}$, где* inf *берется по всем покрытиям E счетными множествами кругов $\{U_\nu\}$, а $|U_\nu|$ — радиус круга U_ν.*

В этой работе мы будем рассматривать сходимость по мере $m_1(E)$ (когда $\mu(E) = m_1(E)$) и сходимость по емкости (когда $\mu(E) = \operatorname{cap} E$, где $\operatorname{cap} E$ — логарифмическая емкость множества E).

Отметим, что из неравенства $m_1(E) \leqq A \operatorname{cap} E$, где A — постоянная (см. [7, гл. III, § 4]) вытекает, что сходимость по m_1-мере — следствие сходимости по емкости.

Отметим еще следующий факт, которым будем в дальнейшем часто пользоваться: Если $p_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ и $\varrho > 0$, то $\operatorname{cap}\{z \in \mathbf{C}: |p_n(z)| \leqq \varrho\} = \varrho^{1/n}$ (см. [8, стр. 290]).

Первые результаты о сходимости $\pi_{n,m}$ по мере m_1 или по емкости были получены Натолом [3] и Померенке [4]. В дальнейшем их результаты были усилены многоми авторами. Настоящая работа наиболее примыкает к работам Гончара [5] и Вавилова [6] и посвящена перенесению результатов Вавилова на более общую ситуацию, которую мы рассматриваем. Идея доказательства теоремы 1 заимствована из [5]; формулировка теоремы 2 совпадает с формулировкой, аналогичной теореме Вавилова [6], а ее доказательство — незначительно упрощенное доказательство Вавилова.

В пункте 2 мы даем нужные для дальнейшего определения и обозначения и приводим одну интерполяционную формулу. Существенная часть работы начинается с пункта 3. Наиболее значительные результаты, по нашему мнению — теоремы 1, 2 и 3 и следствие 2 пункта 3.

2. Пусть E — ограниченный, регулярный компакт на плоскости $\mathbf{C}$ со связным дополнением. (Компакт называется регулярным, если компонента его дополнения, содержащая ∞, регулярна относительно задачи Дирихле.) Функцию Грина для $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ с полюсом в точке ζ будем обозначать через $g(z, \zeta)$. Если $\sigma > 0$, то полагаем $L_\sigma = \{z \in \mathbf{C}: g(z, \infty) = \sigma\}$ и $D_\sigma = \{z \in \mathbf{C}: g(z, \infty) < \sigma\} \cup \widehat{E}$, где $\widehat{E}$ — полиномиально выпуклая оболочка E. Очевидно D_σ — ограниченное открытое множество, граница которого совпадает с L_σ; L_σ состоит из конечного числа жордановых кривых.

Пусть $\alpha = \{\alpha_{nk}\}$, $n=1, 2, \ldots$, $k=1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих E. Точки α_{nk}, $k=1, 2, \ldots, n$, не обязательно различны между собой, но любая из них будет выписываться в последовательности α_{n1}, α_{n2}, $\ldots$, α_{nn} столько раз, сколько кратность α_{nk} как нуль полинома $(z-\alpha_{n1})(z-\alpha_{n2})\ldots(z-\alpha_{nn})$.

Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная на E и n и m — фиксированные неотрицательные целые числа. Пусть $p_{n,m}(z)$, $\partial p_{n,m}\leqq n$ и $q_{n,m}(z)$, $\partial q_{n,m}\leqq m$ — многочлены, удовлетворяющие условиям

$$(2)\qquad (q_{n,m}f-p_{n,m})(\alpha_{n+m+1,k})=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n+m+1.$$

Тогда рациональную функцию $\pi^{(\alpha)}_{n,m}(f, z)=p_{n,m}(z)/q_{n,m}(z)$ будем называть рациональной функцией порядка (n, m) со свободными полюсами, интерполирующей $f(z)$ в точках $\alpha_{n+m+1,k}$, $k=1,\ 2\ldots,\ n+m+1$. Отметим при этом особо, что в (2) точка $\alpha_{n+m+1,k}$ считается по определению столь кратным нулем функции $q_{n,m}f-p_{n,m}$, сколько раз эта точка выписана в последовательности $\alpha_{n+m+1,k}$, $k=1,\ 2,\ldots,\ n+m+1$. При этом, если нет опасности для недоразумений, значки (α) и f, а иногда и независимую переменную z будем опускать: будем просто писать $\pi_{n,m}$.

Предложение. *Какова бы ни была таблица $\alpha=\{\alpha_{n,k}\}$, существует единственная рациональная функция порядка (n, m) со свободными полюсами, интерполирующая $f(z)$ в точках $\alpha_{n+m+1,k}$, $k=1,\ 2,\ldots,\ n+m+1$.*

Доказательство. Существование следует немедленно из (2), которое является системой из $n+m+1$ уравнений с $n+m+2$ неизвестными, коэффициентами искомых полиномов.

Если $s_{n,m}$, $\partial s_{n,m}\leqq n$ и $t_{n,m}$, $\partial t_{n,m}\leqq m$ — другая пара многочленов, такая, что

$$(3)\qquad (t_{n,m}f-s_{n,m})(\alpha_{n+m+1,k})=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n+m+1,$$

то, умножая (2) на $t_{n,m}$, а (3) на $q_{n,m}$ и вычитая, получим

$$(4)\qquad (s_{n,m}q_{n,m}-p_{n,m}t_{n,m})(\alpha_{n+m+1,k})=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n+m+1,$$

откуда следует, что полином $s_{n,m}q_{n,m}-p_{n,m}t_{n,m}$ тождественно равен нулю.

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная область в комплексной плоскости со спрямляемой границей Γ. Пусть $\varphi(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_k — фиксированные, различные точки в D, s_ν, $\nu=1,\ 2,\ldots,\ k$ — фиксированные натуральные числа и $s=\Sigma s_\nu$. Пусть p и q — полиномы, $\partial p\leqq s-1$ (на степень q ограничений нет) такие, что ζ_ν является s_ν кратным нулем функции $q\varphi-p$. Тогда имеет место формула*

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,\frac{\omega(z)}{\omega(t)}\,\frac{q(t)}{q(z)}\,\frac{\theta(t)}{\theta(z)}dt=\begin{cases}\varphi(z)-p(z)/q(z), & z\in D,\\ -p(z)/q(z), & z\notin\overline{D},\end{cases}$$

где $\theta(z)$ — произвольный многочлен, такой, что $\partial\theta+\partial p\leqq s-1$, а $\omega(z)=\Pi^k_{\nu=1}(z-\zeta_\nu)^{s_\nu}$.

Доказательство. Докажем только первое из равенств (5). Поскольку левая и правая части (5) — мероморфные в D функции, то достаточно доказать это равенство при $z\neq\zeta_\nu$, $\nu=1,\ 2,\ldots,\ k$. Из условия теоремы следует, что в некоторой окрестности $V_\nu\subset D$ точки ζ_ν имеет место представление

$$q(z)\theta(z)\varphi(z)-p(z)\theta(z)=(z-\zeta_\nu)^{s_\nu}\psi_\nu(z), \tag{6}$$

где $\psi_\nu(z)$ голоморфна в V_ν. Пусть Γ_ν, $\nu=1, 2, \ldots, k$ непересекающиеся, взаимновнешние окружности, $\Gamma_\nu\subset V_\nu$ с центрами в ζ_ν и Γ_z — окружность в D с центром z, взаимновнешняя в Γ_ν, $\nu=1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,\frac{\omega(z)}{\omega(t)}\,\frac{q(t)}{q(z)}\,\frac{\theta(t)}{\theta(z)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{k}\int_{\Gamma_\nu}=\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{k}\int_{\Gamma_\nu}. \tag{7}$$

Из (6) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,\frac{\omega(z)}{\omega(t)}\,\frac{q(t)}{q(z)}\,\frac{\theta(t)}{\theta(z)}dt=\frac{\omega(z)}{q(z)\theta(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\frac{\theta(t)\,p(t)}{(t-z)\omega(t)}dt. \tag{8}$$

Функция $\theta(t)\,p(t)/\omega(t)$ голоморфна вне объединения Γ_ν и равна нулю в бесконечности. Поскольку z тоже лежит вне этого объединения, то

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{k}\int_{\Gamma_\nu}=\frac{\omega(z)}{q(z)\theta(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{k}\int_{\Gamma_\nu}\frac{\theta(t)\,p(t)}{(t-z)\omega(t)}dt=-\frac{p(z)}{q(z)}. \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует (5).

Второе равенство в (5) доказывается точно так же: только окружности Γ_z не будет.

3. Пусть E — регулярный компакт со связным дополнением и $\alpha=\{\alpha_{n\nu}\}$, $n=1, 2, \ldots, \nu=1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, такая, что

$$\lim \prod_{k=1}^{n}|z-\alpha_{n\nu}|^{1/n}=\operatorname{cap} E\,.\,e^{g(z,\infty)}, \qquad z\notin E. \tag{10}$$

Известно, что такие таблицы существуют; в качестве α можно взять, например, таблицу нулей полиномов Чебышева для компакта E или таблицу Фекете — экстремальная таблица узлов при определении трансфинитного диаметра E.

Пусть $f(z)$ — голоморфная в окрестности E функция и $\sigma>0$ — фиксированное число. Предположим, что f продолжается до функции, мероморфной в $\bar{D}_\sigma$ и на границе полюсов не имеет (продолжение опять будем обозначать буквой f). Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, $\mu<\infty$ — полюсы функции f в D_σ (выписанные с учетом кратности). Положим $v(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\mu)$. Пусть $\pi_{n,m}=\pi^{(\alpha)}_{n,m}(f, z)$, $m\geqq\mu$ — таблица рациональных функций порядка (n, m) со свободными полюсами, построенная в пункте 2 (см. систему (2)). Из (2) следует, что голоморфная в $\bar{D}_\sigma$ функция $\varphi(z)=v(z)f(z)$ будет удовлетворять условиям $(q_{n,m}\varphi-vp_{n,m})(\alpha_{n+m+1,\nu})=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n+m+1$. Поскольку $\partial(vp_{n,m})\leqq\mu+n<n+m+1$, то для $\varphi(z)$, полиномов $p=vp_{n,m}$ и $q=q_{n,m}$ и числа $s=n+m+1$ применима формула (5) с $\theta=1$. Таким образом получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Если функция f мероморфна в $\bar{D}_\sigma$ и в D_σ имеет μ полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, а на границе L_σ полюсов не имеет, то для любого $m\geqq\mu$ и любого $z\in D_\sigma$ имеет место формула*

$$f(z)v(z)-v(z)\pi_{n,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\sigma}\frac{f(t)v(t)}{t-z}\,\frac{\omega_{n+m+1}(z)}{\omega_{n+m+1}(t)}\,\frac{q_{n,m}(t)}{q_{n,m}(z)}\,dt, \tag{11}$$

где $\omega_r(z)=(z-\alpha_{r1})(z-\alpha_{r2})\ldots(z-\alpha_{rr})$, $v(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\mu)$.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma_\infty \leqq \infty$ — *максимальное положительное число (или* ∞), *такое, что* f *продолжается до мероморфной в* D_{σ_∞} *функции. Пусть* $\mu_\infty \leqq \infty$ — *число полюсов* f *в* D_{σ_∞} *и* $\{m_n\}$ — *последовательность целых неотрицательных чисел, таких, что* а) $\liminf m_n \geqq \mu_\infty$ *и* б) $\lim (m_n/n) = 0$. *Тогда последовательность* $\{\pi_{n,m_n}\}$ *сходится по емкости к* f *на компактных подмножествах* D_{σ_∞}.

Доказательство. В случае, когда $\sigma_\infty = \infty$ ниже (см. теорему 3), докажем более сильный результат, чем теорема 1, поэтому здесь будем предполагать $\sigma_\infty < \infty$.

Пусть $K \subset D_{\sigma_\infty}$ — произвольный компакт и $\sigma_2 < \sigma_\infty$ — наименьшее положительное число, такое, что $K \subset D_{\sigma_2}$. Пусть σ_1 — число, удовлетворяющее неравенствам $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_\infty$ и μ — число полюсов f в D_{σ_1}. Выберем σ_1 еще так, чтобы f не имела полюсов на L_{σ_1}. Тогда, в силу условия а) теоремы, $m_n \geqq \mu$ при $n \geqq n_0$. По формуле (11) для таких n и для $z \in D_{\sigma_1}$ будем иметь

$$(12) \qquad f(z)v(z) - v(z)\pi_{n,m_n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\sigma_1}} \frac{f(t)v(t)}{t-z} \frac{\omega_{n+m_n+1}(z)}{\omega_{n+m_n+1}(t)} \frac{q_{n,m_n}(t)}{q_{n,m_n}(z)} dt.$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu_n}$ — нули полинома $q_{n,m_n}(z)$, которые принадлежат $\bar{D}_{\sigma_\infty}$, а $b_1, b_2, \ldots, b_{\nu_n}$ — остальные нули q_{n,m_n} (все нули записываем с учетом кратности). Имеем $\mu_n + \nu_n \leqq m_n$. Мы можем тогда написать

$$q_{n,m_n}(z) = \prod_{\nu=1}^{\mu_n} (z - a_\nu) \prod_{\nu=1}^{\nu_n} (z - b_\nu) = q^*_{n,m_n}(z) q^{**}_{n,m_n}(z).$$

Очевидно для $z \in \bar{D}_{\sigma_2}$, $t \in L_{\sigma_1}$ и $u \notin \bar{D}_{\sigma_\infty}$ будем иметь

$$(13) \qquad |(t-u)/(z-u)| \leqq 2\zeta(\sigma_\infty)/\varrho(L_{\sigma_2}, L_{\sigma_\infty}) = M_1(\sigma_2, \sigma_\infty) = M_1,$$

где $\zeta(\sigma_\infty) = \max\{|z|, z \in L_{\sigma_\infty}\}$, а $\varrho(L_{\sigma_2}, L_{\sigma_\infty})$ — расстояние между кривыми L_{σ_2} и L_{σ_∞}. Тогда

$$(14) \qquad \max\{|q^{**}_{n,m_n}(t)/q^{**}_{n,m_n}(z)|, \ z \in \bar{D}_{\sigma_2}, \ t \in L_{\sigma_1}\} \leqq M_1^{m_n}.$$

Аналогично $|q^*_{n,m_n}(z)| \leqq (2\zeta(\sigma_\infty))^{m_n}$, $z \in \bar{D}_{\sigma_2}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из условия (10), которому удовлетворяет таблица α, следует, что для $n \geqq n_1 \geqq n_0$ и любого $z \in \bar{D}_{\sigma_2}$ и $t \in L_{\sigma_1}$ имеет место неравенство

$$(15) \qquad |\omega_{n+m_n+1}(z)/\omega_{n+m_n+1}(t)| \leqq \exp[(\sigma_2 - \sigma_1 + 2\varepsilon)(n + m_n + 1)].$$

Оценивая очевидным образом остальную часть подынтегральной функции в (12), получим, что существует постоянная $M = M(\sigma_\infty, \sigma_1, \sigma_2)$ такая, что для $z \in \bar{D}_{\sigma_2}$ и $n \geqq n_1$ имеем

$$(16) \qquad |f(z) - \pi_{n,m_n}(z)| \leqq M^{m_n} \exp[(\sigma_2 - \sigma_1 + 2\varepsilon)(n + m_n + 1)]/|v(z)| \, |q^*_{n,m_n}(z)|.$$

Пусть $a > 0$ произвольно и $F_n = F_n(a) = \{z \in K: |f(z) - \pi_{n,m_n}(z)| \geqq a\}$. Тогда из (16) следует, что

$$(17)\qquad F_n\subset F'_n=\{z\in K: |v(z)q^*_{n,m_n}(z)|\leq a^{-1}M^{m_n}\exp[(\sigma_2-\sigma_1+2\varepsilon)(n+m_n+1)].$$

Мы можем, конечно, предполагать, что постоянная в правой части в скобках в (17) не превосходит 1 (что заведомо выполняется при достаточно большом n ввиду условия $m_n/n\to 0$). Поскольку степень полинома $v(z)q^*_{n,m_n}(z)$ не превосходит $2m_n$, то, на основании замечания, сделанного в конце пункта 1, можем утверждать, что

$$\operatorname{cap}F_n\leq\operatorname{cap}F'_n\leq[a^{-1}M^{m_n}\exp[(\sigma_2-\sigma_1+2\varepsilon)(n+m_n+1)]]^{1/2m_n}.$$

Так как $n/m_n\to\infty$, то отсюда следует соотношение $\operatorname{cap}F_n\to 0$, что требовалось доказать.

Утверждения 1 и 2 следующей леммы принадлежат Гончару [5].

Лемма 2. *Пусть D — область и $\{\varphi_n(z)\}$ — последовательность функций, сходящаяся в D по m_1-мере к функции $\varphi(z)$. Тогда*

1. *Если φ_n, $n=1, 2, \ldots$, голоморфны в D, то $\{\varphi_n\}$ сходится к φ равномерно на компактных подмножествах D и значит φ голоморфна.*

2. *Если все φ_n мероморфны и любая из них имеет в D не более $\mu<\infty$ полюсов, то и φ мероморфна и имеет в D не более μ полюсов.*

3. *Если любая функция φ_n мероморфна в D, а φ мероморфна в D и имеет (геометрически) различные полюсы $z_1, z_2, \ldots, z_s$ с кратностями соответственно $l_1, l_2, \ldots, l_s$ и если U_i, $i=1, 2, \ldots, s$, — непересекающиеся круги в D с центрами в z_i, то найдется такое n_0, что при $n\geq n_0$ функция φ_n имеет в каждом круге U_i не менее l_i полюсов.*

Доказательство. Допустим, что 3 неверно. Тогда найдутся индекс i, $1\leq i\leq s$, число $l<l_i$ и подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$ такие, что для любого k функция φ_{n_k} имеет в U_i не более l полюсов. Таким образом имеется последовательность полиномов $\{p_{n_k}\}$, $\partial p_{n_k}\leq l$ для любого k, все нули которых принадлежат U_i, такая, что $p_{n_k}\varphi_{n_k}$ голоморфны в U_i для любого k. Из такой последовательности всегда можно извлечь подпоследовательность, которая ровномерно сходится на компактных подмножествах $\mathbf{C}$ к некоторому полиному p, $\partial p\leq l$. Будем считать, что сама последовательность $\{p_{n_k}\}$ обладает этим свойством. Таким образом $\{p_{n_k}\varphi_{n_k}\}$ сходится в U_i по емкости к функции $p\varphi$, которая должна быть, согласно 1, голоморфной в U_i, что невозможно, так как $\partial p\leq l<l_i$.

Следствие 1. *Пусть m — целое, неотрицательное число и пусть σ_m — наибольшее положительное число, такое, что f продолжается до мероморфной в D_{σ_m} функции, и продолжение имеет в D_{σ_m} не более m полюсов. Тогда*

1. *$\{\pi_{n,m}\}$ сходится к f по емкости на компактных подмножествах D_{σ_m}.*

2. *Нельзя найти $\sigma>\sigma_m$, такое, чтобы $\{\pi_{n,m}\}$ сходилась в D_σ по емкости.*

Первое утверждение следует сразу из теоремы 1, а второе из утверждения 2 леммы 2 и определения σ_m.

В случае, когда f имеет в D_{σ_m} ровно m полюсов, можно доказать утверждение, более сильное, чем следствие 1, которое в нашем случае является обобщением теоремы Монтесу де Балора.

Следствие 2. *Пусть f имеет в D_{σ_m} ровно m полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$ с кратностями соответственно $l_1, l_2, \ldots, l_s$, $m = \Sigma l_i$. Пусть D'_{σ_m} — область, получающаяся из D_{σ_m} удалением полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Тогда*

1. *Если U_i, $i=1, 2, \ldots, s$, непересекающиеся круги вокруг z_i, то найдется n_0, что при $n \geqq n_0$ любая функция $\pi_{n,m}$ имеет в U_i ровно l_i полюсов.*

2. *$\{\pi_{n,m}\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах D'_{σ_m}.*

3. *Если $K \subset D'_{\sigma_m}$ — компакт и σ — наименьшее положительное число, такое, что $K \subset \bar{D}_\sigma$, то*

$$\limsup \| f - \pi_{n,m} \|^{1/n} \leqq \exp(\sigma - \sigma_m); \qquad \|\cdot\| = \text{sup-норма}. \tag{18}$$

Доказательство 1. Из утверждения 3 леммы 2 следует, что при $n \geqq n_0$, $\pi_{n,m}$ имеет в любом U_i не менее l_i полюсов. Так как общее число полюсов не больше $m = \Sigma l_i$, то в любом U_i имеем не более l_i полюсов.

Утверждения 2 и 3 следуют непосредственно из 1 и неравенства (16). Действительно, пусть $K \subset D'_{\sigma_m}$ и U_i — круги вокруг z_i, которые не пересекаются с K. Пусть $d = \varrho(\cup U_i, K)$. Тогда, так как все нули многочлена в (16) (вместо m_n теперь имеем m, которое фиксировано) лежат, как мы показали в 1, в $\cup U_i$, то для любого $z \in Z$ будем иметь $|q^*_{n,m}(z)| \geqq d^m$ (мы считаем $d \leqq 1$; в противном случае заменим его меньшей константой). Аналогично $|v(z)| \geqq d^m$, где $v(z) = \Pi(z - z_\nu)^{l_\nu}$. Тогда из (16) получаем

$$\| f - \pi_{n,m} \|_K \leqq d^{-2m} M^m \exp[(\sigma_2 - \sigma_1 + 2\varepsilon)(n + m + 1)],$$

где σ_1 и σ_2, $\sigma \leqq \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_m$ произвольны. Из предыдущего неравенства очевидно вытекают 2 и 3.

В связи с утверждением 2 следствия 1 возникает следующий вопрос: Существует ли точка $\zeta \notin \bar{D}_{\sigma_m}$, в окрестности которой $\{\pi_{n,m}\}$ сходится по емкости? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Если последовательность $\{\pi_{n,m}\}$ сходится по емкости на компактных подмножествах некоторой окрестности точки ζ, то $\zeta \in D_{\sigma_m}$.*

Замечание. Теорема 2 является в известном смысле утверждением, похожим на лемму Абеля для круга сходимости степенного ряда: максимальное открытое подмножество в **C**, в котором $\{\pi_{n,m}\}$ сходится по емкости, совпадает с „кругом" D_{σ_m}.

Доказательство. Положим $\varphi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z) - \pi_{n-1,m}(z)$ и обозначим конечные полюсы функции $\varphi_{n,m}$ через $\zeta_{n,m,\nu}$; их число не превосходит $2m$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда, согласно утверждению 3 теоремы Монтесу де Балора (так будем мы называть следствие 2), найдется число $n(\varepsilon)$, такое, что для $n > n(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\ln \| \varphi_{n,m} \|_E \leqq n(\varepsilon - \sigma_m). \tag{19}$$

Допустим теперь, что $\{\pi_{n,m}\}$ сходится по емкости на компактных подмножествах некоторой окрестности точки $\zeta\notin\bar{D}_{\sigma_m}$. Без ограничения общности можем предполагать, что это имеет место в круге $\Delta=\{z:|z-\zeta|\leq r\}$, для которого $\Delta\cap\bar{D}_{\sigma_m}=\emptyset$. Тогда, как нетрудно сообразить, для любого $a>0$ будем иметь $\lim \operatorname{cap}\{z\in\Delta: |\varphi_{n,m}(z)|\geq a\}\to 0$, $n\to\infty$. Мы выберем $a\leq 1$ и зафиксируем его.

Пусть $\delta=r/5$. Тогда найдется $n_0\geq n(\varepsilon)$, такое, что при $n\geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$\operatorname{cap}\{z\in\Delta: |\varphi_{n,m}(z)|\geq a\}<\delta. \tag{20}$$

Из свойства гармонической емкости не увеличиваться при сжимающих отображениях (круговая проекция — сжимающее отображение), факта, что емкость отрезка равна четверти его длины и из (20) получим, что в кольце $\delta\leq|z-\zeta|\leq r$ найдется окружность $\Gamma_n=\{z: |z-\zeta|=r_n\}$, такая, что $|\varphi_{n,m}(z)|<a$, $z\in\Gamma_n$. Тем самым

$$\ln|\varphi_{n,m}(z)|\leq\ln a, \qquad z\in\Gamma_n. \tag{21}$$

Пусть $\Delta_n=\{z: |z-\zeta|\leq r_n\}$, $\Delta_\delta=\{z: |z-\zeta|\leq\delta\}$ и пусть $g_n(z,\infty)$ — функция Грина для $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$ с полюсом в ∞. Рассмотрим в $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$ функцию

$$\psi_{n,m}(z)=\ln|\varphi_{n,m}(z)|-ng_n(z,\infty)-\Sigma g_n(z,\zeta_{n,m,\nu}),$$

где суммирование распространено по тем ν, для которых $\zeta_{n,m,\nu}\in\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$. Она очевидно субгармонична в своей области определения и на границе удовлетворяет, в силу (19) и (21), неравенствам $\psi_{n,m}(z)\leq n(\varepsilon-\sigma_m)$, $z\in\partial E$ и $\psi_{n,m}(z)\leq\ln a$, $z\in\Gamma_n$. Из этих неравенств вытекает, что если $u_n(z)$ — гармоническая мера Γ_n относительно области $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$, то для $z\in\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$ будем иметь

$$\psi_{n,m}(z)\leq n(\varepsilon-\sigma_m)(1-u_n(z))+u_n(z)\ln a.$$

Отсюда и из того, что $\ln a\leq 0$, получим оценку $(z\in\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\})$

$$\ln|\varphi_{n,m}(z)|\leq n[(\varepsilon-\sigma_m)(1-u_n(z))+g_n(z,\infty)]+\Sigma g_n(z,\zeta_{n,m,\nu}). \tag{22}$$

Пусть $g_\delta(z,\infty)$ — функция Грина для $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_\delta\}$ и $u_\delta(z)$ — гармоническая мера окружности $\Gamma_\delta=\{z: |z-\zeta|=\delta\}$ относительно $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_\delta\}$. Тогда, так как можем считать $\varepsilon-\sigma_m<0$, из (22) следует $(z\in\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\})$

$$\ln|\varphi_{n,m}(z)|\leq n[g_\delta(z,\infty)+(\varepsilon-\sigma_m)(1-u_\delta(z))]+\Sigma g_\delta(z,\zeta_{n,m,\nu}). \tag{23}$$

Теперь докажем следующее утверждение: Пусть σ_0 — наибольшее положительное число, такое, что Δ_δ лежит вне D_{σ_0}. Тогда для любого $\sigma<\sigma_0$ функция $g_\delta(z,\infty)-\sigma(1-u_\delta(z))=g_\delta(z,\infty)+\sigma u_\delta(z)-\sigma$ строго отрицательна на L_σ (определение L_σ смотри в начале пункта 2), а значит и на $\bar{D}_\sigma\setminus E$. Действительно, функция $\psi_\delta(z)=g_\delta(z,\infty)+\sigma u_\delta(z)-g(z,\infty)$ гармонична в $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_\delta\}$, на ∂E равна 0, а на Γ_δ принимает значение $\sigma-g(z,\infty)$. Поскольку Γ_δ вне D_{σ_0}, то для $z\in\Gamma_\delta$ имеем $\sigma-g(z,\infty)\leq\sigma-\sigma_0<0$. По принципу максимума $\psi_\delta(z)$ будет строго отрицательной в $\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_\delta\}$. В частности при $z\in L_\sigma$ будем иметь $g_\delta(z,\infty)+\sigma u_\delta(z)<\sigma$, что требовалось доказать.

Применяя это утверждение для $\sigma=\sigma_m$, получим $g_\delta(z,\infty)+\sigma_m u_\delta(z)-\sigma_m<0$, $z\in\bar{D}_{\sigma_m}\setminus E$. Отсюда, если ε достаточно мало, будем иметь

$$g_\delta(z,\infty)+(\varepsilon-\sigma_m)(1-u_\delta(z))<0, \qquad z\in\bar{D}_{\sigma_m}\setminus E. \tag{24}$$

Мы будем предполагать, что ε выбрано с самого начала так, чтобы (24) имело место.

Из (24) следует, что существует число σ_1, $\sigma_0>\sigma_1>\sigma_m$, такое, что

$$g_\delta(z,\infty)+(\varepsilon-\sigma_m)(1-u_\delta(z))\leqq-\lambda, \qquad z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E, \tag{25}$$

где λ — некоторая положительная постоянная. Так как, очевидно, σ_1 можно выбрать так, что $\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E\subset\bar{\mathbf{C}}\setminus\{E\cup\Delta_n\}$, то из (23) и (25) получим

$$\ln|\varphi_{n,m}(z)|\leqq-\pi\lambda+\Sigma g_\delta(z,\zeta_{n,m,\nu}), \qquad z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E. \tag{26}$$

Обозначим через $\zeta'_{n,m,\nu}$ те полюсы $\varphi_{n,m}$, которые лежат внутри D_{σ_0} (их число $\leqq 2m$), и через $\zeta''_{n,m,\nu}$ те, которые лежат вне D_{σ_0} (их число тоже $\leqq 2m$). Тогда

$$\Sigma g_\delta(z,\zeta_{n,m,\nu})=\Sigma g_\delta(z,\zeta'_{n,m,\nu})+\Sigma g_\delta(z,\zeta''_{n,m,\nu}). \tag{27}$$

Так как $\sigma_0>\sigma_1$, то найдется постоянная C_1, такая, что $g_\delta(z,\zeta)\leqq C_1$, $z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E$, $\zeta\notin D_{\sigma_0}$. Но тогда

$$\Sigma g_\delta(z,\zeta''_{n,m,\nu})\leqq 2mC_1, \qquad z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E. \tag{28}$$

Пусть $P_{n,m}(z)=\Pi(z-\zeta'_{n,m,\nu})$. Поскольку нули этого многочлена ограничены и его степень не превосходит $2m$, то грубая оценка дает, что найдется постоянная C_2, такая, что

$$\|P_{n,m}\|_{E\cup\Delta_\delta}\leqq C_2^m. \tag{29}$$

Функция $\Sigma g_\delta(z,\zeta'_{n,m,\nu})+\ln|P_{n,m}(z)|-2mg(z,\infty)$ субгармонична в $\bar{\mathbf{C}}\setminus(E\cup\Delta_\delta)$ и на границе не превосходит, согласно (29), постоянную $m\ln C_2$. Тогда для $z\in\bar{\mathbf{C}}\setminus(E\cup\Delta_\delta)$ имеем

$$\Sigma g_\delta(z,\zeta'_{n,m,\nu})\leqq m\ln C_2+2mg(z,\infty)-\ln|P_{n,m}(z)|. \tag{30}$$

Так как, очевидно, $g(z,\infty)\leqq C_3$, $z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E$, то из (30) получим

$$\Sigma g_\delta(z,\zeta'_{n,m,\nu})\leqq mC_4-\ln|P_{n,m}(z)|, \qquad z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E. \tag{31}$$

Теперь воспользуемся следующей леммой А. Картана [9, стр. 31].

Лемма. *Какие бы ни были число $H>0$ и полином $p(z)=(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_k)$, то на плоскости можно найти систему кругов общей суммой длин радиусов $2H$, такую, что для любого z вне этих кругов будет выполняться неравенство $|p(z)|\geqq(H/e)^k$.*

Пусть число ϱ, $0<\varrho<1$, определено так, чтобы $0<\lambda+\ln\varrho$ (об определении λ см. (25)). Применим лемму Картана для полинома $p=P_{n,m}$ (его точную степень обозначим через μ_n) и $H=\varrho^{n/\mu_n}$. Тогда, если через E_n обозначим объединение исключительных кружков из леммы Картана, получим

$$(32)\qquad |P_{n,m}(z)|\geqq(e^{-1}\varrho^{n/\mu_n})^{\mu_n}\geqq e^{-2m}\varrho^n,\qquad z\notin E_n,$$

и $m_1(E_n)\leqq 2\varrho^{n/\mu_n}\leqq 2\varrho^{n/2m}$. Из (31) и (32) следует

$$(33)\qquad \Sigma g_\delta(z,\zeta'_{n,m,\nu})\leqq mC_5-n\ln\varrho,\qquad z\in(\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E)\setminus E_n,$$

а из (27), (28) и (33) —

$$(34)\qquad \Sigma g_\delta(z,\zeta_{n,m,\nu})\leqq mC_6-n\ln\varrho,\qquad z\in(\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E)\setminus E_n.$$

Тогда на основании (26) и (34) заключаем, что

$$(35)\qquad |\varphi_{n,m}(z)|\leqq e^{-n(\lambda+\ln\varrho)}C_6^m=C_6^m q^n,\qquad z\in(\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E)\setminus E_n.$$

В силу сделанного выбора числа ϱ имеем $0<q<1$. Так как для достаточно большого n $\|\varphi_{n,m}\|_E\leqq e^{n(\varepsilon-\sigma_m)}$ (см. (19)), то можем считать, что (35) имеет место в $\bar{D}_{\sigma_1}\setminus E_n$.

Пусть $F_n=\bigcup\limits_{k\geqq n}E_k$ и $R_{n,m}$ — остаточный член ряда $\pi_{n,0}+\Sigma_{n=1}^r(\pi_{n,m}-\pi_{n-1,m})$. Тогда из (35) получаем $|R_{n,m}(z)|\leqq C_7^m q^n$, $z\in\bar{D}_{\sigma_1}\setminus F_n$, и $m_1(F_n)\leqq C_8\varrho^{n/2m}$, что показывает, что ряд, а тем самым и последовательность $\{\pi_{n,m}\}$ сходится по емкости в D_{σ_1}. Согласно утверждению 2 леммы 2 предельная функция, которая совпадает в D_{σ_m} с f, мероморфна в D_{σ_1} и имеет там не более m полюсов, что противоречит выбору σ_m. Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет следующим образом дополнить теорему 1.

Следствие 3. *Пусть σ_∞ — максимальное положительное число (или бесконечность), такое, что f продолжается до мероморфной в D_{σ_∞} функции (возможно с бесконечным множеством полюсов). Тогда, если существует окрестность U точки ζ, такая, что для любой последовательности $\{m_n\}$ неотрицательных целых чисел, обладающей свойством $m_n/n\to 0$, $n\to\infty$, соответствующая последовательность $\{\pi_{n,m_n}\}$ сходится по емкости в U, то $\zeta\in D_{\sigma_\infty}$.*

Для случая аппроксимации Паде это предложение впервые доказано в [6]. Доказательство проходит точно так же и в нашей ситуации, поэтому мы не будем его проводить.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, нам нужно перестроить немножко таблицу α. Пусть f голоморфна в окрестности E и $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ — ее нули на E, выписанные с учетом кратности. Определим таблицу $\beta=\{\beta_{n\nu}\}$, $n=1,2,\ldots,\ \nu=1,2,\ldots,n$ следующим образом:

$$\beta_{n\nu}=\begin{cases}\alpha_{n-k,\nu}, & \nu=1,2,\ldots,\ n-k\\ \beta_s, & \nu=n-k+s,\quad s=1,2,\ldots,k,\end{cases}$$

для $n\geqq k+1$ и $\beta_{n\nu}=\beta_\nu$ для $n\leqq k$. Ясно, что таблица β тоже удовлетворяет условию (10). Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть f — функция, голоморфная в окрестности E. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f продолжается до функции, мероморфной в* $\mathbf{C}$.

2. *Если $\{n_\nu\}$ и $\{m_\nu\}$ — последовательности неотрицательных целых чисел, такие, что* $\min(n_\nu, m_\nu\} \to \infty$, $\nu \to \infty$, *то* $\{\pi^{(\beta)}_{n_\nu,m_\nu}(f, z)\}$ *сходится по емкости в* $\mathbf{C}$.

3. *Существует неограниченное, открытое множество* $D\subset \mathbf{C}$, *такое, что любая последовательность* $\{\pi^{(\beta)}_{n_\nu,m_\nu}(f, z)\}$ *из 2 сходится по емкости на компактных подмножествах* D.

Доказательство. Прежде всего докажем несколько элементарных предложений.

а. Пусть $\sigma>0$ фиксировано. Положим $\zeta(\sigma)=\max\{|z|: z\in L_\sigma\}$ и $\xi(\sigma)=\min\{|z|: z\in L_\sigma\}$. Тогда $\sigma-\gamma-\ln\zeta(\sigma)$ и $\sigma-\gamma-\ln\xi(\sigma)$, где $\gamma=-\ln\operatorname{cap}E$ стремятся к 0 при $\sigma\to\infty$.

Действительно, в окрестности бесконечно удаленной точки имеем $g(z,\infty)=\ln|z|+u(z)+\gamma$, где $u(z)$ гармонична и $u(\infty)=0$, откуда и следует наше утверждение.

б. Пусть K — произвольный, фиксированный компакт. Тогда

$$\lim_{\sigma\to\infty}\max\left\{\left|\frac{t-\zeta}{z-\zeta}\right|: t\in\bar{D}_\sigma,\ z\in K,\ \zeta\in L_\sigma\right\}\leqq 2.$$

Действительно, для рассматриваемых t, z и ζ имеем

$$\left|\frac{t-\zeta}{z-\zeta}\right|\leqq\frac{2\zeta(\sigma)}{|\xi(\sigma)-\max\{|z|: z\in K\}|}$$

и правая сторона этого неравенства стремится на основании а) к 2 при $\sigma\to\infty$.

в. Пусть K — фиксированный компакт и $\varepsilon>0$. Тогда найдется $\sigma_2>0$, такое, что для любого $\sigma_0>\sigma_2$ и любого многочлена $p(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)$, нули которого не принадлежат D_{σ_0}, будет выполняться неравенство

$$\max\{|p(t)/p(z)|: z\in K,\ t\in\bar{D}_{\sigma_0}\}\leqq(2e^\varepsilon)^k. \tag{36}$$

Действительно согласно б) найдется $\sigma_2=\sigma_2(\varepsilon, K)$, такое, что

$$\max\{|(t-\zeta)/(z-\zeta)|: z\in K,\ t\in\bar{D}_\sigma,\ \zeta\in L_\sigma\}\leqq 2e^\varepsilon,\qquad \text{при}\quad \sigma\geqq\sigma_2. \tag{37}$$

Пусть теперь $\sigma_0\geqq\sigma_2$ и $z_\nu\in L_{\sigma_\nu}$, где $\sigma_\nu\geqq\sigma_0$ по условию. Тогда, так как числитель и знаменатель дроби $(t-z_\nu)/(z-z_\nu)$ зависят от разных переменных, из принципа максимума будет вытекать ($\sigma_\nu\geqq\sigma_0$)

$$\max\{|(t-z_\nu)/(z-z_\nu)|,\ z\in K,\ t\in\bar{D}_{\sigma_0}\}\leqq\max\{|(t-z_\nu)/(z-z_\nu)|,\ z\in K,\ t\in\bar{D}_{\sigma_\nu}\}$$

$$\leqq\max\{|(t-\zeta)/(z-\zeta)|,\ z\in K,\ t\in\bar{D}_{\sigma_\nu},\ \zeta\in L_{\sigma_\nu}\}\leqq 2e^\varepsilon.$$

Последнее неравенство вытекает из (37) и $\sigma_\nu\geqq\sigma_2$. Отсюда очевидно следует (36).

Мы переходим к доказательству теоремы 3. Импликация $2\Longrightarrow 3$ очевидна. Импликация $3\Longrightarrow 1$ следует из следствия 3, которое имеет место для $\pi^{(\beta)}_{n,m_n}$, так как β удовлетворяет (10). Для доказательства импликации

$1 \Longrightarrow 2$ достаточно рассмотреть отдельно случаи $n_\nu \geqq m_\nu$ для любого ν и $m_\nu \geqq n_\nu$ для любого ν.

1. $n_\nu \geqq m_\nu$. Покажем, что в этом случае $\pi^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z)$ сходится по емкости на компактных подмножествах **C** к f какова бы ни была таблица $\alpha = \{a_{n,\nu}\}$, удовлетворяющая (10). В частности, это будет иметь место и для $\alpha = \beta$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и f мероморфна в **C**. Пусть K — компакт и $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon, K)$ — определенное в в) число. Фиксируем число $\sigma \geqq \sigma_2$, такое, что f не имела полюсов на L_σ и чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 - \sigma + 2\varepsilon < 0, \tag{38}$$

где σ_1 — наименьшее число, такое, что $K \subset \bar{D}_{\sigma_1}$. Положим $v(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_\mu)$, где $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, $\mu = \mu(\sigma) < \infty$ — полюсы f в D_σ с учетом кратности. Тогда для $z \in D_\sigma$ имеет место формула

$$v(z) f(z) - v(z) \pi^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\sigma} \frac{f(t) v(t)}{t - z} \frac{\omega^{(\alpha)}_{n_\nu + m_\nu + 1}(z)}{\omega^{(\alpha)}_{n_\nu + m_\nu + 1}(t)} \frac{q^{(\alpha)}_{n_\nu + m_\nu}(t)}{q^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z)} \, dt. \tag{39}$$

Если полином $q^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z)$ представим в виде $q^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu} = q^*_{n_\nu, m_\nu} q^{**}_{n_\nu, m_\nu}$, где первый сомножитель имеет нули в D_σ, а второй — вне D_σ, то из вспомогательного утверждения а) будет вытекать неравенство

$$|q^*_{n_\nu, m_\nu}(t)| \leqq (2e^{\sigma - \gamma + 2\varepsilon})^{m_\nu}, \qquad t \in L_\sigma,$$

а из в) — неравенство

$$|q^*_{n_\nu, m_\nu}(t) / q^*_{n_\nu, m_\nu}(z)| \leqq (2e^\varepsilon)^{m_\nu}, \qquad z \in K, \quad t \in L_\sigma.$$

Из этих оценок, оценивая очевидным образом и остальные функции под интегралом в (39), получим

$$|f(z) - \pi^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z)| \leqq \frac{M(\sigma_1, \sigma)(4e^{\sigma + 2\varepsilon - \gamma})^{m_\nu} \exp[(\sigma_1 - \sigma + 2\varepsilon)(n_\nu + m_\nu + 1)]}{|v(z) q^*_{n_\nu, m_\nu}(z)|} \tag{40}$$

для $z \in K$. Здесь $M(\sigma_1, \sigma)$ — постоянная, зависящая только от σ и σ_1. Принимая во внимание неравенство (38), числитель в (40) можно оценить константой

$$M(\sigma, \sigma_1) \, . \, (4 \exp[2\sigma_1 + 6\varepsilon - \gamma - \sigma])^{m_\nu}. \tag{41}$$

Пусть $M_1 = \max\{|z| : z \in K\}$ и пусть точная степень знаменателя в (40) равна m^*_ν. Очевидно $m^*_\nu \leqq 2m_\nu$ для достаточно большого ν. Если числитель и знаменатель в (40) умножить на $z^{2m_\nu - m^*_\nu}$, то из (41) и определения M_1 получим ($z \in K$)

$$|f(z) - \pi^{(\alpha)}_{n_\nu, m_\nu}(z)| \leqq M(\sigma, \sigma_1) M_2^{2m_\nu} (4 \exp(2\sigma_1 + 6\varepsilon - \gamma - \sigma))^{m_\nu} / |q_\nu(z)|, \tag{42}$$

где $M_2 = \max(1, M_1)$, а $q_\nu(z) = z^{2m_\nu - m^*_\nu} v(z) q^*_{n_\nu, m_\nu}$.

Пусть теперь $a>0$ и $F_\nu=\{z\in K: |f(z)-\pi^{(\alpha)}_{n_\nu,m_\nu}|\geqq a\}$. Тогда очевидно

$$F_\nu\subset F'_\nu=\{z\in K: |q_\nu(z)|\leqq a^{-1}M(\sigma,\sigma_1)M_2^{2m_\nu}(4\exp[2\sigma_1+6\varepsilon-\gamma-\sigma])^{m_\nu}.$$

Поскольку $q_\nu(z)$ — полином со старшим коэффициентом 1, степень которого равна $2m_\nu$, то из замечания в конце пункта 1 получим

$$\operatorname{cap}F_\nu\leqq\operatorname{cap}F'_\nu=[a^{-1}M(\sigma,\sigma_1)]^{1/2m_\nu}(4e^{2\sigma_1+6\varepsilon-\gamma-\sigma})^{1/2}M_2,$$

т. е. $\lim_{\nu\to\infty}\operatorname{cap}F_\nu\leqq 2M_2(\exp[2\sigma_1+6\varepsilon-\gamma-\sigma])^{1/2}$. Поскольку мы могли выбирать $\sigma\geqq\sigma_2$ произвольно, а левая часть этого неравенства и константа M_2 от σ не зависят, то $\lim\operatorname{cap}F_\nu=0$, что требовалось доказать.

2. $m_\nu\geqq n_\nu$. Докажем прежде всего равенство

$$\pi^{(\beta)}_{n,m}(f)=q/\pi^{(\alpha)}_{m,n-k}(q/f), \tag{43}$$

где $n\geqq k$ и m — произвольные неотрицательные целые числа, $q(z)=(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_k)$ (напомним, что $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ — нули f на E) и $\pi^{(\beta)}_{n,m}(f)$ — рациональная функция порядка (n,m) со свободными полюсами, интерполирующая f в точках $\beta_{n+m+1,\nu}$, $\nu=1,2,\dots,n+m+1$, и $\pi^{(\alpha)}_{m,n-k}(q/f)$ — рациональная функция порядка $(m,n-k)$ со свободными полюсами, интерполирующая функцию q/f в точках $\alpha_{m+n-k+1,\nu}$, $\nu=1,2,\dots,n+m-k+1$. Пусть $\pi^{(\alpha)}_{n-k,m}(f/q)=p_{n-k,m}/q_{n-k,m}$. Тогда по определению имеем

$$\left(q_{n-k,m}\frac{f}{q}-p_{n-k,m}\right)(\alpha_{n-k+m+1,\nu})=0,\qquad \nu=1,2,\dots,n-k+m+1. \tag{44}$$

Умножая это равенство на q, которая обращается в нуль в точках $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$, а функция в скобках не имеет полюсов в этих точках, получим

$$(q_{n-k,m}f-p_{n-k,m}q)(\beta_{n+m+1,\nu})=0,\qquad \nu=1,2,\dots,n+m+1.$$

Но это показывает, что $qp_{n-k,m}/q_{n-k,m}=\pi^{(\beta)}_{n,m}(f)$. Таким образом

$$\pi^{(\beta)}_{n,m}(f)=q\pi^{(\alpha)}_{n-k,m}(f/q). \tag{45}$$

Так как функция q/f мероморфна в $\mathbf{C}$ и не имеет полюсов на E, то, умножая (44) на $-q/f$, получим

$$\left(p_{n-k,m}\frac{q}{f}-q_{n-k,m}\right)(\alpha_{n-k+m+1,\nu})=0,\qquad \nu=1,2,\dots,n+m-k+1. \tag{46}$$

Но это показывает, что

$$\pi^{(\alpha)}_{m,n-k}(q/f)=q_{n-k,m}/p_{n-k,m}=1/\pi^{(\alpha)}_{n-k,m}(f/q). \tag{47}$$

Из (45) и (47) следует (43).

Теперь покажем одно утверждение, которое фактически принадлежит Померенке [4].

Лемма 3. *Если последовательность рациональных функций $\{r_n\}$ сходится по емкости на компакте K к функции φ, которая мероморфна, в окрестности K, то $\{1/r_n\}$ сходится на K по емкости к функции $1/\varphi$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что если $a>0$ — произвольное фиксированное число, то для любого $\delta>0$ найдется n_0, что при $n>n_0$,

(48) $$\operatorname{cap}\{z\in K: \left|\frac{1}{\varphi(z)}-\frac{1}{r_n(z)}\right|\geqq a\}<\delta.$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ — нули φ на K. Тогда найдется открытое множество F, содержащее эти точки, такое, что $\operatorname{cap} F<\delta^2$. Так как φ мероморфна и на $K\setminus F$ в нуль не обращается, то найдется постоянная $d>0$ такая, что $|\varphi(z)|\geqq d$, $z\in K\setminus F$. Пусть $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon d^{-1}(d-\varepsilon)^{-1}<a$. Поскольку $r_n\to\varphi$ по емкости на K, то найдется n_0 такое, что при $n>n_0$ выполнено $|\varphi(z)-r_n(z)|<\varepsilon$, $z\in K\setminus F_n$, где F_n — некоторое множество, такое, что $\operatorname{cap} F_n\leqq\delta^2$. Тогда для $z\in K\setminus(F_n\cup F)$ имеем

$$\left|\frac{1}{\varphi(z)}-\frac{1}{r_n(z)}\right|=\frac{|r_n(z)-\varphi(z)|}{|\varphi(z)(r_n(z)-\varphi(z)+\varphi(z))|}$$

$$\leqq\frac{|r_n(z)-\varphi(z)|}{|\varphi(z)|(|\varphi(z)|-|\varphi(z)-r_n(z)|)}\leqq\frac{\varepsilon}{d(d-\varepsilon)}<a.$$

Таким образом

(49) $$\{z\in K: \left|\frac{1}{\varphi(z)}-\frac{1}{r_n(z)}\right|\geqq a\}\subset F_n\cup F.$$

Но так как $\operatorname{cap} F_n\leqq\delta^2$ и $\operatorname{cap} F\leqq\delta^2$, то $\operatorname{cap}(F_n\cup F)\leqq(\delta^2)^{1/2}=\delta$ (это свойство полуаддитивности емкости хорошо известна). Отсюда и из (49) в силу монотонности емкости следует (48).

Применим лемму 3 для завершения доказательства теоремы 3. Как было показано выше (случай $n_\nu\geqq m_\nu$), если $m_\nu\geqq n_\nu$, то $\{\pi^{(\alpha)}_{m_\nu, n_\nu-k}(q/f)\}$ сходится по емкости на компактных подмножествах $\mathbf{C}$ к q/f. Но тогда из (43) и леммы 3 получаем, что последовательность $\pi^{(\beta)}_{n,m}(f)$ сходится по емкости к функции f, что требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. de Montessus de Ballore. Sur les fractions continues algébriques. *Bull. Soc. Math. France*, **30**, 1902, 28—36.
2. H. Wallin. The convergence of Pade approximants and the size of the power series coefficients. University of Umeå (preprint).
3. J. Nuttall. The convergence of Pade approximants of meromorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, **31**, 1970, 147—153.
4. Ch. Pommerenke. Pade approximants and convergence in capacity. *J. Math. Anal. Appl.*, **41**, 1973, 775—780.
5. А. А. Гончар. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций. *Мат. сб.*, **98**, 1975, № 4, 564—577.
6. В. В. Вавилов. О сходимости аппроксимаций Паде мероморфных функций. *Мат. сб.*, **101**, 1976, № 1, 44—56.
7. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Москва, 1966.
8. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва, 1966.
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Москва, 1956.
10. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 12. 1. 1979