PLISKA

STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

РАЙЧО Д. ЛАЗАРОВ

В работе исследуется сходимость разностных схем в сеточной норме L_2 для многомерных параболических уравнений с обобщенными решениями. Показано, что неявная разностная схема сходится со скоростью $O(\tau+|h|^2)$, когда решение исходной задачи принадлежит пространству $W_2^{2,1}$ (τ — шаг по времени, $|h|$ — шаг по пространственным переменным). Оценка погрешности для решений из $W_2^{1,0}$ выражается, через τ_1-модуль решения по переменной t.

Традиционные методы оценки скорости сходимости разностных схем для задач математической физики обладают тем недостатком, что к решению дифференциальной задачи предъявляются слишком высокие требования гладкости. Это связано прежде всего с априорными оценками для решений разностных задач и методом анализа погрешности аппроксимации. Понижение требования к гладкости искомого решения — одна из актуальных задач разностных методов, и ей уделяется значительное внимание в теоретических исследованиях [1—5; 7; 10].

Настоящая работа посвящена исследованию сходимости разностных схем для многомерных параболических уравнений с обобщенными решениями. Сходимость рассматривается в сеточной L_2-норме во всем цилиндре Q_T. Показано, что разностная схема сходится со скоростью $O(\tau+|h|^2)$ когда решение исходной дифференциальной задачи принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Интерес представляет исследование сходимости разностных схем на менее гладких решениях, например, принадлежащих $W_2^{1,0}(Q_T)$ и имеющих ограниченную вариацию по переменной t. В этом случае полезным оказывается τ_1-модуль решения $u(x,t)$ по t, который для функций одной переменной впервые был введен в докторской диссертации Бл. Сендова [6]. Доказано, что разностная схема сходится со скоростью $O(\tau_1(u,\tau)_{L_2}+|h|\,\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)})$. Отметим, что τ_1-модуль является естественным аппаратом для исследования сходимости одномерных разностных схем в дискретных нормах [3; 5].

1. Постановка задачи. Пусть в R^n задан параллелепипед $\Omega=\{x=(x_1, \ldots, x_n),\ 0\leq x_i\leq l_i,\ l_i>0,\ i=1,\ldots,n\}$ с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q_T=\Omega\times[0,T]$ рассмотрим параболическое уравнение

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,$$

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 51—59.

с начальными условиями и однородными краевыми условиями Дирихле

(2) $$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,\quad u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t\in[0,T].$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения: для функций $u(x)$, заданных в Ω, введем соболевские пространства $W_2^k(\Omega)$ с нормами

$$\|u\|_{k,\Omega}=\|u\|_{W_2^k(\Omega)}=\sum_{s=0}^{k}\sum_{|\alpha|=s}\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)},\quad \|u\|_\Omega=\|u\|_{L_2(\Omega)}=(\int_\Omega u^2dx)^{1/2},$$

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n;$$

для функций, заданных в цилиндре Q_T, используем следующие нормы:

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}=\|u\|_{L_2(Q_T)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(Q_T)},\quad \|u\|_{L_2(Q_T)}=(\int_0^T\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)}dt)^{1/2},$$

$$\|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)}=\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}=\|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)}+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Для функций $v\in W_2^{1,0}(Q_T)$ введем τ_1-модуль по переменной t следующим образом [2; 5]:

(3) $$\tau_1(v,\delta)_{L_2}=(\int_0^T\sup_{0\leq\eta\leq\delta}\|v(x,t)-v(x,t+\eta)\|^2_{1,\Omega}dt)^{1/2}.$$

Для τ_1-модуля выполнены следующие оценки:

(4) $\tau_1(u,\delta)_{L_2}\to 0$ при $\delta\to 0$, если $v(t)=\|u(t)\|_{1,\Omega}$ ограничена и интегруема по Риману в $[0,T]$;

(5) $$\tau_1(u,\delta)_{L_2}\leq 2\sqrt{\delta}\ \overset{T}{\underset{0}{\vee}}\ \|u(x,t)\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где $\overset{T}{\underset{0}{\vee}}\ v(t)$ — вариация функции $v(t)$ в интервале $[0,T]$ [14];

(6) $$\tau_1(u,\delta)_{L_2}\leq\delta\|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)},\quad\text{если}\quad u\in W_2^{1,1}(Q_T).$$

Справедлива следующая оценка:

Лемма 1. *Пусть* $f\in L_2(Q_T)$ *и* $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $W_2^{2,1}(Q_T)$ *и выполнена априорная оценка* $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}\leq M\{\|v_0\|_{W_2^1(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Q_T)}\}$.

2. Постановка разностной задачи и оценка скорости сходимости. В области Ω введем сетку $\bar\omega=\bar\omega_1\times\ldots\times\bar\omega_n$, $\bar\omega_\alpha=\{x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha\}$, $\alpha=1,\ldots,n$, $\omega=\bar\omega\cap\Omega$, Ω — открытая область; $\gamma=\bar\omega\diagdown\omega$ — множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}$; в интервале $[0, T]$ введем сетку $\omega_\tau=\{t=j\tau,\ j=1,\dots,J,\ \tau=T/J\}$, $\bar{\omega}_T=\bar{\omega}\times\omega_\tau$, $h=(h_1,\dots,h_n)$, $|h|^2=h_1^2+\dots+h_n^2$.

Для функций, заданных на $\bar{\omega}_T$, будем использовать следующие обозначения [9]:

$$y=y(x,t)=y(x,t_j)=y(t)=y^j,\quad x\in\bar{\omega},\quad t\in\omega_\tau,\quad y^{(\pm 1_\alpha)}(x,t)=y(x_1,\dots,x_\alpha\pm h_\alpha,\dots,x_n t),$$

$$y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}=(y^{(+1_\alpha)}-2y+y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha^2,\qquad y_{\bar{t}}=(y^j-y^{j-1})/\tau,\quad \alpha=1,\dots,n.$$

Для сеточных функций, заданных на $\omega_T=\omega\times\omega_\tau$, введем следующие нормы:

$$\|y(t)\|_{L_2(\omega)}=(y(t),\ y(t))^{1/2},\quad (y,v)=\sum_{x\in\omega} yvh_1\dots h_n,\quad \forall\, t\in\omega_\tau,$$

$$\|y\|_{L_2(\omega_T)}=\Big(\sum_{t\in\omega_\tau}\tau\|y(t)\|^2_{L_2(\omega)}\Big)^{1/2}.$$

Для построения и исследования разностной схемы нам понадобятся еще операторы осреднения по Стеклову и их квадраты

$$T_\alpha u(x)=\int_{-0,5}^{0,5}u(x_1,\dots,x_\alpha+sh_\alpha,\dots,x_n)ds,\quad x\in\omega,\quad T_0u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t-\tau}^{t}u(x,\eta)d\eta, & t\in\omega_\tau,\\ u_0(x), & t=0,\end{cases}$$

$$T_\alpha^2u(x)=\int_{-1}^{0}(1+s)u(x_1,\dots,x_\alpha+sh_\alpha,\dots,x_n)ds$$

$$+\int_{0}^{1}(1-s)u(x_1,\dots,x_\alpha+sh_\alpha,\dots,x_n)ds.$$

Эти операторы имеют следующее свойство:

$$T_\alpha^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_\alpha^2}(x)\right)=u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x),\quad x\in\omega,\quad \alpha=1,\dots,n.$$

Рассмотрим неявную схему

$$y_{\bar{t}}+Ay=\varphi\equiv T_0Tf(x,t),\quad (x,t)\in\omega_T. \tag{7}$$

$$y(x,0)=y_0\equiv Tu_0(x),\quad x\in\omega,\quad y(x,t)=0,\quad x\in\gamma,\quad t\in\omega_\tau, \tag{8}$$

где $T=\prod_{i=1}^{n}T_i^2$, $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$, $A_iy=-y_{\bar{x}_ix_i}$, $i=1,\dots,n$.

Применяя общую теорию разностных схем [9], показываем, что дискретная задача однозначно разрешима и абсолютно устойчива.

Поставим вопрос о сходимости разностной схемы (7), (8) в сеточной норме $L_2(\omega_T)$. Обозначим через $\tilde{u}(x,t)=T_0T_1\dots T_nu(x,t)$ осреднение точного решения $u(x,t)$ задачи (1), (2). Будем сравнивать приближенное решение $y(x,t)$ с осреднением $\tilde{u}(x,t)$. Для функции $z=y-\tilde{u}$ получим следующую разностную задачу:

$$\begin{gathered} z_{\bar{t}}+Az=\Psi(x,t),\quad x\in\omega,\quad t\in\omega_\tau,\\ z(x,0)=z_0(x)\equiv Tu_0(x)-\tilde{u}(x,t)|_{t=0},\quad z(x,t)=0,\quad x\in\gamma,\quad t\in\omega_\tau, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\Psi(x,t)=\varphi-A\tilde{u}-\tilde{u}_{\bar t}$ есть погрешность аппроксимации. Преобразуем ее к дивергентному виду. Применим оператор T_0T к дифференциальному уравнению (1). Получим

$$(Tu)_{\bar t}+\sum_{i=1}^{n}A_i(T_0T_1^2\ldots T_{i-1}^2T_{i+1}^2\ldots T_n^2u)=\varphi,$$

Подставим отсюда φ в Ψ. Получим

$$\Psi(x,t)=\eta_{0\bar t}+\sum_{i=1}^{n}A_i\eta_i, \tag{10}$$

$$\eta_0=Tu-\tilde{u},\quad \eta_i=T_0T_1^2\ldots T_{i-1}^2T_{i+1}^2\ldots T_n^2u-\tilde{u},\quad i=1,\ldots,n. \tag{11}$$

Докажем априорную оценку в норме $L_2(\omega_T)$ для решения задачи (9)—(11).

Лемма 2. *Для решения $z(x,t)$ задачи (9) с правой частью, представленной в виде* (10), (11), *справедлива априорная оценка*

$$\|z\|_{L_2(\omega_T)}\le 2\sum_{i=0}^{n}\|\eta_i\|_{L_2(\omega_T)}. \tag{12}$$

Доказательство. Применим метод „выделения стационарных неоднородностей" (см. [9, с. 199]), представив z как сумму $z=z_1+z_2$, где z_1 и z_2 решения следующих задач:

$$Az_1=\sum_{i=1}^{n}A_i\eta_i,\quad x\in\omega,\quad z_1(x,t)=0,\quad x\in\gamma,\quad \forall t\in\omega_\tau, \tag{13}$$

$$z_{2\bar t}+Az_2=\eta_{0\bar t}-z_{1\bar t},\ (x,t)\in\omega_T,\ z_2(x,0)=z_0(x),\ x\in\omega,\ z_2(x,t)=0,\ x\in\gamma,\ t\in\omega_\tau. \tag{14}$$

Решение z_1 зависит от t как от параметра. Методом Фурье доказывается, что выполнена оценка (см. [10])

$$\|z_1(t)\|^2_{L_2(\omega)}\le\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i(t)\|^2_{L_2(\omega)},\qquad \forall t\in\omega_\tau.$$

Суммируя эту оценку по $t\in\omega_\tau$, получим

$$\|z_1\|_{L_2(\omega_T)}\le\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|_{L_2(\omega_T)}. \tag{15}$$

Получим априорную оценку для z_2. Уравнение (14) просуммируем по $t'\in(0,t]$ и положим $v(t)=\sum_{t'=\tau}^{t}\tau z_2(t')$: $z_2(t)-z_2(0)+Av(t)=\eta_0(t)-\eta_0(0)-z_1(t)+z_1(0)$. По определению $z_1(0)=0$ и $z_2(0)=\eta_0(0)$. Тогда это уравнение имеет вид $z_2(t)+Av(t)=\eta_0(t)-z_1(t)$, $t\in\omega_\tau$. Умножим его скалярно на $z_2(t)=v_{\bar t}(t)$. После некоторых стандартных преобразований получим

$$\|z_2(t)\|^2_{L_2(\omega)}=\frac{\tau}{2}\|z_2(t)\|^2_A+\frac{1}{2}(\|v(t)\|^2_A)_{\bar t}=(\eta_0(t),z_2(t))-(z_1(t),z_2(t)),$$

где $\| v \|_A^2 = (Av, v)$. Члены в правой части этого неравенства оценим неравенством Коши — Буняковского и ε-неравенством с $\varepsilon = 0.25$. После умножения на τ и суммирования по $t \in \omega_\tau$ получим

(16) $$\| z_2 \|^2_{L_2(\omega_T)} \leq 2 \| \eta_0 \|^2_{L_2(\omega_T)} + 2 \| z_1 \|^2_{L_2(\omega_T)}.$$

Неравенство треугольника и оценки (15) и (16) дают окончательную оценку (2). Лемма доказана.

Эта оценка является основой исследования сходимости разностной схемы (7), (8) на обобщенных решениях исходной задачи.

Рассмотрим сначала случай, когда $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $W_2^{2,1}(Q_T)$. *Тогда для погрешности* $y - \tilde{u}$ *имеет место следующая оценка*:

(17) $$\| y - \tilde{u} \|_{L_2(\omega_T)} \leq M_1 \{ \tau \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L_2(Q_T)} + | h |^2 \| u \|_{W_2^{2,0}(Q_T)} \}.$$

При сделанных в лемме 1 предположениях эта оценка записывается в виде

(17′) $$\| y - \tilde{u} \|_{L_2(\omega_T)} \leq M_2 (\tau + | h |^2) (\| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)} + \| f \|_{L_2(Q_T)}).$$

Постоянные M_1 *и* M_2 *не зависят от* h, τ *и* $u(x, t)$.

Доказательство. Достаточно оценить правую часть в априорной оценке (12) .Покажем, что для $i = 1, \ldots, n$ имеют место неравенства

(18) $$| \eta_i(x, t) | \leq M | h |^2 (\tau h_1 \ldots h_n)^{-1/2} (\int_{t-\tau}^{t} \int_{e(x)} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2} (\xi, \eta))^2 d\xi d\eta)^{1/2},$$

$$e(x) = \{ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : x_j - h_j \leq \xi_i \leq x_j + h_j,\ j = 1, \ldots, n \}.$$

Выражения η_i можно рассматривать как линейные ограниченные функционалы в пространстве $W_2^2(\Omega)$ от $T_0 u(x, t)$, $\forall t \in \omega_\tau$, которые обращаются в нуль на полиномах первой степени. Тогда, применяя лемму Брамбла — Гильберта ([11, с. 191]) и разработанную в [12] технику, получим

$$| \eta_i(x, t) | \leq M | h |^2 (h_1 \ldots h_n)^{-1/2} \{ \int_{e(x)} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \int_{t-\tau}^{t} u(\xi, \eta) d\eta)^2 d\xi \}^{1/2}$$

$$\leq M | h |^2 (\tau h_1 \ldots h_n)^{-1/2} \{ \int_{e(x)} \int_{t-\tau}^{t} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2} (\xi, \eta))^2 d\eta d\xi \}^{1/2}.$$

Член η_0 представим как сумму двух слагаемых

(19) $$\eta_0 = I_1 + I_2, \quad I_1 = T(u - T_0 u), \quad I_2 = T_0 (T u - T_1 \ldots T_n u).$$

Выражение I_2 оценивается как η_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выражение I_1 будем рассматривать как линейный функционал на $v(t) = Tu(x, t)$. Имеем

(20) $$| I_1 | = | T_0 v(t) - v(t) | = | \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} v(\eta) d\eta - v(t) | = \frac{1}{\tau} | \int_{t-\tau}^{t} \int_{t}^{\eta} \frac{\partial v(s)}{\partial s} ds d\eta |$$

$$\leq \int_{t-\tau}^{t} \left| \frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta} \right| d\eta \leq \sqrt{\tau} \left(\int_{t-\tau}^{t} \left| T \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, \eta) \right|^2 d\eta \right)^{1/2}$$

$$\leq \tau (\tau h_1 \ldots h_n)^{-1/2} \left(\int_{e} \int_{t-\tau}^{t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right)^2 d\eta d\xi \right)^{1/2}.$$

Подставив оценки (18), (20) в правую часть (12), получим

$$\| \eta_i \|_{L_2(\omega_T)} = \left(\sum_{\omega_\tau} \sum_{\omega} \tau h_1 \ldots h_n (\eta_i(x, t))^2 \right)^{1/2} \leq M |h|^2 \| u \|_{W_2^{2,0}(Q_T)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\| \eta_0 \|_{L_2(\omega_T)} \leq M \left\{ \tau \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + |h|^2 \| u \|_{W_2^{2,0}(Q_T)} \right\},$$

откуда следует оценка (17). Оценку (17′) получим, учитывая утверждение леммы 1. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай, когда $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $W_2^{1,0}(Q_T)$. *Тогда для погрешности* $y - \tilde{u}$ *имеет место следующая оценка:*

$$\| y - \tilde{u} \|_{L_2(\omega_T)} \leq M \{ \tau_1 (u, \tau)_{L_2} + |h| \, \| u \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \} \tag{21}$$

с постоянной M, *не зависящей от* h, τ *и* $u(x, t)$, а τ_1-*модуль определяется по формуле* (3).

Доказательство. При сделанных предположениях достаточно оценить L_2-нормы сеточных функций $\eta_\alpha(x, t)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$. Для $\alpha = 1, \ldots, n$ оценка получается аналогично (18):

$$|(\eta_\alpha(x, t)| \leq M |h| (\tau h_1 \ldots h_n)^{-1/2} \left(\int_{t-\tau}^{t} \int_{e(x)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi, \eta) \right)^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}.$$

Так оценивается и выражение I_2 из (19). Оценим I_1 из (19), положив $v(t) = Tu(x, t)$:

$$|I_1| = |v(t) - T_0 v(t)| \leq \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} |v(t) - v(\eta)| \, d\eta$$

$$\leq (\tau h_1 \ldots h_n)^{-1/2} \left(\int_{t-\tau}^{t} \int_{e(x)} |u(\xi, t) - u(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}.$$

Подставим эти оценки в правую часть (12). Получим

$$\| y - \tilde{u} \|_{L_2(\omega_T)} \leq M \left\{ \left(\sum_{t=\tau}^{T} \int_{t-\tau} \| u(x, t) - u(x, \eta) \|_{L_2(\Omega)}^2 d\eta \right)^{1/2} + |h| \, \| u \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \right\}.$$

Положим $t - \eta = \delta$, т. е. $t = \eta + \delta$. Тогда

$$\sum_{t=\tau}^{T} \int_{t-\tau}^{t} \| u(x, t) - u(x, \eta) \|_{L_2(\Omega)}^2 d\eta = \sum_{t=\tau}^{T} \int_{t-\tau}^{t} \| u(x, \eta) - u(x, \eta + \delta) \|_{L_2(\Omega)}^2 d\eta$$

$$\leq \sum_{t=\tau}^{n} \int_{t-\tau}^{t} \sup_{0\leq\delta\leq\tau} \| u(x,\eta)-u(x,\eta+\delta)\|^2_{L_2(\Omega)} d\eta = (\tau_1(u,\tau))^2.$$

Объединим последние две оценки и получим искомую оценку (21).

Учитывая свойства (4)—(6) τ_1-модуля, можно получить разные оценки сходимости разностной схемы в зависимости от гладкости искомого решения.

Следствие 1. *Пусть решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $W_2^{1,1}(Q_T)$. *Тогда для решения разностной схемы* (7), (8) *выполнена следующая оценка сходимости:*

$$\| y-\tilde{u}\|_{L_2(\omega_T)} \leq M\{\tau \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L_2(Q_T)} + |h| \, \| u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}\}.$$

Следствие 2. *Пусть решение* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *имеет ограниченную вариацию по переменной* t, *т. е.* $\bigvee_0^T \| u(t)\|_{1,\Omega} < \infty$. *Тогда для решения разностной схемы* (7), (8) *выполнена оценка сходимости*

$$\| y-\tilde{u}\|_{L_2(\omega_T)} \leq M\{\sqrt{\tau} \bigvee_0^T \| u(t)\|_{W_2^1(\Omega)} + |h| \, \| u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}\}.$$

Следствие 3. *Оценки* (17) *и* (21) *получены для любых* h *и* τ. *Совершая переход при* $\tau \to 0$, *получим: для метода прямых*

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay = Tf(x,t), \quad x\in\omega, \quad t\in[0,T],$$

$$y(x,0) = Tu_0(x), \quad x\in\omega, \quad y(x,t)=0, \quad x\in\gamma, \quad t\in[0,T]$$

выполнена следующая оценка [10]:

$$\{\int_0^T \| y(x,t) - Tu(x,t)\|^2_{L_2(\omega)} dt\}^{1/2} \leq M |h|^k \| u\|_{W_2^{k,0}(Q_T)}, \quad u\in W_2^{k,1}(Q_T), \; k=1,2.$$

Замечание 1. Для $n=2$, 3 в оценке (17) вместо $\tilde{u}=T_0Tu$ можно поставить $\tilde{u}=T_0u$. Это связано с вложением $W_2^2(\Omega)$ в $C(\Omega)$.

Замечание 2. Здесь мы рассмотрели неявную схему только для упрощения изложения. Полученная оценка справедлива и для схемы „с весами" при $\sigma\geq 0.5$. В частности, для явной схемы оценки (17) и (21) справедливы, если $\tau\leq(1-\varepsilon)/(4/h_1^2+4/h_2^2)$, $\varepsilon>0$.

3. Некоторые обобщения. Удается построить и исследовать сходимость разностной схемы для второй и третьей краевой задачи для параболического уравнения. Пусть, например, на границе $x_1=0$ задано краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \sigma u = \mu(x_2,\ldots,x_n,t), \quad x_1=0, \quad \sigma=\text{const}\geq 0, \tag{22}$$

а на остальной части $\partial\Omega$ задано однородное краевое условие Дирихле. Обозначим через $\gamma_{-1}=\{x\in\bar{\omega},\ x_1=0\}$. Определим на этот раз осредняющий оператор $\bar{T}_1^2$ следующим образом:

$$\overline{T}_1^2u(x)=\begin{cases} T_1^2u(x), & x\in\omega, \\ \int\limits_0^1(1-s)u(sh_1, x_2, \dots, x_n)\,ds, & x_1=0, \quad x\in\overline{\omega}. \end{cases}$$

В этом случае $\overline{T}_1^2$ есть разрешающий оператор точной разностной схемы для однородной задачи в направлении x_1 с краевым условием третьего рода (22) (см. [13]), т. е. выполнено

$$\overline{T}_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)=\overline{\Lambda}_1 u, \qquad \overline{\Lambda}_1 u=-\overline{A}_1 u=\begin{cases} \frac{1}{h_1}(u_{x_1}-\sigma u), & x\in\gamma_{-1}, \\ u_{\overline{x}_1x_1}, & x\in\omega. \end{cases}$$

Задачу (1), (2), (22) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$y_{\overline{t}}+\overline{A}y=\overline{\varphi}(x, t), \qquad x\in\omega\cup\gamma_{-1}, \quad t\in\omega_\tau,$$

$$y(x, 0)=\overline{T}u_0(x), \quad x\in\omega, \quad y(x, t)=0, \quad x\in\gamma\diagdown\gamma_{-1}, \quad t\in\omega_\tau,$$

где $\overline{A}=\overline{A}_1+\sum\limits_{i=2}^{n} A_i$, $\overline{T}=\overline{T}_1^2T_2^2\dots T_n^2$,

$$\overline{\varphi}(x, t)=\begin{cases} T_0\overline{T}f(x, t), & x\in\omega, \quad t\in\omega_\tau, \\ T_0\overline{T}f(x, t)+\frac{1}{h_1}T_0T_2^2\dots T_n^2\mu(x, t), & x\in\gamma_{-1}, \quad t\in\omega_\tau. \end{cases}$$

Для построенной разностной схемы выполнены оценки (17) и (21) теорем 1 и 2.

Полученные оценки сходимости остаются справедливыми и для разностных схем для квазилинейных уравнений, когда правая часть зависит от решения $f=f(x, t, u)$ и удовлетворяет условию Липшица по u равномерно в Q_T. В этом случае правую часть φ разностной схемы можно выбрать следующим образом:

$$\varphi=T_0T\,f(x, t, Py), \qquad Py(x, t)=y(x, t)+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)\,y_{x_i}(x, t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Weinelt. Untersuchungen zur Konvergenzgeschwingdingkeit bei Differenzenverfahren. *Wiss. Z. d. Techn. Hochsh., Karl-Marx-Stadt,* **20**, 1978, 736—769.
2. В. Л. Макаров, А. А. Самарский. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **20**, 1980, 371—387.
3. A. S. Andreev, V. A. Popov, Bl. Sendov. Some estimates for a numerical solution of a boundary problem for ordinary differential equations of a second order. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **32**, 1979, 1023—1026.
4. В. Л. Макаров, А. А. Самарский. К вопросу о скорости сходимости усеченных схем m-го ранга для обобщенных решений. *Дифференц. уравнения,* **16**, 1980, 1276—1282.
5. А. С. Андреев, В. А. Попов, Бл. Сендов. Оценки погрешности численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. *Ж. вычисл. матем. и математ. физ.*, **21**, 1981, 635—650.

6. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. Докторская диссертация. Москва, 1967.
7. Р. Д. Лазаров. Оценки сходимости разностных схем для параболических уравнений на обобщенных решениях. *Доклады БАН*, **35**, 1982.
8. О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. Москва, 1973.
9. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.
10. Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений. *Доклады АН СССР*, **259**, 1981, 282—286.
11. Ф. Сиарле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва, 1980.
12. Р. Д. Лазаров. К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона. — *Дифференц. уравнения*, **17**, 1981, 1285—1294.
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. *Ж. вычислит. матем. и математ. физ.*, **1**, 1961, 425—440.
14. J. Bergh, J. Peetre. On the spaces V_p, $0<p\leqq\infty$. *Boll. Unione Mat. Ital.*, **10**, 1974, 632—648.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981