Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~pliska/
or contact: Editorial Office
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ КУСКАМИ ОКРУЖНОСТЕЙ

МАРГАРИТА Г. НИКОЛЧЕВА

В работе рассматривается аппроксимация непрерывных кривых Г на плоскости кусками окружностей, которые имеют общую касательную в точках связи.
Дается алгоритм для построения таких кривых K и доказывается, при каких условиях длину этих кривых можно минимизировать. Оценивается хаусдорфовое расстояние между $Г$ и K.

Обозначим через Γ_e класс всех непрерывных кривых конечной длины l.

В статье рассматриваются аппроксимации кривых из Γ_e кусками окружностей, и эти аппроксимации не зависят от параметрического представления этих кривых.

Обозначим через K_n^* совокупность всех кривых на плоскости, которые состоят из n кусков окружностей, а через $k(M)$ — кривизну $\Gamma \in \Gamma_e$ в точке M.

В случае, когда куски окружностей из K_n^* произвольно связаны, нами доказана следующая

Теорема А [1]. *Для каждой* $\Gamma \in \Gamma_l$, *первая производная кривизны которой ограничена, т. е.* $\max|k'(M)| \leq A$, *существует кривая* $K_n \in K_n^*$, *такая, что* $r(\Gamma, K_n) \leq cAn^{-3}$, *где* C *— абсолютная константа.*

Здесь $r(\Gamma, K_n)$ — хаусдорфово расстояние между Γ и K_n [2].

В этой работе будем рассматривать случай, когда куски окружностей гладко связаны, точнее, имеют общую касательную в точках связи.

В пункте 1 дается алгоритм для построения единственной кривой K_n, которая состоит из n кусков окружностей и проходит через заданные точки, при условии, что эти куски имеют общую касательную в точках связи.

Доказано, что в зависимости от начального угла α длину этих кривых можно минимизировать. Экстремальное α является корнем трансцендентного уравнения.

В пункте 2 оценивается хаусдорфовое расстояние между $\Gamma \in \Gamma_e$ и кривой K_n, построенной по данному алгоритму и проходящей через такие точки кривой Γ, которые разделяют ее на равнодлинные куски.

1. Описание алгоритма. Пусть A_i, $i=1, \dots, n$, — произвольные точки на плоскости. Пусть s_i — симметрали отрезков A_iA_{i+1}, $i=1, \dots, n-1$. Определяем окружность C_1 так, чтобы она проходила через точки A_1 и A_2 и чтобы ее центр O_1 лежал на $S_1 = s_1 \times s_2$. Возможны два случая:

1. O_1 и S_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $A_1 A_2$ и

2. O_1 и S_1 лежат в одной и той же полуплоскости.

Обозначим $\alpha = \alpha_1 = \sphericalangle A_1O_1A_2$ и пусть t_2 касательна к окружности C_1 в точке A_2. Окружность C_2 определяем так, чтобы она проходила через точки

A_2 и A_3, и в точке A_2 имела для касательной прямую t_2. Очевидно ее центр O_2 лежит на S_2 и на прямой O_1A_2, т.е. $O_2=s_2\times O_1A_2$. Пусть $\alpha_2=\sphericalangle A_2O_2A_3$.

Рассмотрим эти случаи:

1. Из $\Delta O_1S_1O_2$ имеем $\sphericalangle S_1O_1O_2=\alpha_1/2=\alpha/2$, $\sphericalangle O_1O_2S_1=\pi-\alpha_2/2$, $\sphericalangle O_1S_1O_2=\pi-\sphericalangle(A_1A_2A_3)_e=\Psi_1$. Тогда $\alpha_2/2=\alpha/2+\Psi_1$.

2. Из $\Delta O_1S_1O_2$ имеем $\sphericalangle S_1O_1O_2=\alpha_1/2=\alpha/2$, $\sphericalangle O_1O_2S_1=\alpha_2/2$, $\sphericalangle O_1S_1O_2=\pi-[\pi-\sphericalangle(A_1A_2A_3)_e]=\pi-\Psi_1$. Следовательно, $\alpha_2/2=-\alpha/2+\Psi_1$.

Определяем $\sphericalangle(A_1A_2A_3)_e$ так:

$$(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3})=|A_2A_1|\,|A_2A_3|\cos\sphericalangle(A_1A_2A_3)_e.$$

Следовательно,

$$\sphericalangle(A_1A_2A_3)_e=\arccos\frac{(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3})}{|A_2A_1|\,|A_2A_3|}.$$

По касательной t_3 к окружности C_2 в точке A_3 и по точкам A_3 и A_4 строим окружность C_3 с центром $O_3=s_3\times O_2A_3$. Из $\Delta O_2S_2O_3$ определяем угол $\alpha_3/2$ в зависимости от взаиморасположения точек O_2 и $S_2=s_2\times s_3$ относительно прямой A_2A_3 (случаи 1, 2) или от взаиморасположения точек $S_1=s_1\times s_2$ и $S_2=s_2\times s_3$. Остальные дуги строим аналогичным образом. Очевидно, что лучше выбрать центр O_1 первой окружности так, чтобы лежал в одной полуплоскости с $S_1=s_1\times s_2$.

Ставим вопрос: при каком значении угла α длина так построенной кривой минимальна?

Ответ этому вопросу дает следующая

Теорема 1. *Для каждого естественного числа n и для каждого набора из n узлов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существует единственное решение γ^* уравнения*

$$|A_1A_2|f(\gamma)-\sum_{i=2}^{n-2}|A_iA_{i+1}|f(-\gamma+\sum_{j=2}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})=|A_{n-1}A_n|f(-\gamma+\sum_{j=2}^{n-1}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1}),$$

где $f(\gamma)=(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)/\sin^2\gamma)$, $0\leqq\gamma\leqq\pi/2$, $\Psi_i=\pi-\arccos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}})/|A_iA_{i+1}|\,|A_{i+1}A_{i+2}|$, *а* $\varepsilon_i=+1$ *или* -1 *в зависимости от того, лежат ли или нет точки* $S_{i-1}=s_{i-1}\times s_i$ *и* $S_i=s_i\times s_{i+1}$, *где* S_{i-1}, S_i, S_{i+1}*—симметрали соответственно для отрезков* $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, *в одной полуплоскости относительно прямой* A_iA_{i+1}.

Число $\alpha^*=2\gamma^*$ минимизирует длину $l(\alpha)$ кривой Γ, построенной по данному алгоритму, проходящей через точки $A_1, A_2, \ldots, A$.

Доказательство. Утверждение докажем по методу математической индукции.

1. Рассмотрим точки A_1, A_2, A_3. Пусть K_2-кривая, построенная по данному алгоритму, которая проходит через точки A_1, A_2, A_3. Обозначим ее длину через $l(\alpha)$.

Известно, что длина l дуги s произвольной окружности C вычисляется так: $l=2\pi r\alpha/360=cr\alpha$, где r — радиус этой окружности, а α — центральный угол, соответствующий дуге s. Но $r=a/2\sin(\alpha/2)$, где a — хорда дуги s. Следовательно, $l=ca\alpha/2\sin(\alpha/2)$, $0\leqq\alpha/2\leqq\pi/2$. Тогда для длины $l(\alpha)$ кривой K_2 имеем

$$l(\alpha)=c\,|A_1A_2|\,\alpha/2\sin(\alpha/2)+c\,|A_2A_3|\,(-\alpha/2+\Psi_1)/\sin(-\alpha/2+\Psi_1).$$

Ставим вопрос: для каких α $l(\alpha)$ имеет минимум?

Пусть $\alpha/2=\gamma$. Из того, что $0\leq\alpha/2\leq\pi/2$, следует, что $0\leq\gamma\leq\pi/2$ и

$$l(\gamma)=\frac{c\,|A_1A_2|\,\gamma}{\sin\gamma}+\frac{c\,|A_2A_3|\,(-\gamma+\Psi_1)}{\sin(-\gamma+\Psi_1)},$$

$$l'(\gamma)=\frac{c\,|A_1A_2|\,(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}-\frac{c\,|A_2A_3|\,(\sin(-\gamma+\Psi_1)-(-\gamma+\Psi_1)\cos(-\gamma+\Psi_1))}{\sin^2(-\gamma+\Psi_1)}.$$

Рассмотрим функцию $f(\gamma)=(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)/\sin^2\gamma$, $0\leq\gamma\leq\pi/2$:

$$f(\pi/2)=1,\ \lim_{\gamma\to0}f(\gamma)=\lim_{\gamma\to0}(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)/\sin^2\gamma=\lim_{\gamma\to0}\gamma\sin\gamma/2\sin\gamma\cos\gamma=0.$$

Пусть $\gamma\neq0$. Ищем те γ, для которых $f(\gamma)=0$, т. е. $\sin\gamma-\gamma\cos\gamma=0$, т. е $\operatorname{tg}\gamma=\gamma$. На $[0,\pi/2]$ решением этого уравнения будет $\gamma=0$. Следовательно на $(0,\pi/2]$, $f(\gamma)\neq0$ и $f(\gamma)$ монотонно возрастает потому, что

$$f(\gamma)=\frac{\sin\gamma-\gamma\cos\gamma}{\sin^2\gamma}=\frac{\gamma}{\sin\gamma}\left(\frac{\sin\gamma-\gamma\cos\gamma}{\gamma\sin\gamma}\right)=\frac{\gamma}{\sin\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-\operatorname{cotg}\gamma\right).$$

Но

$$\left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)'=\frac{\sin\gamma-\gamma\cos\gamma}{\sin^2\gamma}>0,\ \left(\frac{1}{\gamma}-\operatorname{cotg}\gamma\right)'=\frac{\gamma^2-\sin^2\gamma}{\gamma^2\sin^2\gamma}>0.$$

Тогда условие $l'(\gamma)=0$ можно записать так: $|A_1A_2|\,f(\gamma)-|A_2A_3|\,f(-\gamma+\Psi_1)=0$, т. е.

$$(*)\,|A_1A_2|\,f(\gamma)=|A_2A_3|\,f(-\gamma+\Psi_1).$$

Это уравнение имеет единственное решение $\gamma_1^*=\alpha^*/2$, т. е. $l'(\gamma_1^*)=0$, и, следовательно, в точке γ_1^* имеем локальный экстремум. Но $l'(\gamma)=|A_1A_2|\,f(\gamma)-|A_2A_3|\,f(-\gamma+\Psi_1)$. Следовательно, $l''(\gamma)=|A_1A_2|\,f'(\gamma)-|A_2A_3|\,f'(-\gamma+\Psi_1)>0$, потому, что $f'(\gamma)>0$, $f'(-\gamma+\Psi_1)<0$, т. е. в точке γ_1^* имеем локальный минимум. Следовательно, если $\gamma_1^*=\alpha^*/2$ – решение уравнения $(*)$, то длина кривой K_2, построенной по углу α^*, минимальная.

Если $\alpha^*/2=\Psi_1$, то $\alpha_2=0$ и прямая A_2A_3 совпадает с касательной t_2 к окружности C_1 в точке A_2, т. е. длина дуги $\widehat{A_2A_3}$ равна $|A_2A_3|$ и

$$l(\alpha^*)=c\,|A_1A_2|\,\alpha^*/2\sin(\alpha^*/2)+|A_2A_3|.$$

Пусть утверждение верно для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажем, что утверждение верно для $n+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$.

Длина кривой K_n в этом случае равна

$$l(\alpha)=c\sum_{i=1}^{n}\frac{|A_iA_{i+1}|\,(-\alpha/2+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})}{\sin(-\alpha/2+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})},\ \Psi_0=0,\ 0\leq\alpha/2\leq\pi/2,$$

а $\varepsilon_j=+1$ или -1.

Положим $\alpha/2=\gamma$, $0\leq\gamma\leq\pi/2$. Тогда

$$l(\gamma)=c\sum_{i=1}^{n}\frac{|A_iA_{i+1}|\,(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})}{\sin(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})},$$

$$l'(\gamma)=-c\sum_{i=1}^{n}\frac{|A_iA_{i+1}|\,[\sin(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})-(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})\cos(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})]}{\sin^2(-\gamma+\Sigma_{j=1}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})}.$$

Уравнение $l'(\gamma)=0$ эквивалентно уравнению

$$|A_1A_2|f(\gamma)-\sum_{i=2}^{n-1}|A_iA_{i+1}|f(-\gamma+\sum_{j=2}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})=|A_nA_{n+1}|f(-\gamma+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1}).$$

Левая часть этого уравнения — монотонно возрастющая функция на $[0,\pi/2]$, график которой пересекает абсциссную ось $O\gamma$ по предположению в точке γ_{n-2}^{*}, а правая часть — монотонно убывающая функция на $[0,\pi/2]$, график которой пересекает ось $O\gamma$ в точке $\Sigma_{j=2}^{n}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1}$. Абсцисса γ_{n-1}^{*} единственной точки пересечения обеих функций является решением уравнения $l'(\gamma)=0$. Так как $l'(\gamma)$ есть сумма монотонно возрастающих функций, то $l''(\gamma)>0$, т. е. в точке γ_{n-1}^{*} функция $l(\gamma)$ достигает своего локального минимума.

Если для некоторого i угол $(-\gamma_{n-1}^{*}+\Sigma_{j=2}^{i}\varepsilon_{j-1}\Psi_{j-1})$ равен нулю, вместо длины $\widehat{A_iA}_{i+1}$ рассматриваем $|A_iA_{i+1}|$ Этим все доказано.

2. Оценки для хаусдорфова расстояния. Пусть $\Gamma\in\Gamma_e$. Разобьем Γ на n частей равной длины точками A_i, $i=1,\dots,n+1$. Пусть $\tilde{K}_n$ — кривая, построенная по описанному алгоритму.

Теорема 2. *Для каждой кривой* $\Gamma\in\Gamma_e$ *и для каждого целого* n, $r(\Gamma,\tilde{K}_n)\leq l/n$.

Доказательсгво. Рассмотрим одну из частей разбиения Γ — например, ΓA_iA_{i+1}. Отрезок A_iA_{i+1} имеет длину $\leq l/n$. Наихудший случай — когда часть Γ и соответствующая дуга окружности находятся с разных сторон отрезка A_iA_{i+1}. Тогда $r(\Gamma_{A_iA_{i+1}},A_iA_{i+1})\leq l/2n$ и $r(\tilde{K}_{n,A_iA_{i+1}},A_iA_{i+1})\leq l/2n$. Следовательно, $r(\Gamma_{A_iA_{i+1}},\tilde{K}_{n,A_iA_{i+1}})\leq l/n$ и $r(\Gamma,\tilde{K}_n)\leq l/n$.

На Конференции по теории функций в Гданьске (1979) Бл. Сендов ввел следующие характеристики для кривых на плоскости:

1. Пусть $M_i(x_i,y_i)$, $i=0,\dots,n$, $(n+1)$ последовательных точек, лежащих на кривой Γ. Обозначим

$$l_n(\Gamma)=\sup_{M_i\in\Gamma}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2]^{1/2}.$$

Число $l=\lim_{n\to\infty}l_n(\Gamma)$, в случае, когда оно конечно, называется длиной непрерывной кривой Γ.

Из монотонности $\{l_n(\Gamma)\}_1^\infty$ следует, что $l_n(\Gamma)\leq l$, $n=1,2,\dots$

2. Выберем между каждыми двумя последовательными точками $M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$, $M_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\dots$, лежащие на Γ, произвольную точку $N_i(\xi_i,\eta_i)\in\Gamma$. Угол между векторами $\overrightarrow{M_{i-1}N_i}$ и $\overrightarrow{N_iM_i}$ обозначаем через φ_i, $i=1,\dots,n$. В общем случае $0\leq\varphi_i\leq\pi$, $i=1,\dots,n$.

Определяем

$$l_n'(\Gamma)=\sup_{M_i,N_i}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\varphi_i}{2}.$$

Очевидно $l'_n(\Gamma) \leq n$.

Последовательность $\{l'_n(\Gamma)\}_1^\infty$ монотонно неубывающая. Если эта последовательность ограничена, обозначаем $l'(\Gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} l'_n(\Gamma)$. Из монотонности $\{l'_n(\Gamma)\}_1^\infty$ вытекает, что $l'_n(\Gamma) \leq l'(\Gamma)$, $n = 1, 2, \ldots$. Используя эти характеристики, докажем

Теорема 3. *Для каждого целого n и для каждой кривой $\Gamma \in \Gamma_l$,*

$$r(\Gamma, \tilde{K}_n) \leq \frac{l\,[l'_n(\Gamma) + l'_n(\tilde{K}_n)]}{n^2\sqrt{2}}.$$

Доказательство. Пусть мы уже разбили Γ на n равных частей. Обозначим через γ ломанную, которая связывает точки разбиения. Рассмотрим одну из этих частей — например, $\Gamma_{A_iA_{i+1}}$. Отрезок A_iA_{i+1} имеет длину $\leq l/n$. Рассмотрим наихудший случай — когда часть Γ и соответствующий кусок окружности находятся с разных сторон отрезка A_iA_{i+1}.

Сперва оценим $r(\tilde{K}_n, \gamma)$:

Обозначим через A' среднюю точку отрезка A_iA_{i+1}, а через A'' — среднюю точку дуги $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Пусть $\rho = |A'A''|$, $\sphericalangle A''A_iA_{i+1} = \varphi_i/2$. Рассмотрим $\Delta A_iA'A''$: $\rho/|A_iA'| = \operatorname{tg}\varphi_i/2$, $0 \leq \varphi_i/2 \leq \pi/4$. Следовательно,

$$\rho = |A_iA'|\,\frac{\sin\varphi_i/2}{\cos\varphi_i/2} \leq \frac{|A_iA'|}{\sqrt{2}/2}\sin\frac{\varphi_i}{2}.$$

Но $|A_iA'| \leq l/2n$. Тогда

$$n\rho \leq \frac{l}{2n\sqrt{2}/2}\sum_{i=1}^{n}\sin\varphi_i/2 \leq \frac{l}{n\sqrt{2}}\sup_i \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\varphi_i}{2}.$$

Следует, что

$$r(\tilde{K}_n, \gamma) \leq l\, l'_n(\tilde{K}_n)/n^2\sqrt{2}. \text{ Аналогично } r(\Gamma, \gamma) \leq l\, l'_n(\Gamma)/n^2\sqrt{2}.$$

Окончательно

$$r(\Gamma, \tilde{K}_n) \leq l\,[l'_n(\Gamma) + l'_n(\tilde{K}_n)]/n^2\sqrt{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Николчева. Аппроксимация кривых на плоскости. — В: *Конструктивная теория функций' 81. Варна, 1981.* София, 1983 (в печати).

2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы приближения функции и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 143—178.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981