PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБРАЩЕНИЮ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ МАТРИЦ

МИЛКО Г. ПЕТКОВ

В работе предлагаются два алгоритма для обращения плохо обусловленных эрмитовых положительно определенных матриц. Они основаны на одном и том же подходе, заключающемся в сведении обращения данной матрицы к обращению нескольких лучше обусловленных матриц. Алгоритмы отличаются тем, что первый использует число обусловленности Тодда, а второй—одно из чисел обусловленности Тюринга.

1-й алгоритм. Пусть дана эрмитова положительно определенная матрица A n-го порядка. Пусть, кроме того, A имеет собственные числа $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n > 0$. Тогда по определению число Тодда $\rho(A)$ для матрицы A будет равняться [1] $\rho(A) = \max_i |\lambda_i| / \min_i |\lambda_i| = \lambda_1/\lambda_n$. Предположение, что A плохо обусловлена, означает, что $\rho(A) \gg 1$. Мы хотим вычислить A^{-1}. Как было сказано выше, решение этой задачи будем сводить к обращению нескольких матриц, у которых числа обусловленности Тодда достаточно близки к 1. Это сделаем, применяя одну известную формулу для обращения модифицированных матриц. Именно, пусть M — неособенная матрица n-го порядка, U и V — матрицы порядка $n\times m$ и $m\times n$ ($n \geqq m$) и такие, что $\det(E+VM^{-1}U) \neq 0$, где E — единичная матрица. Тогда имеет место формула [1] $(M+UV)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}U(E+VM^{-1}U)^{-1}VM^{-1}$. Из этой формулы получается формула

$$A^{-1} = (A+yE)^{-1} + y(A+yE)^{-1}[E-y(A+yE)^{-1}](A+yE)^{-1}, \tag{1}$$

где число $y \geqq 0$. Матрицы $A_1 = A+yE$, $A_2 = E-yA_1^{-1}$ имеют собственные числа, соответственно:

$$\lambda_1 + y \geqq \lambda_2 + y \geqq \cdots \geqq \lambda_n + y > 0;$$

$$\lambda_1/(\lambda_1+y) \geqq \lambda_2/(\lambda_2+y) \geqq \cdots \geqq \lambda_n/(\lambda_n+y) > 0.$$

Следовательно, эти две матрицы неособенные.

Из (1) видно, что A^{-1} выражается через A_1^{-1} и A_2^{-1}, а A_2^{-1} выражается через A_1^{-1}. Сейчас y определим так, чтобы A_1 и A_2 имели возможно наименьшие числа обусловленности Тодда. Это дает $\rho(A_1) = \rho(A_2)$, т. е.

$$(\lambda_1+y)/(\lambda_n+y) = \lambda_1(\lambda_n+y)/\lambda_n(\lambda_1+y).$$

Это уравнение имеет решение $y = y_1 = \sqrt{\lambda_1\lambda_n}$, для которого $\rho(A_1(y)) = \rho(A_2(y_1)) = \sqrt{\lambda_1/\lambda_n} = \sqrt{\rho(A)}$. Если $A_1(y_1)$ и $A_2(y_1)$ хорошо обусловлены, т. е. число $\sqrt{\rho(A)}$ достаточно близко к 1, A^{-1} вычисляем по формуле $A^{-1} = A_1^{-1} + y_1 A_1^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$, где A_1^{-1} и A_2^{-1} можно вычислить, например, методом Гаусса — Жордана с выбором главного элемента. Если $A_1(y_1)$ и $A_2(y_1)$ тоже плохо

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 65—67.

обусловлены, как и сама матрица A, делаем вторую итерацию для A_1^{-1} по формуле (1). Таким образом эта матрица выразится через две матрицы $A_{11}^{-1}=A_{11}^{-1}(y_2)$, $A_{12}^{-1}=A_{12}^{-1}(y_2)$, для которых $\rho(A_{11})=\rho(A_{12})=\sqrt[4]{\rho(A)}$. Если уже $\sqrt[4]{\rho(A)}$ достаточно близко к 1, вычисляем A_1^{-1} по формуле

$$A_1^{-1}=A_{11}^{-1}+y_2A_{11}^{-1}A_{12}^{-1}A_{11}^{-1}. \tag{2}$$

Потом вычисляем последовательно $A_2=E-y_1A_1^{-1}$, A_2^{-1}. При этом последнюю матрицу вычисляем, итерируя ее по формуле (1). После этой итерации она выразится через две матрицы A_{21}^{-1} и A_{22}^{-1}, для которых $\rho(A_{21})=\rho(A_{22})=\sqrt[4]{\rho(A)}$ и т. д.

Очевидно, что описанный процесс сходится очень быстро. Недостатком описанного алгоритма является то, что λ_1 и λ_n предполагаются известными.

Первый алгоритм можно видоизменить следующим образом. На первой итерации $y=y_1$ выбирается так, чтобы только A_1 стала хорошо обусловленной. При этом, если и A_2 получилась хорошо обусловленной, итерационный процесс прекращается и переходим к вычислению A^{-1} по формуле (1). Если нет, делаем вторую итерацию для A_2^{-1}, при которой $y=y_2$ определяется так, чтобы только A_{21} была хорошо обусловленной и т. д.

Легко показать, что и так описанная модификация решает поставленную задачу.

2-ой алгоритм. Опишем еще один алгоритм для обращения A, который использует одно из чисел обусловленности Тюринга [1], именно

$$\nu(A)=\frac{1}{n}N(A)N(A^{-1}),$$

где $N(A)$ означает евклидовую норму матрицы $A=(a_{ij})$, т. е. $N(A)=\{\Sigma_{i,j}|a_{ij}|^2\}^{1/2}$

Сразу скажем, что сейчас для определения $y=y_1$ вместо уравнения $\rho(A_1(y))=\rho(A_2(y))$ будем иметь $\nu(A_1(y))=\nu(A_2(y))$, которое дает

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+y)^2\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+y)^{-2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+y}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+y}{\lambda_i}\right)^2. \tag{3}$$

Дальше без ограничения общности будем считать, что $\lambda_i\neq\lambda_j$, если $i\neq j$. Покажем, что уравнение (3) имеет только один положительный корень y_1. Чтобы сделать это, обозначим через $F(y)$ левую сторону (3), а через $\Phi(y)$ — правую сторону. Тогда

$$F(y)=n+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{n}f(y;\lambda_\alpha,\lambda_\beta),\quad \Phi(y)=n+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{n}\varphi(y;\lambda_\alpha,\lambda_\beta),$$

где

$$f(y;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)=\left(\frac{\lambda_\alpha+y}{\lambda_\beta+y}\right)^2+\left(\frac{\lambda_\beta+y}{\lambda_\alpha+y}\right)^2,\quad \varphi(y;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)=\left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}\right)^2\left(\frac{\lambda_\beta+y}{\lambda_\alpha+y}\right)^2+\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\right)^2\left(\frac{\lambda_\alpha+y}{\lambda_\beta+y}\right)^2.$$

Дальше для $y>0$ имеем

$$f'(y;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)=-\frac{2(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)^2(2y+\lambda_\alpha+\lambda_\beta)[(y+\lambda_\alpha)^2+(y+\lambda_\beta)^2]}{(y+\lambda_\alpha)^3(y+\lambda_\beta)^3}<0;$$

$$\varphi'(y\,;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)=\frac{2(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)^2\,y[\lambda_\beta(y+\lambda_\alpha)+\lambda_\alpha(y+\lambda_\beta)]\,[\lambda_\beta^2(y+\lambda_\alpha)^2+\lambda_\alpha^2(y+\lambda_\beta)^2]}{(\lambda_\alpha\lambda_\beta)^2\,(y+\lambda_\alpha)^3\,(y+\lambda_\beta)^3}>0.$$

Следовательно, если $0\leq u<v$, то $F(u)>F(v)$ и $\Phi(u)<\Phi(v)$. Из этих монотонностей и соотношения

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}\right)^2=F(0)=\lim_{y\to+\infty}\Phi(y)>\Phi(0)=\lim_{y\to+\infty}F(y)=n^2$$

получаем, что действительно (3) имеет единственный корень $y=y_1$. После вычисления этого корня получаем матрицы $A_1(y_1)$ и $A_2(y_1)$, для которых $\nu(A_1)=\nu(A_2)<\nu(A)$. Если эти матрицы хорошо обусловлены, переходим к вычисленню A^{-1} по формуле (1). Если нет, делаем вторую итерацию для A_1^{-1} и т. д.

Сходимость этого процесса следует из теоремы.

Теорема. *Пусть $\varepsilon>1$ — произвольное число. Существует такая итерация, после которой A^{-1} выразится через обратные матрицы таких матриц, для каждой из которых число обусловленности Тюринга меньше или равно ε.*

При доказательстве применяются следующие три леммы.

Лемма 1. *Положительное решение y_1 уравнения* (3) *удовлетворяет неравенства $\lambda_n<y_1<\lambda_1$.*

Что такое утверждение имеет место, следует из двух неравенств, которые доказываются легко и непосредственно. Именно:

$$f(\lambda_n\,;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)>\varphi(\lambda_n\,;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)\,;\quad f(\lambda_1\,;\lambda_\alpha,\lambda_\beta)<\varphi(\lambda_1\,;\lambda_\alpha,\lambda_\beta).$$

Лемма 2. *Если число $q\in(1/2,1)$ и $\rho(A)>1/(2q-1)$, то*

$$\rho(A_1(y_1))<q\rho(A),\ \rho(A_2(y_1))<q\rho(A).$$

Лемма 3. *Для матрицы A имеет место неравенство* $\nu(A)<\rho(A)$.

И здесь возможна модификация, аналогичная модификации первого алгоритма.

Экспериментирован только алгоритм 1, который использовался для решения систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Петков. Числени методи на алгебрата. София, 1974.
2. Б. Д. Райкова. Числени методи за решаване на лошо обусловени линейни алгебрични системи. Дипломна работа, Соф. унив., 1980.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981