PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

УСИЛЕНИЕ ОДНОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ МАЗУРКИЕВИЧА

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Доказано, что если M — слабо бесконечномерное в смысле П. С. Александрова подмножество гильбертова куба, тогда любые две точки его дополнения можно соединить бесконечномерным канторовым многообразием, лежащем в этом дополнении.

Мазуркиевичем [1] было доказано, что если M — подмножество n-мерного куба I^n и $\dim M \leqq n-2$, тогда любые две точки из $I^n \setminus M$ принадлежат некоторому содержащемуся в $I^n \setminus M$ континууму. В [2] содержится следующий бесконечномерный аналог этой теоремы: если M — слабо бесконечномерное в смысле П. С. Александрова подмножество гильбертова куба $I^{\aleph_0}$, тогда любые две точки из $I^{\aleph_0} \setminus M$ принадлежат некоторому содержащемуся в $I^{\aleph_0} \setminus M$ континууму. В [3] теорема Мазуркиевича усилена следующим образом: если $M \subset I^n$ и $\dim M \leqq n-2$, тогда любые две точки из $I^n \setminus M$ можно соединить канторовым $(n-\dim M-1)$-многообразием, лежащем в $I^n \setminus M$. Это утверждение несет бóльшую информацию по сравнению с теоремой Мазуркиевича, так как любое канторово многообразие является континуумом. Бесконечномерным аналогом последней теоремы является следующее предложение: если M — слабо бесконечномерное в смысле П. С. Александрова подмножество гильбертова куба $I^{\aleph_0}$, тогда любые две точки дополнения $I^{\aleph_0} \setminus M$ можно соединить лежащим в $I^{\aleph_0} \setminus M$ бесконечномерным канторовым многообразием. Это утверждение является усилением бесконечномерного аналога из [2] теоремы Мазуркиевича, так как любое бесконечномерное канторово многообразие — континуум.

Напомним необходимые определения. Пространство X называют слабо бесконечномерным в смысле П. С. Александрова (короче, A — слабо бесконечномерным), если ко всякой бесконечной счетной системе пар замкнутых множеств (A_i, B_i), где $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i=1, 2, 3, \ldots$, можно подобрать такие перегородки C_i в X между A_i и B_i, для которых $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$. Притом, перегородкой в топологическом пространстве X между его подмножествами A и B называют всякое такое подмножество C, для которого дополнение $X \setminus C$ является объединением дизъюнктных открытых подмножеств U и V, таких, что $U \supset A$ и $V \supset B$.

Топологическое пространство X называется бесконечномерным канторовым многообразием в смысле П. С. Александрова, если его нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых подмножеств, пересечение которых слабо бесконечномерно в смысле П. С. Александрова. Очевидно, если X — бесконечномерное канторово многообразие, тогда оно

ПЛИСКА Български математически студии. Том 6, 1983, с. 19—22.

связно, и, кроме того, оно не слабо бесконечномерно (если хаусдорфово). Впрочем, пространства, которые не слабо бесконечномерны, называют сильно бесконечномерными (в смысле П. С. Александрова).

Конечномерное усиление теоремы Мазуркиевича [3] получено с помощью одного уточнения теоремы Гуревича — Тумаркина, согласно которой всякий бикомпакт X размерности $\dim X=n$ содержит канторово n-многообразие. При этом мы пользовались продолжениями отображений в сферы. Идти таким путем здесь невозможно, так как в бесконечномерном случае отображения в сферы никакой роли не играют. Тем не менее, бесконечномерный аналог результата из [3], которому посвящена настоящая статья, получен аналогичным образом. Здесь уточняется теорема Скляренко [4], согласно которой во всяком сильно бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное канторово многообразие. С помощью этого уточнения уже легко установить искомое усиление бесконечномерного аналога теоремы Мазуркиевича.

Лемма 1. *Пусть в бикомпакте Φ существует такая счетная система пар дизъюнктных замкнутых подмножеств (A_i, B_i), $i=1, 2, 3, \ldots$, что для любой системы перегородок C_i в Φ между A_i и B_i всегда $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$, но в то же время в любом собственном замкнутом подмножестве Φ' бикомпакта Φ существуют перегородки C_i' между множествами $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$ с пустым пересечением ($\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i' = \emptyset$). Тогда, если $\Phi=\Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — собственные замкнутые подмножества бикомпакта Φ, подмножество $\Phi_1 \cap \Phi_2 \setminus (A_i \cup B_i)$ сильно бесконечномерно.*

В случае, когда A_i и B_i являются G_δ-подмножествами бикомпакта Φ, тогда из высказанного предложения следует, что Φ — бесконечномерное канторово многообразие.

Доказательство леммы 1 здесь не будем проводить, тем более, что его можно извлечь без всякого труда из [4]. С помощью леммы Цорна и леммы 1 легко доказать, что в любом сильно бесконечномерном бикомпакте X содержится замкнутое подмножество Φ, удовлетворяющее условиям леммы 1 (см. [4]). Из этого замечания нетрудно извлечь следующее предложение:

Лемма 2. *Пусть A_i и B_i — замкнутые подмножества бикомпакта X и $A_i \cap B_i=\emptyset$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Допустим, кроме того, что при любом выборе перегородок C_i в X между A_i и B_i всегда $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$. При этих предположениях для любого i существует бикомпакт Φ, такой, что $\Phi \cap A_i \neq \emptyset$, $\Phi \cap B_i \neq \emptyset$, и если $\Phi=\Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — собственные замкнутые подмножества множества Φ, то множество $\Phi_1 \cap \Phi_2 \setminus (A_i \cup B_i)$ сильно бесконечномерно.*

С помощью этой леммы и вспомогательной леммы из [5] можно доказать следующее предложение:

Лемма 3. *Пусть A_i и B_i — замкнутые подмножества бикомпакта X и $A_i \cap B_i=\emptyset$, $i=1, 2, 3, \ldots$ Предположим, что для любых перегородок C_i в X между A_i и B_i имеем $\Pi_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$. Пусть M — слабо бесконечномерное подмножество бикомпакта X. Если M — счетно паракомпактно и $X \setminus M$ — нормально прилегает к M, тогда для любого индекса i множества A_i и B_i можно соединить в $X \setminus M$ сильно бесконечномерным континуумом $\mathscr{K}$, который нельзя представить в виде $\mathscr{K}=\mathscr{K}_1 \cup \mathscr{K}_2$, где множество $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2 \setminus (A_i \cup B_i)$ слабо бесконечномерно.*

Должны напомнить, что подмножество N топологического пространства X нормально прилегает к своему дополнению $X \setminus N = M$ (Ю. М. Смирнов), если любые две дизъюнктные замкнутые в M множества обладают непересекающимися открытыми в X окрестностями. Впрочем, в доказательстве леммы 3 надо принять во внимание и лемму 1 в [6, с. 136].

По существу лемма 3 является основным результатом настоящей статьи. Из нее, по аналогии со сделанным в [3], получается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть M — слабо бесконечномерное в смысле П. С. Александрова подмножество гилбертова куба $I^{\aleph_0}$. Тогда любые две точки из дополнения $I^{\aleph_0} \setminus M$ можно соединить сильно бесконечномерным континуумом, лежащем в дополнении $I^{\aleph_0} \setminus M$ и являющимся бесконечномерным канторовым многообразием.*

Эту теорему можно обобщить и для тихоновского куба I^τ, где τ — произвольное бесконечное кардинальное число. Для этой цели придется воспользоваться кардинальной размерностью, введенной в [6], и понятием кардинального канторова многообразия из [7]. В этих работах содержится вся необходимая терминология, а также и все необходимое для доказательства следующей более общей, по сравнению с предшествующей, теоремы:

Теорема 2. *Пусть M — τ-нормальное подмножество тихоновского куба I^τ, имеющее кардинальную размерность не более, чем τ. Если $I^\tau \setminus M$ нормально прилегает к M, тогда для любых двух точек p и q из $I^\tau \setminus M$ существует континуум $\mathcal{K}$, являющийся канторовым τ-многообразием, который лежит в $I^\tau \setminus M$ и содержит точки p и q.*

Сформулированная теорема является усилением теоремы 5 из [2].

Георему 1 можно попытаться обобщить, заменив гильбертов куб на произвольное счетное произведение континуумов. Такое обобщение, по-видимому, возможно. Основание для такой уверенности дает факт, что самым существенным моментом в доказательстве теоремы 1 кажется то обстоятельство, что при любом выборе перегородок между противоположными гранями гильбертова куба пересечение всех этих перегородок не пусто [8]. Это обстоятельство имеет свой аналог в следующем, доказанном в [9], предложении: даны нетривиальные континуумы $\mathcal{K}_i$, в любом из которых отмечены две различные точки a_{+i} и a_{-i}. Положим $\mathcal{K} = \Pi_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ и $\mathcal{K}_{\pm i} = \pi_i^{-1}(a_{\pm i})$, где π_i — проекция произведения $\mathcal{K}$ на i-й сомножитель $\mathcal{K}_i$. Тогда для любого выбора перегородок C_i в $\mathcal{K}$ между $\mathcal{K}_{+i}$ и $\mathcal{K}_{-i}$ обязательно $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$. С помощью этого предложения легко доказать (см. [9]), что $\mathcal{K}$ нельзя представить в виде объединения конечного или счетного числа собственных замкнутых подмножеств, попарные пересечения которых слабо бесконечномерны. Но для доказательства более сильного утверждения, аналогичного теореме 1, нужно, по-видимому, обойти ссылку на выпуклую структуру пространства $I^{\aleph_0}$, которая имеет значение в доказательстве теоремы 1 из [3]. Наконец, заметим, что если пространства $\mathcal{K}_i$ не метризуемы, тогда, кажется, надо потребовать еще, чтобы M было счетно паракомпактным подмножеством бикомпакта $\mathcal{K}$ и, кроме того, чтобы $\mathcal{K} \setminus M$ нормально прилегало к M. Следует ожидать, что аналогичным образом можно обобщить и теорему 2. Во всяком случае утверждение о счетном объединении можно доказать и сейчас.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mazurkiewich. Sur les ensembles de dimension faible. *Fund. Math.*, **13**, 1929, 210—217.
2. N. G. Hadžiivanov. A lower bound for the cardinal dimension of certain G_δ-sets in tychonov cube. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **28**, 1975, 151—152.
3. Н. Г. Хаджииванов. О канторовых многообразиях. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 941—944.
4. Е. Г. Скляренко. О размерностных свойствах бесконечномерных пространств. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **23**, 1959, 197—212.
5. Н. Хаджииванов. Одно обобщение теоремы Лебега о покрытиях и некоторые его применения. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1237—1240
6. Н. Хаджииванов. О продолжении отображений в сферы и о счетных разложениях тихоновских кубов. *Матем. сб.*, **84**, 1971, 119—140.
7. Н. Хаджииванов. О бесконечномерных пространствах. *Bul. Acad. pol. Sci., Sér. sci. math., astron. et phys.*, **19**, 1971, 491—500.
8. В. Гуревич, Г. Волмэн. Теория размерности. Москва, 1948.
9. Н. Г. Хаджииванов. О произведениях континуумов. *Доклады БАН*, **31**, 1978.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 1. 1979