PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ТЕОРИЯ КАРДИНАЛЬНОЗНАЧНЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ОКРЕСТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ДИМИТРИНА Н. СТАВРОВА

В этой работе определяются кардинальнозначные инварианты пространств более общих, чем топологические, а именно окрестностных пространств и затем выясняется, какой вид приобретает теория кардинальнозначных инвариантов для этих пространств. Оказывается возможным обобщить ряд основных теорем теории кардинальнозначных инвариантов топологических пространств, в то же время получаются и специфические результаты. Исследуются связи введенных инвариантов с кардинальнозначными инвариантами естественно порожденной топологии. В конце работы дается, в свете этой теории, частичный ответ на вопрос С. Й. Недева [18] о том, будет ли симметризуемое и финально компактное топологическое пространство наследственно сепарабельным.

2. Основные понятия и простейшие соотношения между ними. Многими авторами ([6—9, 11, 13] и другие) рассматривались следующие классы пространств: пространства сходимости, окрестностные пространства и пространства с оператором замыкания, не предполагаемым идемпотентным, или оператором Чеха.

Пусть X — некоторое множество. Отображение $[\ ]^*$; $\exp X \to \exp X$, (где через $\exp X$ будем в дальнейшем обозначать множество всех подмножеств множества X) будем называть оператором Чеха [7] на множестве X, если выполнены следующие условия:

1) $A \subset [A]^*$ для всех $A \in \exp X$;

2) $[A \cup B]^* = [A]^* \cup [B]^*$ для всех A и B из $\exp X$;

3) $[\varnothing]^* = \varnothing$, где через $\varnothing$ обозначено пустое множество.

Если на множестве X задан оператор Чеха $[\ ]^*$, то пару $(X, [\ ]^*)$ будем называть пространством Чеха. Как пространства Чеха можно рассматривать, например, все секвенциальные пространства (взяв в качестве оператора Чеха оператор секвенциального замыкания).

Если X — множество, то через $F(X)$ будем обозначать множество всех фильтров на X; через $\dot{x}$ — ультрафильтр, состоящий из всех подмножеств множества X, содержащих точку x.

Соответствие $q: F(X) \to \exp X$ называется структурой сходимости на множестве X (Kent [14], Cook [6], Ficher [9]), если выполнены следующие условия:

1) $x \in q(\dot{x})$ F для всех x из X;

2) если $\mathcal{F}$, $G \in F(X)$ и $\mathcal{F} \leq G$, то $q(\mathcal{F}) \leq q(G)$ (где $\mathcal{F} \leq G$ означает, что $\mathcal{F} \subset G$);

3) если $x \in q(\mathcal{F})$, то $x \in q(\mathcal{F} \cap \dot{x})$.

Если $x \in q(\mathcal{F})$, то будем говорить, что $\mathcal{F}$ — q-сходится к точке x. Пару (X, q) назовем пространством сходимости.

Пусть (X, q) — пространство сходимости; через $V_q(x)$ будем обозначать пересечение всех фильтров из $F(X)$, которые q-сходятся к точке x. Если $x \in q(V_q(x))$ для всех x из X, то q называется претопологической структурой сходимости или просто претопологии, а пространство (X, q) претопологическим пространством сходимости.

Если q_1 и q_2 — две структуры сходимости на множестве X, то мы пишем $q_1 \leqq q_2$ тогда и только тогда, когда $q_2(\mathscr{F}) \subset q_1(\mathscr{F})$ для всех $\mathscr{F}$ из $F(X)$ и говорим при этом, что структура q_2 более тонкая, чем структура q_1 или, что структура q_1 более грубая, чем q_2. Если q — произвольная структура сходимости на множестве X, то определяем [14] новую структуру сходимости на X, обозначаемую через $\pi(q)$ следующим образом: точка $x \in \pi(q)(\mathscr{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F} \supset V_q(x)$. Структура $\pi(q)$ является самой тонкой претопологической структурой сходимости на множестве X, которая более груба, чем q, и называется претопологической модификацией структуры q.

Если (X, q) — пространство сходимости и $A \subset X$, то пусть $\Gamma_q(A) = \{x \in X:$ существует ултрафильтр $\mathscr{F} \in F(X)$ такой, что $\mathscr{F} \ni A$ и $x \in q(\mathscr{F})\}$. Оператор $\Gamma_q(\ )$ всегда является оператором Чеха на X.

Естественным примером пространства сходимости является каждое топологическое пространство. Однако, если рассмотрим пространство всех измеримых ограниченных реальнозначных функций на единичном интервале $[0,1]$, тогда сходимость почти всюду не является топологической, как заметил Ordman [22]. Другим примером нетопологической структуры сходимости, как отмечают Hearsey, Kent [13], является порядковая сходимость в некоторой полной решетке L. Она определяется следующим образом: $\mathscr{F} \in F(L)$ порядково сходится к точке x из L тогда и только тогда, когда $x = \sup\{\inf F:\ F \in \mathscr{F}\} = \inf\{\sup F : F \in \mathscr{F}\}$.

Если X — множество и для каждого x из X задан фильтр $\Phi_x \in F(X)$ такой, что $\bigcap \Phi_x \ni x$ (то есть $x \in A$ для всех $A \in \Phi_x$) и если $\Phi = \{\Phi_x : x \in X\}$, то пару (X, Φ) будем называть окрестностным пространством. Все пространства со слабой первой аксиомой счетности, например, являются таковыми. Притом, говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет слабой первой аксиоме счетности (в смысле Архангельского [1]), если каждой точке $x \in X$ можно поставить в соответствие последовательность подмножеств $\{Q_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ множества X, так что выполняются условия:

а) $x \in Q_n(x) \subset Q_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

б) подмножество $U \subset X$ открыто в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in U$ найдется n такое, что $Q_n(x) \subset U$; тогда рассматривая X как окрестностное пространство, в роли Φ_x будем брать фильтр, порожденный слабой базой $\{Q_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ в точке x.

Если (X, Φ)—окрестностное пространство и $A \subset X$, положим: $[A]_\Phi = \{x \in X : A \mathbin{\dot\cap} \Phi_x \neq \emptyset\}$, где если $A \subset X$, а $\mathscr{F} \in F(X)$ через $A \mathbin{\dot\cap} \mathscr{F} \neq \emptyset$, всегда будем обозначать тот факт, что $F \cap A \neq \emptyset$ для всех $F \in \mathscr{F}$. Оператор $[\ ]_\Phi$ всегда является оператором Чеха на X.

Если $(X, [\ ]^*)$ — пространство с оператором Чеха, то для каждого $x \in X$ определим фильтр Φ_x^* так: $U \in \Phi_x^*$ тогда и только тогда, когда $x \notin [X \setminus U]^*$. Тогда (X, Φ^*) (где $\Phi^* = \{\Phi_x^* :\ x \in X\}$) называем окрестностным пространством, порожденным оператором $[\ ]^*$. Имеют место следующие известные утверждения:

Предложение 1.1. *Пусть* (X, Φ) — *окрестностное пространство. Тогда окрестностное пространство, порожденное* $[\ ]_\Phi$, *совпадает с* (X, Φ).

Предложение 1.1′. *Пусть* $(X, [\ ]^*)$ — *пространство Чеха. Тогда оно порождает окрестностное пространство* (X, Φ^*) *такое, что* $[A]_{\Phi^*} = [A]^*$ *для всех* A *из* $\exp X$.

Пусть (X, Φ) — окрестностное пространство. Определяем структуру сходимости $q_\Phi : F(X) \to \exp X$ так: $x \in q_\Phi(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} \supset \Phi_x$. Тогда $V_{q_\Phi}(x) = \Phi_x$ для всех x из X и q_Φ всегда является претопологической. Если, с другой стороны, (X, q) — пространство сходимости, то полагая $\Phi^q_x = V_q(x)$ и $\Phi^q = \{\Phi^q_x : x \in X\}$, мы получаем окрестностное пространство (X, Φ^q). Имеют место также:

Предложение 1.2. *Если* (X, q) — *пространство сходимости и* (X, Φ^q) — *порожденное им окрестностное пространство, то* $q_{\Phi^q} = \pi(q)$.

Предложение 1.3. *Каждое окрестностное пространство* (X, Φ) *порождает претопологическую структуру сходимости* q_Φ *такую, что* $\Phi = \Phi^{q_\Phi}$.

Предложение 1.3′. *Каждая претопологическая структура сходимости* q *на* X *порождает окрестностное пространство* (X, Φ^q) *такое, что* $q_{\Phi^q} = q$.

Пусть (X, Φ) — окрестностное пространство. Определяем топологию $\tau(\Phi)$ на множестве X следующим образом: $U \in \tau(\Phi)$, если и только если для каждого $x \in U$ существует $U_x \in \Phi_x$ такое, что $U_x \subset U$. При этом $[A]_\Phi \subset [A]_{\tau(\Phi)}$ для всех $A \in \exp X$, где $[\ ]_{\tau(\Phi)}$ — оператор замыкания, порожденный топологией $\tau(\Phi)$.

Если на множестве X имеется оператор Чеха $[\ ]^*$ и $A \subset X$, положим $[A]^*_0 = [A]^*$ и пусть $[A]^*_\beta$ уже определено для всех $\beta < \alpha \in \mathrm{Ord}$. Тогда полагаем $[A]^*_\alpha = \bigcup \{[A]^*_\beta : \beta < \alpha\}$, если ординал α предельный, и $[A]^*_\alpha = [[A]^*_\beta]^*$, если $\alpha = \beta + 1$. Пусть $\mathrm{iid}([\ ]^*) = \min\{\alpha :$ для всех $A \subset X, [[A]^*_\alpha]^* = [A]^*_\alpha\}$. Ординал $\mathrm{iid}([\ ]^*)$ назовем индексом неидемпотентности оператора $[\ ]^*$. Надо отметить, что для любого ординала α оператор $[\ ]^*_\alpha$ является оператором Чеха на X.

В случае окрестностных пространств ясно, что операторы $[\ ]_\Phi$ и $[\ ]_{\tau(\Phi)}$ связаны равенством $([\ ]_\Phi)_\alpha = [\ ]_{\tau(\Phi)}$ для некоторого ординала α. Это позволяет нам заметить, что A замкнуто в $\tau(\Phi)$ тогда и только тогда, когда $A = [A]_\Phi$. Действительно, если $A = [A]_\Phi$, то и $([A]_\Phi)_\alpha = A$ для всех ординалов α, так, что A замкнуто в $\tau(\Phi)$. Обратно, если $A = [A]_{\tau(\Phi)}$, то из того, что $[A]_{\tau(\Phi)} \supset [A]_\Phi$, следует, что $[A]_\Phi \subset A$ и отсюда $A = [A]_\Phi$.

Имея в виду взаимосвязь между претопологическими пространствами, пространствами Чеха и окрестностными пространствами, указанную в предложениях 1.1 — 1.3′, мы в дальнейшем будем пользоваться языком окрестностных пространств.

Пусть (X^1, Φ^1) и (X^2, Φ^2) — два окрестностных пространства. Отображение $f : X^1 \to X^2$ называется окрестностно непрерывным, если для каждого $x \in X^1$ и каждого $U_{f(x)} \in \Phi^2_{f(x)}$ существует $U_x \in \Phi^1_x$ такое, что $f(U_x) \subset U_{f(x)}$. Это выполнено тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X^2$ имеет место $\Phi^2_{f(x)} \subset f(\Phi^1_x)$ (где $f(\Phi^1_x)$ — фильтр на X^2, порожденный предфильтром $\{f(U_x) : U_x \in \Phi^1_x\}$).

Если q_{Φ^1} и q_{Φ^2} — структуры сходимости на X^1 и X^2, соответственно, порожденные Φ^1 и Φ^2, то, как мы уже отмечали, они претопологичны и $\Phi^i_x = V_{q_{\Phi^i}}(x)$, $i=1, 2$. Поэтому $f: X^1 \to X^2$ окрестностно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: (X^1, q_{\Phi^1}) \to (X^2 q_{\Phi^2})$ непрерывно в смысле Kent [15]. Отображение $f: X^1 \to X^2$ будем называть окрестностным гомеоморфизмом, если f взаимно однозначно, $fX^1 = X^2$, и как f, так и f^{-1} являются окрестностно непрерывными. Пространства (X^1, Φ^1) и (X^2, Φ^2) называем окрестностно гомеоморфными, если существует окрестностный гомеоморфизм f из X^1 на X^2.

Кардинальнозначным окрестностным инвариантом называется любое отображение Ψ класса всех окрестностных пространств в классе ординалов, которое принимает одинаковые значения на окрестностно гомеоморфные пространства.

Если (X, Φ) — окрестностное пространство, то определяем: $\chi_0(x, X) = \min\{|\mathscr{U}_x| : \mathscr{U}_x \subset \Phi_x$ и $\mathscr{U}_x$ — база фильтра $\Phi_x\}$ — окрестностный характер точки x в (X, Φ), и, соответственно, $\chi_0(X) = \sup\{\chi_0(x, X) : x \in X\}$ — окрестностный характер пространства (X, Φ). Отметим, что $\chi_0(X) \leqq \aleph_0$ тогда и только тогда, когда q_Φ удовлетворяет первой аксиоме счетности в смысле Kent, Richardson [16] для пространств сходимости. Также, если $\chi_0(X) \leqq \aleph_0$, то $\tau(\Phi)$ удовлетворяет слабой первой аксиоме счетности.

Окрестностное пространство (X, Φ) называем окрестностно отделимым, если $\cap \Phi_x = \{x\}$ для всех $x \in X$. Если (X, Φ) окрестностно отделимо, то пусть $\psi_0(x, X) = \min\{|\mathscr{U}_x| : \mathscr{U}_x \subset \Phi_x$ и $\cap \mathscr{U}_x = \{x\}\}$ — окрестностный (или o-) псевдохарактер точки x в (X, Φ) и, соответственно, $\psi_0(X) = \sup\{\psi_0(x, X); x \in X\}$ — o-псевдохарактер пространства (X, Φ).

Окрестностная теснота точки x в пространстве (X, Φ) будет кардинал $t_0(x, X) = \min\{\alpha :$ из $x \in [A]_\Phi$ следует, что существует $B \subset A$, такое, что $|B| \leqq \alpha$ и $x \in [B]_\Phi\}$, а $t_0(X) = \sup\{t_0(x, X) : x \in X\}$ — o-теснота пространства (X, Φ). Определим еще инвариант $t_a(x, X) = \min\{\tau :$ если $x \in ([A]_\Phi)_a$, то существует $B \subset A$ такое, что $|B| \leqq \tau$ и $x \in ([B]_\Phi)_a\}$ и тоже $t_a(X) = \sup\{t_a(x, X) : x \in X\}$.

Множество $A \subset X$ называем o-плотным (окрестностно плотным) в X, если $[A]_\Phi = X$. При этом кардинал $d_0(X) = \min\{(A) : [A]_\Phi = X\} = \min\{|A| : A \cap \Phi_x \neq \emptyset$ для всех $x \in X\}$ назовем окрестностной плотностью пространства (X, Φ).

Семейство γ подмножеств множества X будем называть o-покрытием, если для каждого $x \in X$ существует $U \in \gamma$ такое, что $U \in \Phi_x$. Тогда полагаем: $\mathscr{L}_0(X) = \aleph_0 \min\{\tau :$ из любого o-покрытия пространства (X, Φ) можно выбрать подпокрытие (необязательно являющееся o-покрытием) мощности $\leqq \tau\}$. Пространство (X, Φ) назовем o-бикомпактным, если из любого o-покрытия пространства (X, Φ) можно выбрать конечное подпокрытие, и o-финально компактным, если из любого o-покрытия пространства (X, Φ) можно выбрать счетное подпокрытие. Надо отметить, что (X, Φ) o-бикомпактно тогда и только тогда, когда (X, q_Φ) компактно в смысле Х. Фишера. Действительно, Ficher [9] называет пространство сходимости (X, q) компактным, если и только если для каждого $\mathscr{F} \in F(X)$ существует $\mathscr{F}' \in F(X)$, такой, что $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ и $\emptyset \neq q(\mathscr{F}')$. Пусть теперь, (X, Φ) o-бикомпактно, $\mathscr{F} \in F(X)$ и пусть для каждого $x \in X$ существуют $U_x \in \Phi_x$ и $V_x \in \mathscr{F}$ такие, что $V_x \cap U_x = \emptyset$. Система $\omega = \{U_x : x \in X\}$ является o-покрытием пространства (X, Φ). Следовательно, существует конечное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$, такое, что $U_{x_1} \cup U_{x_2}$

$\cup \ldots \cup U_{x_k}=X$. Но $U_{x_i} \cap V_{x_i}=\varnothing$ для $i=1, 2, \ldots, k$ и поэтому $V_{x_i} \subset X \setminus U_{x_i}$, $i=1, 2, \ldots, k$. То есть, $V_{x_1} \cap V_{x_2} \ldots \cap V_{x_k} \subset (X \setminus U_{x_1}) \cap (X \setminus U_{x_2}) \cap \ldots \cap (X \setminus U_{x_k})=\varnothing$. Однако это невозможно, так как $\mathscr{F}$ — фильтр. Следовательно, существует точка $x \in X$ такая, что для каждого $U_x \in \Phi_x$ имеем $U_x \dot{\cap} \mathscr{F} \neq \varnothing$. Тогда пусть $\mathscr{F}'=\Phi_x \cup \mathscr{F}$. Фильтр $\mathscr{F}'$ непустой, $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ и $\mathscr{F}' \supset \Phi_x$. Следовательно, $x \in q_\Phi(\mathscr{F}')$. Наоборот, пусть (X, q_Φ) компактно и пусть $\omega=\{U_x : x \in X\}$, где $U_x \in \Phi_x$ для каждого $x \in X$, o-покрывает X (каждое o-покрытие пространства (X, Φ) может быть записано таким образом). Допустим, что для каждого конечного подмнождства $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset X$ выполнено соотношение $X \diagup (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}) \neq \varnothing$, то есть $(X \setminus U_{x_1}) \cap \ldots \cap (X \setminus U_{x_k}) \neq \varnothing$. Пусть $\bar{\omega}=\{X \setminus U : U \in \omega\}$. Семейство $\bar{\omega}$ является центрированным семейством подмножества множества X. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр, порожденный семейством $\bar{\omega}_0$ множеств, представимых в виде конечных пересечений элементов из $\bar{\omega}$. Существует фильтр $\mathscr{F}'$ такой, что $\mathscr{F}' \supset \Phi_x$ и $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$. Тогда любой элемент из Φ_x должен пересекать любой элемент из $\mathscr{F}$. Но для $x \in X$, $U_x \in \omega$, $U_x \in \Phi_x$ и, следовательно, $X \setminus U_x \in \mathscr{F}$. Однако $(X \setminus U_x) \cap U_x=\varnothing$ — противоречие. Следовательно, из ω можно выбрать конечное подпокрытие.

Множество $A \subset X$ назовем o-дискретным в (X, Φ), если для каждого $x \in A$ существует $U_x \in \Phi_x$ такое, что $U_x \cap A=\{x\}$. Тогда пусть $s_0(X)=\sup\{|A| : A$ o-дискретно в $X\}$ — o-спрэд пространства (X, Φ). Важным o-инвариантом является окрестностная клеточность $c_0(X)=\sup\{\tau :$ существует $A \subset X$, $|A| \leq \tau$ такое, что для каждого x из A можно выбрать $V_x \in \Phi_x$ так, чтобы семейство множеств $\{V_x : x \in A\}$ было дизъюнктным$\}$.

Если $A \subset X$, то $\Phi/A=\{\Phi_x/A : x \in A\}$, где $\Phi_x/A=\{U_x \cap A : U_x \in \Phi_x\}$ для всех $x \in A$. Тогда $(A, \Phi/A)$ называется окрестностным подпространством пространства (X, Φ). Как обычно определяются наследственные инварианты $hd_0(X)$, $h\mathscr{L}_0(X)$, $hc_0(X)$ и т. д. При этом $h\chi_0(X)=\chi_0(X)$, $ht_0(X)=t_0(X)$ и $h\psi_0(X_0)=\psi_0(X)$. Надо отметить, что на $A \subset X$ топологии $\tau(\Phi)/_A$ и $\tau(\Phi/_A)$ не всегда совпадают. Этот факт подтверждается следующим примером:

Пример 1.1. Пример окрестностного пространства (Z, Φ), для которого существует подмножество $A \subset Z$ такое, что $\tau(\Phi)/A \neq \tau(\Phi/A)$.

Точками пространства Z будут служить точки двух равных параллельных отрезков единичной длины, расположенных друг под другом. Нижний отрезок обозначим через X, а верхний — через X'. Для любой точки $x \in X$ через x' будем обозначать ее ортогональную проекцию на X' и, наоборот, через x будем обозначать проекцию точки $x' \in X'$ на X. Как обычно, через (a, b) и $[a, b)$ обозначаются открытый и полуоткрытый интервалы единичного отрезка. Если $x \in X$, то пусть $\mathscr{F}_x=\{([x, x+\varepsilon) \cup (x'-\varepsilon, x')) \cap Z : \varepsilon>0\}$ и пусть Φ_x — фильтр, порожденный предфильтром $\mathscr{F}_x$. Аналогично, для $x' \in X'$ пусть $\mathscr{F}_{x'}=\{([x', x'+\varepsilon) \cup (x-\varepsilon, x)) \cap Z : \varepsilon>0\}$ и $\Phi_{x'}$ — фильтр, порожденный $\mathscr{F}_x$. Тогда, если $\Phi=\{\Phi_x, \Phi_{x'} : x \in X, x' \in X'\}$, то (Z, Φ) — окрестностное пространство.

Пусть x — произвольная точка множества $X \setminus \{0, 1\}$ и $\varepsilon>0$ — такое, что $0<x-\varepsilon<x+\varepsilon<1$. Пусть $A=[x, x+\varepsilon) \cup (x'-\varepsilon, x')$. Тогда $A \subset Z$ и A не является ни открытым, ни замкнутым подмножеством пространства $(Z, \tau(\Phi))$. Пусть $y \in (x, x+\varepsilon)$ и пусть $\varepsilon_y>0$ — такое, что $x<y-\varepsilon_y<y+\varepsilon_y<x+\varepsilon$. Тогда для $U=[y, y+\varepsilon_y)$ имеем $U \in \tau(\Phi/A)$, но $U \notin \tau(\Phi)/A$. Действительно, если $y_1 \in U$, то можно выбрать $\varepsilon_{y_1}>0$ такое, что $x-\varepsilon_{y_1}<y_1<y_1+\varepsilon_{y_1}<y+\varepsilon_y$. Тогда

$A \cap ([y_1, y_1+\varepsilon_{y_1}) \cup (y'_1-\varepsilon_{y_1}, y'_1)) = [y_1, y_1+\varepsilon_{y_1}) \subset U$. То есть $U \in \tau(\Phi/A)$. Теперь, покажем, что если $U' \in \tau(\Phi)$ и $U' \supset U$, то $(U' \cap A) \setminus U \neq \emptyset$. Действительно, пусть $U' \in \tau(\Phi)$ и $U' \supset U$. Точка $y \in U \subset U'$ и $U' \in \tau(\Phi)$, следовательно, существует $\delta_y > 0$ такое, что $U' \supset [y, y+\delta_y) \cup (y'-\delta_y, y')$. Не ограничивая общности, можно считать, что δ_y выбрано таким образом, что $y'-\delta_y > x'$. Возьмем теперь $\delta > 0$ такое, что $y'-\delta > y'-\delta_y$. Тогда существует точка z, принадлежащая одновременно U' и $(y-\delta, y)$. Пусть $y_2 \in (y-\delta, y)$, тогда $y'_2 \in (y^1-\delta, y_1) \subset (y'-\delta_y, y') \subset U'$. Множество U' открыто в $\tau(\Phi)$ и, следовательно, существует $\delta_2 > 0$ такое, что $[y'_2, y'_2+\delta_2) \cup (y_2-\delta_2, y_2) \subset U'$. К тому же δ_2 выбираем таким образом, что $y_2-\delta_2 > y-\delta$. Тогда $(y_2-\delta_2, y_2) \subset (y-\delta, y_2)$ и $(y_2-\delta_2, y_2) \subset U'$. Следовательно, $U' \cap (y-\delta, y_2) \neq \emptyset$. То есть $z \in U', z > y-\delta, z < y_2 < y$. Это означает, что $z \in (U' \cap A) \setminus U$. Итак, для любого $U' \in \tau(\Phi,)$ такое, что $U' \supset U$, имеем $(U' \cap A) \setminus U \neq \emptyset$. Отсюда следует, что $U' \notin \tau\Phi)/A$.

Однако, если (X, Φ) — окрестностное пространство, то для любого подмножества $A \in \exp X$ всегда $\tau(\Phi)/A \subset \tau(\Phi/A)$. Действительно, пусть $U \subset A$ и $U \in \tau(\Phi)/A$ и пусть $x \in U$. Существует $U' \in \tau(\Phi)$ такое, что $U' \cap A = U \ni x$. Следовательно, существует $U_x \in \Phi_x$, для которого $U_x \subset U'$. Тогда $U_x \cap A \subset U' \cap A = U$; то есть $U \in \tau(\Phi/A)$. Кроме того, если $B \subset A$, то всегда $[B]_{\Phi/A} = A \cap [B]\Phi$. Действительно, из определения Φ/A сразу видно, что $[B]_{\Phi/A} \subset A \cap [B]_\Phi$. Наоборот, пусть $x \in A \cap [B]_\Phi$ и пусть $U_x \in \Phi_x$. Тогда $U_x \cap A \in \Phi_x/A$ и $U_x \cap A \cap B = U_x \cap B \neq \emptyset$, потому что $x \in [B]_\Phi$. Следовательно, $\Phi_x/A \dot{\cap} B \neq \emptyset$ и $x \in [B]_{\Phi/A}$.

Также имеет место:

Лемма 1.1. *Пусть* (X, Φ) — *окрестностное пространство* и $A \subset X$ *открыто* (*замкнуто*) *в* $\tau(\Phi)$. *Тогда* $\tau(\Phi)/A = \tau(\Phi/A)$.

Доказательство. Мы уже отметили, что всегда $\tau(\Phi)/A \subset \tau(\Phi/A)$. Пусть A замкнуто в $\tau(\Phi)$ и $F \subset A$ не замкнуто в $\tau(\Phi)/A$. Тогда F не замкнуто и в $\tau(\Phi)$, то есть, существует точка $x \in [F]_\Phi \setminus F$. Но $F \subset A$, следовательно, $[F]_\Phi \subset [A]_\Phi = A$. Отсюда, $x \in A \setminus F$ и $x \in [F]_\Phi$. Но $[F]_{\Phi/A} = A \cap [F]_\Phi$, а $x \in [F]_\Phi \cap (A \setminus F)$. Следовательно, $x \in [F]_{\Phi/A} \setminus F$, то есть F не замкнуто в $\tau(\Phi/A)$. Значит, $\tau(\Phi/A) \subset \tau(\Phi)/A$.

Пусть A открыто в $\tau(\Phi)$ и $U \subset A$ не открыто в $\tau(\Phi)/A$. Тогда U не открыто и в $\tau(\Phi)$. То есть, существует точка $x \in U$, такая, что $U_x \setminus U \neq \emptyset$ для каждого $U_x \in \Phi_x$. Но, если $U_x \in \Phi_x$, то, так как A открыто в $\tau(\Phi)$ и $x \in A$, верно, что $A \in \Phi_x$ и, следовательно, $U_x \cap A \in \Phi_x$. Тогда, для любого $U_x \in \Phi_x$ имеем $(U_x \cap A) \setminus U \neq \emptyset$, то есть U не открыто в $\tau(\Phi/A)$.

Окрестностное пространство (X, Φ) называется окрестностно Хаусдорфовым (или o-Хаусдорфовым), если для любых точек x, y из X таких, что $x \neq y$, существуют $U_x \in \Phi_x$ и $U_y \in \Phi_y$, такие, что $U_x \cap U_y = \emptyset$. Отметим, что пространство Z из примера 1.1 o-Хаусдорфово, но не Хаусдорфово относительно топологии $\tau(\Phi)$. Последнее следует из того факта, что любое открытое в $\tau(\Phi)$ множество, содержащее точку $x \in X$ (где x выбрана произвольно), пересекается с любым открытым множеством, содержащим точку x'.

Как и в случае топологических кардинальнозначных инвариантов, имеем следующие соотношения:

$$c_0(X) \leq d_0(X) \leq hd_0(X),$$

$$c_0(X) \leq s_0(X) \leq \min \{h\mathscr{L}_0(X), hd_0(X)\},$$

$$t_0(X) \leq \min \{\chi_0(X), hd_0(X)\},$$

$\psi_0(X) \leq \chi_0(X)$,

$\psi_0(X) \leq h\mathscr{L}_0(X)$ для o-Хаусдорфова пространства (X, Φ),

$s_0(X) = hc_0(x)$.

Докажем, например, последнее из них. Пусть $s_0(X) = \alpha$ и $Y \subset X$. Покажем, что $c_0(Y) \leq s_0(X)$. Пусть $\mathscr{U}'$ — дизъюнктное семейство подмножеств U' множества Y, таких, что для каждого $U' \in \mathscr{U}'$ существует $y(U') \in Y$, такое, что $U' \in \Phi_{y(U')}/Y$. Так как $\mathscr{U}'$ дизъюнктно и $\Phi_{y(U')}/Y$ — фильтр, то это $y(U')$ единственно. Пусть $Y' = \{ y(U') : U' \in \mathscr{U}' \} \subset Y$. Тогда Y' дискретно в X. Действительно, $\{ y(U') \} = U' \cap Y' = U' \cap Y \cap Y' = U \cap Y'$ для некоторого $U \in \Phi_{y(U')}$. Кроме того, $|Y'| = |\mathscr{U}'|$. Следовательно, $|Y'| \leq s_0(X)$ и, значит, $c_0(Y) \leq s_0(X)$, для каждого $Y \subset X$. Итак, $hc_0(X) \leq s_0(X)$. Наоборот, пусть $A \subset X$ и A o-дискретно. Тогда $c_0(A) = |A| \leq hc_0(X)$. Следовательно, $s_0(X) \leq hc_0(X)$. Окончательно заключаем, что $s_0(X) = hc_0(X)$.

Пусть (X^1, Φ^1) и (X^2, Φ^2) — окрестностные пространства и пусть $f : (X^1, \Phi^1) \to (X^2, \Phi^2)$ окрестностно непрерывно. Тогда $f : (X^1, \tau(\Phi^1)) \to (X^2, \tau(\Phi^2))$ непрерывно. Действительно, пусть $U \subset X^2$ открыто относительно $\tau(\Phi^2)$ и пусть $x \in f^{-1}(U)$. Тогда $f(x) \in U$. Но так как U открыто в $\tau(\Phi^2)$ и $f(x) \in U$, то $U \in \Phi^2_{f(x)}$. Из непрерывности f следует, что существует $U_x \in \Phi_x$, такое, что $f(U_x) \subset U$. Но тогда $U_x \subset f^{-1}(U)$. Следовательно, $f^{-1}(U) \in \tau(\Phi')$. Значит, f непрерывно.

Имея в виду вышеупомянутый факт, легко заметить, что если (X^1, Φ^1) и (X^2, Φ^2) окрестностно гомеоморфны, то $(X^1, \tau(\Phi^1))$ и $(X^2, \tau\, \Phi^2))$ являются топологически гомеоморфными.

Каждое топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ можно рассматривать как окрестностное пространство с идемпотентным оператором замыкания $[\ ]_{\mathscr{T}}$ на X. Тогда каждый элемент фильтра Φ_x будет содержать открытое в $(X, \mathscr{T})$ множество, содержащее точку x. Окрестностные инварианты в этом случае совпадают с топологическими. Таким образом, теорию топологических кардинальнозначных инвариантов можно рассматривать как часть теории окрестностных кардинальнозначных инвариантов. Это позволяет заметить, что все вышеприведенные неравенства являются строгими (так как они являются таковыми в случае топологических кардинальнозначных инвариантов).

Кроме того, определенные нами окрестностные инварианты связаны с топологическими кардинальнозначными инвариантами пространства $(X, \tau(\Phi))$ следующим образом:

$$c(X) \leq c_0(X),$$
$$\mathscr{L}(X) \leq \mathscr{L}_0(X),$$
$$s(X) \leq s_0(X),$$
$$d(X) \leq d_0(X),$$
$$t(X) \leq t_0(X),$$
$$\psi_0(X) \leq \psi(X)^*.$$

Последнее неравенство становится очевидным, если заметить, что каждое открытое относительно топологии $\tau(\Phi)$ множество U, содержащее точку x,

* В [23] вместо предпоследнего из неравенств было указано (без доказательства) неравенство $t_0(X) \leq t(X)$, а также было добавлено (тоже без доказательства) неравенство $\chi_0(X) \leq \chi(X)$. Н. Хаджииванов обратил внимание автора на то, что эти два неравенства неверны. Автор построила пример 1.2 и также доказала, что $t(X) \leq t_0(X)$.

входит в Φ_x. Первое и второе неравенства вытекают из того факта, что если $U\in\tau(\Phi)$, то $U\in\Phi_x$ для всех $x\in U$; третье следует из того, что каждое дискретное относительно $\tau(\Phi)$ множество является o-дискретным, а четвертое неравенство является следствием того, что любое окрестностно плотное подмножество множества X плотно относительно $\tau(\Phi)$.

Докажем, что $t(X)\leq t_0(X)$. Для этого по трансфинитной индукции относительно α покажем, что $t_\alpha(X)\leq t_0(X)$. Достаточно показать, что для любого $x\in X$ имеем $t_\alpha(x, X)\leq t_0(x, X)$. Для $\alpha=0$ это верно и пусть неравенство выполнено для каждого ординала $\beta<\alpha$. Пусть $t_0(x, X)=\tau$, $A\subset X$ и $x\in([A]_\Phi)_\alpha$.

1) Если $\alpha=\beta+1$, тогда $([A]_\Phi)_\alpha=[([A]_\Phi)_\beta]_\Phi$ и $x\in[([A]_\Phi)_\beta]_\Phi$. Так как $t_0(x, X)=\tau$, то существует множество $B_0\subset([A]_\Phi)_\beta$, $|B_0|\leq\tau$ такое, что $x\in[B_0]_\Phi$. Для каждого $b\in B_0\subset([A]_\Phi)_\beta$ из индуктивного предположения следует, что существует $B_b\subset A$, $|B_b|\leq\tau$ такое, что $b\in[B_b]_\Phi$. Пусть $B=\bigcup\{B_b: b\in B_0\}$. Тогда $|B|\leq\tau$, $B\subset A$. Докажем, что $x\in([B]_\Phi)_\alpha$. Для каждого $b\in B_0$ имеем, что $b\in[B_b]_\Phi\subset[B]_\Phi\subset([B]_\Phi)_\beta$, т. е. $B_0\subset([B]_\Phi)_\beta$. Кроме этого, $x\in[B_0]_\Phi$, т. е. $x\in[B_0]_\Phi\subset[([B]_\Phi)_\beta]_\Phi\subset([B]_\Phi)_\alpha$. Следовательно, $B\subset A$, $|B|\leq\tau$, $x\in([B]_\Phi)_\alpha$ т. е. $t_\alpha(x, X)\leq\tau$.

2) Если α — граничный ординал, тогда $([A]_\Phi)_\alpha=\bigcup\{([A]_\Phi)_\beta:\ \beta<\alpha\}$. Если $x\in([A]_\Phi)_\alpha$, то существует $\beta<\alpha$ такое, что $x\in([A]_\Phi)_\beta$. Из индуктивного предположения тогда следует, что существует $B\subset A$, $|B|\leq\tau$ такое, что $x\in([B]_\Phi)_\beta\subset([B]_\Phi)_\alpha$, т. е. $t_\alpha(x, X)\leq\tau$.

Следовательно, $t_\alpha(X)\leq t_0(X)$ для любого ординала α и в частности $t(X)\leq t_0(X)$ (так как для некоторого ординала α_0 имеем, что $([\ ]_\Phi)_{\alpha_0}=[\ ]_{\tau(\Phi)}$ и, следовательно, $t_{\alpha_0}(X)=t(X)$).

Надо отметить, что в общем случае между $\chi_0(X)$ и $\chi(X)$ не существует связывающего неравенства. Яковлев [24] построил пример, из которого видно, что неравенства $\chi_0(X)<\chi(X)$ и $\chi_0(X)\neq\chi(X)$ вполне возможны. Следующий пример, построенный автором, показывает, с другой стороны, что существуют окрестностные пространства, для которых $\chi(X)\leq\chi_0(X)$.

Пусть $\tau>\aleph_0$ — произвольный кардинал.

Пример 1.2. Пример окрестностного пространства (X, Φ), для которого $t_0(X)\geq\tau$, $\chi_0(X)\geq\tau$, но $t(X)\leq\aleph_0$ и $\chi(X)\leq\aleph_0$.

Пусть X — произвольное множество мощности τ^+ и пусть x_0 — фиксированная точка множества X. Определяем окрестностную структуру $\Phi=\{\Phi_x: x\in X\}$ следующим образом:

а) если $x\neq x_0$, то $\Phi_x=\{X\}$;

б) если $x=x_0$, то $\Phi_{x_0}=\{A\subset X: |X\setminus A|<\tau \text{ и } x_0\in A\}$.

Так как, если A_1, A_2, $A_3\in\Phi_{x_0}$ и $A\supset A_3$, то $x_0\in A$, $x_0\in A_1\cap A_2$, $|X\setminus(A_1\cap A_2)|\leq|X\setminus A_1|+|X\setminus A_2|<\tau+\tau=\tau$ и $|X\setminus A|\leq|X\setminus A_3|<\tau$, то Φ_{x_0} — фильтр на X.

1) Если $A\subset X$, $A\neq\emptyset$, то $[A]_\Phi\supset X\setminus\{x_0\}$. Действительно, если $x\neq x_0$, то $X\in\Phi_x$ и $X\cap A=A\neq\emptyset$.

2) Если $A\neq\emptyset$, $|A|<\tau$ и $x_0\notin A$, то $x_0\notin[A]_\Phi$ потому, что $X\setminus A\in\Phi_{x_0}$ и $(X\setminus A)\cap A=\emptyset$, т. е., если $A\neq\emptyset$, $A\not\ni x_0$ и $|A|<\tau$, то $[A]_\Phi=X\setminus\{x_0\}$.

Из 2) следует, что для любого $x\neq x_0$, $[\{x\}]_\Phi=X\setminus\{x_0\}$.

3) Если $x\in[A]_\Phi$ для некоторого $A\subset X$, то $x\in[\{x^*\}]_\Phi=X\setminus\{x_0\}\subset[A]_\Phi$ для некоторого $x^*\in A$, $x^*\neq x_0$, если такое имеется. Если $x_0\in A$ и $x\in[A]_\Phi$, то опять $x\in X=[\{x_0\}]_\Phi=[A]_\Phi$, т. е. $t_0(x, X)\leq\aleph_0$ для $x\neq x_0$.

4) Если $B \ni x_0$, $|B| \leq \tau$, то $x \in [X \setminus B]_\Phi$. Действительно, если $U \in \Phi_{x_0}$, то так как $|B| \leq \tau$ и $|X \setminus A| < \tau$, имеем, что $U \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ (если $U \cap (X \setminus B) = \emptyset$, то $X = (X \setminus U) \cup B$, а $|X| = \tau^+$, $|X \setminus U| < \tau$, $|B| < \tau$, что невозможно).

Покажем теперь, что $t_0(x_0, X) \geq \tau$. Для этого нужно найти подмножество $A_0 \subset X$ такое, что $x_0 \in [A_0]_\Phi$, но для каждого $B_0 \subset A_0$, $|B_0| < \tau$ имели бы $x_0 \notin [B_0]_\Phi$. Пусть C — произвольное подмножество множества X, мощности $< \tau$ и содержащее точку x_0. Пусть $A_0 = X \setminus C$. Из 4) следует, что $x_0 \in [A_0]_\Phi$. Пусть $\emptyset \neq B_0 \subset A_0 = X \setminus C$ и $|B_0| < \tau$. Тогда имеем, что $x_0 \notin B_0 \neq \emptyset$, $|B_0| < \tau$ и из 2) следует, что $x_0 \notin [B_0]_\Phi$. Таким образом получаем, что $t_0(x_0, X) \geq \tau$ и также $t_0(X) \geq \tau$. Так как $\chi_0(X) \geq t_0(X)$, то отсюда следует, что и $\chi_0(X) \geq \tau$.

Пусть $U \neq \emptyset$, $U \subset X$ открыто в топологии $\tau(\Phi)$ и пусть $x \in U$. Если $x \neq x_0$, то U должно содержать точку x вместе с элементом фильтра $\Phi_x = \{X\}$, т. е. $X \subset U$, т. е. $U = X$. Если $x = x_0$, то x_0 должно тоже содержаться в U вместе с элементом Φ_{x_0}. Пусть $A \subset X$, $x_0 \in A$ и $|X \setminus A| < \tau$ такое, что $A \subset U$. Так как $|X \setminus A| < \tau$, а $|X| = \tau^+$, то $|A| > 1$, т. е. существует точка $x \in A \setminus \{x_0\} \subset U$. Как и раньше, x должна лежать в U вместе с элементом своего фильтра $\Phi_x = \{X\}$, т. е. $U = X$. Таким образом получаем, что топология $\tau(\Phi)$ индискретна. Тогда $\chi(X) = t(X) \leq \aleph_0$.

2. Обобщения некоторых основных теорем теории кардинальнозначных топологических инвариантов.

Теорема 2.1. *Если (X, Φ) — о-Хаусдорфово окрестностное пространство, то $|X| \leq 2^{c_0(X)\chi_0(X)}$.*

Доказательство. Пусть $c_0(X)\chi_0(X) = \alpha$. Для каждого $x \in X$ фиксируем $\gamma_x \subset \Phi_x$, где γ_x — база фильтра Φ_x, мощности $\leq \alpha$; $\cap \gamma_x = \{x\}$ (так как окрестностное пространство (X, Φ) o-Хаусдорфово). Пусть $\gamma_x = \{U_x^\beta : \beta < \alpha\}$. Из o-Хаусдорфовости пространства (X, Φ) следует, что если $x \neq y$ для x, y из X, то существуют $U^{x\beta}{}_x \in \gamma_x$ и $U_y^{\beta_y y} \in \gamma_y$ такие, что выполнено $U_x^{\beta_x x} \cap U_y^{\beta_y y} = \emptyset$ Предположим, что $|x| > 2^\alpha$. Тогда из теоремы Ердеша — Радо $((2^\alpha)^+ \to (\alpha^+)^2_\alpha$ следует, что существует множество $A \subset X$ такое, что $|A| = 2^\tau$, и существует $\beta_0 < \alpha$ такое, что для всех x, y из A, $x \neq y$, имеет место $U_x^{\beta_0} \cap U_y^{\beta_0} = \emptyset$. Рассмотрим семейство $\mathscr{U} = \{U_x^{\beta_0} : x \in A\}$. Имеем: $|\mathscr{U}| = \alpha^+$, $\mathscr{U}$ дизъюнктно и для каждого $x \in A$, $U_x^{\beta_0} \in \Phi_x$. Существование такого $\mathscr{U}$, однако, противоречит тому, что $c_0(X) \leq \alpha$. Следовательно, $|X| \leq 2^\alpha$.

Теорема 2.2. *Если (X, Φ) о-Хаусдорфово окрестностно пространство, то $|X| \leq 2^{s_0(X)\psi_0(X)}$.*

Доказательство. Пусть $s_0(X)\psi_0(X) = \alpha$. Для каждого $x \in X$ фиксируем $\theta_x \subset \Phi_x$, такое, что $\cap \theta_x = \{x\}$ и пусть $\theta_x = \{V_x^\xi : \xi < \alpha\}$. Возьмём произвольное линейное упорядочение „$<$" на X. Для $\xi < \sigma, \eta < \alpha$ полагаем: $I(\xi, \eta) = \{\{x, y\} : (x, y) \in X \times X,\ x < y,\ y \notin V_x^\xi,\ x \notin V_y^\eta\}$. Тогда $[X]^2 = \cup \{I_{(\xi,\eta)} : \xi < \alpha, \eta < \alpha\}$ (где $[X]^2 = \{\{x, y\} : (x, y) \in X \times X\}$). Предположим, что $|X| > 2^\alpha$. Тогда из теоремы Ердеша — Радо $((2^\alpha)^+ \to (\alpha+)^2_\alpha)$ следует, что существует $\mathscr{D} \subset X$, такое, что $|\mathscr{D}| = \alpha^+$, и $[\mathscr{D}]^2 \subset I_{(\xi_0, \eta_0)}$ для некоторых $\xi_0 < \alpha$, $\eta_0 < \alpha$. Тогда $\mathscr{D}$ o-дискретно в X. Действительно, если $x \in \mathscr{D}$, то

$$\mathscr{D} \cap (V_x^{\xi_0} \cap V_x^{\eta_0}) = \{x\}. \tag{1}$$

Покажем это. Пусть $y \in \mathscr{D} \cap V_x^{\xi_0} \cap V_x^{\eta_0}$. Если $y < x$, то $\{y, x\} \in I_{(\xi_0, \eta_0)}$ и отсюда $y \notin V_x^{\xi_0}$ — противоречие. Если $x < y$, то $\{x, y\} \in I_{(\xi_0, \eta_0)}$ и отсюда $y \notin V_x^{\xi_0}$ — опять противоречие. Следовательно, (1) справедливо. Множества

$V_x^{\xi_0}$ и $V_x^{\eta_0}$ принадлежат фильтру Φ_x. Следовательно, существует $U_x \in \Phi_x$, такое, что $U_x \subset V_x^{\xi_0} \cap V_x^{\eta_0}$. Имеем тогда: $\mathscr{D} \cap U_x = \{x\}$. Следовательно, $\mathscr{D}$ o-дискретно. Но $|\mathscr{D}| = \alpha^+$, что противоречит соотношению $s_0(X) \leq \alpha$. Следовательно, наше предположение неверно и $|X| \leq 2^{s_0(X)\psi_0(X)}$.

Теоремы 2.1 и 2.2 являются обобщениями теорем Hajnal, Juhasz [12].

Для произвольного кардинала τ и $A \subset X$ положим $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau = \bigcup \{[B]_\Phi : B \subset A, |B| \leq \tau\}$. Отметим, что всегда $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau \subset [A]_\Phi$.

Предложение 2.1. *Пусть* (X, Φ) — *окрестностное пространство. Тогда* $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau = [A]_\Phi$ *для всех* $A \subset X$, *если и только если* $t_0(X) \leq \tau$.

Доказательство. Пусть $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau = [A]_\Phi$ для всех $A \subset X$ и $x \in [A_0]_\Phi$ для некоторого $A_0 \subset X$. Тогда существует $B \subset A_0$, $|B| \leq \tau$ такое, что $x \in [B]_\Phi \subset \langle [A_0]_\Phi \rangle_\tau$. Следовательно, $t_0(x, X) \leq \tau$ и также $t_0(X) \leq \tau$. Наоборот, пусть $t_0(X) \leq \tau$, $A \subset X$ и $x \in [A]_\Phi$. Тогда существует $B \subset A$, $|B| \leq \tau$ такое, что $x \in [B]_\Phi$. Значит, $x \in \bigcup \{[B]_\Phi : B \subset A, |B| \leq \tau\} = \langle [A]_\Phi \rangle_\tau$ и $[A]_\Phi \subset \langle [A]_\Phi \rangle_\tau$, откуда следует (ввиду того, что всегда $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau \subset [A]_\Phi$), что $\langle [A]_\Phi \rangle_\tau = [A]_\Phi$.

Предложение 2.2. *Пусть* (X, Φ) — *окрестностное пространство. Тогда* $\mathscr{L}_0(F) \leq \mathscr{L}_0(X)$, *если* F *замкнуто в топологии* $\tau(\Phi)$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_0(X) \leq \tau$ и F замкнуто в топологии $\tau(\Phi)$. Тогда $F = [F]_\Phi$. Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \leq \exp X$ такое, что $\bigcup \gamma \supset F$, и для каждого $x \in F$ выполнено $U_{\alpha_x} \in \Phi_x$ для некоторого α_x. Отметим, что для любого $y \in X \setminus F$ имеем $X \setminus F \in \Phi_y$, так как $y \notin [X \setminus (X|F)]_\Phi = [F]_\Phi$. Поэтому $\gamma \cup \{X \setminus F\}$ o-покрывает X. Но $\mathscr{L}_0(X) \leq \tau$. Следовательно, существует $\Lambda' \subset \Lambda$, $|\Lambda'| \leq \tau$ и такое, что для $\gamma' = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda'\}$ имеем $\bigcup \gamma' \cup (X \setminus F) = X$. Но $(X \setminus F) \cap F = \varnothing$. Отсюда $\bigcup \gamma' \supset F$ и $|\gamma'| \leq \tau$. Таким образом, $\mathscr{L}_0(F) \leq \tau$.

Теорема 2.3. *Пусть* (X, Φ) o-*Хаусдорфово окрестностное пространство и выполняются условия*: 1) $t_0(X) \leq \tau$; 2) $\psi_0(X) \leq 2^\tau$; 3) *если* $A \subset X$ *и* $|A| \leq 2^\tau$, *то* $|[A]_\Phi| \leq 2^\tau$; 4) $\mathscr{L}_0(X) \leq \tau$. *Тогда* $|X| \leq 2^\tau$.

Доказательство. Для каждого $x \in X$ зафиксируем $\gamma_x \subset \Phi_x$, такое, что $\bigcap \gamma_x = \{x\}$ и $|\gamma_x| \leq 2^\tau$. По трансфинитной рекурсии определим семейства $\xi = \{A_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ и $\eta = \{\mathscr{B}_\alpha : \alpha < \tau^+\}$, где $A_\alpha \subset X$, $\mathscr{B}_\tau \subset \Phi$, $|A_\alpha| \leq 2^\tau|$ и $|\mathscr{B}_\alpha| \leq 2^\tau$ для каждого $\alpha < \tau^+$. Если A_α уже определено, то полагаем $\mathscr{B}_\alpha = \bigcup \{\gamma_x : x \in A_\alpha\}$. Пусть $A_0 = \{x_0\}$, где x_0 — произвольная точка пространства X. Пусть $\beta < \tau^+$ и $A_\alpha \subset X$, $|A_\alpha| \leq 2^\tau$ уже определено для всех $\alpha < \beta$. Положим $M_\beta = [\bigcup \{A_\alpha : \alpha < \beta\}]_\Phi$. Из $|\beta| \leq \tau$ и (3) следует, что $|M_\beta| \leq 2\tau$. Рассмотрим $E_\beta = \bigcup \{\gamma_x : x \in M_\beta\}$. Имеем: $|F_\beta| \leq 2^\tau$. Пусть $\mathscr{E}_\beta = \{\mu \subset E_\beta : |\mu| \leq \tau$ и $X \setminus \bigcup \mu \neq \varnothing\}$. Ясно, что $|\mathscr{E}_\beta| \leq (2^\tau)^\tau = 2^\tau$. Для каждого $\mu \in \mathscr{E}_\beta$ зафиксируем $x(\mu) \in X \setminus \bigcup \mu$ и положим $L_\beta = \{x(\mu) : \mu \in \mathscr{E}_\beta\}$. Тогда пусть $A_\beta = [L_\beta \cup M_\beta]_\Phi$. Из 3) опять следует, что $|A_\beta| \leq 2^\tau$. Таким образом получаются семейства ξ и η. Если $\alpha < \alpha' < \tau^+$, то $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$. Действительно, $A_\alpha \subset \bigcup \{A_\beta : \beta < \alpha'\} \subset [\bigcup \{A_\beta : \beta < \alpha'\}]_\Phi = M_{\alpha'} \subset M_{\alpha'} \cup L_{\alpha'} \subset [M_{\alpha'} \cup L_{\alpha'}]_\Phi = A_{\alpha'}$. Соответственно, $\mathscr{B}_\alpha \subset \mathscr{B}_{\alpha'}$ при $\alpha < \alpha' < \tau^+$. Также, если $\alpha < \alpha' < \tau^+$, то $[A_\alpha]_\Phi \subset A_{\alpha'}$, потому что $A_\alpha \subset M_{\alpha'} \cup L_{\alpha'}$ и, следовательно, $[A_\alpha]_\Phi \subset [M_{\alpha'} \cup L_{\alpha'}]_\Phi = A_{\alpha'}$. Пусть $A^* = \bigcup \xi$ и $\mathscr{B}^* = \bigcup \eta$. Ясно, что $\mathscr{B}^* = \bigcup \{\gamma_x : x \in A^*\}$. Если $\alpha < \tau^+$, то $[A_\alpha]_\Phi \subset A^*$. Действительно, $[A_\alpha]_\Phi \subset A_{\alpha+1} \subset A^*$.

Если $M \subset A^*$ и $|M| \leq \tau$, то $M \subset A_{\beta^*}$ для некоторого $\beta^* < \tau^+$. Это следует из регулярности τ^+ и того, что $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ для $\alpha < \alpha' < \tau^+$ и $|M| \leq \tau$. Но тогда $[M]_\Phi \subset [A_{\beta^*}]_\Phi \subset A^*$. Следовательно, $A^* = \langle [A^*]_\Phi \rangle_\tau$. Но $t_0(X) \leq \tau$ и из Предложения 2.1 следует, что $[A^*]_\Phi = \langle [A^*]_\Phi \rangle_\tau$. Таким образом выполняется соотношение $A^* = [A^*]_\Phi$ (и тем более $A^* = [A^*]_{\tau(\Phi)}$).

Предположим, что существует $x^* \in X \setminus A^* = X \setminus [A^*]_\Phi$. Для каждого $x \in [A^*]_\Phi$ существует $U_x \in \gamma_x$, такое, что $x^* \in U_x$. Имеем $A^* = [A^*]_\Phi$ и семейство $\gamma = \{U_x : x \in A^*\}$ o-покрывает A^*, поэтому из 4) и предложения 2.2 следует, что существует $M \subset A^*$, такое, что $|M| \leq \tau$ и $\cup\{U_x : x \in M\} \supset [A^*]_\Phi = A^*$. Положим $\mu^* = \{U_x : x \in M\}$. Имеем $\mu^* \subset \mathscr{B}^*$ и $|\mu^*| \leq \tau$. Значит, существует $\alpha^* < \tau^+$ такое, что $\mu^* \subset \mathscr{B}_{\alpha^*}$. Кроме того, $x^* \notin \cup \mu^*$, то есть $X \setminus (\cup \mu^*) \neq \emptyset$. Следовательно, $\mu^* \in \mathscr{E}_{\alpha^*}$ и $x(\mu^*) \in X \setminus (\cup \mu^*)$ определено. По построению $x(\mu^*) \in A_{\alpha^*} \subset A^*$. Также $x(\mu^*) \in X \setminus (\cup \mu^*) \subset X \setminus A^*$. Полученное противоречие позволяет нам заключить, что $X = A^*$. Отсюда следует, что $|X| \leq |A^*| \leq 2^\tau \tau^+ = 2^\tau$.

Теорема 2.3 является обобщением теоремы Архангельского [2].

Если A — множество и τ — кардинал, то пусть обозначим $\exp_\tau A = \{M \subset A : |M| \leq \tau\}$.

Предложение 2.3 *Если (X, Φ) о-Хаусдорфово окрестностное пространство, то $|X| \leq d_0(X)^{\chi_0(X)}$.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$, $[A]_\Phi = X$ и $|A| = d_0(X)$, и пусть $\chi_0(X) \leq \tau$. Для любого $x \in [A]_\Phi = X$ зафиксируем базу γ_x фильтра Φ_x, такую, что $|\gamma_x| \leq \tau$. Имеем: $X = [A]_\Phi = \{x \in X : A \,\dot\cap\, \Phi_x \neq \emptyset\}$. Это позволяет для каждого $U \in \gamma_x$ зафиксировать $x(U) \in A \cap U$. Положим $\mathscr{N}_x = \{x(U) : U \in \gamma_x\}$. Имеем: $\mathscr{N}_x \subset A$ и $|\mathscr{N}_x| \leq \tau$, то есть $\mathscr{N}_x \in \exp_\tau A$. Определим $f : X \to \exp_\tau(\exp_\tau A)$ следующим образом: $f(x) = \{U \cap \mathscr{N}_x : U \in \gamma_x\}$. Множество $f(x)$ непусто, потому что $x(U) \in U \cap \mathscr{N}_x$ для всех $U \in \gamma_x$. Кроме того, для каждого $U \in \gamma_x$ имеем $x \in [U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi$. Действительно, пусть $W \in \Phi_x$. Так как $x \in U \cap W \in \Phi_x$ и Φ_x — фильтр, то существует $W_1 \in \Phi_x$ такое, что $W_1 \subset W \cap U$. Но γ_x — база фильтра Φ_x. Значит, существует $V \in \gamma_x$ такое, что $V \subset W_1 \subset U \cap W$. Тогда $x(V) \in A \cap V \subset \mathscr{N}_x \cap V \subset \mathscr{N}_x \cap W \cap U$. Таким образом получаем, что $W \cap (\mathscr{N}_x \cap U) \neq \emptyset$ для любого $W \in \Phi_x$. Итак, $x \in [\mathscr{N}_x \cap U]_\Phi$ для каждого $U \in \gamma_x$. Тогда $x \in \cap\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\}$. Более того, имеем: $\{x\} = \cap\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\}$. Действительно, пусть $y \neq x$. Так как пространство X o-Хаусдорфово, выберем $U_x \in \Phi_x$, $U_y \in \Phi_y$ такие, что $U_x \cap U_y = \emptyset$. Не ограничивая общности, можно считать, что $U_x \in \gamma_x$ и $U_y \in \gamma_y$. Следовательно, $y \notin [U_x \cap \mathscr{N}_x]_\Phi$, потому что $U_x \cap U_y \cap \mathscr{N}_x = \emptyset$. Значит, $y \notin \cap\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\}$, откуда $\{x\} = \cap\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\}$. Отсюда следует, что f взаимнооднозначно. Действительно, если $f(x) = f(y)$, то $\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\} = \{[V \cap \mathscr{N}_y]_\Phi : V \in \gamma_y\}$. Значит, $\{x\} = \cap\{[U \cap \mathscr{N}_x]_\Phi : U \in \gamma_x\} = \cap\{[V \cap \mathscr{N}_y]_\Phi : V \in \gamma_y\} = \{y\}$ и $x = y$. Тогда $|X| \leq \exp_\tau(\exp_\tau A) \leq (|A|^\tau)^\tau \leq |A|^\tau$. Следовательно, $|X| \leq d_0(X)^{\chi_0(X)}$.

Предложение 2.3 позволяет нам получить:

Следствие 2.1. *Если окрестностное пространство (X, Φ) о-Хаусдорфово, то $|X| \leq 2^{\mathscr{L}_0(X)\chi_0(X)}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_0(X)\chi_0(X) = \tau$. Покажем, что выполнены все посылки теоремы 2.3. Условия 1), 2) и 4) вытекают из равенства $\mathscr{L}_0(X)\chi_0(X) = \tau$. Условие 3) следует из предложения 2.3 и того, что A всегда o-плотно в $[A]_\Phi$.

Отметим, что следствие 2.1 станет неверным, если вместо $\mathscr{L}_0(X)$ поставить $\mathscr{L}_{\tau(\Phi)}(X)$ и даже если предположить, что топология $\tau(\Phi)$ бикомпактна. Это видно из построенного в Malyhin [17] примера бикомпакта со слабой первой аксиомой счетности и мощности, большей, чем мощность континуума (в предположении (CH)). Этот пример показывает также, что неравенство $\mathscr{L}(X) \leq \mathscr{L}_0(X)$ может быть строгим.

Если $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство со слабой первой аксиомой счетности и для каждого $x \in X$ семейство $\gamma(x) = \{O_n(x)\}_{n \in \omega}$ — слабая база в точке x, то фильтр Φ_x, порожденный $\gamma(x)$, будет со счетной базой. Притом, если $\Phi = \{\Phi_x : x \in X\}$, то $\tau(\Phi) = \mathscr{T}$. Окрестностное пространство (X, Φ), полученное таким образом, будем называть естественным окрестностным пространством на множестве X, порождающим топологию $\mathscr{T}$. Как уже отмечалось, (X, Φ) удовлетворяет окрестностной первой аксиоме счетности, т. е. $\chi_0(X) \leq \aleph_0$.

Из следствия 2.1 в частности получаем:

Следствие 2.2. *Если $(X, \mathscr{T})$ — Хаусдорфово топологическое пространство со слабой первой аксиомой счетности и если (X, Φ) о-финально компактно (где Φ — естественая окрестностная структура на X, порождающая топологию $\mathscr{T}$), то* $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Это следствие дает частичный ответ на вопрос А. В. Архангельского о том, будет ли мощность любого финально компактного Хаусдорфового пространства со слабой первой аксиомой счетности не больше мощности континуума.

3. Доказательство сформулированной в [11] теоремы об идемпотентности оператора $[\ ]_\Phi$ для произвольного o-бикомпактного Хаусдорфова относительно топологии $\tau(\Phi)$ пространства X.

Теорема 3.1 *Если окрестностное пространство (X, Φ) окрестностно бикомпактно и его топология $\tau(\Phi)$ Хаусдорфова, то $[A]_\Phi = [A]_{\tau(\Phi)}$ для любого $A \subset X$ (и, следовательно, $[[A]_\Phi]_\Phi = [A]_\Phi$).*

Доказательство. Окрестностное пространство (X, Φ) o-бикомпактно и, следовательно, топология $\tau(\Phi)$ бикомпактна. Пусть $A \subset X$ и пусть $y \in X \setminus [A]_\Phi$. Покажем, что $y \in X \setminus [A]_{\tau(\Phi)}$. Для любого $y' \in X \setminus [A]_\Phi$ имеем $X \setminus A \in \Phi_{y'}$. Для каждого $x \in [A]_\Phi$ существует $O_x \in \Phi_x$, такое, что $y \notin [O_x]_{\tau(\Phi)}$, так как $(X, \tau(\Phi))$ — Хаусдорфовое пространство. Семейство $\gamma = \{X \setminus A, O_x : x \in [A]_\Phi\}$ является o-покрытием пространства X. Следовательно, существует подмножество $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset [A]_\Phi$, такое, что $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i=1}^k O_{x_i} = X$. Кроме того, для $i = 1, 2, \ldots, k$, $[O_{x_i}]_{\tau(\Phi)} \not\ni y$ и отсюда $y \notin [Ox_1 \cup \ldots \cup Ox_k]_{\tau(\Phi)}$. Но $Ox_1 \cup \ldots \cup Ox_k \supset A$. Следовательно. $[A]_{\tau(\Phi)} \subset [Ox_1 \cup \ldots \cup Ox_k]_{\tau(\Phi)}$ и, значит, $y \notin [A]_{\tau(\Phi)}$. Следовательно, $[A]_{\tau(\Phi)} \subset [A]_\Phi$ и так как всегда $[A]_\Phi \subset [A]_{\tau(\Phi)}$, то $[A]_\Phi = [A]_{\tau(\Phi)}$.

Яковлев [24], в предположении (CH), построил пример бикомпакта со слабой первой аксиомой счетности, не удовлетворяющего первой аксиоме счетности, и, как уже упоминалось Malyhin [17], тоже в предположении (CH), построил пример бикомпакта с такими же свойствами, но мощности, большей мощности континуума. Поэтому представляют интерес такие следствия из теоремы 3.1, публикуемые впервые:

Следствие 3.1. *Если (X, Φ) — o-бикомпактное окрестностное пространство, $\chi_0(X) \leq \aleph_0$* (т. е. (X, Φ) *удовлетворяет окрестностную первую аксиому счетности*) *и топология $\tau(\Phi)$ Хаусдорфова, то $(X, \tau(\Phi))$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

(В [23] это следствие сформулированно неправильно. Здесь эта ошибка формулировки исправлена.)

Следствие 3.2. *Если $(X, \mathscr{T})$—Хаусдорфовое топологическое пространство со слабой первой аксиомой счетности, которое о-бикомпактно относительно естественой окрестностной структуры Φ на X, то $(X, \mathscr{T})$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Пример 3.1. Пример окрестностного пространства (X, Φ), которое не o-бикомпактно, Хаусдорфово и бикомпактно относительно топологии $\tau(\Phi)$.

Рассмотрим любое Хаусдорфовое, секвенциальное, бикомпактное топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$, у которого индекс секвенциальности $\sigma(X)=2$ (такое пространство построено в Franklin [10]).

Пример 3.1 показывает, что условие об o-бикомпактности в теореме 3.1 существенно.

Было бы желательно ослабить условие о Хаусдорфовости топологии $\tau(\varphi)$ в теореме 3.1 и следствия 3.1 и 3.2 до требовании об o-Хаусдорфовости окрестностного пространства. Однако следующий пример показывает, что это невозможно.

Пример 3.2. Пример окрестностного пространства (Z, Φ), которое окрестностно Хаусдорфово, окрестностно бикомпактно, имеет счетный окрестностный характер, но топология $\tau(\Phi)$ на Z не Хаусдорфова и не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Покажем, что пространство (Z, Φ), построенного в примере 1.1, имеет все необходимые свойства.

Докажем o-бикомпактность пространства (Z, Φ). Пусть $\omega=\{U_z : z \in Z\}$ o-покрывает Z, т. е. $U_z \in \Phi_z$ для каждого $z \in Z$ (любое o-покрытие пространства Z можно записать таким образом). Не ограничивая общности, можно считать, что $U_z \in \mathcal{F}_z$ для каждого $z \in Z$. Пусть f — ортогональная проекция пространства Z на $[0,1]$. Интервал $[0,1]$ рассматриваем в естественной топологии. Для каждого $y \in Y=[0, 1]=fZ$ имеем, что $f^{-1}y=\{x, x'\}$. Пусть $V_y=Y \setminus f(Z)(U_x \cup U_{x'}))$, если $y \in Y$ и $f(x)=f(x')=y$. Тогда V_y открыто в Y. Действительно, $V_y=(y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y)$, где $U_x=[x, x+\varepsilon_x) \cup (x'-\varepsilon_x, x')$, $U_{x'}=[x', x'+\varepsilon_{x'}) \cup (x-\varepsilon_{x'}, x)$ и $\varepsilon_y=\min\{\varepsilon_x, \varepsilon_{x'}\}$. Пусть $\gamma=\{V_y : y \in [0,1]\}$. Семейство γ покрывает $[0, 1]$. Из компактности $[0, 1]$ следует, что из γ можно выбрать конечное подпокрытие $\gamma'=\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}\}$ интервала $[0, 1]$. Рассмотрим семейство $\omega'=\{U_{x_1}, U_{x'_1}, \ldots, U_{x_k}, U_{x'_k}\}$, где для $i=1, 2, \ldots, k$ имеем, что $f^{-1}y_i = \{x_i, x'_i\}$. Тогда $\omega' \subset \omega$ и ω' покрывает Z. Действительно, пусть $z \in Z$ и пусть, например, $z=x \in X$. Существует y_i, $1 \leq i \leq k$ такое, что $y=f(x) \in V_{y_i} =(y_i-\varepsilon_{y_i}, y_i+\varepsilon_{y_i})$. Тогда имеем, что $x \in f^{-1} V_{y_i} \subset U_{x_i} \cup U_{x'_i}$, т. е. существует элемент семейства ω', который покрывает x.

Легко проверяется, что (Z, Φ) окрестностно Хаусдорфово. Но $(Z, \tau(\Phi))$ не Хаусдорфово, так как любое открытое в $\tau(\Phi)$ множество, содержащее точку x, пересекается с любым открытым в $\tau(\Phi)$ множеством, содержащим точку x'.

Окрестностный характер пространства (Z, Φ) счетен, так как для каждого $z \in Z$ семейство $\gamma(z)=\{([z, z+1/n) \cup (z'-1/n, z')) \cap Z : n=1, 2, \ldots\}$ база фильтра Φ_z. Следовательно, $(z, \tau(\Phi))$ удовлетворяет слабую первую аксиому счетности. Чтобы показать, что $\tau(\Phi)$ не удовлетворяет первую аксиому счетности, покажем, что, например, для $x \in X$, если $U_x \in \mathcal{F}_x$, то $\mathrm{Int}_{\tau(\Phi)}(U_x) =\emptyset$, т. е. что U_x не содержит никакое непустое открытое в $\tau(\Phi)$ множество. Допустим, что существует $U \in \tau(\Phi)$ такое, что $\emptyset \neq U \subset U_x$. Множество $U_x=[x, x+\varepsilon) \cup (x', x'-\varepsilon)$ и существует $y \in U \subset U_x$. Пусть $0<\varepsilon_y<\varepsilon$ такое, что $U_y=[y, y+\varepsilon_y) \cup (y', y'-\varepsilon_y) \subset U \subset U_x$ (существование такого ε_y следует из того, что $y \in U \in \tau(\Phi)$). Если $y \in X'$, то тогда из $U_y \subset U_x$ следует, что $[y, y+\varepsilon_y) \subset (x'-\varepsilon, x')$ и $(y', y'-\varepsilon_y) \subset [x, x+\varepsilon)$. Но последние два включения не могут быть одновременно выполнены. Если $y \in X$, то тогда из $U_y \subset U_x$ следует, что $[y, y+\varepsilon_y) \subset [x, x+\varepsilon)$ и $(y', y'-\varepsilon_y) \subset (x'-\varepsilon, x')$. Опять же последние два включения не могут быть одновременно выполнены. Полученное противоречие позволяет нам заключить, что $\mathrm{Int}_{\tau(\Phi)}(U_x) = \emptyset$ для любого $x \in X$ и $U_x \in \mathscr{F}_x$. Аналогично доказывается, что для любого $x' \in X'$ и $U_{x'} \in F_{x'}$ тоже $\mathrm{Int}_{\tau(\Phi)}(U_{x'}) = \emptyset$. Таким образом, мы нашли слабую базу топологии $\tau(\Phi)$, внутренности элементов которой пусты. Тогда из Недев [19, теорема 4 — е), а)] следует, что $\tau(\Phi)$ не удовлетворяет первую аксиому счетности и также, что оператор $[\ ]_\Phi$ не идемпотентен.

4. Частичный ответ на вопрос (Недев [18]), будет ли любое Хаусдорфовое, симметризуемое финально компактное топологическое пространство сепарабельным.

Все определения и вспомогательные факты можно найти в [19].

Если $(X, \mathscr{T})$ — симметризуемое пространство, то оно удовлетворяет слабую первую аксиому счетности. Следовательно, если $\mathscr{B}$ — слабая база топологии $\mathscr{T}$, то можно рассматривать естественное окрестностное пространство (X, Φ) порожденным $\mathscr{B}$ и порождающее $\mathscr{T}$. Заметим, что если (X, τ) σ-Хаусдорфово и d — симметрика на X — порождающая топологию $\mathscr{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $O^d_\varepsilon x \in \Phi_x$. Также, если d_1 и d_2 — две симметрики на множестве X, порождающие топологию $\mathscr{T}$, и, если, как обычно $[A]_{d_i} = \{x \in X : d_i(x, A) = 0\}$, $i = 1, 2$, то $[A]_{d_1} = [A]_{d_2}$ для любого $A \subset X$, [20]. Последнее позволяет нам отметить, что если $(X, \mathscr{T})$ — σ-Хаусдорфовое симметризуемое топологическое пространство, то окрестностные структуры на X — порождающие топологию $\mathscr{T}$ и порожденные разными слабыми базами топологии $\mathscr{T}$ — совпадают (с точности до окрестностного гомеоморфизма). В этом случае можно говорить об естественной окрестностной структуре Φ на X — порождающей топологии $\mathscr{T}$. Если (X, Φ) o-финально компактно (o-сепарабельно), то тогда топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ будем называть o-финальнокомпактным (o-сепарабельным). Отметим еще, что таким образом, если $(X, \mathscr{T})$ — σ-Хаусдорфовое симметризуемое топологическое пространство, а d — симметрика на X, порождающая топологию $\mathscr{T}$, то $[A]_d = [A]_\Phi \subset [A]_\tau$ для любого $A \subset X$.

Теорема 4.1. *Если $(X, \mathscr{T})$ — σ-Хаусдорфовое, o-финально компактное симметризуемое пространство, то оно o-сепарабельно (и тем более сепарабельно).*

Доказательство. Пусть d — симметрика на X, порождающая топологию $\mathscr{T}$. Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим семейство $\omega_n = \{O^d_{1/n} x : x \in X\}$. Ясно, что ω_n o-покрывает X. Так как X o-финально компактно, то для каждого $n \in \omega$ существует счетное подпокрытие $\gamma_n = \{O^d_{1/n} x^n_m : m \in \omega\}$ покрытия ω_n. Пусть $A = \{x^n_m : n, m \in \omega\}$. Покажем, что $[A]_d = X$. Для этого достаточно показать, что $A \cap O^d_{1/n} x \neq \emptyset$ для любого $n \in \omega$ и $x \in X$. Пусть $n \in \omega$ и $x \in X$; тогда $x \in O^d_{1/n} x \in \omega_n$. Каждое γ_n покрывает X, следовательно, существует x^n_m такое, что $x \in O^d_{1/n} x^n_m$, то есть $d(x, x^n_m) < 1/n$. Следовательно, и $d(x^n_m, x) < 1/n$, откуда $x^n_m \in O^d_{1/n} x$, то есть $O^d_{1/n} x \cap A \neq \emptyset$. Таким образом получаем, что X o-сепарабельно.

Отметим, что пока неизвестно, будет ли любое финально компактное симметризуемое пространство сепарабельным. Если X — финально компактное пространство, некоторая симметрика которого удовлетворяет слабому условию Коши (определение, можно найти в [3]), то оно сепарабельно

Недев [16]. Как известно, это условие слабее, чем условие сильной симметризуемости пространства X; каждое сильно симметризуемое пространство (то есть симметризуемое и удовлетворяющее первую аксиомой счетности) допускает симметрику, удовлетворяющую слабому условию Коши (Burke [5]) и порождающую ту же топологию. Таким образом, теорема 4.1 показывает, что если потребуем более сильную (и более естественную, в конечном счете) финальную компактность, то оказывается выполненным свойство более сильное, чем сепарабельность.

Предложение 4.1. (Архангельский [4]). *Если X — отделимое топологическое пространство и $t(X) \leqq \aleph_0$, то X наследственно сепарабельно тогда и только тогда, когда любое замкнутое подмножество множества X сепарабельно.*

Если $(X, \mathcal{T})$ — симметризуемое o-финально компактное пространство, то каждое замкнутое в $\mathcal{T}$ подпространство o-финально компактно и симметризуемо. Кроме того, симметризуемость влечет счетность тесноты. Поэтому из теоремы 4.1 и предложения 4.1 вытекает:

Следствие 4.1. *Если симметризуемое пространство $(X, \mathcal{T})$ o-финально компактно относительно естественной окрестностной структуры на X, то оно наследственно сепарабельно.*

Теорема 4.1 и следствие 4.1 не являются следствиями из вышеупомянутого результата С. Недева. Это видно из следующего примера:

Пример 4.1. Пример симметризуемого, Хаусдорфового, o-финально компактного топологического пространства, которое не допускает симметрики, удовлетворяющей слабое условие Коши.

Примером такого пространства может служить пространство, построенного в Недев, Чобан [21, пример 5]. Оно симметризуемое, Хаусдорфовое финально компактное, наследственно сепарабельное и не допускает даже, o-метрики, удовлетворяющей слабое условие Коши. Можно показать, что оно еще и o-финальнокомпактно относительно естественной окрестностной структуры Φ на X, порождающей топологию $\tau(\Phi)$.

Эта работа выполнена во время моей стажировки в МГУ на Кафедре высшей геометрии и топологии под руководством проф. А. В. Архангельского. Я глубоко признательна проф. А. В. Архангельскому за постановку задач, полезные собеседования и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Архангельский. Отображения и пространства. *Успехи мат. наук*, **21**, 1966. № 4, 133—181.
2. А. В. Архангельский. О мощности бикомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. *Доклады АН СССР*, **187**, 1969, 967—970.
3. А. В. Архангельский. О поведении метризуемости при факторных отображениях. *Доклады АН СССР*, **164**, 1965, 247—250.
4. А. В. Архангельский. О бикомпактах, которые удовлетворяют условие Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности. *Доклады АН СССР*, **199**, 1971, 1227—1230.
5. D. Burke. Cauchy sequences in semimetric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33**, 1972, 161—164.
6. C. H. Cook, H. R. Fischer. Uniform convergence structures. *Math. Ann.*, **173**, 1967, 290—306.
7. E. Čech. Topological spaces. Prague, 1966.

8. A. S. D a v i s. Indexed systems of neighbourhoods for general topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, **68**, 1961, 886—893.
9. H. R. F i c h e r. Limesräume. *Math. Ann.*, **137**, 1959, 269—303.
10. S. P. F r a n k l i n. Spaces in which seduences suffice, I. *Fund. Math.*, **57**, 1965, 107—115.
11. W, G ä h l e r. Grundstukturen der Analysis. Bd. 1. Berlin, 1977.
12. A. H a j n a l, I. J u h a s z. Discrete subspaces of topological spaces. I & II. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Ser.* A, **70**, 1967, 343—356; **72**, 1969, 18—30.
13. B. H e a r s e y, D. K e n t. Convergence structures. *Port. Math.*, **31**, 1972, 105—118.
14. D. C. K e n t. Convergence functions and their related topologies. *Fund. Math.*, **54**, 1964, 125—133.
15. D. C. K e n t. Convergence duotent naps. *Fund. Math.*, **65**, 1969, 197—205.
16. D. C. K e n t w, G. D. R i c h a r d s o n. Minimal convergence spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **160**, 1971, 489—499.
17. V. I. M a l y h i n. On the power of weakly first countable bicompacta. *Abstracts of papers presented to the AMS*. **1**, 1980, No 2,80 T-G34.
18. С. Й. Н е д е в. Симметризуемые пространства и финальная компактность. *Доклады АН СССР*, **175**, 1967, 532—534.
19. С. Й. Н е д е в. *О*-метризуемые пространства. *Труды Моск. мат. о-ва*, **24**, 1971, 201—236.
20. С. Й. Н е д е в, М. М. Ч о б а н. Общая концепция метризуемости топологических пространств. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*. **65**, 1970/1971, 111—165
21. С. Й. Н е д е в, М. М. Ч о б а н. К теории *о*-метризуемых пространств, II. *Вестник Моск. унив.*, 1972, № 2, 10—17.
22. E. T. O r d m a n. Convergence almost everywhere is not topological. *Amer. Math. Monthly*, **73**, 1966, 182—183.
23. Д. Н. С т а в р о в а. Кардинальнозначные инварианты для окрестностных пространств. Определения и основные соотношения. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 453—456.
24. Н. Н. Я к о в л е в. К теории *о*-метризуемых пространств. *Доклады АН СССР*, **226**, 1976, 1330—1331.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25.9.1979;
в переработанном виде 17.2.1981