PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ПРОЦЕСС ТИПА РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ ДВУПОЛОВОЙ ПОПУЛЯЦИИ С ИММИГРАЦИЕЙ

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

В качестве модели при исследовании динамики населения рассмотрен целочисленный неотрицательный случайный процесс типа размножения и гибели с иммиграцией. Для этого процесса найдены производящая функция и первые два момента.

1. Описание процесса размножения и гибели двуполовой системы частиц с иммиграцией. Описание проведем на языке демографии. Население $J(t)$ любого населенного пункта является двуполовой системой частиц. Через $\nu(t)$ и $\mu(t)$ обозначим соответственно число женщин и число мужчин в момент времени t. Вероятность того, что у женщины возраста x к моменту времени t родится ребенок в интервале $(t, t+\Delta t)$, равна $\lambda(x)\Delta t+o(\Delta t)$. Предположим, что каждый ребенок с вероятностью q есть девочка и с вероятностью $1-q$ — мальчик. Поэтому вероятность того, что у женщины возраста x родится девочка в интервале времени $[t, t+\Delta t)$, равна $\lambda(x)q\Delta t+o(\Delta t)$, а что родится мальчик — $\lambda(x)(1-q)\Delta t+o(\Delta t)$. Очевидно, $\lambda(x)$ является интенсивностью потока рождений каждой женщины, или возрастной плодовитостью женщины. Пусть продолжительность жизни женщин распределена по закону $F_1(x)$ с плотностью $f_1(x)$, а жизни мужчин — по закону $F_2(x)$ с плотностью $f_2(x)$. Будем считать, что продолжительности жизни мужчин и женщин являются независимыми случайными величинами.

Наряду с потоком рождения и гибели частиц рассмотрим иммиграционный поток. Предположим, что иммиграционные потоки женщин и мужчин являются стационарными пуассоновскими потоками с интенсивностями соответственно γ_1 и γ_2. Пусть возраст женщин, поступивших извне, есть случайная величина с функцией распределения $G_1(x)$ и плотностью $g_1(x)$, а для мужчин — $G_2(x)$ и $g_2(x)$. В таком случае вероятность того, что в населенный пункт в интервале времени $[t, t+\Delta t)$ поступит женщина (мужчина) в возрасте, принадлежащем интервалу $[x, x+\Delta x)$, равна $\gamma_1\Delta t dG_1(x)+o(\Delta t)$ $(\gamma_2\Delta t dG_2(x)+o(\Delta t))$. Через $\xi_1(t), \dots, \xi_{\nu(t)}(t)$ обозначим возраст женщин к моменту времени t. Аналогично $\eta_1(t), \dots, \eta_{\mu(t)}(t)$ — возраст мужчин к моменту времени t.

Введем случайный процесс $\zeta(t)=\{\nu(t), \mu(t); \xi_1(t), \dots, \xi_{\nu(t)}(t); \eta_1(t), \dots, \eta_{\mu(t)}(t)\}$. Процесс $\zeta(t)$ назовем процессом размножения и гибели двуполовой системы частиц с иммиграцией. Далее мы найдем производящую функцию двумерной случайной величины $(\nu(t), \mu(t))$ и первые два момента каждой из компонент $\nu(t)$ и $\mu(t)$.

2. Вывод основных уравнений. Поскольку $\lambda(x)$ и q не зависят от траектории процесса $\zeta(t)$ и иммиграционные потоки пуассоновские, то $\zeta(t)$ является марковским процессом. Фазовое пространство процесса $\zeta(t)$ состоит

ПЛИСКА Български математически студии. Том 7, 1984, с. 10—17.

из: изолированной точки ω_0; полупрямых $\omega_{10}=(0\leqq x_1<\infty)$, $\omega_{01}=(0\leqq y<\infty)$; областей на плоскости $\omega_{11}=(0\leqq x_1<\infty, 0\leqq y_1<\infty)$, $\omega_{20}=(0\leqq x_1<\infty, 0\leqq x_2<\infty)$, $\omega_{02}=(0\leqq y_1<\infty,\ 0\leqq y_2<\infty)$; части $(m+n)$-мерного пространства $\omega_{mn}=(0\leqq x_i<\infty,\ 0\leqq y_j<\infty,\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$. Между точками фазового пространства и состояниями системы установим следующее соответствие. Точка ω_0 отвечает состоянию системы $\nu=0$, $\mu=0$. Точка $(x_1,\ldots,x_m; y_1,\ldots,y_n)$ из ω_{mn} соответствует состоянию $\nu(t)=m$, $\mu(t)=n$, причем $x_1,\ldots,x_m$ — возрасты женщин, а $y_1,\ldots,y_n$ — возрасты мужчин. Если $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ — это $x_1,\ldots,x_m$, записанные в каком-либо порядке, а $y_{j_1},\ldots,y_{j_n}$ — записанные в каком-либо порядке $y_1,\ldots,y_n$, то все точки фазового пространства $(x_{i_1},\ldots,x_{i_m}; y_{j_1},\ldots,y_{j_n})$ отвечают одному и тому же состоянию, хотя при изучении марковского процесса нам будет удобно считать эти точки различными. Для симметрии марковского процесса в фазовом пространстве удобно предположить следующее:

1. В случае поступления мужчины в возрасте y_k точка $\omega_{i,j-1}(x_1,\ldots,x_i, y_1,\ldots,y_{k-i}\, y_{k+1},\ldots,y_j)$ с вероятностью $1/j$ перейдет в точку $\omega_{ij}(x_2,\ldots,x_i, y_1,\ldots,y_{k-1}, y_k, y_{k+1},\ldots,y_j)$;

2. В случае поступления женщины в возрасте x_k точка $\omega_{i-1,j}(x_1,\ldots,x_{k-1}, x_{k+1},\ldots,x_i, y_1,\ldots,y_j)$ перейдет в точку $\omega_{ij}(x_1,\ldots,x_j, y_1,\ldots,y_j)$ с вероятностью $1/j$;

3. В случае рождения девочки точка $\omega_{i-1,j}(x_1,\ldots,x_{i-1}, y_1,\ldots,y_j)$ перейдет в точку $\omega_{ij}(x_1,\ldots,x_{i-1}, 0, y_1,\ldots,y_j)$ с вероятностью $1/i$ и в случае рождения мальчика точка $\omega_{i,j-1}(x_1,\ldots,x_i, y_1,\ldots,y_{j-1})$ перейдет в точку $\omega_{ij}(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i, y_1,\ldots,y_{j-1}, 0)$ с вероятностью $1/j$.

Пусть $P_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y};t)\,\Pi_{k=1}^{i} dx_k\,\Pi_{l=1}^{j} dy_l=\mathbf{P}\{\nu(t)=i, \mu(t)=j; x_k\leqq\xi_k(t)<x_k+dx_k, y_l\leqq\eta_l(t)<y_l+dy_l,\ k=\overline{1,i},\ l=\overline{1,j}\}$, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_i)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_j)$.

Вероятности перехода марковского процесса $\zeta(t)$ за малый промежуток времени Δt имеют вид:

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_0)=1-(\gamma_1+\gamma_2)\,\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_{10}(x_1))=\gamma_1\,\Delta t\, dG_1(x_1)+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_{01}(y_1))=\gamma_2\,\Delta t\, dG_2(y_1)+o(\Delta t);$$

$$P(\omega_{ij}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}, \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}), \Delta t, \omega_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$=\prod_{k=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_k)}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}\prod_{l=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}\left[1-\left(\sum_{r=1}^{i}\lambda(x_r)+\gamma_1+\gamma_2\right)\Delta t\right]+o(\Delta t);$$

$$P(\omega_{ij}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}, \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}), \Delta t, \omega_{i-1,j}(x_1,\ldots,x_{k-1}, x_{k+1},\ldots,x_i, \mathbf{y})$$

$$=\frac{F_1(x_k)-F_1(x_k-\Delta t)}{1-F_1(x_k-\Delta t)}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_r)}{\overline{F}_1(x_r-\Delta t)}\prod_{l=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}\left[1-\left(\sum_{k=1}^{i}\lambda(x_k)+\gamma_1+\gamma_2\right]\Delta t\right)+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_{ij}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t},\ \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}),\Delta t, \omega_{ij-1}(\mathbf{x}; y_1\cdots y_{k-1}, y_{k+1},\ldots,y_j)=\frac{F_2(y_k)-F_2(y_k-\Delta t)}{1-F_2(y_k-\Delta t)},$$

$$\times\prod_{r=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_r)}{\overline{F}_1(x_r-\Delta t)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}\left[1-\left(\sum_{r=1}^{i}\lambda(x_r)+\gamma_1+\gamma_2\right)\Delta t\right]+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_{i-1,j}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_i;\mathbf{y}),\Delta t,\omega_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=\gamma_1\,\Delta t\,d\,G_1(x_k)+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_{i,j-1}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t}\,(\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t})^{k-1}(y-\Delta t)^{j-k}),\Delta t,\omega_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=\gamma_2\Delta t\,dG_2(y_k)+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_{ij}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t}),\Delta t,\omega_{i+1,j}(x^{k-1}\,0\,x^{i-k+1},\mathbf{y}))=\frac{1}{i+1}\sum_{l=1}^{i}\lambda(x_l)\,q\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P(\omega_{ij}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},\ \mathbf{y}-\Delta\mathbf{t})\Delta t,\omega_{ij+1}(\mathbf{x},y^{k-1}\,0\,y^{j-k+1}))=\frac{1-q}{j+1}\sum_{l=1}^{j}\lambda(x_l)\,\Delta t+o(\Delta t),$$

где $(x^{k-1}\,0\,x^{m-k})=(x_1,\ldots x_{k-1},o,x_{k+1}\ldots,x_m),(x^{k-1},x^{i-k})$
$=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_i)$.

Сравнивая вероятности состояний в два момента $t-\Delta t$ и t, с помощью формулы полной вероятности и вероятностью перехода марковского процесса можно доказать следующие равенства:

(1) $$P_{00}(t)=P_{00}(t-\Delta t)\,[1-(\gamma_1+\gamma_2)\,\Delta t]+o(\Delta t),$$

(2) $$P_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y};t)=P_{ij}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t};t-\Delta t)\prod_{k=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_k)}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}\prod_{l=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}$$

$$\times[1-(\sum_{k=1}^{i}\lambda(x_k)+\gamma_1+\gamma_2)\Delta t]$$

$$+(i+1)\int_0^\infty P_{i+1j}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t};t-\Delta t)\prod_{k=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_k)}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}\prod_{l=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}\frac{f_1(x_{i+1})}{\overline{F}_1(x_{i+1}-\Delta t)}dx_{i+1}$$

$$+(j+1)\int_0^\infty P_{ij+1}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t};t-\Delta t)\prod_{k=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_k)}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}\prod_{l=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}\frac{f_2(y_{j+1})}{\overline{F}_2(y_{j+1}-\Delta t)}dy_{j+1}$$

$$+\sum_{k=1}^{i}\frac{\gamma_1\Delta t}{i}P_{i-1j}((x-\Delta t)^{k-1},(x-\Delta t)^{i-k},\mathbf{y}-\Delta\mathbf{t};t-\Delta t)\,g_1(x_k)$$

$$\times\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1}}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_l)}{\overline{F}_1(x_l-\Delta t)}\cdot\prod_{r=1}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_r)}{\overline{F}_2(y_r-\Delta t)}$$

$$+\sum_{l=1}^{j}\frac{\gamma_2\Delta t}{j}P_{ij-1}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{t},(y-\Delta t)^{l-1},(y-\Delta t)^{j-l};t-\Delta t)\,g_2(y_l)\prod_{k=1}^{i}\frac{\overline{F}_1(x_k)}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}$$

$$\times\prod_{\substack{r=1\\ r\neq l}}^{j}\frac{\overline{F}_2(y_l)}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}+o(\Delta t).$$

Докажем, к примеру, последнее равенство. Событие $B=\{\nu(t)=i,\mu(t)=j;$ $x_k\leq\xi_k<\infty, y_l\leq\eta_l<\infty,\ k=\overline{1,i};l=\overline{1,j}\}$ имеет вероятность $P_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\ dx\,dy$ и может наступить следующими несовместимыми способами: либо в момент времени $t-\Delta t$ процесс $\zeta(t-\Delta t)$ был в состоянии

$$\{\nu(t-\Delta t)=i,\mu(t-\Delta t)=j;\ x_k-\Delta t\leq\xi_k<x_k-\Delta t+dx_k,\ y_l-\Delta t<\eta_l<y_l-\Delta t$$
$$+dy_l,\quad k=\overline{1,i},\ l_1=\overline{1,j}\}$$

и за время Δt не родились, не погибли и не поступило извне ни одной женщины и ни одного мужчины, вероятность чего равна

$$(3)\qquad P_{ij}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}, \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}; t-\Delta t)\left[1-\left(\sum_{k=1}^{i} \lambda(x_k)+\gamma_1+\gamma_2\right)\Delta t\right] dx\, dy,$$

либо в момент времени $t-\Delta t$, ζ был в одном из состояний

$$\{\nu=i+1, \mu=j; x_k-\Delta t \leqq \xi_k < x_k-\Delta t+dx_k, y_l-\Delta t \leqq \eta_l < y_l-\Delta t+dy_l,$$
$$k=\overline{1, i+1}, l=\overline{1, j}\},$$
$$\{\nu=i, \mu=j+1, x_k-\Delta t \leqq \xi_k < x_k-\Delta t+dx_k, y_l-\Delta t \leqq \eta_l < y_l-\Delta t+dy_l,$$
$$k=\overline{1, i}, l=\overline{1, j+1}\}$$

и за время Δt погибла (погиб) в возрасте x_{i+1} (y_{j+1}) женщина (мужчина), вероятность чего равна

$$(4)\qquad (i+1)\int_0^\infty P_{i+1j}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}, x_{i+1}, \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}; t-\Delta t) \prod_{k=1}^{i} \frac{\overline{F}_1(x_k)\, dx_k}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}$$
$$\times \prod_{l=1}^{j} \frac{\overline{F}_2(y_l)\, dy_l}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)} \frac{f_1(x_{i+1}) dx_{i+1}}{\overline{F}_1(x_{i+1}-\Delta t)},$$

$$(5)\qquad ((j+1)\int_0^\infty P_{ij+1}(\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}, \mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}; t-\Delta t) \prod_{k=1}^{i} \frac{\overline{F}_1(x_k)\, dx_k}{\overline{F}_1(x_k-\Delta t)}$$
$$\times \prod_{l=1}^{j} \frac{\overline{F}_2(y_l)\, dy_l}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)} \frac{f_2(y_{j+1})\, dy_{j+1}}{\overline{F}_2(y_{j+1}-\Delta t)});$$

— либо в момент времени $t-\Delta t$, $\zeta(t)$ был в одном из состояний

$$\{\nu=i-1, \mu=j; x_r-\Delta t \leqq \xi_r < x_r-\Delta t+dx_k, y_l-\Delta t \leqq \eta_l < y_l-\Delta t+dy_l,$$
$$r=\overline{1, i}, r \neq k, l=\overline{1, j}\},$$
$$\{\nu=i, \mu=j-1; x_r-\Delta t \leqq \xi_r < x_r-\Delta t+dx_k, y_l-\Delta t \leqq \eta_l < y_l-\Delta t+dy_l,$$
$$r=\overline{1, i}, l=\overline{1, j}, l \neq k\},$$

и за время Δt поступила извне одна женщина, вероятность чего равна

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{i} \frac{\gamma_1 \Delta t}{t} P_{i-1j}((x_k-\Delta t)^{k-1}, (x-\Delta t)^{i-k}, (\mathbf{y}-\Delta \mathbf{t}); t-\Delta t)\, dG_1(x_k)$$
$$\times \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{i} \frac{\overline{F}_1(x_r)\, dx_r}{\overline{F}_1(x_r-\Delta t)} \prod_{l=1}^{j} \frac{\overline{F}_2(y_l)\, dy_l}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)},$$

или один мужчина, вероятность чего равна

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{j} \frac{\gamma_2 \Delta t}{j} P_{ij-1}((\mathbf{x}-\Delta \mathbf{t}), (y-\Delta t)^{k-1}, (y-\Delta t)^{j-k})\, dG_2(yk)$$
$$\times \prod_{r=1}^{i} \frac{\overline{F}_1(x_r)\, dx_r}{\overline{F}_1(x_r-\Delta t)} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{j} \frac{\overline{F}_2(y_l) dy_l}{\overline{F}_2(y_l-\Delta t)}).$$

Просуммировав (4), (5), (6) и (7), получим (3), откуда и следует равенство (2). После некоторых преобразований для вероятностей состояний $P_0(t)$, P_{ij} $(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)$ выводим из (1) и (2) следующую систему интегродифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\gamma_1+\gamma_2)P_0(t) + \int_0^\infty P_{10}(x;t)\, r_1(x)\,dx + \int_0^\infty P_{01}(y;t)\, r_2(y)\,dy, \tag{8}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{j} \frac{\partial P_{ij}}{\partial y_l} + \Big(\sum_{k=1}^{j} \lambda(x_k) + r_1(x) + \gamma_1 + \gamma_2\Big) P_{ij} \tag{9}$$

$$+ \sum_{l=1}^{j} r_2(y_l) P_{ij} = (i+1)\int_0^\infty P_{i+1,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)\, r_1(x_{i+1})\,dx_{i+1}$$

$$+ (y+1)\int_0^\infty P_{ij+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)\, r_2(y_{j+1})\,dy_{j+1} + \sum_{k=1}^{i} \frac{\gamma_1}{i} P_{i-1,j}(x^{k-1}, x^{i-k}, \mathbf{y}; t) \frac{dG_1(x_k)}{dx_k}$$

$$+ \sum_{l=1}^{j} \frac{\gamma_2}{j} P_{ij-1}(\mathbf{x}, y^{l-1}, y^{j-l}; t) \frac{dG_2(y_l)}{dy_l},$$

где

$$r_1(x_k) = f_1(x_k)/\bar{F}_1(x_k), \quad r_2(y_l) = f_2(y_l)/\bar{F}_2(y_l).$$

Таким же способом можно вывести еще следующие две равенства:

$$\sum_{k=1}^{i} \lambda(x_k)\, q P_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = (i+1) P_{i+1,j}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}; t),$$

$$\sum_{k=1}^{i} \lambda(x_k)(1-q) P_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = (j+1) P_{i,j+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0; t). \tag{10}$$

3. Решение уравнений. Проинтегрировав обе стороны (8) и (9) в пределах от 0 до ∞, получаем

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} + i\int_0^\infty [\lambda(x) + r_1(x)]\, P_{ij}(x;t)\,dt + (\gamma_1+\gamma_2)\, P_{ij}(t) \tag{11}$$

$$+ j\int_0^\infty r_2(y) P_{ij}(y;t)\,dy - i P_{ij}(0, \cdot\,; t) - j P_{ij}(\cdot\,, 0; t)$$

$$= (i+1)\int_0^\infty P_{i+1,j}(x;t)\, r_1(x)\,dx + (j+1)\int_0^\infty P_{i,j+1}(y;t)\, r_2(y)\,dy$$

$$+ \gamma_1 P_{i-1,j}(t) + \gamma_2 P_{i,j-1}(t),$$

где $i \geqq 0$, $j \geqq 0$, $P_{i,-1} \equiv P_{-1,j} \equiv 0$, $P_{ij}(t) = \mathsf{P}(\nu(t) = i,\ \mu(t) = j)$,

$$P_{ij}(x_k; t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)\,dx_1 \cdots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \cdots dx_i\,dy_1 \cdots dy_j,$$

$$P_{ij}(y_k; t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P_{ij}(x, y, t)\,dx_1 \cdots dx_i\,dy_1 \cdots dy_{k-1}\,dy_{k+1} \cdots dy_j,$$

$$P_{ij}(0, \cdot\,; t) = P_{ij}(x;t)\,|_{x=0}, \quad P_{ij}(\cdot\,, 0; t) = P_{ij}(y;t)\,|_{y=0}.$$

Значения $P_{ij}(0, \cdot\,; t)$ и $P_{ij}(\cdot\,, 0; t)$ можно найти интегрированием равенства (10):

$$(12)\qquad i\int_0^\infty \lambda(x)\, q\, P_{ij}(x; t)\, dx = (i+1)\, P_{i+1,\, j}(0, \cdot\,; t),$$

$$i\int_0^\infty \lambda(x)(1-q)\, P_{ij}(x, t)\, dx = (j+1)\, P_{i,\, j+1}(\cdot\,, 0; t), i \geqq 0, j \geqq 0.$$

Из (11) и (12) находим, что при $i \geqq 0$, $j \geqq 0$

$$(13)\qquad \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = (i-1)\int_0^\infty \lambda(x)\, q\, P_{i-1,\, j}(x; t)\, dx$$

$$+ i\int_0^\infty \lambda(x)(1-q)\, P_{i,\, j-1}(x; t)\, dx - i\int_0^\infty [\lambda(x) + r_1(x)]\, P_{ij}(x; t)\, dx$$

$$- j\int_0^\infty r_2(y)\, P_{ij}(y; t)\, dy + (i+1)\int_0^\infty P_{i+1,\, j}(x; t)\, r_1(x)\, dx$$

$$+ (j+1)\int_0^\infty P_{i,\, j+1}(y; t)\, r_2(y)\, dy + \gamma_1 P_{i-1,\, j}(t) + \gamma_2 P_{ij-1}(t) - (\gamma_1 + \gamma_2)\, P_{ij}(t).$$

Помножив обе стороны (13) на $z_1^i\, z_2^j$ и просуммировав по i и j, получаем

$$(14)\qquad \frac{\partial\varphi(z_1, z_2, t)}{\partial t} = \int_0^\infty \lambda(x)\, [z_1^2\, q - z_1 + z_1 z_2 (1-q)]\, \frac{\partial\varphi(x, z_1, z_2, t)}{\partial z_1}\, dx$$

$$+ (1-z_1)\int_0^\infty r_1(x) \frac{\partial\varphi(x, z_1, z_2, t)}{\partial z_1}\, dx + (1-z_2)\int_0^\infty r_2(y) \frac{\partial\varphi(y, z_1, z_2, t)}{\partial z_2}\, dy$$

$$+ [\gamma_1(z_1 - 1) + \gamma_2(z_2 - 1)]\, \varphi(z_1, z_2, t),$$

где

$$\varphi(z_1, z_2, t) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty z_1^i\, z_2^j\, P_{ij}(t);$$

$$\varphi(\alpha_1, z_1, z_2, t) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty z_1^i\, z_2^j P_{ij}(\alpha, t);\ \alpha = x, \text{ или } \alpha = y.$$

Найдем $\mathsf{E}\, J(t) = \mathsf{E}\, \nu(t) + \mathsf{E}\, \mu(t)$.

Из (14) выводим следующее уравнение для $n_1(t) = \mathsf{E}\, \nu(t)$:

$$(15)\qquad \frac{dn_1(t)}{dt} = \int_0^\infty [q\lambda(x) - r_1(x)]\, n_1(x, t)\, dx + \gamma_1,$$

где

$$n_1(x, t) = \left.\frac{\partial\varphi(x, z_1, z_2, t)}{\partial z_1}\right|_{z_1 = z_2 = 1},\quad n_1(t) = \int_0^\infty n_1(x, t)\, dx.$$

Решение уравнения (15) получим в виде

$$n_1(x, t) = c_1(x)\, \alpha(t) \times \exp\{[q\lambda(x) - r_1(x)]\, t\}$$

$$=c_1(x)\,[1+\gamma_1\int_0^t[\int_0^\infty c_1(v)\exp\{[q\lambda(v)-r_1(v)]\,y\}\,dv]^{-1}\,dy]$$

$$\times\exp\{[q\lambda(x)-r_1(x)]\,t\}.$$

Отсюда следует, что

$$n_1(t)=\int_0^\infty c_1(x)\,[1+\int_0^t\gamma_1\,[\int_0^\infty c_1(u)\exp\{[q\lambda(u)-r_1(u)]\,y\}\,du]^{-1}\,dy]$$

$$\times\exp\{[q\lambda(x)-r_1(x)]\,t\}\,dx.$$

Так как $n_1(x,0)=c_1(x)$ и $n_1(0)=\int_0^\infty n_1(x,0)\,dx=\int_0^\infty c_1(x)\,dx$, то $\int_0^\infty c_1(x)\,dx \times n_1^{-1}(0)=1$. Поэтому функцию $c_1(x)/n_1(0)$ можно интерпретировать как относительное распределение женщин по возрасту в начальный момент времени.

Математическое ожидание $m_1(t)$ числа мужчин $\mu(t)$ найдем из уравнения

$$\frac{dm_1(t)}{dt}=\int_0^\infty\lambda(x)(1-q)\,n_1(x,t)\,dx-\int_0^\infty r_2(y)\,m_1(y,t)\,dy+\gamma_2, \tag{16}$$

где

$$m_1(t)=\left.\frac{\partial\varphi(r_1,z_2,t)}{\partial z_2}\right|_{z_1=z_2=1} \quad\text{и}\quad m_1(y,t)=\left.\frac{\partial\varphi(y,z_1,z_2,t)}{\partial z_2}\right|_{z_1=z_2=1}.$$

Можно показать, что решением уравнения (16) является функция

$$m_1(y,t)=c_2(y)\,\beta(t)l^{-r_2(y)t}+\frac{(1-q)\,\lambda(y)\,c_1(y)\exp\{[q\lambda(y)-r_1(y)]\,t\}}{q\lambda(y)-r_1(y)+r_2(y)},$$

где

$$c_2(y)=m_1(y,0)-\frac{(1-q)\,\lambda(y)\,c_1(y)}{q\,\lambda(y)-r_1(y)+r_2(y)},$$

$$\beta(t)=1+\int_0^t\gamma_2\,[\int_0^\infty c_2(y)\,e^{-r_2(y)x}\,dy]^{-1}\,dx$$

$$-(1-q)\gamma_1\int_0^t\int_0^\infty\lambda(y)\,c_1(y)\exp\{[q\lambda(y)-r_1(y)]\,z\}\,[q\lambda(y)-r_1(y)+r_2(y)]\,dy$$

$$\times[\int_0^\infty c_2(y)\,e^{-r_2(y)\,z}\,dy\int_0^\infty c_1(v)\exp\{[q\lambda(v)-r_1(v)]z\}\,dv]^{-1}\,dz,$$

$(m_1(y,0)/m_1(0)$ — это относительное распределение мужчин по возрасту при $t=0)$.

Отсюда

$$m_1(t)=\beta(t)\int_0^\infty[m_1(y,0)-\frac{(1-q)\lambda(y)\,c_1(y)}{q\lambda(y)-r_1(y)+r_2(y)}]\,e^{-r_2(y)\,t}\,dy$$

$$+(1-q)\alpha(t)\int_0^\infty\frac{\lambda(y)c_1(y)\exp\{[q\lambda(y)-r_1(y)]t\}}{q\lambda(y)-r_1(y)+r_2(y)}\,dy.$$

Заметим, что $\mathsf{D}J(t)=n_2(t)+m_2(t)-[n_1(t)+m_1(t)^2+2\,k(t)$, где $n_i(t)=\mathsf{E}\nu^i(t)$, $m_i(t)=\mathsf{E}\mu^i(t)$, $i=1,2$, $k(t)=\mathsf{E}\{\nu(t)\,\mu(t)\}$. Из уравнения (14) выведем уравнения для $u_1(t)=\mathsf{E}\{\nu(t)\,(\nu(t)-1)\}=n_2(t)-n_1(t)$, $u_2(t)=\mathsf{E}\{\mu(t)\,(\mu(t)-1)\}$ и $k(t)$,

$$\frac{du_1(t)}{dt}=2q\int_0^\infty \lambda(x)\,n_1(x,t)\,dx+2\int_0^\infty [q\lambda(x)-r_1(x)]\,u_1(x,t)\,dx+2\gamma_1\,n_1(t),$$

$$\frac{dk(t)}{dt}=(1-q)\int_0^\infty \lambda(x)\,n_2(x,t)\,dx+\int_0^\infty [q\lambda(x)-r_1(x)+r_2(x)]\,k(x,t)dx$$

$$+\gamma_1\,m_1(t)+\gamma_2\,n_1(t),$$

$$\frac{du_2(t)}{dt}=2(1-q)\int_0^\infty \lambda(x)\,k(x,t)\,dx-2\int_0^\infty r_2(x)\,u_2(x,t)\,dx+2\gamma_2\,m_1(t),$$

где

$$k(x,0)=\int_0^x n_1(u,0)m_1(x-u,0)\,du,$$

$$n_2(0)=n_1^2(0),\; m_2(0)=m_1^2(0),\; k(0)=n_1(0)\,m_1(0).$$

4. Применения. Пусть $\lambda(x)=\lambda_i$ при $T_i\leqq x<T_{i+1}$, $i\geqq 0$, $r_k(x)=r_k$ и $k=1,2$, т. е. $F_k(t)=1-e^{-r_k t}$.

Тогда $n_1(t)=a(t)\,c_1(t)$, $m_1(t)=b(t)\,c_2(t)+(1-q)\,a(t)\,c_3(t)$,

где

$$a(t)=1+\gamma_1\int_0^t [c_1(z)]^{-1}\,dz,$$

$$b(t)=1+\frac{\gamma_2}{m_1(0)r_2}(e^{r_2t}-1)-\frac{(1-q)}{m_1(0)}\gamma_1\int_0^t e^{r_2z}\,[c_1(z)]^{-1}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^\infty \lambda_i n_i \exp[(q\lambda_i-r_1)z]\cdot q\lambda_i-r_1+r_2]^{-1}\,dz,$$

$$c_1(t)=\sum_{i=0}^\infty n_i\exp[(q\lambda_i-r_1)\,t],$$

$$c_2(t)=m_1(0)\,e^{-r_2t}-(1-q)\sum_{i=0}^\infty \frac{n_i\lambda_i}{q\lambda_i-r_1+r_2}e^{-r_2t},$$

$$c_3(t)=\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i n_i\exp[(q\lambda_i-r_1)t]}{q\lambda_i-r_1+r_2},$$

$$n_i=\int_{T_i}^{T_{i+1}} n_1(x,0)\,dx,\; m_i=\int_{T_i}^{T_{i+1}} m_1(x,0)\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Александров. Использование случайных процессов типа размножения и гибели в демографии. — В: Труды III Всесоюзной школы — совещания по теории массового обслуживания. Т. 2. Москва, 1976, 128 — 139.

Высший экономический институт им. К. Маркса 1156 София

Поступила 1. 8. 1980