PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ДОКРИТИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ МИГРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ, КОСТО В. МИТОВ

В докритическом случае получены предельные теоремы для одного класса φ-регулируемых ветвящихся процессов, которые можно также интерпретировать как процессы с случайной миграцией.

Некоторые вопросы общей теории φ-регулируемых ветвящихся процессов рассматривались в работах [1 — 5]. Пока в основном эти результаты относятся либо к вырождению, либо к невырождению процессов. Естественно, возникает вопрос о более детальном исследовании регулируемых процессов, например, найти асимптотику вероятности продолжения, асимптотику моментов, исследовать период жизни процессов и т. д. Разумеется, для любого регулирующего множества сделать это невозможно. Поэтому в настоящей работе исследуется специальный класс φ-ветвящихся процессов с случайным φ, изучению которого посвящены также работы [6 — 9]. В частности, здесь приводятся доказательства некоторых результатов, анонсированных в [6;7] и относящихся к докритическому случаю. Напомним определение этих процессов.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ заданы два независимых множества целочисленных случайных величин $\xi=\{\xi_i(t); i, t=1, 2, \dots\}$, $\varphi=\{\varphi_t(n); t, n=0, 1, 2, \dots\}$, где

1) $\{\xi_i(t)\}$ — независимые и одинаково распределенные с производящей функцией

$$F(s)=\mathsf{E}\{s^{\xi_i(t)}\}=\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \ |s|\leqq 1;$$

2) $\varphi_t=\{\varphi_t(0), \varphi_t(1), \varphi_t(2), \dots\}$ — независимые случайные процессы, для которых

$$\mathsf{P}\{\varphi_t(n)=\max(n-1, 0)\}=p, \ \mathsf{P}\{\varphi_t(n)=n\}=q,$$

$$\mathsf{P}\{\varphi_t(n)=n+1\}=r, \ p+q+r=1, \ n, t=0, 1, 2, \dots$$

Тогда изучаемый нами миграционный процесс μ_t определяется следующим конструктивным образом:

$$\mu_{t+1}=\begin{cases} \sum_{i=1}^{\varphi_t(\mu_t)} \xi_i(t+1), & \varphi_t(\mu_t)>0, \\ 0, & \varphi_t(\mu_t)=0, \end{cases} \tag{1}$$

$t=0, 1, 2, \dots$

Заметим, что при $q=1$ из (1) следует, что μ_t — обычный процесс Гальтона — Ватсона. При $r=1$ получаем ветвящийся процесс с иммиграцией (см., напр. [10, 11], а при $p=1$ — ветвящийся процесс с эмиграцией, впервые исследованный в [12]. Аналогичные процессы в критическом случае изучались в [13, 14], а в надкритическом — в [14].

Так как $\mathsf{P}\{\varphi_t(0)=0\}=1-r$, $\mathsf{P}\{\varphi_t(0)=1\}=r$, то из (1) следует, что $\mathsf{P}\{\mu_{t+1}=0\,|\,\mu_t=0\}=1-r$, $\mathsf{P}\{\mu_{t+1}=\xi_1(t+1)\,|\,\mu_t=\}=r$, т. е. возможна иммиграция в нуле. Кроме таких процессов, мы будем рассматривать также случай, когда 0 является поглощающим состоянием, т. е. почти, наверное, $\varphi_t(0)\equiv 0$. Такой процесс будем обозначать через $\tilde{\mu}_t$. Тогда из (1) следует, что если $\tilde{\mu}_0=\mu_0>0$, то

$$\tilde{\mu}_{t+1}=\begin{cases}\mu_{t+1}, & \tilde{\mu}_t>0,\\ 0, & \tilde{\mu}_t=0.\end{cases}\tag{2}$$

Лемма 1. *Производящие функции* $\Phi(t;s)=\mathsf{E}\{s^{\mu_t}\}$ *и* $\tilde{\Phi}(t;s)=\mathsf{E}\{s^{\tilde{\mu}_t}\}$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\Phi(t+1;s)=\Phi(t;F(s))\delta(s)+p\Phi(t;0)(1-F^{-1}(s)),\tag{3}$$

$$\tilde{\Phi}(t+1;s)=\tilde{\Phi}(t;F(s))\,\delta(s)+\tilde{\Phi}(t;0)(1-\delta(s)),\tag{4}$$

откуда следуют представления

$$\Phi(t;s)=\Phi(0;F_t(s))\prod_{k=1}^{t-1}\delta(F_k(s))+p\sum_{k=0}^{t-1}\Phi(t-k-1;0)(1-F_{k+1}^{-1}(s))\prod_{j=0}^{k-1}\delta(F_j(s)),\tag{5}$$

$$\tilde{\Phi}(t;s)=\tilde{\Phi}(0;F_t(s))\prod_{k=0}^{t-1}\delta(F_k(s))+\sum_{k=0}^{t-1}\tilde{\Phi}(t-k-1;0)(1-\delta(F_k(s)))\prod_{j=0}^{k-1}\delta(F_j(s)),\tag{6}$$

где $\delta(s)=pF^{-1}(s)+q+rF(s)$, *а* $F_t(s)$ *обозначает, как обычно, t-тую итерацию функции* $F(s)$, $F_0(s)\equiv s$, $\Pi_{j=0}^{-1}(\cdot)\equiv 1$.

Доказательство. Действительно, из (1) сразу вытекает

$$\Phi(t+1;s)=\mathsf{E}\{s^{\mu_{t+1}}\}=\mathsf{E}\{\mathsf{E}(s^{\mu_{t+1}}\,|\,\mu_t)\}$$

$$=(1-r+rF(s))\mathsf{P}\{\mu_t=0\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu_t=n\}(pF^{n-1}(s)+qF^n(s)+rF^{n+1}(s))$$

$$=\delta(s)\Phi(t;F(s))+p(1-F^{-1}(s))\Phi(t;0).$$

Аналогично, из (1) и (2) получаем

$$\tilde{\Phi}(t+1;s)=\mathsf{E}\{s^{\tilde{\mu}_{t+1}}\}=\mathsf{E}\{\mathsf{E}(s^{\tilde{\mu}_{t+1}}\,|\,\mu_t)\}$$

$$=\mathsf{P}\{\tilde{\mu}_t=0\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\tilde{\mu}_t=n\}(pF^{n-1}(s)+qF^n(s)+rF^{n+1}(s))$$

$$=\delta(s)\tilde{\Phi}(t;F(s))+\tilde{\Phi}(t;0)(1-\delta(s)).$$

Теперь соотношения (5) и (6) легко получаются из (3) и (4) по индукции.

В дальнейшем мы будем исследовать только докритический случай

(7) $$0<A=F'(1)<1,\ p>0,\ r>0.$$

Введем обозначения $F_k=F_k(0)$, $\Phi_k=\Phi(k;0)$, $\widetilde{\Phi}_k=\widetilde{\Phi}(k;0)$, $\gamma_t=\Pi_{k=0}^{t-1}\delta(F_k)$, $\gamma_0=1$, $\gamma_{-1}=0$.

Лемма 2. *Если выполняется* (7), *то* $\lim_{t\to\infty}\gamma_t=\gamma>0$, *причем*: *а*) *если* $p/r\geq 1$, *то* $\gamma_t\leq\gamma_{t+1}$; *б*) *если* $p/r\leq f_0$, *то* $\gamma_t\geq\gamma_{t+1}$; *в*) *если* $f_0<p/r<1$, *то существует* $T>0$ *такое, что* $\gamma_t\geq\gamma_{t+1}$, $t\geq T$.

Доказательство. Из определения γ_t вытекает, что $\gamma_t=\gamma_{1,t}/\gamma_{2,t}$, где $\gamma_{1,t}=\Pi_{k=0}^{t-1}H(F_k)$, $\gamma_{2,t}=\Pi_{k=0}^{t-1}F(F_k)$, $H(s)=p+qF(s)+rF^2(s)$. Из (7) следует, что $F(0)=f_0>0$ и $0<H'(1)=A(q+2r)<\infty$, $H(0)=p+qf_0+rf_0^2>0$. Кроме того, $H(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}h_k s^k$ является вероятностной производящей функцией. Следовательно, по лемме 4 Зубкова [11], $\gamma_{1,t}\downarrow\gamma_1>0$, $\gamma_{2,t}\downarrow\gamma_2>0$, $t\to\infty$, т. е. $\gamma_t\to\gamma=\gamma_1/\gamma_2>0$.

С другой стороны,

(8) $$\delta(s)-1=\Delta(s)(1-F(s))/F(s),\ \Delta(s)=p-rF(s).$$

Теперь из (8) при $p\geq r$ вытекает, что $\delta(s)>1$, $0\leq s<1$, т. е. $\gamma_t\uparrow\gamma$. Аналогично при $p\leq rf_0$ $\Delta(s)\leq p-f_0r<0$ и, следовательно, $\delta(s)\leq 1$, $0\leq s\leq 1$, т. е. $\gamma_t\downarrow\gamma$. При $f_0<p/r<1$ из того, что $\Delta(0)=p-rf_0>0$, $\Delta(1)=p-r<0$, $\Delta'(s)=-rF'(s)<0$, $\Delta''(s)=-rF''(s)<0$, $0\leq s\leq 1$, следует существование единственного $0<s_0<1$, такого, что

$$\Delta(s_0)=0,\ \Delta(s)<0,\ s_0<s<1,\ \Delta(s)>0,\ 0\leq s<s_0.$$

Тогда из (8) вытекает, что $\delta(s)>1$, $0\leq s<s_0$, и $\delta(s)<1$, $s_0\leq s<1$. Отсюда сразу вытекает утверждение в) леммы, имея в виду, что $F_t\uparrow 1$ при $A<1$.

Определение 1. *Будем говорить, что период жизни миграционного процесса* μ_t *начинается в момент* t_0 *и имеет длину* τ, *если* $\mu_{t_0-1}=0$, $\mu_t>0$, $t_0\leq t<t_0+\tau$, $\mu_{t_0+\tau}=0$.

Лемма 3. *Пусть* $u_t=\mathsf{P}\{\tau>t\}$, $U(s)=\Sigma_{t=0}^{\infty}u_t s^t$. *Тогда*

(9) $$U(s)=B(s)/D(s),$$

где

$$B(s)=\frac{1}{1-f_0}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})s^k,\ D(s)=\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_k-\gamma_{k-1})s^k=1-D_1(s),$$

$$D_1(s)=\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{k-1}-\gamma_k)s^k,\ \gamma_0=1,\ \gamma_{-1}=0.$$

Доказательство. Если $t_0=0$ — момент начала периода жизни (т. е. $\mu_{-1}=0$, $\mu_0>0$), то из (2) следует, что

$$u_t=\mathsf{P}\{\tau>t\}=\mathsf{P}\{\widetilde{\mu}_t>0\}=1-\widetilde{\Phi}(t;0),$$

где $\widetilde{\Phi}(t;s)$ определяется из (6) при $\widetilde{\Phi}(0;s)=(F(s)-f_0)/(1-f_0)$, $|s|\leq 1$.

Таким образом, полагая в (6) $s=0$, находим

(10) $$u_t=\gamma_t(1-F_{t+1})/(1-f_0)+\sum_{k=0}^{t-1}u_{t-k-1}(\gamma_k-\gamma_{k+1}).$$

Теперь, умножая обе части уравнения (10) на s^t и суммируя по t от 0 до ∞, после несложных преобразований получаем (9).

Теорема 1. *Если выполняется условие* (7), *то*

$$\mathsf{E}\tau=\frac{1}{\gamma(1-f_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})<\infty.$$

Пусть дополнительно $\mathsf{E}\{\xi_i(t)\log\xi_i(t)\}<\infty$. *Тогда*

а) *если* $p/r>1$, *то* $\Sigma_{k=0}^{\infty}u_n A^{-n}=1/(p-r)(1-f_0)$;

б) *если* $p/r\leqq f_0$, *то существует единственное* $1<a_0<A^{-1}$ *такое, что* $D_1(a_0)=1$ *и* $u_t \backsim B(a_0)/D_1'(a_0)a_0^{t+1}$, $t\to\infty$.

Доказательство. Из леммы 2 и того, что $1-F_t\leqq A^t$, $t\geqq 0$, вытекает сходимость ряда $\Sigma_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})$. С другой стороны, из

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_k-\gamma_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\gamma_k-\gamma_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$$

следует, что $D(1)=\lim_{s\uparrow 1}D(s)=\gamma$.

Теперь из (9) находим

$$\mathsf{E}\tau=\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\lim_{s\uparrow 1}U(s)=\frac{B(1)}{D(1)}=\frac{1}{\gamma(1-f_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})<\infty.$$

Известно [15, теорема 2, с. 56], что условие $\mathsf{E}\{\xi_i(t)\log\xi_i(t)\}<\infty$ необходимо и достаточно для асимптотики

$$(11)\qquad 1-F_t\backsim KA^t,\ 0<K<1,\ t\to\infty.$$

а) Пусть $p>r$. Тогда по лемме 2 $\gamma_t\uparrow\gamma$ и из

$$(12)\qquad d_k=\gamma_k-\gamma_{k-1}=\gamma_{k-1}(1-F_k)F_k^{-1}(p-rF_k)$$

находим $0\leqq d_k\leqq\gamma(p-rf_0)f_0^{-1}A^k$. С другой стороны,

$$0\leqq b_k=\gamma_k(1-f_0)^{-1}(1-F_{k+1})\leqq\gamma(1-f_0)^{-1}A^{k+1}.$$

Следовательно, ряды $B(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}b_k s^k$ и $D(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}d_k s^k$ сходятся в $|s|<A^{-1}$. Пусть $s=xA^{-1}$, $U^*(x)=U(x/A)$, $B^*(x)=B(x/A)$. $D^*(x)=D(x/A)$. Тогда и $U^*(x)=B^*(x)/D^*(x)$ сходится в $|x|<1$. Кроме того, из (11) и (12) при $n\to\infty$ имеем $d_n^*=d_n/A^n\to\gamma K(p-r)$, $b_n^*=b_n/A^n\to\gamma K(1-f_0)^{-1}$. Следовательно, $\Sigma_{j=0}^{t}d_j^*\backsim\gamma K(p-r)t$, $\Sigma_{j=0}^{t}b_j^*\backsim\gamma K(1-f_0)^{-1}t$ и по [16, теореме 5, т. 2, с. 513) при $x\uparrow 1$ получаем $B^*(x)\backsim\gamma K/(1-f_0)(1-x)$, $D^*(x)\backsim\gamma K(p-r)/(1-x)$, откуда сразу вытекает $U^*(x)\backsim[(p-r)(1-f_0)]^{-1}$, т. е. $\Sigma_{k=0}^{\infty}u_k A^{-k}=[(p-r)(1-f_0)]^{-1}$.

б) Пусть $p/r\leqq f_0$. Тогда по лемме 2 $1\geqq\gamma_t\downarrow\gamma>0$ и

$$(13)\qquad 0\leqq\Delta_k=\gamma_{k-1}-\gamma_k=\gamma_{k-1}(1-F_k)(r-pF_k^{-1})$$
$$\leqq\gamma_{k-1}(1-F_k)(r-p)\leqq(r-p)A^k<1.$$

Аналогично, $b_k=\gamma_k(1-F_{k+1})(1-f_0)^{-1}\leqq A^{k+1}(1-f_0)^{-1}$ и, следовательно, ряды $B(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}b_k s^k$ и $D_1(s)=\Sigma_{k=1}^{\infty}\Delta_k s^k$ сходятся при $|s|<A^{-1}$.

С другой стороны, $D_1(1)=\lim_{s\uparrow 1}D_1(s)=\lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1}^{n}\Delta_k=1-\gamma<1$, а $D_1(A^{-1})=\infty$, ввиду того, что $\Delta_n\backsim\gamma(r-p)KA^n$, $n\to\infty$. Из выпуклости $D_1(s)$

отсюда следует существование единственного a_0, $1<a_0<A^{-1}$, такое, что $D_1(a_0)=1$.

Обозначим $D_1^*(z)=D_1(a_0 z)=\Sigma_{n=1}^{\infty} \Delta_n^* z^n$, $B^*(z)=B(a_0 z)$, $U^*(z)=U(a_0 z)$, $|z|\leq 1$. Тогда из (9) и (13) следует, что

$$U^*(z)=B^*(z)/(1-D_1^*(z)), \tag{14}$$

где $B_1^*(1)<\infty$, $D_1^*(1)=D_1(a_0)=1$, $0\leq\Delta_n^*=\Delta_n a_0^n\leq\Delta_n A^{-n}\leq r-p<1$.

Теперь из (14) по теореме восстановления [16, т. 1, теорема 1 а), с. 315] получаем

$$\lim_{n\to\infty} u_n^*=\lim_{n\to\infty} u_n a_0^n=B^*(1)/(\frac{d}{dz} D_1^*(z))_{z=1}=B(a_0)/a_0 D_1'(a_0).$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 показывает не только что миграционный процес $\tilde{\mu}_t$ вырождающийся, т. е. $\lim_{t\to\infty} u_t=\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\tilde{\mu}_t>0\}=0$, что, впрочем, известно из [3, теорема А], но устанавливает и довольно любопытный факт, что в случае а) $\tilde{\mu}_t$ вырождается быстрее классического процесса Гальтона — Ватсона, т. е. $u_n A^{-n}\to 0$, тогда как в случае б) $u_n A^{-n}\to\infty$, т. е. $\tilde{\mu}_t$ вырождается медленнее процесса Гальтона —Ватсона.

Теорема 2. *Пусть выполняется* (7). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu_t=0\}=\lim_{t\to\infty}\Phi_t=\gamma/(\gamma+r\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})) \tag{15}$$

$$=\gamma/(1+p\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(F_{k+1}^{-1}-1))>0.$$

Доказательство. Пусть ν — время первого возвращения процесса μ_t в нуль. Тогда

$$\alpha_k=\mathsf{P}\{\nu=k\}=\mathsf{P}\{\mu_k=0,\ \mu_k=0,\ \mu_j>0,\ 1\leq j\leq k-1\mid\mu_0=0\},$$

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\mathsf{P}\{\mu_1=0\mid\mu_0=0\}=1-r(1-f_0),$$

$$\beta_k=\mathsf{P}\{\tau=k\}=u_{k-1}-u_k=\mathsf{P}\{\nu=k+1\mid\nu>1\}=\alpha_{k+1}/(1-\alpha_1).$$

Введем обозначения $\Phi(s)=\Sigma_{t=0}^{\infty}\Phi_t s^t$, $\alpha(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\alpha_k s^k$, $\beta(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\beta_k s^k$ Будем считать без ограничения общности, что $\Phi_0=1$, т. е. $\mu_0=0$ п. н.

Теперь из соотношения $\Phi_t=\Sigma_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Phi_{t-k}$, $t\geq 1$, умножая по s^t и суммируя от 0 до ∞, получаем уравнение

$$\Phi(s)=1/(1-\alpha(s)), \tag{16}$$

где $\alpha(s)=s\{1-r(1-f_0)(1-\beta(s))\}=s\{1-r(1-f_0)U(s)(1-s)\}$.

Из теоремы 1 следует, что случайная величина τ является собственной, т. е. $\mathsf{P}\{\tau<\infty\}=1$. Тогда, очевидно, то же самое можно сказать и о случайной величине ν, т. е. $\alpha(1)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\alpha_k=1$. Следовательно, по уже цитированной теореме восстановления, из (15) вытекает:

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_t=1/\alpha'(1)=1/\mathsf{E}\nu=1/(1+r(1-f_0)\,\mathsf{E}\tau).$$

Теперь из теоремы 1 и того, что

$$1-\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_k-\gamma_{k+1})=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-\delta(F_k)),$$

$$\gamma+r\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})=1+\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(r-rF_{k+1}-1+\delta(F_k)) \tag{17}$$

$$=1+p\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(F_{k+1}^{-1}-1),$$

получаем утверждение теоремы 2. Очевидно, случай $\mu_0\geqq 0$ не меняет предельного соотношения (15).

Теорема 3. *Если выполняется* (7), *то*

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\,\mu_t=\frac{Ar}{1-A}\,\frac{1+p\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})^2F_{k+1}^{-1}}{1+p\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(1-F_{k+1})F_{k+1}^{-0}}.$$

Доказательство. Из (3), дифференцируя по s и полагая $s=1$, получаем $\mathrm{E}\,\mu_{t+1}=A(\mathrm{E}\,\mu_t+r-p+p\Phi_t)$, откуда нетрудно показать, что

$$\mathrm{E}\,\mu_t=A^t\,\mathrm{E}\,\mu_0+(r-p)A\frac{1-A^t}{1-A}+pA\sum_{k=1}^{t-1}A^k\Phi_{t-k-1}. \tag{18}$$

Так как по теореме 2, $\lim_{t\to\infty}\Phi_t=(1+r(1-f_0)\mathrm{E}\,\tau)^{-1}$, то

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{t-1}A^k\Phi_{t-k-1}=\lim_{t\to\infty}\Phi_t\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\{(1-A)(1+r(1-f_0))\mathrm{E}\,\tau\}^{-1},$$

где $\mathrm{E}\,\tau$ определяется в теореме 1.

Теперь из (18) имеем

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\,\mu_t=\frac{A}{1-A}\left(r-p+\frac{p}{1+r(1-f_0)\mathrm{E}\tau}\right)=\frac{Ar(1+(r-p)(1-f_0)\,\mathrm{E}\,\tau)}{(1-A)(1+r(1-f_0)\,\mathrm{E}\,\tau)},$$

откуда по теореме 1 и (17) получаем утверждение теоремы 3.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что $\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\,\mu_t>0$, так что при $r<p$ должно быть $1<\mathrm{E}\,\tau<\{(p-r)(1-f_0)\}^{-1}$.

Теорема 4. *Если выполняется* (7), *то для цепи Маркова* $\{\mu_t\}$ *с множеством состояний* Z *существует единственное стационарное распределение*

$$R_k=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\mu_t=k\},\quad k\in Z,\quad \sum_{k\in z}R_k=1, \tag{19}$$

производящая функция которого $R(s)=\Sigma_{k\in z}R_k s^k$, $|s|\leq 1$, *удовлетворяет уравнению*

$$R(s)=R(F(s))\,\delta(s)-pR(0)(F^{-1}(s)-1), \tag{20}$$

где $R_0=R(0)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\mu_t=0\}$ *определяется формулой* (15), *а* $\delta(s)=pF^{-1}(s)+q+rF(s)$.

Доказательство. Пусть $P_{ij}(t)=\mathsf{P}\{\mu_{t+k}=j|\mu_k=i\}$ — вероятности перехода. Тогда $P_{00}(t)=\Phi_t$ и $P_{00}(1)=\Phi_1=1-r(1-f_0)>0$, потому что из $0<A<1$ сразу вытекает $0<f_0<1$. Следовательно, состояние 0 имеет период 1. Но из (1) и (7) следует, что $\mathbf{Z}$ состоит из всех состояний, достижимых от нуля. Тогда для любого $j\in\mathbf{Z}$ существует $t_j>0$ такое, что $P_{0j}(t_j)>0$ и для всех $i,j\in\mathbf{Z}$ $P_{ij}(t_j+1)\geq P_{i0}(1)P_{0j}(t_j)>0$, ввиду того, что из (7) следует $P_{i0}(1)=pf_0^{\max(i-1,0)}+qf_0^i+rf_0^{i+1}>0$. Таким образом мы показали, что $\{\mu_t\}$ является неразложимой непериодической цепью Маркова [16, гл. 15, § 5]. С другой стороны, из теоремы 2 имеем $\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\mu_t=0\}=R_0>0$. Тогда из известных результатов для марковских цепей вытекает [16, гл. 15, § 6], что цепь $\{\mu_t\}$ — эргодическая, т. е. существует единственное стационарное распределение (19), независящее от начального состояния, причем $R_k>0$ для всех $k\in\mathbf{Z}$.

Следовательно, из (19) по теореме о непрерывности имеем $\lim_{t\to\infty}\Phi(t;s)=R(s)$, $|s|\leq 1$. Теперь, если в (3) перейдем к пределу по $t\to\infty$ и воспользуемся теоремой 2, сразу получим уравнение (20).

Следствие 1. *В условиях теоремы* 4 *уравнение* (20) *имеет единственное решение в классе вероятностных производящих функций, которое при* $|s|\leq 1$ *можно представить в следующем виде*:

$$(21)\qquad R(s)=\prod_{k=0}^{\infty}\delta(F_k(s))-\frac{p\prod\limits_{k=0}^{\infty}\delta(F_k)}{1+p\sum\limits_{k=0}^{\infty}(F_{k+1}^{-1}-1)\prod\limits_{j=1}^{k-1}\delta(F_j)}\sum_{k=0}^{\infty}(F_{k+1}^{-1}(s)-1)\prod_{j=0}^{k-1}\delta(F_j(s)).$$

Доказательство. Нетрудно показать по индукции из (20), что для любого целого $t>0$

$$(22)\qquad R(s)=R(F_t(s))\prod_{k=0}^{t-1}\delta(F_k(s))-pR(0)\sum_{k=0}^{t-1}(F_{k+1}^{-1}(s)-1)\prod_{j=0}^{k-1}\delta(F_j(s)).$$

Имея в виду, что при $|s|\leq 1$

$$(23)\qquad 0<f_0\leq F_k\leq|F_k(s)|\leq 1,\ |1-F_k(s)|\leq A^k|1-s|\leq 2A^k,$$

из (8) получаем

$$(24)\qquad |\delta(F_k(s))-1|=|(F_{k+1}^{-1}(s)-1)(p-rF_{k+1}(s))|\leq 4f_0^{-1}A^{k+1}.$$

Таким образом, из (23) и (24) сразу вытекает, что

$$\gamma(s)=\prod_{k=0}^{\infty}\delta(F_k(s)),\quad v(s)=\sum_{k=0}^{\infty}(F_{k+1}^{-1}(s)-1)\prod_{j=0}^{k-1}\delta(F_j(s))$$

равномерно сходятся в $|s|\leq 1$. Следовательно, в (22) мы можем перейти к пределу по $t\to\infty$ и получить, что при $|s|\leq 1$

$$(25)\qquad R(s)=\gamma(s)-pR(0)v(s).$$

Полагая в (25) $s=0$, получаем решение $R(0)=\gamma(0)/(1+pv(0))$, которое, очевидно, совпадает с формулой (15). Следовательно, представление (21) полностью доказано. Заметим, что этот результат можно получить также из (5), переходя к пределу по $t\to\infty$ и пользуясь теоремой 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов, А. М. Зубков. Регулируемые ветвящиеся процессы. *Теория вероятн., примен.*, **19**, 1974, 15—25.
2. А. М. Зубков. Аналогии между процессами Гальтона — Ватсона и φ-ветвящимися процессами. *Теория вероятн. примен.*, **19**, 1974, 319—339.
3. Н. М. Янев. Условия вырождения φ-ветвящихся процессов со случайным φ. *Теория вероятн. примен.*, **20**, 1975, 433—440.
4. Н. М. Янев. Регулируемые ветвящиеся процессы в случайной среде. *Mathem. Balkanica*, **7**, 1977, 137—156.
5. Н. М. Янев, К. В. Митов. Регулируемые ветвящиеся процессы с бесконечными математическими ожиданиями. — В: Математика и математическо образование (Докл. 9 прол. конф. СМБ). София, 1980, 182—186.
6. N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random migration. — In: 12th European Meeting of Statisticians. Abstracts. Varna, September 1979, p. 247.
7. N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random migration. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **33**, 1980, 433—475.
8. Н. М. Янев, К. В. Митов. Периоды жизни критических ветвящихся процессов с случайной миграцией. *Теория вероятн. примен.*, **28**, 1983, № 3.
9. Н. М. Янев, К. В. Митов. Критические ветвящиеся миграционные процессы. — В: Математика и математическо образование (Докл. 10 прол. конф. СМБ). София, 1981, 321 — 328.
10. C. R. Heathcote. A branching process allowing immigration. *J. Royal Statist. Soc.*, **27**, 1965, 138—145.
11. А. М. Зубков. Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. *Теория вероятн. примен.*, **17**, 1972, 179—188.
12. В. А. Ватутин. Критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона с эмиграцией. *Теория вероятн. примен.*, **22**, 1977, 482—497.
13. С. В. Нагаев, Л. В. Хан. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона с миграцией. *Теория вероятн. примен.*, **25**, 1980, 523—534.
14. Л. В. Хан. Предельные теоремы для ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона с миграцией. *Сибир. мат. ж.*, **21**, 1980, 183—194.
15. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва, 1971.
16. В. Филлер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. Москва, 1967.

Единый центр математики и механики
1090 София П Я. 373

Поступила 21. 1. 1981