PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕГУЛИРУЕМЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С УБЫВАЮЩЕЙ ЭМИГРАЦИЕЙ

НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ, КОСТО В. МИТОВ

В докритическом и критическом случае получены предельные теоремы для неоднородных регулируемых ветвящихся процессов, когда вероятность эмиграции стремится к нулю.

Напомним, что впервые φ-регулируемые ветвящиеся процессы рассматривались в работе [1]. В статьях [1—12] изучались разные классы φ-ветвящихся процессов, однородных во времени, для которых уже получено довольно детальных результатов. В настоящей работе исследуется новый класс неоднородных во времени φ-регулируемых ветвящихся процессов с случайным φ, которые естественно также назвать миграционные процессы с убывающей эмиграцией. Дадим точное определение.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ заданы два независимых множества целочисленных случайных величин $\xi=\{\xi_i(t);\ i, t=1, 2, \ldots\}$, $\varphi=\{\varphi_t(n);\ t, n=0, 1, 2, \ldots\}$, причем:

1) $\{\xi_i(t)\}$ — независимые и одинаково распределение с производящей функцией

$$F(s)=\mathsf{E}\, s^{\xi_i(t)}=\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \quad |s|\leq 1, \quad F(1)=1;$$

2) $\varphi_t=\{\varphi_t(0), \varphi_t(1), \varphi_t(2), \ldots\}$ — независимые случайные процессы, для которых

$$\begin{gathered} \mathsf{P}\{\varphi_t(n)=\max(n-1, 0)\}=p_t, \quad \mathsf{P}\{\varphi_t(n)=n\}=q_t, \\ \mathsf{P}\{\varphi_t(n)=n+1\}=r_t, \quad p_t+q_t+r_t=1, \quad n, t=0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда изучаемый нами ветвящийся процесс μ_t определяется следующим конструктивным образом:

$$\mu_{t+1}=\begin{cases} \sum_{i=1}^{\varphi_t(\mu_t)} \xi_i(t+1), & \varphi_t(\mu_t)>0, \\ 0, & \varphi_t(\mu_t)=0, \end{cases} \qquad t=0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\mu_0=0$ п. н.

Заметим, что если $q_t\equiv 1$, то из (2) следует, что μ_t — обычный процесс Гальтона — Ватсона (разумеется, если $\mu_0>0$); при $r_t\equiv 1$ получаем процесс с иммиграцией [13, 15], а при $p_t\equiv 1$ — ветвящийся процесс с эмиграцией, впервые исследован в [6]. Случай $p_t\equiv p$, $q_t\equiv q$, $r_t\equiv r$ изучается в работах [7—12].

ПЛИСКА Български математически студии. Том 7, 1984, с. 83—89.

Нетрудно проверить, что производящие функции $\Phi(t\,;\,s)=\mathsf{E}s^{\mu_t}$, $\Phi(0\,;\,s)=1$, удовлетворяют уравнению

$$\Phi(t\,;\,s)=\delta_{t-1}(s)\Phi(t-1\,;\,F(s))+p_{t-1}\Phi(t-1\,;\,0)(1-F^{-1}(s)), \tag{3}$$

где

$$\delta_k(s)=p_kF^{-1}(s)+q_k+r_kF(s),\quad k\geqq 0. \tag{4}$$

Действительно, из (1) и (2) сразу вытекает, что

$$\Phi(t\,;\,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu_t=n\}s^n=\mathsf{E}\{\mathsf{E}(s^{\mu_t}\mid\mu_{t-1})\}$$

$$=\mathsf{P}\{\mu_{t-1}=0\}(1-r_{t-1}+r_{t-1}F(s))+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu_{t-1}=n\}F^n(s)\delta_{t-1}(s)$$

$$=\Phi(t-1\,;\,0)p_{t-1}(1-F^{-1}(s))+\delta_{t-1}(s)\Phi(t-1\,;\,F(s)).$$

Обозначая, как обычно, t-тую итерацию $F(s)$ через $F_t(s)$, из (3) нетрудно показать (например по индукции), что

$$\Phi(t\,;\,s)=\prod_{k=0}^{t-1}\delta_{t-k-1}(F_k(s)) \tag{5}$$

$$+\sum_{k=0}^{t-1}\Phi(t-k-1\,;\,0)p_{t-k-1}(1-F_{k+1}^{-1}(s))\prod_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(s)).$$

Теорема 1. *Пусть* $A=\Sigma_{k=1}^{\infty}kf_k<1$, $\Sigma_{k=2}^{\infty}f_k k\ln k<\infty$, $p_t\downarrow 0$, $q_t\uparrow q$, $r_t\uparrow r$ $q+r=1$, $r>0$. *Тогда существует стационарное распределение* $\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\mu_t=n\}=R_n$, $\Sigma_{n=1}^{\infty}R_n=1$, *производящая функция которого* $R(s)=\Sigma_{n=1}^{\infty}R_ns^n$ *при* $|s|\leqq 1$ *удовлетворяет уравнению*

$$R(s)=R(F(s))[q+rF(s)] \tag{6}$$

с единственным решением в классе вероятностных производящих функций

$$R(s)=\prod_{k=0}^{\infty}[q+rF_{k+1}(s)]. \tag{7}$$

Доказательство. Исследуем сначала функцию

$$R_t(s)=\prod_{k=0}^{t-1}\delta_{t-k-1}(F_k(s))$$

$$=\prod_{k=0}^{t-1}(p_{t-k-1}+q_{t-k-1}F_{k+1}(s)+r_{t-k-1}F_{k+1}^2(s))/\prod_{k=0}^{t-1}F_{k+1}(s).$$

Так как

$$\beta_t(s)=\prod_{k=0}^{t-1}(p_{t-k-1}+q_{t-k-1}F_{k+1}(s)+r_{t-k-1}F_{k+1}^2(s))$$

$$=\prod_{k=0}^{t-1}\{1-[1-F_{k+1}(s)][q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_{k+1}(s))]\},$$

то последовательность $\beta_t(s)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$\gamma_t(s)=\sum_{k=0}^{t-1}[1-F_{k+1}(s)]\,[q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_{k+1}(s))].$$

Имея в виду, что при $|s|\leq 1$, $|1-F_k(s)|\leq A^k|1-s|$ и $|F_k(s)|\leq 1$, то получаем оценку

$$|\gamma_t(s)|\leq\sum_{k=0}^{t-1}|1-F_{k+1}(s)|\,|q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_{k+1}(s))| \tag{8}$$

$$\leq(q+2r)\sum_{k=0}^{t-1}A^{k+1}|1-s|\leq\frac{2(1+r)A}{1-A}.$$

С другой стороны, при $0\leq s\leq 1$

$$\gamma_{t+1}(s)-\gamma_t(s)=(1-F_{t+1}(s))\,[q_0+r_0(1+F_{t+1}(s))] \tag{9}$$

$$+\sum_{k=0}^{t-1}[1-F_{k+1}(s)]\,[q_{t-k}-q_{t-k-1}+(1+F_{k+1}(s))\,(r_{t-k}-r_{t-k-1})]\geq 0,$$

ввиду того, что $q_t\uparrow q$, $r_t\uparrow r$, $0\leq F_k(s)\leq 1$.

Из (8) и (9) следует, что при $t\to\infty$ последовательность $\gamma_t(s)$, а, следовательно, и $\beta_t(s)$, сходится равномерно по $s\in[0, 1]$. В условиях теоремы то же самое имеет место и для произведения $\Pi_{k=1}^{t}F_k(s)$ (см., напр. [15, с. 54]). Таким образом, мы получили, что существует $\lim R_t(s)=R(s)$ равномерно по $s\in[0, 1]$.

Поскольку при $s\in[0,1]$ для любого $t\geq 1$ и $k\leq t$ $\Pi_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(s))\leq C$, получаем

$$0\leq U_t(s)=\sum_{k=0}^{t-1}\Phi(t-k-1\,;\,0)p_{t-k-1}(F_{k+1}^{-1}(s)-1)\prod_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(s)) \tag{10}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{t-1}p_{t-k-1}(1-F_{k+1}(s))/F_{k+1}(s).$$

С другой стороны, из $0<f_0\leq F(s)\leq F_k(s)$, $1-F_k(s)\leq A^k$, следует, что равномерно по $s\in[0, 1]$

$$0\leq\sum_{k=0}^{\infty}F_{k+1}^{-1}(s)\,(1-F_{k+1}(s))\leq f_0^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}A^k=A/f_0(1-A)<\infty. \tag{11}$$

Теперь, имея в виду, что $\lim_{t\to\infty}p_t=0$, из (10) и (11) по известной теореме о свертках (напр. [14, с. 328]) при $s\in[0, 1]$ вытекает $\lim_{t\to\infty}U_t(s)=0$.

Таким образом, из (5) при $0\leq s\leq 1$ существует $\lim_{t\to\infty}\Phi(t\,;\,s)=\lim_{t\to\infty}R_t(s)=R(s)$, $R(1)=1$. Отсюда по теореме о непрерывности вытекает первое утверждение теоремы.

Следовательно, если в (3) перейдем к пределу по $t\to\infty$, то сразу получим (6).

Допустим, что $R_1(s)$ и $R_2(s)$ — решения уравнения (6) и $R_1(1)=R_2(1)=1$. Тогда

$$|R_1(s)-R_2(s)|=|q+rF(s)|\,|R_1(F(s))-R_2(F(s))|\leq|R_1(F(s))-R_2(F(s))|\leq\cdots$$
$$\leq|R_1(F_t(s))-R_2(F_t(s))|\to|R_1(1)-R_2(1)|=0$$

при $t\to\infty$, так как $F_t(s)\to 1$ равномерно по $|s|\leq 1$.

Теперь из (6) для любого n находим $R(s)=R(F_n(s))\Pi_{k=1}^{n}(q+rF_k(s))$. С другой стороны, при $|s|\leq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-F_k(s)|\leq|1-s|\sum_{k=1}^{\infty}A^k\leq 2A/(1-A)<\infty,$$

и произведение $\Pi_{k=1}^{\infty}(q+rF_k(s))=\Pi_{k=1}^{\infty}[1-r(1-F_k(s))]$ сходится равномерно по $|s|\leq 1$, что доказывает (7).

Теорема 2. *Пусть* $F'(1)=1, F''(1)=2b<\infty$, $p_t\downarrow 0$, $q_t\uparrow q$, $r_t\uparrow r$, $q+r=1$, $\alpha=r/b>0$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\mu_t/bt\leq x\}=\Gamma_{(\alpha)}^{-1}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-y}dy,\quad x\geq 0.$$

Доказательство. Пусть $\psi_t(\lambda)=\mathsf{E}\exp\{-\lambda\mu_t/bt\}$ — преобразование Лапласа допредельного распределения. Тогда из (5) находим

$$\psi_t(\lambda)=\prod_{k=0}^{t-1}\delta_{t-k-1}(F_k(e^{-\lambda/bt})) \tag{12}$$
$$+\sum_{k=0}^{t-1}\Phi(t-k-1\,;\,0)\,p_{t-k-1}(1-F_{k+1}^{-1}(e^{-\lambda/bt}))\prod_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(e^{-\lambda/bt})).$$

Сначала исследуем сумму

$$S_t(\lambda)=\sum_{k=0}^{t-1}\Phi(t-k-1\,;\,0)p_{t-k-1}(F_{k+1}^{-1}(e^{-\lambda/bt})-1)\prod_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(e^{-\lambda/bt})). \tag{13}$$

Из $F'(1)=1$ следует, что $f_0=F(0)>0$, откуда, вместе с условиями $p_t\downarrow 0$, $r_t\uparrow r$, вытекает существование $0\leq N<\infty$ такого, что $F(0)\geq p_jr_j^{-1}$ при всех $j\geq N$. С другой стороны, функция $F_k(s)$ монотонна по $s\in[0, 1]$ и $k\geq 1$, т. е. для всех $j\geq N$, $k\geq 1$, $F_k(s)\geq p_j/r_j$, $0\leq s\leq 1$.

Следовательно, $1-\delta_j(F_k(s))=F_{k+1}^{-1}(s)\,(1-F_{k+1}(s))\,(r_jF_{k+1}(s)-p_j)\geq 0$, т. е. $\delta_j(F_k(s))\leq 1$ для всех $j\geq N$, $k\geq 0$, $s\in[0, 1]$. Теперь заметим, что для всех $j\geq 0$, $0\leq s\leq 1$, $0<\delta_j(s)\leq F^{-1}(s)\leq f_0^{-1}<\infty$. Таким образом, для всех $s\in[0, 1]$ и $0\leq k\leq t-1$ имеет место оценка

$$\prod_{i=0}^{k-1}\delta_{t-i-1}(F_i(s))\leq f_0^{-N}. \tag{14}$$

Ввиду того, что $1-F_k(s)\leq 1-s$, $1-e^{-\lambda/bt}\leq\lambda/bt$ из (13) и (14) для всех $\lambda>0$ находим

$$0\leq S_t(\lambda)\leq f_0^{-(N+1)}\lambda(bt)^{-1}\sum_{k=0}^{t-1}p_j\to 0,\quad t\to\infty. \tag{15}$$

Введем обозначения

$$\alpha_t(\lambda)=\sum_{k=0}^{t-1}\log\{1-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})][q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_k(e^{-\lambda/bt}))]\},$$

$$\beta_t(\lambda)=\sum_{k=0}^{t-1}\log\{1-[1-F_{k+1}(e^{-\lambda/bt})]\}.$$

Тогда имеет место представление

$$(16)\qquad \gamma_t(\lambda)=\prod_{k=0}^{t-1}\delta_{t-k-1}(F_k(e^{-\lambda/bt}))=\gamma_{1,t}(\lambda)/\gamma_{2,t}(\lambda),$$

где $\gamma_{1,t}(\lambda)=\Pi_{k=0}^{t-1}[\,p_{t-k-1}+q_{t-k-1}F_k(e^{-\lambda/bt})+r_{t-k-1}F_k(e^{-\lambda/bt})]=e^{\alpha_t(\lambda)}$,

$$\gamma_{2,t}(\lambda)=\prod_{k=0}^{t-1}F_{k+1}(e^{-\lambda/bt}=e^{\beta_t(\lambda)}.$$

Чтобы исследовать произведение (16), сначала представим $\alpha_t(\lambda)$ в следующем виде:

$$(17)\qquad \alpha_t(\lambda)=\sum_{k=0}^{T}\log\{1-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\,[q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_k(e^{-\lambda/bt}))]\}$$
$$+\sum_{k=T+1}^{t-1}\{\log[1-(1-F_k(e^{-\lambda/bt}))\,(q_{t-k-1}+r_{t-k-1}[1+F_k(e^{-\lambda/bt})])]$$
$$+(q_{t-k-1}+2r_{t-k-1})\,(1-F_k(e^{-\lambda/bt}))\}$$
$$+\sum_{k=T+1}^{t-1}(q_{t-k-1}+2r_{t-k-1})\,\{(1-e^{-\lambda/bt})\,[1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\}$$
$$-\sum_{k=T+1}^{t-1}(q_{t-k-1}+2r_{t-k-1})\,(1-e^{-\lambda/bt})\,[1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,$$

где T выбрано таким образом, что

$$(18)\qquad T<t,\quad T\to\infty,\quad T=o(t).$$

Так как $0\leq s\leq F(s)\leq F_k(s)\leq 1$, $s\in[0,1]$, $1-e^{-\lambda/bt}\leq\lambda/bt$, то для всех $\lambda\leq 0$ имеем

$$(19)\qquad 0\geq\Sigma_1\geq\sum_{k=0}^{T}\log\{1-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\,(q+2r)\}$$
$$\geq\sum_{k=0}^{T}\log\{1-(1-e^{-\lambda/bt})\,(q+2r)\}\geq(T+1)\log(1-\lambda(q+2r)/bt)$$
$$=-(T+1)\lambda(q+2r)\,(1+o(1))/bt\to 0,\ t\to\infty.$$

С другой стороны, известно [13, с. 74], что

$$(20)\qquad 1-F_k(s)=(1-s)\,[1+\varepsilon(k\,;\,s)]\,[1+bk(1-s)]^{-1},$$

где $\varepsilon(k\,;\,s)\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по $0\leq s\leq 1$.

Таким образом, из (17) и (20) для всех $\lambda\geq 0$ получаем

$$(21)\qquad |\Sigma_3|\leq\sum_{k=T+1}^{t-1}(q_{t-k-1}+2r_{t-k-1})\,(1-e^{-\lambda/bt})\,|\,\varepsilon(k\,;\,e^{-\lambda/bt})\,|\,[1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}$$
$$\leq(q+2r)\lambda(bt)^{-1}\sum_{k=T+1}^{t-1}|\,\varepsilon(k;\ e^{-\lambda/bt})\,|\to 0,\ t\to\infty.$$

Заметим, что

$$\log\{1-(1-F_k(s))[q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_k(s))]\}$$
$$=-(1-F_k(s))[q_{t-k-1}+r_{t-k-1}(1+F_k(s))](1+\varkappa_k(s)),$$

где $\varkappa_k(s)\to 0$, когда $k\to\infty$, $|s|\leqq 1$, либо $s\to 1$, $k\geqq 1$, ввиду того, что $F_k(s)\to 1$ при тех же условиях.

Следовательно,

$$\Sigma_2=\sum_{k=T+1}^{t-1}(1-F_k(e^{-\lambda/bt}))\{q_{t-k-1}+2r_{t-k-1}-(q_{t-k-1}+r_{t-k-1}[1+F_k(e^{-\lambda/bt})])$$
$$\times(1+\tilde{\varkappa}_k(t;\lambda))\}=\sum_{k=T+1}^{t-1}(1-F_k(e^{-\lambda/bt}))^2 r_{t-k-1}+\sum_{k=T+1}^{t-1}(1-F_k(e^{-\lambda/bt}))\varkappa_k^*(t;\lambda)$$
$$=S_1+S_2,$$

где для всех $\lambda\geqq 0$ $\tilde{\varkappa}_k(t;\lambda)$ и $\varkappa_k^*(t;\lambda)$ стремятся к нулю, если хотя бы один из индексов k или t стремится к бесконечности.

Отсюда находим

$$0\leqq S_1\leqq r(1-e^{-\lambda/bt})^2(t-T)\leqq r\lambda^2(t-T)(bt)^{-2}\to 0,$$
$$|S_2|\leqq\lambda(bt)^{-1}\sum_{k=T+1}^{t-1}|\varkappa_k^*(t;\lambda)|\to 0,\quad t\to\infty.$$

Таким образом, для любого $\lambda\geqq 0$

(22) $$\Sigma_2\to 0,\quad t\to\infty.$$

Теперь отметим, что

(23) $$I_1\leqq\sum_{k=T+1}^{t-1}[1+bk(1-e^{-\lambda/at})]^{-1}(1-e^{-\lambda/bt})\leqq I_2,$$

где

$$I_1=(1-e^{-\lambda/bt})\int_{T+1}^{t}[1+bx(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}dx$$
$$=b^{-1}\log[1+bt(1-e^{-\lambda/bt})][1+b(T+1)(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}$$
$$\to b^{-1}\log(1+\lambda),\quad t\to\infty,$$
$$I_2=\int_{T}^{t-1}[1+bx(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}(1-e^{-\lambda/bt})dx$$
$$=b^{-1}\log(1+bx[1-e^{-\lambda/bt}])\Big|_T^{t-1}\xrightarrow[t\to\infty]{}b^{-1}\log(1+\lambda).$$

Имея в виду условия теоремы, а также (18) и (23), то по известной теореме о свертках [14, с. 328] получаем

(24) $$\Sigma_4=-\sum_{k=T+1}^{t-1}(q_{t-k-1}+2r_{t-k-1})[1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}(1-e^{-\lambda/bt})$$
$$\to-(q+2r)b^{-1}\log(1+\lambda),\quad t\to\infty.$$

Предельные соотношения (19), (21), (22) и (24) показывают, что при $\lambda \geqq 0$ из (17) вытекает $\lim_{t\to\infty} \alpha_t(\lambda) = -(q+2r)b^{-1} \log(1+\lambda)$.

Вполне аналогично исследуется асимптотическое поведение функции $\beta_t(\lambda)$, $\lambda \geqq 0$. Исходное представление будет

$$\beta_t(\lambda) = \sum_{k=1}^{T} \log\{1-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\}$$
$$+\sum_{k=T+1}^{t} \{\log(1-[1-F_k(e^{-\lambda/bt})]) + [1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\}$$
$$+\sum_{k=T+1}^{t} \{(1-e^{-\lambda/bt})[1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1} - [1-F_k(e^{-\lambda/bt})]\}$$
$$-\sum_{k=T+1}^{t} [1+bk(1-e^{-\lambda/bt})]^{-1}(1-e^{-\lambda/bt}) = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,$$

где T выбрано в соответствии с соотношениями (18).

Тогда, таким же способом, как были получены пределы (19) — (24), доказывается, что $\lim_{t\to\infty} \beta_t(\lambda) = -b^{-1} \log(1+\lambda)$.

Следовательно, мы доказали, что $\lim_{t\to\infty} \gamma_t(\lambda) = (1+\lambda)^{-r/b}$. Теперь из (12), (13), (15) и (16) находим, что для любого $\lambda \geqq 0$ $\lim_{t\to\infty} \psi_t(\lambda) = (1+\lambda)^{-\alpha}$, откуда по теореме о непрерывности вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов, А. М. Зубков. Регулируемые ветвящиеся процессы. *Теория вероятн. примен.*, **19**, 1974, 15—25.
2. А. М. Зубков. Аналогии между процессами Гальтона — Ватсона и φ-ветвящимися процессами. *Теория вероятн. примен.*, **19**, 1974, 319—339.
3. Н. М. Янев. Условия вырождения φ-ветвящихся процессов со случайным φ. *Теория вероятн. примен.*, **20**, 1975, 433—440.
4. Н. М. Янев. Регулируемые ветвящиеся процессы в случайной среде. *Mathem. Balk.*, **7**, 1977, 137—156.
5. Н. М. Янев, К. В. Митов. Регулируемые ветвящиеся процессы с бесконечными математическими ожиданиями. — В: Математика и математическо образование (Докл. 9 прол. конф. СМБ). София, 1980, 182—186.
6. В. А. Ватутин. Критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона с эмиграцией. *Теория вероятн. примен.*, **22**, 1977, 482—497.
7. N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random migration. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **33**, 1980, 473—475.
8. Н. М. Янев, К. В. Митов. Периоды жизни критических ветвящихся процессов со случайной миграцией. *Теория вероятн. примен.*, **28**, 1983, № 3.
9. Н. М. Янев, К. В. Митов. Критические ветвящиеся миграционные процессы. — В: Математика и математическо образование (Докл. 10 прол. конф. СМБ). София, 1981, 321—328.
10. Н. М. Янев, К. В. Митов. Докритические ветвящиеся миграционные процессы. *Плиска*, **7**, 1984, 75—82.
11. С. В. Нагаев, Л. В. Хан. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона с миграцией. *Теория вероятн. примен.*, **25**, 1980, 553—534.
12. Л. В. Хан. Предельные теоремы для ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона с миграцией. *Сибирский матем. ж.*, **21**, 1980, 183—194.
13. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. Москва, 1971.
14. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Москва, 1962.
15. P. Jagers. Branching Processes with Biological Applications. New York, 1975.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 5. 1981