PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ГРУППЫ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G — абелева p-группа, K — поле, характеристика которого отлична от p, KG — групповая алгебра группы G над полем K и $V(KG)$ — группа нормированных единиц алгебры KG. В настоящей работе дается описание силовской q-подгруппы $S_q(KG)$ группы $V(KG)$, где q — простое число, отличное от p. Кроме того, дается новая форма полной системы инвариантов групповой алгебры KG, когда группа G конечна. Полная система инвариантов алгебры KG конечной группы G дана Берманом [1953], а для рациональной групповой алгебры QG конечной абелевой группы G — Перлисом и Уокером [1950]. Доказывается, что если G — любая абелева группа, и K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G, то группа $V(KG)$ периодическая тогда и только тогда, когда G и мультипликативная группа K^* поля K периодическая. Кроме того, изучается $V(KG)$, когда G — прямое произведение циклических p-групп, а K — расширение поля рациональных чисел, порожденное такими алгебраическими числами, что их степени ограничены в совокупности.

Пусть G — абелева p-группа, и K — поле, характеристика которого отлична от p. Берман и Росса [4] дают описание силовской p-подгруппы $S(KG)$ группы $V(KG)$ нормированных единиц групповой алгебры KG, когда группа G счетна. В [5] исследуется $S(KG)$, когда фактор-группа G/G^1 группы G по ее подгруппы G^1 элементов бесконечной высоты разлагается в прямое произведение циклических групп. Начев [7] вычисляет инварианты Ульма—Кампланского силовской q-подгруппы $S_q(KG)$ группы $V(KG)$ для любого простого числа q, причем K — коммутативное кольцо (с характеристикой, отличнсй от p), содержащее первообразные корни степени p^i из единицы ($i=1, 2, \dots$). В настоящей статье дается описание силовской q-подгруппы $S_q(KG)$ для любого простого числа q, отличного от p, когда K — поле, характеристика которого не равна p. Кроме того, изучается группа $V(KG)$, когда G — прямое произведение циклических групп, и K — конечное расширение поля рациональных чисел. Метод, который используется для описания группы $S_q(KG)$, отличен от используемого метода в [7]. Полная система инвариантов групповой алгебры KG конечной абелевой p-группы G дана Перлисом и Уокером [8], когда K — поле рациональных чисел, а для любого поля K (с характеристикой, отличной от p) — Берманом в [1] (в [2]) в терминах K-отделов (K-классов) группы G. В настоящей работе дается новый вид этой полной системы инвариантов. Часть результатов статьи анонсированы в [5].

Пусть ε_n — первообразный корень степени p^n из единицы, $n \in N_0$, где N_0 — множество неотрицательных целых чисел. Поле K называется полем первого рода относительно p, если степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots): K)=\infty$, а в противном случае — полем второго рода относительно p [2]. Если K — поле первого рода относительно p, то существует натуральное число f (см. [2]), которое называется константой поля K относительно p, такое, что $K(\varepsilon_q) = K(\varepsilon_{q+1}) = \cdots K(\varepsilon_f) \subset K(\varepsilon_{f+1}) \subset \cdots$, где $q=1$ при $p \neq 2$ и $q=2$ при $p=2$. Если K — поле второго рода относительно p, то (см. [2]) $K(\varepsilon_i)=K(\varepsilon_q)$ для каждого натурального i, $i \geqq q$, где $q=1$ при $p \neq 2$ и $q=2$ при $p=2$. Если K — поле, характеристика которого отлична от простого числа p, то множество $s_p(K)=\{i \in N_0 \mid \{K(\varepsilon_i) \neq K'(\varepsilon_{i+1})\}$ называется спектром поля K относительно p (см. [5]). Обозначим $G^{p^i}=\{g^{p^i} \mid g \in G\}$, где $i \in N_0$. Эти понятия и обозначения будут использованы в следующих утверждениях.

Лемма 1. *Если G — конечная абелева p-группа, и K — поле первого рода относительно p, то для каждого $i \in s_p(K)$ число минимальных идеалов в разложении KG в прямую сумму минимальных идеалов, которые изоморфны полю $K(\varepsilon_i)$, равняется*

$$\delta_i = \begin{cases} \dfrac{|G[p^i]| - |G[p^{i'}]|}{(K(\varepsilon_i):K)} & \text{при} \quad i \neq i_0, \\ |G[p^{i_0}]| & \text{при} \quad i = i_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $G[p^i]=\{g / g^{p^i}=1\}$, i_0 — минимальное число спектра $s_p(K)$, и i' — максимальное число спектра $s_p(K)$, которое меньше i.

Доказательство. Так как KG — конечномерная полупростая алгебра, то каждый ее идеал порождается единственным идемпотентом. Каждому такому минимальному идемпотенту e соответствует однозначно определенное множество M_e K-сопряженных характеров группы G. Если минимальный идемпотент e определяет идеал, изоморфный полю $K(\varepsilon_i)$, $i \in s_p(K)$, то множество M_e обладает следующими двумя свойствами:

а) $M_e \subseteq \mathrm{Hom}(G, E_i) \setminus \mathrm{Hom}(G, E_{i'})$ при $i \neq i_0$ и $M_e \subseteq \mathrm{Hom}(G, E^{i_0})$ при $i=i_0$;

б) мощность множества M_e равняется $|M_e|=(K(\varepsilon_i):K))$, где E_i и $E_{i'}$ — силовские p-подгруппы мультипликативных групп соответственно полям $K(\varepsilon_i)$ и $K(\varepsilon_{i'})$. Свойство а) следует из того, что идеал $KGe \cong K(\varepsilon_i)$, а свойство б) из того, что группа Галуа поля $K(\varepsilon_i)$ над K имеет порядок $(K(\varepsilon_i):K)$. Кроме того, множества M_e образуют раздельное объединение по всем минимальным идемпотентам e, для которых $KGe \cong K(\varepsilon_i)$, причем это объединение дает $\mathrm{Hom}(G, E_i) \setminus \mathrm{Hom}(G, E_{i'})$ при $i \neq i_0$ и $\mathrm{Hom}(G, E_{i_0})$ при $i=i_0$. Из этого следует, что

$$\delta_i = \begin{cases} \dfrac{|\mathrm{Hom}(G, E_i)| - |\mathrm{Hom}(G, E_{i'})|}{(K(\varepsilon_i):K)} & \text{при} \quad i \neq i_0, \\ |\mathrm{Hom}(G, E_{i_0})| & \text{при} \quad i = i_0. \end{cases} \tag{2}$$

Из свойства функтора Hom имеем $\mathrm{Hom}(G, E_i) \cong \mathrm{Hom}(G/G^{p^i}, E_i)$, а из [9, теорема 13.2.1, с. 218], что $\mathrm{Hom}(G/G^{p^i}) \cong G/G^{p^i}$. Тогда $|\mathrm{Hom}(G, E_i)| = |G/G^{p^i}| = |G|/|G^{p^i}| = |G[p^i]|$ и аналогично $|\mathrm{Hom}(G, E_{i'})| = |G[p^{i'}]|$. Подставляя эти равенства в (2), получается (1).

Теорема 2. Пусть G — конечная абелева группа, K — поле, характеристика которого не делит порядка группы G, M — множество этих простых чисел p, для которых p-примарные компоненты G_p группы G неединичны, и H — любая группа. Алгебры KG и KH изоморфны как K-алгебры тогда и только тогда, когда $|G|=|H|$ и $|G[p^i]|=|H[p^i]|$ для каждого $p \in M$ и для каждого $i \in s_p(K)$, т. е. полная система инвариантов алгебры KG является множеством $\{|G|, |G[p^i]| \mid p \in M, i \in s_p(K)\}$.

Доказательство. Очевидно H — конечная абелева группа, и KH — полупростая алгебра. Так как, ввиду теоремы Перлиса и Уокера [8], $KG \cong KH$ тогда и только тогда, когда $KG_p \cong KH_p$ для каждого $p \in M$ и $G_p[p^i] = G[p^i]$, то достаточно доказать теорему, когда G и H — абелевы p-группы, и характеристика поля K отлична от p. Пусть K — поле первого рода относительно p. Условие изоморфизма $KG \cong KH$ эквивалентно равенству $\delta_i = \bar{\delta}_i$ для каждого $i \in s_p(K)$, где δ_i — числа алгебры KG, определенные в лемме 1, а $\bar{\delta}_i$ — соответствующие числа алгебры KH. Тогда, ввиду леммы 1, при $i = i_0$ вытекает $|G[p^{i_0}]| = |H[p^{i_0}]|$. Отсюда индуктивно, используя лемму 1, следует, что система равенств $\delta_i = \bar{\delta}_i$ эквивалентна системе равенств $|G[p^i]| = |H[p^i]|$ для каждого $i \in s_p(K)$, откуда получается заключение теоремы. Доказательство проводится аналогично, когда K — поле второго рода относительно p.

Отметим, что полная система инвариантов групповой алгебры KG конечной абелевой p-группы G дана Берманом в [1] (в [2]) в терминах K-отделов (K-классов) группы G, а для рациональной групповой алгебры QG конечной абелевой группы G — Перлисом и Уокером в [8]. Теорема 2 дает только новую форму системы инвариантов алгебры KG.

Лемма 3. *Если G — бесконечная абелева p-группа с показателем не меньше p^t, и K — поле первого рода относительно p, то для любого натурального n существует конечная подгруппа F группы G, такая, что число минимальных идеалов в разложение KF в прямую сумму минимальных идеалов, содержащих поля, изоморфны полю $K(\varepsilon_t)$, больше чем n.*

Доказательство. 1) Пусть G имеет конечный показатель p^α, $\alpha \geq t$. Пусть α^* — минимальное число спектра $s_p(K)$, которое больше или равно α, т. е. $\alpha^* \geqq \alpha$ и $l = \max(n, \alpha)$. Так как $|G[p]| \geqq \aleph_0$, где $\aleph_0$ — первое бесконечное кардинальное число, то существует подгруппа F группы G, такая, что $F \cong (p^\alpha) \times \Pi_l(p)$, где через (p^i) обозначена циклическая группа порядка p^i, через $\Pi_l(p)$ — прямое произведение l циклических групп порядка p и через $\times$ — знак прямого произведения групп. Покажем, что $\delta_{\alpha^*} > n$ (δ_i определено через (1)). Именно, если $\alpha^* = i_0$, то это возможно только при $i_0 \geqq 1$ и из формулы (1) следует $\delta_{\alpha^*} = |F[p_{i_0}]| \geqq |F[p]| = p^{l+1} \geqq p^{n+1} > n$.

Пусть теперь $\alpha^* > i_0$. Пусть α' — максимальное число спектра $s_p(K)$, которое меньше α, т. е. $\alpha' < \alpha$. Тогда $\alpha' \leqq \alpha^* - 1$. Из выбора группы F видно, что $|F| = p^{\alpha+l}$, $|F[p^{\alpha^*}]| = p^{\alpha+l}$ и $|F[p^{\alpha'}]| \leqq p^{\alpha+l-1}$. Так как $K(\varepsilon_{\alpha^*}) = K(\varepsilon_\alpha)$ и $(K(\varepsilon_\alpha): K) \leqq p^{\alpha-1}(p-1)$, то формула (1) дает

$$\delta_{\alpha^*} = \frac{|F[p^{\alpha^*}]| - |F[p^{\alpha'}]|}{(K(\varepsilon_{\alpha^*}): K)} \geqq \frac{p^{\alpha+l} - p^{\alpha+l-1}}{p^{\alpha-1}(p-1)} = p^l \geqq p^n > n.$$

2) Пусть G имеет бесконечный показатель. Выбираем циклическую подгруппу F группы G порядка p^{s+n+1}, где $s = \max(t, f+1)$ (f — константа поля K относительно p). Тогда $s \in s_p(K)$ и $s \geqq i_0$. Используя (1), сразу видно, что число α_s минимальных идеалов в разложение KF в прямую сумму минимальных идеалов, содержащих поля, изоморфные полю $K(\varepsilon_s) \supseteqq K(\varepsilon_t)$, будет $\alpha_s = \delta_s + \delta_{s+1} + \cdots + \delta_{s+n+1}$. Однако при $s \leqq i \leqq s+n+1$, из формулы (1) получается $\delta_i \geqq (1/\varphi(p^i))(p^i - p^{i-1}) = 1$, где φ — функция Эйлера. Следовательно, $\alpha_s \geqq n+1 > n$, чем лемма доказана.

Лемма 4. *Если G — абелева p-группа и q — простое число, отличное от p, то для мощности силовской q-подгруппы $S_q(KG)$ имеет место неравенство $|S_q(KG)| \leqq \max(|G|, \aleph_0)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — множество всех конечных подгрупп группы G. Тогда $KG=\bigcup_{F\in\mathscr{A}}KF$ и $S_q(KG)=\bigcup_{F\in\mathscr{A}}S_q(KF)$. Групповая алгебра KF разлагается в прямую сумму минимальных идеалов $I_i=KFe_i$, порожденных минимальными идемпотентами e_i алгебры KF, $i=0, 1, \ldots, s$, т. е.

$$KF=I_0\oplus I_1\oplus\cdots\oplus I_s,\quad I_i=KFe_i\quad (i=0, 1, \ldots, s), \tag{3}$$

где идемпотент e_0 соответствует единичному характеру группы F. Каждый идеал I_i изоморфен некоторому полю $K(\varepsilon_{i_j})$ (ε_{i_j} — первообразный корень степени p^{i_j} из единицы). Тогда $S_q(KF)$ изоморфна прямому произведению силовских q-подгрупп $(I_i)_q$ мультипликативных групп полей $I_i, i=1, \ldots, s$, т. е.

$$S_q(KF)=(I_1)_q\times\cdots\times(I_s)_q. \tag{4}$$

Так как $(I_i)_q$ — подгруппа квазициклической группы типа q^∞, то из (4) следует, что $|S_q(KF)|\leqq\aleph_0$. Следовательно, $|S_q(KG)|\leqq|\mathscr{A}|\aleph_0=|G|\aleph_0=\max(|G|, \aleph_0)$.

Определение 5. *Назовем поле K p-тривиальным относительно простого числа q, $q\neq p$, если силовская q-подгруппа $K(\varepsilon_i)_q$ мультипликативной группы поля $K(\varepsilon_i)$ единична для каждого неотрицательного числа i. В противном случае назовем поле K p-нетривиальным относительно q.*

Лемма 6. *Пусть K — поле первого рода относительно простого числа p, q — простое число, отличное от p, K — p-нетривиально относительно q и t — наименьшее натуральное число, для которого $K(\varepsilon_t)_q\neq1$. Тогда $K(\varepsilon_i)_q=K(\varepsilon_t)_q$ для любого натурального $i\geqq t$.*

Доказательство. Обозначим через ξ_i первообразный корень степени q^j из единицы, где $j\in N_0$, и через f — константу поля K относительно p.

Пусть $q=2$. Тогда $t=1$, $p\geqq3$ и

$$K(\varepsilon_1)=\cdots=K(\varepsilon_f)\subset K(\varepsilon_{f+1})\subset\cdots \tag{5}$$

Допустим, что существует $\xi_r\in K(\varepsilon_i)\setminus K(\varepsilon_{i-1})$, $i\geqq2$, $r\in N$, где N — множество натуральных чисел. Так как $\xi_1\in K(\varepsilon_j)$, то $r\geqq2$. Кроме того, из (5) следует, что $i\geqq f+1$. Из включений $K(\varepsilon_f)\subset K(\varepsilon_f, \xi_r)\subseteqq K(\varepsilon_i)$, $(K(\varepsilon_f, \xi_r): K(\xi_f))=2^\lambda$, $\lambda\in N$, и $(K(\varepsilon_i): K(\varepsilon_f))=p^{i-f}$, $i-f\in N$ (см. следствие леммы 2.5 [2]), следует $2^\lambda/p^{i-f}$, что противоречит условию $p\neq2$.

Пусть $q\neq2$. Сначала докажем, что для любого $i\in N$ выполняется

$$K(\varepsilon_{s+i})_q=K(\varepsilon_s)_q, \tag{6}$$

где $s=\max(t, f)$ при $p\neq2$ и $s=t$ при $p=2$. Действительно, допустим, что (6) несправедливо, т. е. $K(\varepsilon_{s+i-1})_q=K(\varepsilon_s)_q$, $i\in N$, но $K(\varepsilon_{s+i})_q\neq K(\varepsilon_{s+i-1})_q$. Следовательно, существует $\xi_r\in K(\varepsilon_{s+i})\setminus K(\varepsilon_{s+i-1})$, $r\in N$. Имеет место $r\geqq2$, так как $\xi_1\in K(\varepsilon_t)\subseteqq K(\varepsilon_s)\subseteqq K(\varepsilon_{s+i-1})$. Рассмотрим два подслучая, а именно, когда $K(\varepsilon_{s+i-1})$ — поле первого и поле второго рода относительно q.

1) Пусть $K(\varepsilon_{s+i-1})$ — поле первого рода относительно q и g — константа поля $K(\varepsilon_{s+i-1})$ относительно q. Так как $\xi_1\in K(\varepsilon_{s+i-1})$, то из определения поля первого рода получится $K(\varepsilon_{s+i-1})=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_1)=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_g)\subset K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_{g+1})$. Поскольку $\xi_r\notin K(\varepsilon_{s+i-1})=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_g)$, то $r\geqq g+1$, т. е.

$$K(\varepsilon_{s+i-1})=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_g)\subset K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_{g+1})\subseteqq K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_r)\subseteqq K(\varepsilon_{s+i}). \tag{7}$$

Ввиду того, что g — константа поля $K(\varepsilon_{s+i-1})$ относительно q, то из [2] следует, что $(K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_{g+1})\colon K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_g)=q$. Если $p=2$, то $s=t$, и так как $(K(\varepsilon_{t+i})\colon K(\varepsilon_{t+i-1}))$ равняется двум или одному, то (7) приводит нас до $q/2$ или $q/1$ (/ — знак делит), что является противоречием. Если $p\neq 2$, то $s+i-1\geqq f$ и из [2] следует $(K(\varepsilon_{s+i})\colon K(\varepsilon_{s+i-1}))=p$. Тогда из (7) заключаем, что q/p, что является снова противоречием.

2) Пусть $K(\varepsilon_{s+i-1})$ — поле второго рода относительно q. Так как $q\neq 2$, то $K(\varepsilon_{s+i-1})=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_1)=K(\varepsilon_{s+i-1}, \xi_j)$ для каждого $j\in N$, т. е. $\xi_r\in K(\varepsilon_{s+i-1})$, что и есть противоречие. Этим формула (6) установлена.

Если $p=2$ или $p\neq 2$, но $t>f$, то $s=t$ и формула (6) дает заключение леммы. Пусть $p\neq 2$ и $t\leqq f$. Следовательно, $t=1$. Тогда $s=\max(t, f)=f$ и из формулы (6) получится $K(\varepsilon_{f+i})_q=K(\varepsilon_f)_q=K(\varepsilon_1)_q=K(\varepsilon_t)_q$ для каждого $i\in N$. Так как $K(\varepsilon_i)=K(\varepsilon_1)$ для каждого i, для которого $1\leqq i\leqq f$, то этим лемма доказана.

Лемма 7. *Если K — поле второго рода относительно $p=2$, q — простое число, отличное от 2, и силовская q-подгруппа K_q мультипликативной группы поля K неединична, то $K(\varepsilon_i)_q=K_q$ для каждого натурального i.*

Доказательство. Так как $K(\varepsilon_i)=K(\varepsilon_2)$ для каждого натурального $i\geqq 2$, то $K(\varepsilon_i)_q=K(\varepsilon_2)_q$. Допустим, что $K(\varepsilon_2)_q\neq K_q$. Тогда существует первообразный корень ξ_r степени q^r из единицы, r — натуральное число, такой, что $\xi_r\in K(\varepsilon_2)\setminus K$. Так как $\xi_1\in K$, то $r\geqq 2$. Кроме того, $K\subset K(\xi_r)\subseteqq K(\varepsilon_2)$ и $(K(\varepsilon_2)\colon K)=2$. Следовательно, $K(\xi_r)=K(\varepsilon_2)$. Если допустим, что K — поле второго рода относительно q, то $K=K(\xi_1)=K(\xi_r)$, т. е. $\xi_r\in K$, что является противоречием. Следовательно, K — поле первого рода относительно q. Если g — константа поля K относительно q, то $K=K(\xi_1)=K(\xi_g)$ и, следовательно, $r>g$ (так как $\xi_r\notin K$). Тогда, согласно [2], имеет место $(K(\xi_r)\colon K(\xi_g))=q^{r-g}$, $r-g\geqq 1$, т. е. $(K(\xi_r)\colon K)=q^{r-g}$. Так как $K(\xi_r)=K(\varepsilon_2)$, то $(K(\xi_r)\colon K)=2$ и, следовательно, $2=q^{r-g}$, что является противоречием. Лемма доказана.

Если поле K — p-нетривиально относительно q, K имеет характеристику, отличную от p, и t — минимальное натуральное число, для которого $K(\varepsilon_t)_q\neq 1$ (p и q — различные простые числа), то из лемм 6 и 7 и из определения поля второго рода сразу получается следующее утверждение, которое можно назвать предложением о стабилизации силовских q-подгрупп (мультипликативных групп) полей $K(\varepsilon_i)$.

Предложение 8. *Пусть p и q — различные простые числа, K — поле, характеристика которого отлична от p, K не является p-тривиальным относительно q и t — минимальное натуральное число, для которого $K(\varepsilon_t)_q\neq 1$. Тогда $K(\varepsilon_i)_q=K(\varepsilon_t)_q$ для каждого натурального $i\geqq t$.*

Теорема 9. *Пусть G — бесконечная абелева p-группа, q — простое число, отличное от p, и K — поле, характеристика которого не равна p. Если K — p-тривиально относительно q, то силовская q-подгруппа $S_q(KG)$ группы $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG единична. Пусть K — p-нетривиально относительно q и t — наименьшее натуральное число, для которого силовская q-подгруппа $K(\varepsilon_t)_q$ мультипликативной группы поля $K(\varepsilon_t)$ неединична. Если показатель группы G меньше p^t, то $S_q(KG)=1$. Если показатель группы G не меньше p^t, то $S_q(KG)$ изоморфна (ограниченному) прямому произведению $|G|$ групп $K(\varepsilon_t)_q$, т. е.*

$$S_q(KG)\cong\Pi_{|G|}K(\varepsilon_t)_q. \tag{8}$$

Более того, если K — поле второго рода относительно $p=2$, и а) если $K_q=1$, а показатель группы G не меньше четырех, то

$$S_q(KG) \cong \Pi_{|G|} K(\varepsilon_2)_q, \tag{9}$$

и б) если $K_q \neq 1$ или показатель группы G равняется двум, то

$$S_q(KG) \cong \Pi_{|G|} K_q. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть x принадлежит нижнему слою $S_q(KG)[q]$ группы $S_q(KG)$. Тогда $x \in S_q(KF)$, где F — конечная подгруппа группы G и для KF справедливы формулы (3) и (4). Кроме того, в (4) имеет место $I_i \cong K(\varepsilon_{i_j})$, $i=1,\ldots,s$. Ввиду (3), элемент x можно записать в виде $x=e_0+xe_1+\cdots+xe_s$. Если K — p-тривиально относительно q, то $(I_i)_q \cong K(\varepsilon_{i_j})_q=1$, т. е. каждое $x \in S_q(KG)$ равняется единице и $S_q(KG)=1$. Если показатель группы G меньше p^t, то в (4) имеет место $(I_i)_q=1$ и $S_q(KF)=1$, т. е. $S_q(KG)=1$.

Пусть показатель группы G не меньше p^t. Рассмотрим случай, когда K — поле первого рода относительно p. Ввиду леммы 6, в (4) имеет место $(I_i)_q \cong \langle 1 \rangle$, если $i_j<t$, и $(I_i)_q \cong K(\varepsilon_t)_q$, если $i_j \geq t$, $i=1,\ldots,s$. Если $K(\varepsilon_t)$ — квазициклическая группа типа q^∞, то, очевидно, $S_q(KG)$ — прямое произведение групп $K(\varepsilon_t)_q$. Пусть $K(\varepsilon_t)_q=(q^n)$, $n \in N$. Очевидно для q-высоты $h_{I_i}(xe_i)$ элемента xe_i в поле I_i, $i=1,\ldots,s$ (см. [6]) выполняется $h_{I_i}(xe_i)=\infty$, если $xe_i=e_i$, и $h_{I_i}(xe_i)=n-1$, если $xe_i \neq e_i$. Следовательно, если $x \neq 1$, то его высота $h_{\bar{S}}(x)$ в группе $\bar{S}=S_q(KF)$ равняется $n-1$. Пусть $x=y^{q^m}$, $y \in S_q(KG)=S$. Можно считать, что $x \in KF$ и $y \in KF$ для некоторой конечной подгруппы F группы G. Тогда $m \leq n-1$, т. е. $h_S(x) \leq n-1$. Таким образом, $S_q(KG)$ изоморфна прямому произведению групп $K(\varepsilon_t)_q$. Докажем формулу (8). Рассмотрим следующие случаи: 1) $|G|=\aleph_0$ и 2) $|G|>\aleph_0$.

1) Пусть $|G|=\aleph_0$. Допустим, что $S_q(KG) \cong \Pi_n K(\varepsilon_t)_q$ для некоторого натурального n. По лемме 3 существует конечная подгруппа F группы G, такая, что число минимальных идеалов I_i в разложении KF в прямую сумму минимальных идеалов, содержащих поля J_i, изоморфные $K(\varepsilon_{i_j})$, $i_j \geq t$, есть больше n. Тогда для силовских q-подгрупп мультипликативных групп полей I_i, $K(\varepsilon_{i_j})$ и $K(\varepsilon_t)$ выполнено $(I_i)_q \supseteq (J_i)_q \cong K(\varepsilon_{i_j})_q = K(\varepsilon_t)_q$, где равенство следует из леммы 6. Таким образом получается противоречие $S_q(KG) \subset S_q(KF)$. Следовательно, мощность множества прямых множителей в разложение $S_q(KG)$ в прямое произведение групп, изоморфна группе $K(\varepsilon_t)_q$, не меньше $\aleph_0$. Тогда, в силу леммы 4, имеет место формула (8).

2) Пусть $|C|>\aleph_0$. Тогда $|G[p]|=|G|>\aleph_0$. Пусть $G[p^t]=\langle g \rangle \times \Pi_{i \in I}\langle b_i \rangle$, где порядок циклической группы $\langle g \rangle$ равняется p^t. Тогда $G[p]=\langle g^{p^{t-1}} \rangle \times \Pi_{i \in I}\langle a_i \rangle$ и существует прямое произведение $\langle g \rangle \times \Pi_{i \in I}\langle a_i \rangle$. Образуем элементы $g_i=ga_i$, $i \in I$. Пусть $K\langle g_i \rangle = \cdots \oplus J_s$ — разложение $K\langle g_i \rangle$ в прямую сумму минимальных идеалов, $J_i=K\langle g_i \rangle e_i$, $i=0, 1, \ldots, s$ и идемпотент e_i соответствует характеру χ_i группы $\langle g_i \rangle$ с ядром 1, т. е. $I_i \cong K(\varepsilon_t)$. Пусть η_i — неединичный элемент нижнего слоя $(I_i)_q[q]$ группы $(I_i)_q$. Образуем элементы $x_i=\eta_i e_i+1$, $i \in I$. Очевидно, $x_i \in S_q(KG)[q]$ и $x \neq 1$. Если $j \in I$ и $j \neq i$, то $x_i \neq x_j$. Допустим, что $x_i=x_j$. Тогда $x_i=x_j \in K\langle g_i \rangle \cap K\langle g_j \rangle = K(\langle g_i \rangle \cap K\langle g_j \rangle) = K\langle g^p \rangle$. Однако, $S_q(K\langle g^p \rangle=1$, так как алгебра $K\langle g^p \rangle$ изоморфна прямой сумме полей $K(\varepsilon_r)$, где $0 \leq r \leq t-1$ и силовская q-подгруппа $K(\varepsilon_r)_q=1$, т. е. полу-

чается противоречие $1 \neq x_i \in S_q(K\langle g^p \rangle)=1$. Таким образом $|S_q(KG)[q]| \geqq |I| = |G|$. Тогда из леммы 4 вытекает $|S_q(KG)[q]| = |G|$. Следовательно, имеет место формула (8).

Пусть K — поле второго рода относительно p. Нетрудно видеть, что лемма 1 и лемма 3 обладают аналогами, если K — поле второго рода относительно p. Используя эти леммы и лемму 7 тем же самым образом, как для поля первого рода, доказываются формулы (9) и (10).

Замечание. Формулы (9) и (10) дают более детальное описание группы $S_q(KG)$, когда K — поле второго рода относительно $p=2$. Если K — поле первого рода относительно p и $q=2$, то из леммы 6 и из формулы (8) сразу получается $S_2(KG) \cong \Pi_{|G|} K(\varepsilon_1)_2$.

Теорема 10. *Пусть G — конечная абелева p-группа, q — простое число, неравное p, и K — поле, характеристика которого отлична от p. Пусть K — поле первого рода относительно p. Если K — p-тривиально относительно q, то $S_q(KG)=1$. Пусть K не является p-тривиальным относительно q и t — наименьшее натуральное число, для которого $K(\varepsilon_t)_q \neq 1$. Если показатель p^α группы G меньше p^t, то $S_q(KG)=1$. Пусть, $\alpha \geqq t$. Если α^* — наименьшее число спектра $s_p(K)$, которое не меньше α то*

$$S_q(KG) \cong \Pi_{\delta-\lambda} K(\varepsilon_t)_q, \tag{11}$$

где $\lambda=1$, когда 1) $t=1$ и $p=2$ или 2) $t=1$, $K=K(\varepsilon_1)$, $p \neq 2$; $\lambda=0$ в остальных случаях,

$$\delta = \sum_{i \in [t, \alpha^*] \cap s_p(K)} \delta_i \tag{12}$$

и числа δ_i определены формулой (1).

Пусть K — поле второго рода относительно p. Тогда 1) *если $p \neq 2$ или* 2) *$p=2$ и $K=K(\varepsilon_2)$, то*

$$S_q(KG) \cong \Pi_s K(\varepsilon_1)_q, \quad s=(|G|-1)(K(\varepsilon_1):K); \tag{13}$$

3) *если $p=2$, $K \neq K(\varepsilon_2)$ и* a) *$K_q \neq 1$, то имеет место формула* (13) *где $s+1=(|G|+|G[2]|)/2$, а* b) *если $K_q=1$, то*

$$S_q(KG) \cong \Pi_s K(\varepsilon_2)_q, \quad s=(|G|-|G[2]|)/2. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть K — поле первого рода относительно p. Тогда, аналогично (3), имеет место

$$KG = I_0 \oplus I_1 \oplus \cdots \oplus I_s, \quad I_i = KGe_i, \quad i=0, 1, \ldots, s, \quad I_0 \cong K. \tag{3'}$$

(Следовательно, $S_q(KG)$ образуется из прямой суммы тех полей $I_j \cong K(\varepsilon_{r_j})$, для которых $t \leqq r_j \leqq \alpha^*$, т. е. из прямой суммы полей вида $K(\varepsilon_i)$, где $i \in [t, \alpha^*] \cap s_p(K)$. В силу леммы 1, для фиксированного i множества $[t, \alpha^*] \cap s_p(K)$ число идеалов I_j в разложении (3'), которые изоморфны полю $K(\varepsilon_i)$, равняется δ_i. Так как, в силу леммы 6, $K(\varepsilon_i)_q = K(\varepsilon_t)_q$, для каждого $i \geqq t$ и число всех идеалов I_m в разложении (3'), каждый из которых содержит поле, изоморфное $K(\varepsilon_t)$, есть указанное число $\delta-\lambda$, то имеет место (11).

Пусть K — поле второго рода относительно p. Исходя из разложения (3'), получается формула (13). Пусть 3) $p=2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$. Для каждого идеала I_j в (3') имеет место $I_j = K(\chi_j)$, где $K(\chi_j)$ — поле, полученное в результате присоединения к полю K всех значений характера χ_j группы G

Если $G=\langle a_1\rangle\times\cdots\times\langle a_t\rangle$, то нетрудно видеть, что χ_j — K-характер группы G, т. е. его значения в K, тогда и только тогда, когда $\chi_j(a_i)=\pm 1$, $i=0, 1, \ldots, s$. Следовательно, G обладает ровно $2^t=|G[2]|$ K-характеров, т. е. число прямых слагаемых I_j в (3′), которые изоморфны полю K, равняется $|G[2]$. Следовательно, в (3′) остаются $(|G|-|G[2]|/2$ идеалов I_j, которые изоморфны полю $K(\varepsilon_2)$. Отсюда и из леммы 7 следует утверждение а) и формула (15).

Предложение 11. *Пусть G — конечная абелева p-группа с показателем p^α. Если K — поле первого рода относительно p, то $S^*(KG) \cong\Pi_{\delta_{i_1}}\langle\varepsilon_{i_1}\rangle\times\Pi_{\delta_{i_2}}\langle\varepsilon_{i_2}\rangle\times\cdots\times\Pi_{\delta_{i_k}}\langle\varepsilon_{i_k}\rangle$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}=[0, \alpha^*]\cap s_p(K)$, $i_1<\cdots<i_k$, α^* — минимальное число спектра $s_p(K)$, которое не меньше α, а числа δ_j определены формулой* (1). *Пусть K — поле второго рода относительно p. Тогда* 1) *если $p\neq 2$ или* 2) *$p=2$ и $K=K(\varepsilon_2)$, то $S(KG)\cong\Pi_s Z(p^\infty)$, где $Z(p^\infty)$ — квазициклическая группа типа p^∞ и $s=(|G|-1)/(K(\varepsilon_1): K)$;* 3) *если $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $S(KG)\cong\Pi_\lambda(2)\times\Pi_\mu Z(2^\infty)$, где $\lambda=|G[2]|-1$ и $\mu=(|G|-|G[2]|)/2$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 10, используя разложение (3′).

Следствие 11 а. *Пусть G — абелева p-группа и K — поле второго рода относительно p. Тогда* 1) *если $p\neq 2$ или $p=2$, но $K=K(\varepsilon_2)$, то $S(KG)$ — полная группа, т. е. $G\subseteq S(KG)\subseteq d(KG)$, где $d(KG)$ — максимальная полная подгруппа группы $V(KG)$;* 2) *если $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $S^2(KG)$ — полная группа, т. е. $G^2\subseteq S^2(KG)\subseteq d(KG)$.*

Теорема 12. *Пусть G — абелева группа и K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G. Группа $V(KG)$ нормированных единиц групповой алгебры KG периодическа тогда и только тогда, когда G — периодическая группа и K — алгебраическое расширение конечного поля.*

Доказательство. Пусть $V(KG)$ — периодическая группа. Так как $V(KG)\supseteq G$, то G — периодическая группа. Пусть F — конечная подгруппа группы G. Тогда в разложение алгебры KF в прямую сумму минимальных идеалов существует идеал $I\cong K(\varepsilon)$, где ε — корень m-й степени из единицы в $\bar{K}$ и $m\geq 1$. Следовательно, мультипликативная группа I^* изоморфна подгруппе группы $V(KF)$ и I^* — периодическая группа. Отсюда вытекает, что $K(\varepsilon)^*$ и K^* — периодические группы. Следовательно, K — алгебраическое расширение конечного поля.

Пусть, наоборот, G — периодическая группа и K — алгебраическое расширение конечного поля. Пусть x — любой элемент группы $V(KG)$. Тогда $x\in V(KF)$, где F — конечная подгруппа группы G. Группа $V(KF)$ изоморфна прямому произведению мультипликативных групп I_i^* минимальных идеалов I_i. Каждый такой идеал $I_i\cong K(\eta_i)$ для некоторого корня n_i-й степени из единицы, для которого $n_i/|F|$. Однако мультипликативная группа $K(\eta)^*$ периодическа, откуда следует утверждение.

Определение 13. *Будем говорить, что поле K принадлежит классу $\mathscr{A}$, если мультипликативная группа L^* любого конечного расширения L поля K расщепляется. Если, при этом, множитель без кручения группы L^* является свободной группой, то будем говорить, что K принадлежит подклассу $\mathscr{A}1$.*

Если M_n — алгебраическое расширение поля Q рациональных чисел, порожденное алгебраическими числами степени не больше n, где n фиксировано, то мультипликативная группа M_n^* — прямое произведение циклических групп, т. е. $M_n \in \mathscr{A}1$. Действительно, если $\overline{M}_n$ — алгебраическое расширение поля Q, порожденное всеми алгебраическими числами степени не больше n, то мультипликативная группа $\overline{M}_n^*$ — прямое произведение циклических групп (см. [10, с. 371, упражнение 6*]). Так как $M_n \subseteqq \overline{M}_n$, то M_n^* — прямое произведение циклических групп. Для переменного n обозначим через $\mathscr{A}1S$ класс всех расширений M_n поля Q. Очевидно, каждое конечное расширение поля класса $\mathscr{A}1S$ снова принадлежит этому классу.

Лемма 14. *Если G — конечная группа и K — поле класса $\mathscr{A}$, характеристика которого не делит порядок группы G, то группа $V(KG)$ нормированных единиц групповой алгебры KG расщепляема, т. е. $V(KG) = T \times C$, где T — периодическая часть группы $V(KG)$. Если K — поле класса $\mathscr{A}1$, то C — свободная группа. Если K — поле класса $\mathscr{A}1S$, то C имеет ранг $\aleph_0$.*

Доказательство. В разложение (3′) имеет место $I_i \cong K(\varepsilon_{ij})$, $i=0, 1, \ldots, s$. Следовательно, каждое $I_j \in \mathscr{A}(\mathscr{A}1)$ и $V(KG)$ — прямое произведение своей периодической части и группы без кручения (своей периодической части и свободной группы). Пусть $K \in \mathscr{A}1S$ и $K^* = tK^* \times sK^*$, где tK^* — периодическая часть мультипликативной группы K^* поля K и группа sK^* свободна. Тогда $r(sK^*) = \aleph^0$, где $r(sK^*)$ — ранг группы sK^* и из разложения (3′) следует, что $V(KG)$ имеет ранг $\aleph_0$. Лемма доказана.

Легко доказать следующую лемму (см. [3]).

Лемма 15. *Пусть β — предельное порядковое число. $\{G_\alpha\}_{\alpha \leqq \beta}$ — такое множество групп, что если α — непредельное порядковое число и $\alpha < \beta$, то $G_\alpha = G_{\alpha-1} \times T_\alpha$ для некоторой группы T_α, а если α — предельное порядковое число ($\alpha \leqq \beta$), то $G_\alpha = U_{i<\alpha} G_i$. Тогда для любого порядкового числа α_0, $\alpha_0 < \beta$ имеет место прямое разложение $G_\beta = G_{\alpha_0} \times \Pi T_\alpha$, где α пробегает непредельные числа, удовлетворяющие условию $\alpha_0 < \alpha < \beta$.*

Теорема 16. *Пусть G — прямое произведение конечных циклических групп и K — поле класса $\mathscr{A}$, характеристика которого не делит порядки элементов группы G. Тогда $V(KG)$ — расщепляемая группа, т. е.*

$$V(KG) = tV(KG) \times B, \tag{15}$$

где $tV(KG)$ — периодическая часть группы $V(KG)$. Если K — поле класса $\mathscr{A}1$, то B — свободная группа. Если K — поле класса $\mathscr{A}1S$, то ранг B равняется $\max(|G|, \aleph_0)$.

Доказательство. Сначала докажем, что если $K \in \mathscr{A}$ ($K \in \mathscr{A}1$), то $V(KG) \in \mathscr{A}$ ($V(KG) \in \mathscr{A}1$). Пусть $|G| = n$, τ — кардинальное число, $\tau > n$, и I — вполне упорядоченное множество с мощностью τ. Пусть G_β, $\beta \in I$ — прямое произведение

$$G_\beta = \Pi_{i<\beta} \langle a_i \rangle, \tag{16}$$

где $\langle a_i \rangle$ — конечная циклическая группа, $i \in I$. Доказательство проведем индукцией по $\beta \in I$. Если $\beta < \omega$, где ω — первое бесконечное порядковое число, то, ввиду леммы 14, теорема справедлива для любой группы G_β вида (16). Допустим, что теорема справедлива для всех групп G_α, для которых $\alpha < \beta$, где β — бесконечное порядковое число. Докажем, что теорема справедлива для группы G_β. Рассмотрим следующие случаи: 1) существует $\beta - 1$ и 2) не существует $\beta - 1$.

1) Пусть существует $\beta - 1$. Рассмотрим группу $G_\beta = \Pi_{i \leqq \beta-1} \langle a_i \rangle$. Обозначим $a_{\beta-1} = b_0$, $a_i = b_{i+1}$ для всех i, для которых $1 < i < \omega$, и $a_i = b_i$ для всех i,

для которых $\omega \leqq i < \beta - 1$. Тогда $G_\beta = \Pi_{i<\beta-1} \langle b_i \rangle = G'_{\beta-1}$. Так как группа $G'_{\beta-1} = G_\beta$ удовлетворяет индуктивное предположение, то утверждение справедливо для нее, т. е. $V(KG_\beta)$ — расщепляемая группа и $V(KG_\beta) = tV(KG_\beta) \times T_\beta$, где T_β — свободная группа, если $K \in \mathscr{A}1$.

2) Пусть $\beta - 1$ не существует. Группа $V(KG_\beta)$ удовлетворяет условиям леммы 15. Действительно, если $\alpha < \beta$, $\alpha \geqq 2$ и α — непредельное порядковое число, то $G_\alpha = G_{\alpha-1} \times \langle a_{\alpha-1} \rangle$ и из [6] следует, что $V(KG_{\alpha-1})$ — прямой множитель группы $V(KG_\alpha)$, т. е.

$$V(KG_\alpha) = V(KG_{\alpha-1}) \times T_\alpha, \quad \alpha < \beta. \tag{17}$$

Следовательно, из леммы 15, для каждого натурального m

$$V(KG_\beta) = V(KG_m) \times \prod_{m<\alpha<\beta} T_\alpha \tag{18}$$

(α — пробегает все непредельные порядковые числа между m и β). Группа $V(KG_m)$, в силу леммы 14, расщепляется и если $K \in \mathscr{A}1$, то $V(KG_m)$ — прямое произведение своей периодической части и свободной группы. Каждая группа T_α из (18) расщепляется и если $K \in \mathscr{A}1$, то T_α — прямое произведение своей периодической части и свободной группы. Действительно, T_α — прямой множитель группы $V(KG_\alpha)$ в (17) и по индуктивному предположению, $V(KG_\alpha)$ расщепляется, ($V(KG_\alpha)$ — прямое произведение своей периодической части и свободной группы, если $K \in \mathscr{A}1$).

Вычислим ранг $r(B)$ множителя B из (15), если $K \in \mathscr{A}1S$. Если G — конечная группа, то, в силу леммы 14, $r(B) = \aleph_0 = \max(|G|, \aleph_0)$. Пусть G — бесконечная группа и $G = \Pi_{i \in I} \langle a_i \rangle$. Так как $V(KG) \supseteqq G$ и $|KG| = |G|$, то $|V(KG)| = |G|$. По лемме 14 группа $V_i = V(K\langle a_i \rangle)$ $(i \in I)$ нормированных единиц алгебры $K\langle a_i \rangle$ является прямым произведением своей периодической части и свободной группы sV_i. Так как $K(\langle a_i \rangle \cap K\langle a_j \rangle_{j \neq i,\ j \in I}) = K(\langle a_i \rangle \cap \langle a_j \rangle_{j \neq i}) = K$, где $\langle a_j \rangle_{j \neq i}$ — подгруппа, порожденная всеми a_j, для которых $j \neq i$, j, $i \in I$, то $V_i \cap \langle V_j \rangle_{j \neq i} = 1$. Следовательно, подгруппа $\langle sV_i \rangle_{i \in I}$, порожденная всеми подгруппами sV_i, $i \in I$, является их прямым произведением, т. е.

$$\Pi_{i \in I} sV_i \subseteqq V(KG). \tag{19}$$

Так как ранг $r_0(sV_i)$ без кручения совпадает с рангом $r(sV_i)$ группы sV_i и, в силу леммы 14, $r(sV_i) = \aleph_0$, то $r(B) = r_0 |V(KG)| \geqq |I|\, r_0(sV_i) = |I| \aleph_0 = |I| = |G|$, где первое равенство следует из (15), а второе неравенство — из (19). Так как $|B| \leqq |V(KG)| = |G|$, то $r(B) = |G|$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Об изоморфизме центров групповых колец p-групп. *Доклады АН СССР*, **91**, 1953, 185—187.
2. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. (Debrecen)*, **14**, 1967, 365—405.
3. С. Д. Берман, В. Г. Богдан. Об изоморфизме вещественных групповых алгебр абелевых групп. *Мат. заметки*, **21**, № 2, 1977, 229—238.
4. С. Д. Берман, А. Р. Росса. Силовская p-подгруппа групповой алгебры счетной абелевой p-группы. *Материалы XXIX Научн. конф. проф.-преп. состава Ужгор. ун-та, Секция мат. наук*, 1975, 158—176.
5. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 1619—1622.

6. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групп нормированных единиц полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Плиска*, **8**, 1986, 34—46.
7. Н. А. Начев. Инварианты Ульма—Капланского группы нормированных единиц групповых алгебр абелевых p-групп над коммутативным кольцом, в котором p — обратим элемент. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1585—1587.
8. S. Perlis, G. L. Walker. Abelian group algebras of finite orders. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68**, 1950, 420—426.
9. М. Холл. Теория групп. Москва, 1962, с. 468.
10. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы, Т. 2. Москва, 1977, с. 416.

Поступила 24. 8. 1982

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария