PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ТОЖДЕСТВА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В АЛГЕБРЕ ЛИ $sl(2, K)$ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

РУСАЛИН С. НИКОЛАЕВ

Доказывается, что все тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики 0 являются следствиями тождества $[x, y, x, x, [x, y]]=0$. Получен также базис идеала этих тождеств, рассматриваемый как идеал алгебры Ли.

В работе решается поставленная Бахтуриным [1] задача о нахождении базиса тождеств от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ матриц второго порядка со следом 0 над полем K нулевой характеристики. Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Все тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ являются следствиями тождества*

$$[x, y, x, x, [x, y]]=0. \tag{1}$$

Из работ Размыслова [2], Дренского [3] и Филиппова [4], где даны базисы тождеств алгебры $sl(2, K)$ соответственно из трех, двух и одного тождества пятой степени от четырех переменных, следует, что в этой алгебре нет тождеств от двух переменных степени ниже шестой. То, что (1) есть тождество (при этом единственное шестой степени) алгебры $sl(2, K)$, следует из результатов Дренского [5] о разложениях S_n-модулей полилинейных лиевых элементов шестой степени свободной лиевой алгебры L_6 и многообразия $\mathrm{var}(sl(2, K))$.

Первая часть работы содержит обозначения и предварительные сведения. Во второй части выводятся некоторые следствия из тождества (1), необходимые для доказательства теоремы 1, которое составляет содержание третьей части. В последней, четвертой части получен базис идеала тождеств от двух переменных алгебры $sl(2, K)$, рассматриваемый не как T-идеал, а как идеал алгебры Ли.

1. Пусть K — поле характеристики 0. Чрез $\mathfrak{L}$ обозначим многообразие алгебр Ли, порожденное тождеством (1), а через $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр Ли, порожденное алгеброй $sl(2, K)$. Пусть $F(\mathfrak{L})$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathfrak{L}$. Через $P_n(\mathfrak{L})$ обозначим S_n-модуль (в алгебре $F(\mathfrak{L})$) полилинейных элементов, записанных на переменных $x_1, \dots, x_n$, а через $\bar{P}_n(\mathfrak{L})$ обозначим $GL(2)$-модуль (в $F(\mathfrak{L})$) многочленов степени n от двух переменных. Аналогично определяются $F(\mathfrak{M})$, $P_n(\mathfrak{M})$ и $\bar{P}_n(\mathfrak{M})$. Действия групп S_n на P_n и $GL(2)$ на $\bar{P}_n$ определяются естественным образом, как, например, в работах [6]—[8]. Из этих работ мы будем использовать некоторые результаты и идеи применения этих представлений при изучении идеалов тождеств. Здесь отметим только следующие пункты:

 ПЛИСКА Български математически студии. Том 8, 1986, с. 65—76.

(а) В силу включения $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{L}$ естественный гомоморфизм $F(\mathfrak{L})\to F(\mathfrak{M})$ является и модульным гомоморфизмом модуля $P_n(\mathfrak{L})$ на $P_n(\mathfrak{M})$. Теорема будет доказана, если покажем, что каждой диаграмме Юнга с двумя строками соответствует не более, чем один неприводимый подмодуль модуля $P_n(\mathfrak{L})$, порождаемый многочленом, не являющимся тождеством в алгебре $sl(2, K)$.

(б) Вместо с полилинейными элементами можно работать с их полными симметризациями, т. е. действуя симметризаторами Юнга на многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in P_n$, потом заменяем все буквы, индексы которых лежат в одной строке диаграммы одной и той же буквы. Следовательно, мы можем изучать не подмодули в $P_n(\mathfrak{L})$, соответствующие диаграммам с двумя строками, а подмодули модуля $\bar{P}_n(\mathfrak{L})$, т. е. порождающие многочлены $f(x, y)$ линейного пространства $\bar{P}_n(\mathfrak{L})$ будем коссосимметризировать по всем возможным парам (x, y).

Через $[x, y, x^{(k)}]$ будем обозначать правонормированный коммутатор $[x, y, x, x, \ldots, x]$ длины $k+2$. Если $\deg_x f(x, y)=k$, то при линеаризации $f(x, y)$ по x новые переменные будем обозначать буквой x с индексами: x_1, x_2, $\ldots$, x_k.

2. В этой части найдем некоторые следствия из тождества (1), касающиеся структуры линейного пространства $\bar{P}_n(\mathfrak{L})$, $n\geqq 6$, и систему, порождающих этого пространства.

Лемма 1. *Для любых целых неотрицательных k и l, $k+l\geqq 3$, в алгебре $F(\mathfrak{L})$ выполняются тождества*

(2)
$$[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l)}]=\begin{cases} [x, y, x^{(k+l)}, y], & k+l\equiv 1 \pmod 2),\\ [x, y, x^{(k+l)}, y]-[x, y, x^{(k+l-1)}, [x, y]], & k+l\equiv 0 \pmod 2).\end{cases}$$

Доказательство. Из тождества (1), заменой y на $[x, y]$, получаем

$$[x, y, x^{(3)}, [x, y, x]]=0, \tag{3}$$

а коммутированием с x — тождество $[x, y, x^{(2)}, [x, y, x]]+[x, y, x^{(3)}, [x, y]]=0$. Коммутируем последнее равенство с x и учитывая (3), находим $[x, y, x^{(4)}, [x, y]]=0$. Индукцией по k докажем тождество

$$[x, y, x^{(k)}, [x, y]]=\begin{cases} 0, & k\equiv 0 \pmod 2),\\ -[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, x]], & k\equiv 1 \pmod 2).\end{cases} \tag{4}$$

Для $k=3$ и $k=4$ уже проверили. Пусть k — четное и выполнено $[x, y, x^{(k)}, [x, y]]=0$. Коммутируем это тождество с x: $[x, y, x^{(k+1)}, [x, y]]+[x, y, x^{(k)}, [x, y, x]]=0$. Если k — нечетное, то $[x, y, x^{(k)}, [x, y]]+[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, x]]=0$. Следовательно,

$$[x, y, x^{(k+1)}, [x, y]]+2[x, y, x^{(k)}, [x, y, x]]+[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, x^{(2)}]]=0.$$

Согласно индукционному предположению выполняются тождества

$$[x, y, x^{(k-1)}, [x, y]]=0, \; [x, y, x^{(k-3)}, [x, y]]=0.$$

Заменой y на $[x, y]$ в первом и на $[x, y, x]$ во втором из этих тождеств получаем $[x, y, x^{(k)}, [x, y, x]]=0$, $[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, x^{(2)}]]=0$. Следовательно, $[x, y, x^{(k+1)}, [x, y]]=0$. Этим тождества (4) доказаны.

В ходе доказательства мы получили еще два тождества, которые будут нужны нам в дальнейшем:

(5) $$[x, y, x^{(k+1)}, [x, y, x]]=0,$$

(6) $$[x, y, x^{(k)}, [x, y, x^{(2)}]]=0, \quad k\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Если k — четное, согласно тождеству (4)

$$[x, y, x^{(k)}, y, x]=[x, y, x^{(k+1)}, y],$$

$$[x, y, x^{(k+1)}, y, x]=[x, y, x^{(k+2)}, y]-[x, y, x^{(k+1)}, [x, y]].$$

Следовательно, тождества (2) верны для любого k и для $l=1$. Индукцией по l завершаем доказательство леммы:

если $[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l)}]=[x, y, x^{(k+l)}, y]$, $k+l\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, коммутированием с x находим $[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l+1)}=[x, y, x^{(k+l)}, y, x]=[x, y, x^{(k+l+1)}, y]$ $-[x, y, x^{(k+l)}, [x, y]]$; если $[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l)}]=[x, y, x^{(k+l)}, y]-[x, y, x^{(k+l-1)},$ $[x, y]]$, $k+l\equiv 0 (\mathrm{mod}(2)$, то $[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l+1)}]=[x, y, x^{(k+l)}, y, x]-[x, y,$ $x^{(k+l)}, [x, y]]-[x, y, x^{(k+l-1)}, [x, y, x]]=[x, y, x^{(k+l+1)}, y]$ согласно (4) и индукционному предположению.

Лемма 2. *Для любых целых неотрицательных k и l, $k+l\geqq 2$, в алгебре $F(\mathfrak{L})$ выполняется тождество*

(7) $$[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y]]=0, \quad k+l\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Доказательство. Пусть k — четное. Линеаризацией тождества $[x, y, x^{(k)}, [x, y]]=0$ по x и заменой x_1 на y, остальные x_i на x, $i\geqq 2$, получаем, что для любого четного k выполняется тождество

(8) $$[x, y, x^{(k-1)}, y, [x, y]]=0.$$

Если при этой линеаризации положим $x_1=[x, y, x]$, $x_i=x$, $i\geqq 2$, учитывая (8), получаем

$$[x, y, x^{(k)}, [x, y, x, y]]+\sum_{i=0}^{k-1}[x, y, x^{(i)}, [x, y, x], x^{(k-1-i)}, [x, y]]=0.$$

Для нечетных i, согласно (5), $[x, y, x^{(i)}, [x, y, x]]=0$. Если i — четное, то $k-1-i$ — нечетное. Следовательно,

$$[x, y, x^{(i)}, [x, y, x], x^{(k-1-i)}]=[x, y, x^{(i)}, [x, y, x^{(2)}], x^{(k-2-i)}]$$
$$+[x, y, x^{(i+1)}, [x, y, x], x^{(k-2-i)}]=0$$

согласно тождеств (5) и (6), т. е.

(9) $$[x, y, x^{(k)}, [x, y, x, y]]=0, \quad k\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Линеаризуем тождество (9) по x и положим $x_1=y$, $x_i=x$, $i\geqq 2$. Учитывая (2), получаем тождество $k[x, y, x^{(k-1)}, y, [x, y, x, y]]+[x, y, x^{(k)}, [x, y, y^{(2)}]]=0$. Из тождества $[x, y, x^{(k-2)}, [x, y]]=0$, после замены y на $[x, y, y]$ следует $[x, y,$ $x^{(k-1)}, y, [x, y, x, y]]=0$. Следовательно, выполнено тождество

(10) $$[x, y, x^{(k)}, [x, y, y^{(2)}]]=0, \quad k\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Линеаризуем тождество (8) по y и положим $y_1=[x, y, y]$, $y_i=y$, $i\geqq 2$:

$$-[x, y, y, x^{(k)}, y, [x, y]]+[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, y], [x, y]]$$
$$-[x, y, x^{(k-1)}, y, [x, y, y, x]]=0.$$

Линеаризацией тождества (9) по x и подстановкой x_1 на y, $x_1=x$, $i\geqq 2$ получаем, что $[x, y, x^{(k-1)}, y, [x, y, y, x]]=0$. Следовательно, в силу леммы 1, выполняется тождество

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}, [x, y]]-2[x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y, [x, y]]=0.$$

Из этого тождества и тождества

$$(k+1)[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}, [x, y]]-k[x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y, [x, y]]=0,$$

полученного из $[x, y, x^{(k+1)}, y, [x, y]]=0$ линеаризацией по x и заменой x_1 на y, остальные x_i на x, с учетом леммы 1, получаем

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}, [x, y]]=0, \quad [x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y, [x, y]]=0.$$

Следовательно, для любого k и $l=1, 2$, $k+l\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, лемма верна. Проведем индукцию по l.

Пусть $[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y]]=0$, k, l — четные. Линеаризацией по x отсюда получаем:

подстановкой $x_1=y$, $x_i=x$, $i\geqq 2$, в силу леммы 1,

$$(11) \qquad [x, y, x^{(k-1)}, y^{(l+1)}, [x, y]]=0;$$

подстановкой $x_1=[x, y, x]$, $x_i=x$, $i\geqq 2$, согласно тождествам (5), (6) и (11),

$$(12) \qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, x, y]]=0.$$

В тождестве (11) заменяем k на $k+2$ и линеаризуем по x. Подстановкой $x_1=y$, $x_i=x$, $i\geqq 2$, согласно лемме 1, получаем тождество

$$(\mathrm{I}) \qquad (k+1)[x, y, x^{(k)}, y^{(l+2)}, [x, y]]-k[x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y^{(l+1)}, [x, y]]=0.$$

Двукратным коммутированием с y, из тождества $[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y]]=0$ получаем

$$(\mathrm{II}) \qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l+2)}, [x, y]]+2[x, y, x^{(k)}, y^{(l+1)}, [x, y, y]] + [x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y^{(2)}]]=0.$$

Из тождества (12), линеаризацией по x и заменой x_1 на y, x_i на x, $i\geqq 2$, в силу леммы 1, следует

$$(\mathrm{III}) \qquad k[x, y, x^{(k-1)}, y^{(l+1)}, [x, y, x, y]]+[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y^{(2)}]]=0.$$

Линеаризуем (11) по x и положим $x_1=[x, y, x]$, $x_i=x$, $i\geqq 2$. Учитывая тождества (5) и (6), находим

$$(\mathrm{IV}) \qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l+2)}, [x, y]]-2[x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y^{(l+1)}, [x, y]] + [x, y, x^{(k-1)}, y^{(l+1)}, [x, y, x, y]]=0.$$

Докажем следующее тождество:

$$(13) \qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(2)}]=[x, y, y^{(2)}, x^{(k)}], \quad k\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2),\ k\geqq 2.$$

Для $k=2$, согласно (1),

$$[x, y, y^{(2)}, x^{(2)}]=-[x, y, y, [x, y], x]+[x, y, y, x, y, x]$$
$$=-[x, y, y, [x, y, x]]+[x, y, x, y, y, x]=[x, y, x, [x, y, y]]+[x, y, x, y, x, y]$$
$$=[x, y, x, [x, y, y]]-[x, y, x, [x, y], y]+[x, y, x^{(2)}, y^{(2)}]=[x, y, x^{(2)}, y^{(2)}].$$

Пусть $[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}]=[x, y, y^{(2)}, x^{(k)}]$, $k\geqq 2$. Тогда

$$[x, y, y^{(2)}, x^{(k+2)}]=[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}, x^{(2)}]=-[x, y, x^{(k)}, y, [x, y], x]$$
$$+[x, y, x^{(k)}, y, x, y, x]=-[x, y, x^{(k)}, y, [x, y, x]]$$
$$-[x, y, x^{(k)}, y, x, [x, y]]+[x, y, x^{(k+1)}, y^{(2)}, x]=-[x, y, x^{(k)}, [x, y, x], y]$$
$$+[x, y, x^{(k+1)}, y, x, y]=[x, y, x^{(k+2)}, y^{(2)}]$$

согласно индукционному предположению, тождеству (9), лемме 2 для $l=1$ и лемме 1.

Линеаризуем тождество $[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y]]=0$, k, l — четные, по x и положим $x_1=[x, y, y]$, $x_i=x$, $i\geqq 2$:

$$[x, y, y^{(2)}, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y]]+[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y^{(2)}]]$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}[x, y, x^{(i)}, [x, y, y], x^{(k-1-i)}, y^{(l)}, [x, y]]=0.$$

Для четных i, согласно (12), $[x, y, x^{(i)}, [x, y, y], x^{(k-1-i)}]=[x, y, x^{(i+1)}, [x, y, y], x^{(k-2-i)}]$. В силу леммы 1, $[x, y, x^{(i+1)}, y, x^{(k-i-2)}]=[x, y, x^{(k-1)}, y]$. Линеаризуем это тождество по y и заменим y_1 на $[x, y, y]$, y_2 на y:

$$-[x, y, y, x^{(i+2)}, y, x^{(k-i-2)}]+[x, y, x^{(i+1)}, [x, y, y], x^{(k-i-2)}]$$
$$=-[x, y, y, x^{(k)}, y]+[x, y, x^{(k-1)}, [x, y, y]].$$

Следовательно,

$$\text{(V)}\qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l+2)}, [x, y]]+k[x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y^{(l+1)}, [x, y]]$$
$$+[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y^{(2)}]]=0.$$

Из системы (I)—(V) получаем

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(l+2)}, [x, y]]=0,\quad k\equiv l\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),$$

что доказывает лемму, а кроме того, и следующие тождества:

$$(14)\qquad [x, y, x^{(k-1)}, [x, y], y^{(l+1)}, [x, y]]=0,$$
$$(15)\qquad [x, y, x^{(k-1)}, y^{(l+1)}, [x, y, x, y]]=0,$$
$$(16)\qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y^{(2)}]]=0,$$
$$(17)\qquad [x, y, x^{(k)}, y^{(l+1)}, [x, y, y]]=0,\quad k\equiv l\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Лемма 3. *Пусть k, l — целые неотрицательные числа, $k+l\geqq 3$. Тогда в алгебре $F(\mathfrak{L})$ выполняются тождества*

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, x]=\begin{cases}[x, y, x^{(k+1)}, y^{(l)}], & k\equiv l-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\\ [x, y, x^{(k+1)}, y^{(l)}]-[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y]], & k\equiv l\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\\ [x, y, x^{(k+1)}, y^{(l)}]-[x, y, x^{(k)}, [x, y, y^{(l-1)}]], & k\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

Доказательство. Для любого k и $l=1$ — это лемма 1. Пусть $l=2$, k — четное. Тогда, согласно лемме 1,

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(2)}, x]=[x, y, x^{(k)}, y, x, y]-[x, y, x^{(k)}, y, [x, y]]$$
$$=[x, y, x^{(k+1)}, y^{(2)}]-[x, y, x^{(k)}, y, [x, y]],$$

а согласно лемам 1 и 2, выполняется

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(2)},\ x] = [x,\ y,\ x^{(k+2)},\ y^{(2)}] - [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y,\ y]].$$

Индукцией по l отсюда легко завершить доказательство леммы.

Всюду в дальнейшем k и l будут четные неотрицательные числа. Линеаризуем тождество (17) по x и положим $x_1 = y$, $x_i = x$, $i \geqq 2$. Учитывая лемму 1, получаем тождество

$$[x,\ y,\ x^{(k-1)},\ y^{(l+2)},\ [x,\ y,\ y]] = 0. \tag{18}$$

Из тождеств (16), (17) и (18), индукцией по m, получаем тождества

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y^{(m)}]] = 0, \tag{19}$$

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ y^{(m+1)}]] = 0, \tag{20}$$

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y^{(m)}]] = 0, \quad m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2). \tag{21}$$

Индукцией по l докажем тождество

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ x]] = 0. \tag{22}$$

Для $l = 0$ — это тождество (5). Пусть $[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ x]] = 0$. Тогда, согласно индукционному предположению, (15), (18) и лемме 3, имеем

$$\begin{aligned}
&[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+2)},\ [x,\ y,\ x]] = [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x],\ y] \\
&= -[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ x,\ y],\ y] = [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)},\ x,\ [x,\ y,\ y],\ y] \\
&= [x,\ y,\ x^{(k+2)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y],\ y] - [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y,\ y^{(l-1)}],\ [x,\ y,\ y],\ y] \\
&= [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y],\ y^{(l-1)},\ [x,\ y,\ y],\ y] = [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y],\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y]] \\
&\quad + [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y],\ y^{(l-1)},\ [x,\ y,\ y^{(2)}]].
\end{aligned}$$

Линеаризуем по x тождества $[x,\ y,\ x^{(k+3)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y]] = 0$ и $[x,\ y,\ x^{(k+3)},\ y^{(l-1)},\ [x,\ y,\ y^{(2)}]] = 0$ и положим $x_1 = y$, $x_i = x$, $i \geqq 2$. Учитывая тождества (17) и (19), находим

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y],\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ y]] = 0,\ [x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y],\ y^{(l-1)},\ [x,\ y,\ y^{(2)}]] = 0.$$

Следовательно,

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+2)},\ [x,\ y,\ x]] = 0.$$

Докажем следующее тождество:

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l)}] = [x,\ y,\ y^{(l)},\ x^{(k)}]. \tag{23}$$

Для $l = 2$ — это тождество (13). Проведем индукцию по l. Согласно лемме 3 и тождеству (7), имеем

$$\begin{aligned}
&[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+2)}] = [x,\ y,\ y^{(l)},\ x^{(k)},\ y^{(2)}] = [x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x^{(k)},\ y] \\
&\quad - [x,\ y,\ y^{(l)},\ x^{(k-1)},\ [x,\ y],\ y] = [x,\ y,\ y^{(l+2)},\ x^{(k)}].
\end{aligned}$$

Из тождеств (19) и (23) следует тождество

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l)},\ [x,\ y,\ x^{(m)}]] = 0, \quad m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2). \tag{24}$$

Из леммы 3 тождеств (7) и (23) следует тождество

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)}]=[x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x^{(k+1)}]. \tag{25}$$

Линеаризацией тождеств (19) и (24) по x и подстановкой $x_1=y$, $x_i=x$, $i\geqq 2$, учитывая тождество (25), получаем

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(m)}]]=0, \tag{26}$$

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ y^{(m)}]]=0,\quad m\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2). \tag{27}$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужно еще следующее тождество.

$$[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)},\ [x,\ y,\ x^{(k)}]]=[x,\ y,\ x^{(p+k)},\ y^{(q)},\ [x,\ y]]. \tag{28}$$

Для $p\equiv q (\mathrm{mod}\ 2)$ обе стороны равны 0 согласно тождествам (24) и (26)

Из определения правонормированного коммутатора и тождества (7) следует $[x,\ y,\ x^{(k)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)}]]=-[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]]$. Коммутируем это тождество с x, учитывая лемму 3 и тождество (26): $[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)}]]=-[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x]]$. Следовательно,

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x]]+[x,\ y,\ x^{(k+2)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)}]]$$
$$=-[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(2)}]]-[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x]].$$

Так как из тождеств (7) и (24) следует $[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x]]=-[x,\ y,\ x^{(k+2)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)}]]$, а как уже отметили $[x,\ y,\ x^{(k+2)},\ [x,\ y,\ y^{(l+1)}]]=-[x,\ y,\ x^{(k+2)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]]$, то выполняется

$$[x,\ y,\ x^{(k+2)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]]=[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(2)}]].$$

Пусть $[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(m)}]]=[x,\ y,\ x^{(k+m)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]]$. Тогда, в силу индукционного предположения, леммы 3 и тождеств (7), (26) и (25) имеем

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(m+2)}]]=[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(m)},\ x^{(2)}]$$
$$-2[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ x,\ [x,\ y,\ x^{(m)}],\ x]+[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)},\ x^{(2)},\ [x,\ y,\ x^{(m)}]]$$
$$=[x,\ y,\ x^{(k+m)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y],\ x^{(2)}]+[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)},\ x,\ [x,\ y,\ x^{(m)}]]$$
$$=[x,\ y,\ x^{(k+m)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y,\ x^{(2)}]]+2[x,\ y,\ x^{(k+m)},\ y^{(l+1)},\ x,\ [x,\ y],\ x]$$
$$-[x,\ y,\ x^{(k+m)},\ y^{(l+1)},\ x^{(2)},\ [x,\ y]]+[x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x^{(k+2)},\ [x,\ y,\ x^{(m)}]]$$
$$=[x,\ y,\ x^{(k+m+2)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]]-[x,\ y,\ x^{(k+m+1)},\ y^{(l+1)},\ x,\ [x,\ y]]$$
$$+[x,\ y,\ y^{(l+1)},\ x^{(k+m+2)},\ [x,\ y]]=[x,\ y,\ x^{(k+m+2)},\ y^{(l+1)},\ [x,\ y]].$$

Аналогичные вычисления доказывают тождество (28) и в случае, когда p — нечетное, а q — четное.

Лемма 4. *Линейное пространство $\overline{P}_n(\mathfrak{L})$, $n\geqq 6$, порождается элементами следующих видов:*

(i) $[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)}]$,

(ii) $[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)},\ [x,\ y]]$, $p\equiv q-1 (\mathrm{mod}\ 2)$,

(iii) $[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)},\ [x,\ y,\ x]]$, $p\equiv q-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Доказательство. Лемма будет доказана если покажем, что после коммутирования с x или y элементов, встречающихся в правых сторонах тождеств из леммы 3, получаются линейные комбинации элементов указанных видов:

$[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y], y]=0$ согласно (17) и (7),

$[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y], x]=[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y, x]]$ согласно лемме 3 и (7),

$[x, y, x^{(k-1)}, y^{(l)}, [x, y], y]=0$ согласно (7) и (18),

$[x, y, x^{(k-1)}, y^{(l)}, [x, y], x]=0$ согласно лемме 3, (7), (14) и (22),

$[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y, x], x]=[x, y, x^{(k+2)}, y^{(l-1)}, [x, y]]-[x, y, y^{(l-1)}, x^{(k+2)}, [x, y]]$ согласно лемме 3, (28) и (25),

$[x, y, x^{(k)}, y^{(l-1)}, [x, y, x], y]=[x, y, x^{(k+1)}, y^{(l)}, [x, y]]-[x, y, y^{(l)}, x^{(k+1)}, [x, y]]$ согласно лемме 3, (17), (7) и (23).

Так как в силу леммы 3

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, x]]=-[x, y, y^{(l)}, x^{(k+1)}, [x, v]],$$

$$[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}, [x, y, y]]=-[x, y, x^{(k)}, y^{(l+1)}, [x, y]],$$

а из тождества (28) следует, что $[x, y, x^{(k+1)}, [x, y, y^{(l)}]]=[x, y, y^{(l)}, x^{(k+1)}, [x, y]]$, $[x, y, x^{(k+1)}, [x, y, y^{(l+1)}]]=[x, y, y^{(l)}, x^{(k+1)}, [x, y, y]]$, $[x, y, x^{(k)} [x, y, y^{(l+1)}]]=-[x, y, x^{(k)}, y^{(l+1)}, [x, y]]$, лемма 4 доказана.

3. Теорема 1. *Все тождества от двух переменных алгебры Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики 0 являются следствиями тождества* (1).

Доказательство. Пусть D_λ — диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\lambda=(p+q+1, p+1)$ числа $n=2p+q+2$. Как уже отметили в первой части, теорема будет доказана, если покажем, что диаграмме D_λ соответствует только один неприводимый подмодуль $P_n(\mathfrak{L})$, порождаемый многочленом, который не является тождеством алгебры $sl(2, K)$, или что соответствующий подмодуль нулевой. Учитывая лемму 4, нужно проследить действие симметризаторов Юнга, соответствующих диаграмме D_λ, только на упомянутые в этой лемме элементы, т. е. кососимметризировать их по всевозможным парам (x, y).

I. Действие симметризаторов на элементы вида (i).

Обозначим $\varphi_{ij}(x, y)=[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}]-[x, y, x^{(i)}, y, x^{(p-1-i)}, y^{(j)}, x, y^{(q-1-j)}]$

а) $p\equiv q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Согласно лемме 3,

$$\varphi_{ij}(x, y)=[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}]-[x, y, x^{(p-1)}, y^{(j+1)}, x, y^{(q-j-1)}]$$
$$=[x, y, x^{(p-1)}, [x, y, y^{(j)}], y^{(q-1-j)}].$$

Если j четное, то в силу тождества (19) $[x, y, x^{(p-1)}, [x, y, y^{(j)}], y^{(q-j-1)}]=[x, y, x^{(p-1)}, [x, y, y^{(j+1)}], y^{(q-j-2)}]$. Если j нечетное, согласно (28) и (22), $\varphi_{ij}(x, y)=-[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]]$.

б) $p\equiv q-1\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Если j нечетное, то $\varphi_{ij}(x, y)=-[x, y, x^{(p-1)}, [x, y], y^{(q-1)}]=-[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-2)}, [x, y, x], y]=-[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]]-[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-2)}, [x, y, x, y]]=[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-2)}, x, [x, y, y]]-[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-2)}, [x, y, x]]=[x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-2)}, [x, y, y]]+[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y]]=[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y]]-[x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]]$.

Если j четное, $j\neq q-1$, аналогично случаю а), получаем тот же самый результат. Если $j=q-1$, то $\varphi_{i,q-1}(x, y)=[x, y, x^{(p-1)}, [x, y, y^{(q-1)}]]=[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y]]$.

в) $p\equiv q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$. Из леммы 3 получаем $[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}]=[x, y, x^{(p-1)}, y^{(q)}, x]$. Рассмотрим два случая:

$$\varphi_j(x, y)=[x, y, x^{(p-1)}, y^{(q)}, x]-[x, y, x^{(p-1)}, y^{(j)}, x, y^{(q-j)}]=0,$$

$$\varphi_{ij}(x, y)=[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y], x]-[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-2)}, [x, y], x]=0.$$

г) $p-1\equiv q\equiv 0 \pmod 2$. Тогда, согласно лемме 3 и (23), $[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}] = [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q)}, x] + [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]] = [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}] + [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]]$.

II. Действие симметризаторов на элементы вида (ii).

Обозначим $\psi_{ij}(x, y) = [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y]] - [x, y, x^{(i)}, y, x^{(p-1-i)}, y^{(j)}, x, y^{(q-1-j)}, [x, y]]$. Учитывая полученные в предыдущем пункте результаты, получаем:

а) $p\equiv q-1\equiv 0 \pmod 2$. $\psi_{ij}(x, y) = [x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y], [x, y]] - [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y], [x, y]] = [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y]] - [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}, [x, y]]$.

б) $p-1\equiv q\equiv 0 \pmod 2$. Как в пункте I. г):

$$[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y]] = [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}, [x, y]] + [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y], [x, y]]$$

$$\text{и } \psi_{ij}(x, y) = [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}, [x, y]] - [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y]]$$
$$+ [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y], [x, y]] - [x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y], [x, y]] = 0.$$

III. Действие симметризаторов на элементы вида (iii).

Здесь только один случай: $p\equiv q-1\equiv 0 \pmod 2$. Согласно результатам пункта Iг), тождествам (25), (22) и (7), имеем

$$[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y, x]] - [x, y, x^{(p)}, y^{(j)}, x, y^{(q-1-j)}, [x, y, y]]$$
$$= [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y, x]];$$

$$[x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y, x]] - [x, y, x^{(i)}, y, x^{(p-1-i)}, y^{(j)}, x, y^{(q-1-j)}, [x, y, x]]$$
$$= [x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y], [x, y, x]] - [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y], [x, y, x]]$$
$$= [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y], x] - [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}, [x, y], x] = [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}, [x, y, x]].$$

Из полученных результатов о действии симметризаторов на порождающие элементы пространства $F_n(\mathfrak{L})$ получаем, что диаграмме P_λ соответствует только один подмодуль $P_n(\mathfrak{L})$, порождаемый элементом

$$d_1(x, y) = [x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]],$$

если $p\equiv q\equiv 0 \pmod 2$,

$$d_2(x, y) = [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]] - [x, y, y^{(q-1)}, x^{(q-1)}, [x, y]],$$

если $p=q-1 \pmod 2$,

а соответствующий подмодуль $P_n(\mathfrak{L})$ — нулевый, если $p\equiv q\equiv 1 \pmod 2$. То, что элементы $d_1(x, y)$ и $d_2(x, y)$ не являются тождествами алгебры $sl(2, K)$, можно проверить вычислением их значения для конкретных матриц x и y, которое мы сделаем в следующей части при доказательстве теоремы 2.

4. В этой части найдем порождающие элементы идеала тождеств алгебры $sl(2, K)$, рассматриваемый не как T-идеал, а как идеал алгебры Ли. Аналогичная задача в ассоциативном случае решена Ли [9].

Теорема 2. *Идеал тождеств алгебры Ли $sl(2, K)$ порождается следующими тождествами этой алгебры:*

$$r_{pq}(x, y) = [x, y, x^{(p)}, y^{(q)}] - [x, y, y^{(q)}, x^{(p)}], \quad p\equiv q \pmod 2,$$

$$s_{pq}(x, y) = [x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]], \quad p\equiv q \pmod 2,$$

$$t_{pq}(x, y) = [x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]] - [x, y, y^{(q-2)}, x^{(p-1)}, [x, y, y]],$$
$$p\equiv q\equiv 0 \pmod 2,$$

$$u_{pq}(x, y) = [x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]], \quad p\equiv q\equiv 1 \pmod 2,$$

$$\bar{u}_{pq}(x,\ y)=[x,\ y,\ y^{(q-2)},\ x^{(p-1)},\ [x,\ y,\ y]],\quad p\equiv q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$v_{pq}(x,\ y)=[x,\ y,\ x^{(p-1)},\ y^{(q-2)},\ [x,\ y,\ y]],\quad p\equiv q(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$\bar{v}_{pq}(x,\ y)=[x,\ y,\ y^{(q-1)},\ x^{(p-2)},\ [x,\ y,\ x]],\quad p\equiv q(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$w_{pq}(x,\ y)=[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)}]-[x,\ y,\ y^{(q)},\ x^{(p)}]-[x,\ y,\ y^{(q-1)},\ x^{(p-1)},\ [x,\ y]],$$
$$p\equiv q-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$\bar{w}_{pq}(x,\ y)=[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)}]-[x,\ y,\ y^{(q)},\ x^{(p)}]-[x,\ y,\ x^{(p-1)},\ y^{(q-1)},\ [x,\ y]],$$
$$p\equiv q-1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).$$

Доказательство. То, что эти многочлены — тождества алгебры $sl(2, K)$, мы доказали во второй части. Пусть $f_n(x,\ y)$ — тождество. Так как достаточно доказать теорему для однородных многочленов, то, согласно лемме 4, $f_n(x,\ y)$ имеет вид

$$f_n(x,\ y)=\alpha_{pq}[x,\ y,\ x^{(p)},\ y^{(q)}]+\bar{\alpha}_{pq}[x,\ y,\ y^{(q)},\ x^{(p)}]+\beta_{pq}[x,\ y,\ x^{(p-1)},\ y^{(q-1)},\ [x,\ y]]$$
$$+\bar{\beta}_{pq}[x,\ y,\ y^{(q-1)},\ x^{(p-1)},\ [x,\ y]]+\gamma_{pq}[x,\ y,\ x^{(p-2)},\ y^{(q-1)},\ [x,\ y,\ x]]$$
$$+\bar{\gamma}_{pq}[x,\ y,\ y^{(q-1)},\ x^{(p-2)},\ [x,\ y,\ x]]+\delta_{pq}[x,\ y,\ x^{(p-1)},\ y^{(q-2)},\ [x,\ y,\ y]]$$
$$+\bar{\delta}_{pq}[x,\ y,\ y^{(q-2)},\ x^{(p-1)},\ [x,\ y,\ y]],\quad p+q+2=n.$$

Вычисляя значение $f_n(x,\ y)$ для матриц $x=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, получаем

$$(\alpha_{pq}+\bar{\alpha}_{pq})(-2)^{p+q+1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2,$$

где O_2 — нулевая матрица второго порядка. Следовательно, для любых p и q имеем $\bar{\alpha}_{pq}=-\alpha_{pq}$.

Вычислим значения порождающих элементов пространства $P_n(\mathfrak{L})$ для матриц $x_0=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $y_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Индукцией по k и l легко доказать, что

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l)}]=2^{3k/2+l}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$[x,\ y,\ x^{(k)},\ y^{(l+1)}]=2^{3k/2+l+1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l)}]=3.2^{3k/2+l}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$[x,\ y,\ x^{(k+1)},\ y^{(l+1)}]=3.2^{3k/2+l+1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$[x,\ y,\ y^{(l)},\ x^{(k+1)}]=2^{3k/2+1+l}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$[x, y, y^{(l+1)}, x^{(k)}] = 3.2^{3k/2+l-1}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

В зависимости от четностей p и q получаем

а) $p \equiv q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Тогда $f_n(x_0, y_0) = (\gamma_{pq} - \overline{\delta}_{pq}) 2^{3p/2+q+3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, т. е. $\overline{\delta}_{pq} = \gamma_{pq}$.

Следовательно, $f_n(x, y) = \alpha_{pq} r_{pq} + (\beta_{pq} + \overline{\beta}_{pq}) s_{pq} + \gamma_{pq} t_{pq} + \overline{\gamma}_{pq} \overline{v}_{pq} + \delta_{pq} w_{pq}$.

б) $p \equiv q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$. Тогда

$$f_n(x, y) = \alpha_{pq} r_{pq} + (\beta_{pq} + \overline{\beta}_{pq}) s_{pq} + \gamma_{pq} u_{pq} + \overline{\gamma}_{pq} \overline{v}_{pq} + \delta_{pq} v_{pq} + \overline{\delta}_{pq} \overline{u}_{pq}.$$

в) $p \equiv q - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Тогда, в силу тождеств (23), (25) и (7), имеем

$$[x, y, x^{(p-2)}, y^{(q-1)}, [x, y, x]] = -[x, y, y^{(q-1)}, x^{(p-1)}, [x, y]],$$

$$[x, y, y^{(q-2)}, x^{(p-1)}, [x, y, y]] = -[x, y, x^{(p-1)}, y^{(q-1)}, [x, y]].$$

Следовательно,

$$f_n(x_0, y_0) = 2^{3p/2+q-2}\alpha_{pq}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + (\beta_{pq} - \gamma_{pq} - \overline{\gamma}_{pq})\, 2^{3p/2+q-3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$+ (\overline{\beta}_{pq} - \delta_{pq} - \overline{\delta}_{pq})\, 2^{3p/2+q-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \text{т. е. } \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \overline{\gamma}_{pq} = 0,\ \overline{\beta}_{pq} - \delta_{pq} - \overline{\delta}_{pq}$$

$$= -\alpha_{pq},\ f_n(x, y) = \alpha_{pq} w_{pq}.$$

г) $p - 1 \equiv q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Аналогично предыдущему случаю, имеем

$$f_n(x_0, y_0) = \alpha_{pq} 2^{3p/2+q-3/2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} + (\beta_{pq} - \gamma_{pq} - \overline{\gamma}_{pq}) 2^{3p/2+q-3/2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$+ (\overline{\beta}_{pq} - \delta_{pq} - \overline{\delta}_{pq}) 2^{3p/2+q-5/2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\overline{\beta}_{pq} - \delta_{pq} - \overline{\delta}_{pq} = 0$, $\beta_{pq} - \gamma_{pq} - \overline{\gamma}_{pq} = -\alpha_{pq}$, или

$$f_n(x, y) = \alpha_{pq} \overline{w}_{pq},$$

Этим теорема доказана.

Есть основания считать, что идеал тождеств от двух переменных алгебры $sl(2, K)$ не является конечно-порожденным (как идеал) и систему образующих для этого идеала, указанную в теореме 2, нельзя уменьшить. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Бахтурин. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$. *Труды сем. им. Петровского*, 1979, вып. 5, 205—208.
2. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 83—113.
3. В. С. Дренски. Минимальный базис тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **20**, 1981, 282—290.
4. В. Т. Филиппов. О многообразии алгебр Мальцева. *Алгебра и логика*, **20**, 1981, 300—314.
5. В. С. Дренски. Решетки многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика*, **8**, 1982, 20—31.
6. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.*, **115**, 1981, 98—115.
7. А. П. Попов. Тождества тензорного квадрата алгебры Грассмана. *Алгебра и логика*, **21**, 1982, 442—471.
8. Р. С. Николаев. Тождества от двух переменных матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Сердика*, **10**, 1984, 11—18.
9. W. -Ch. W. Li. Generators for the ideal of polynomial identities satisfied by 2×2 matrices. *J. Algebra*, **74**, 1982, 246—263.

Высший машинно-электротехнический институт
Варна 9010 Болгария

Поступила 6. 1. 1983