PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О ЛИЕВЫХ T-ИДЕАЛАХ С МАЛЫМ РОСТОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОРАЗМЕРНОСТЕЙ

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ, ПЛАМЕН Е. КОШЛУКОВ

Бенедиктович и Залесский [1980] описали T-идеалы свободной алгебры Ли над полем характеристики 0 с полиномиальным ростом коразмерностей. Существует убывающая последовательность T-идеалов, такая, что любой T-идеал с полиномиальным ростом коразмерностей содержит в себе некоторый член этой последовательности. В представленной работе мы полностью описываем все T-идеалы, содержащие в себе второй член последовательности, построенной Бенедиктовичем и Залесским.

1. Введение. Пусть L — свободная алгебра Ли над полем K характеристики 0, свободно порожденная множеством $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ (иногда мы будем использовать и другие буквы для обозначения свободных образующих). Пусть L_m — подалгебра, порожденная $x_1, \ldots, x_m$; P_n — линейное пространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ степени n в L. Каждый T-идеал H порождается и полностью определяется своими полилинейными компонентами $H \cap P_n$, $n=1, 2, \ldots$ Последовательность $c_n(H)=\dim P_n/H \cap P_n$ называется последовательностью коразмерностей для H. Бенедиктович и Залесский [1] описали T-идеалы с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей: существует цепочка T-идеалов $H^1 \supset H^2 \supset \ldots$, такая, что $c_n(H)$ имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда для подходящего d, $H \supset H^d$.

Идеал H^1 определяет метабелево многообразие $\mathfrak{A}^2$. Подмногообразия $\mathfrak{A}^2$ описаны для любого бесконечного поля K Бахтуриным [4].

Цель представленной работы — описать полностью T-идеалы, содержащие H^2. Как следствие можно описать решетку подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$, которое определяется тождествами H^2. Кроме того, указана наименьшая система порождающих H^2 — доказывается, что H^2 определяется своими тождествами пятой степени.

2. Предварительные сведения. Необходимая информация о многообразиях алгебр, о представлениях симметрической группы S_n и полной линейной группы $GL(m, K)$ можно найти в [5, 6, 7]. Используем обозначения из [2] и [3]. Все произведения будут левонормированными: $u_1 \ldots u_{n-1}u_n=(u_1 \ldots u_{n-1})u_n$, $uv^0=u$, $uv^k=uv^{k-1}v$ для $k \geqq 1$.

Алгебра L_m обладает структурой $GL(m, K)$-модуля, а линейное пространство P_n является S_n-модулем. Пусть $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ — разбиение числа n; $[\lambda]$, $M(\lambda)$, $N_m(\lambda)$ — диаграмма Юнга, неприводимые S_n- и $GL(m, K)$-модули, соответственно. Однородная компонента $L_m^{(n)}$ степени n и P_n обладают одной и той же модульной структурой: если $P_n=\Sigma k(\lambda)M(\lambda)$, то $L_m^{(n)}=\Sigma k(\lambda)N_m(\lambda)$, где $k(\lambda)$ — кратность модуля $M(\lambda)$, соответственно, $N_m(\lambda)$, см. [2].

ПЛИСКА Български математически студии. Том 8, 1986, с. 94—100.

Пусть $L^{(n_1,\ldots,n_m)}$ — линейное пространство, порожденное всеми одночленами из L_m степени n_i относительно x_i. Подобным образом мы будем обозначать и полиоднородные компоненты других линейных пространств. Если $N_m(\lambda)\subset L_m^{(n)}$, то $\dim(N_m(\lambda)\cap L^{(n_1,\ldots,n_m)})$ равна числу стандартных λ-таблиц, которые заполнены набором $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \ldots, m^{n_m})$, [7].

Если $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ — разбиение n, то число $h(\lambda)=n-\lambda_1$ называется высотой разбиения λ, т. е. $h(\lambda)$ — число клеток, находящихся под первой строчкой диаграммы $[\lambda]$.

Идеалы H^d определяются свойством $H^d\cap P_n=\Sigma M(\lambda)$, где суммирование берется по всем подмодулям $M(\lambda)\subset P_n$, такие, что $h(\lambda)>d$.

Многообразие, которое определяется всеми тождествами из H^2, будем обозначать $\mathfrak{M}$; относительно свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ ранга $m-F_m(\mathfrak{M})$, полилинейные элементы из $F_m(\mathfrak{M})-P_n(\mathfrak{M})=P_n/H^2\cap P_n$.

Пусть G — группа, S — ее подгруппа, E и F — соответственно G- и S-модули. Тогда $E\downarrow S$ будет модуль E, рассматриваемый как S-модуль, а индуцированный из F G-модуль мы будем обозначать $F\uparrow G$.

Предложение 1. *Пусть M является S_n-подмодулем в P_n. Тогда:*

(i) *Полилинейные следствия степени $n+1$ тождеств из M составляют S_{n+1}-подмодуль в P_{n+1} и этот подмодуль является гомоморфным образом S_{n+1}-модуля $((M\downarrow S_{n-1})\otimes_K M(1^2))\uparrow S_{n+1}$, где в левом сомножителе S_{n-1} действует на $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ (т. е. фиксируя x_n), в правом сомножителе S_2 действует на $\{n, n+1\}$, тензорное произведение является $S_{n-1}\times S_2$-модулем, а прямое произведение $S_{n-1}\times S_2$ вкладывается в группу S_{n+1} естественным образом.*

(ii) *Следствия вида $f(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1}$, $f\in M$, порождают фактор-модуль S_{n+1}-модуля $(M\otimes_K(M(1))\uparrow S_{n+1}$, где $S_n\times S_1$ рассматривается как подгруппа в группе S_{n+1}.*

Доказательство: (i) Так как умножение в алгебрах Ли является дифференцированием, то все полилинейные следствия степени $n+1$ многочленов из M получаются только следующим способом:

1. Фиксируем x_n (таким образом рассматриваем M как S_{n-1}-модуль).
2. Вместо x_n подставляем x_nx_{n+1} (и получаем фактор-модуль $S_{n-1}\times S_2$-модуль $(M\downarrow S_{n-1})\otimes P_2$, где $P_2\cong M(1^2)$).
3. Порождаем S_{n+1}-модуль через $f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_nx_{n+1})$ (каждый такой модуль является гомоморфным образом индуцированного модуля).

Аналогично доказывается и (ii).

Следствие 2. *Пусть $M(\lambda)\subset P_n$. Тогда все следствия M' из M в P_{n+1} получаются следующим образом: Опускаем клетку из $[\lambda]$ и получаем диаграмму $[\mu]$. К $[\mu]$ добавляем две клетки и получаем новую диаграмму $[\nu]$, так, что новые две клетки не лежат на одной и той же строчке диаграммы $[\nu]$. Тогда M' — гомоморфный образ модуля $\Sigma M(\nu)$, где сумма берется по всем диаграммам $[\nu]$, полученным описанным способом, учитывая их кратности.*

Доказательство. Следует непосредственно из предложения 1, Теоремы ветвления и правила Литлвуда — Ричардсона [6].

3. T-идеалы, содержащие H^2. Известно, что $P_1=M(1)$, $P_2=M(1^2)$, $P_3=M(2, 1)$, $P_4=M(3, 1)+M(2, 1^2)$ и $P_n=P_n(\mathfrak{M})$ для $n\leq 4$.

Предложение 3. *Для $n>3$, $P_n(\mathfrak{M})=M(n-1, 1)+k_1M(n-2, 2)+k_2M(n-2, 1^2)$, где $k_1=k_2-1=(n-4)/2$, если $n=2m$, и $k_1=k_2=(n-3)/2$ для $n=2m+1$.*

Доказательство. Из определения H^2 следует, что

$$P_n(\mathfrak{M})=k_0M(n-1,\ 1)+k_1M(n-2,2)+k_2M(n-2,\ 1^2),$$

где кратности k_0, k_1, k_2 такие, как и в разложении P_n в сумме неприводимых модулей. Поэтому $k_0=1$. Все остальные неприводимые подмодули в $P_n(\mathfrak{M})$ содержатся в $P_n\cap L''$, где $L''=(L^2)^2$. Кроме того, в разложении $P_n\cap(L^2)^3$ участвуют только такие $M(\lambda)$, для которых $h(\lambda)>2$, т. е. мы можем работать по модулю $(L^2)^3$.

По модулю $(L^2)^3$ L'' имеет базис $(x_{i_1}\ldots x_{i_k})(x_{j_1}\ldots x_{j_l})$, $i_1>i_2\leqq\ldots\leqq i_k$, $j_1>j_2\leqq\ldots\leqq j_l$, $k\geqq l$, и если $k=l$, то $(i_1,\ldots,i_k)>(j_1,\ldots,j_l)$ для какого-то упорядочивания [8].

Подмодули $N_3(n-2,\ 2)$ и $N_3(n-2,\ 1^2)$ — единственные модули $N_m(\lambda)$ которые имеют ненулевые элементы в $L''^{(n-2,2,0)}$ и в $L''^{(n-2,1^2)}$. Кроме того, $\dim(N_3(n-2,2)\cap L''^{(n-2,2,0)})=\dim(N_3(n-2,2)\cap L''^{(n-2,1^2)})=\dim(N_3(n-2,1^2)\cap L''^{(n-2,1^2)})=1$, $\dim(N_3(n-2,1^2)\cap L''^{(n-2,2,0)}=0$. Следовательно, $k_1=\dim L''^{(n-2,2,0)}$, $k_1+k_2=\dim L''^{(n-2,1^2)}$. Но $L''^{(n-2,2,0)}$ и $L''^{(n-2,1^2)}$ имеют базисы соответственно $\{(x_2x_1^k)(x_2x_1^l): k+l=n-2,\ k>l\}$ и $\{(x_2x_1^k)(x_3x_1^l),\ (x_3x_1^k)(x_2x_1^l),\ (x_3x_1^m)(x_2x_1^m)$ $: k+l=n-2,\ k>l,\ m=(n-2)/2$, последний многочлен участвует в базисе только когда n — четное$\}$. Отсюда немедленно следуют формулы для k_1 и k_2.

Следствие 4. *Все различные неприводимые S_n-подмодули в $P_n(\mathfrak{M})$ порождаются линеаризациями следующих многочленов:*

(i) $h_n=yx^{n-1}$, *для* $\lambda=(n-1,1)$,

(1) (ii) $f_n=\Sigma\alpha_kf_n^k$, $f_n^k=(yx^k)(yx^{n-k-2})$, $n-2\geqq k>(n-2)/2$ *для* $\lambda=(n-2,2)$,

(iii) $g_n=\Sigma\beta_kg_n^k$, $g_n^k=(yx^k)(zx^{n-k-2})-(zx^k)(yx^{n-k-2})$,

$n-2\geqq k\geqq(n-2)/2$, *для* $\lambda=(n-2,1^2)$ *и хотя бы один из коэффициентов* α_k, β_k *не равен* 0.

Доказательство. Вместо x, y, z будем использовать x_1, x_2, x_3. Тогда:

$$h_n=-\frac{1}{2}\Sigma(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_1^{n-2},\quad \sigma\in S_2,$$

$$f_n^k=\frac{1}{4}\Sigma(-1)^\sigma(-1)^\tau(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_1^{k-1})(x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_1^{n-k-3}),\quad \sigma,\ \tau\in S_2,$$

$$g_n^k=-\frac{1}{2}\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_1^k)(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_1^{n-k-3}),\quad \sigma\in S_3.$$

Все эти многочлены порождают неприводимые $GL(3,K)$-модули, соответствующие разбиениям $(n-1,1)$, $(n-2,2)$ и $(n-2,1^2)$, соответственно. Все эти многочлены линейно независимы, и их число, когда зафиксируем n, равно кратностям $N_3(n-2,2)$ и $N_3(n-2,1^2)$ в $F_3(\mathfrak{M})$. Утверждение следует из [2].

Замечание 5. Пусть T есть T-идеал в $F(\mathfrak{M})$. Он определяется полностью элементами (1), которые содержатся в T, т. е. линейными подпространствами $H(T)$, $F(T)$ и $G(T)$, которые содержатся в линейных пространствах, порожденных элементами $h_n\{f_n^k\}$ и $\{g_n^k\}$, соответственно.

Кроме того, если T_1 и T_2 — T-идеалы в $F(\mathfrak{M})$, то

$$H(T_1+T_2)=H(T_1)+H(T_2),\quad H(T_1\cap T_2)=H(T_1)\cap H(T_2),$$

аналогично для F и G.

Поэтому, чтобы описать T-идеалы в $F(\mathfrak{M})$, достаточно указать все следствия степени $n+1$ из h_n, f_n, g_n из (1).

Следующая лемма непосредственно вытекает из следствия 2:

Лемма 6. (i) $((M(n-1,1)\downarrow S_{n-1})\otimes M(1^2))\uparrow S_{n+1}=M(n,1)+2M(n-1,1^2)+M(n-1,2)+\Sigma M(\lambda)$, *где* $h(\lambda)>2$;

(ii) $((M(n-2,2)\downarrow S_{n-1})\otimes M(1^2))\uparrow S_{n+1}=M(n-1,2)+M(n-1,1^2)+\Sigma M(\lambda)$, *где* $h(\lambda)>2$;

(iii) $((M(n-2,1^2)\downarrow S_{n-1})\otimes M(1^2))\uparrow S_{n+1}=M(n-1,2)+M(n-1,1^2)+\Sigma M(\lambda)$, *где* $h(\lambda)>2$.

Теорема 7. *Все следствия степени* $n+1$ *многочленов* h_n, f_n, g_n *из* (1) *эквивалентны:*

(i) *для* h_n: h_{n+1}; $\sum_{2j>n}\left(\binom{n-1}{j-1}-\binom{n-1}{j}\right)f^j_{n+1}$; $\sum_{2j\geq n-1}\left(\binom{n-1}{j-1}-\binom{n-1}{j+1}\right)g^j_{n+1}$; $\sum_{2j\geq n-1}\binom{n-1}{j}g^j_{n+1}$;

(ii) *для* f_n: $\sum_{k=m}^{n-2}\alpha_k(f^{k+1}_{n+1}+f^k_{n+1})$, $\sum_{k=m}^{n-2}\alpha_k(g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1})$, *если* $n=2m$,

$\sum_{k=m+1}^{n-2}\alpha_k(f^{k+1}_{n+1}+f^k_{n+1})+\alpha_m f^{m+1}_{n+1}$, $\sum_{k=m}^{n-2}\alpha_k(g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1})$, *если* $n=2m+1$;

(iii) *для* g_n: $\sum_{k=m}^{n-2}\beta_k(f^{k+1}_{n+1}-f^k_{n+1})+2\beta_{m-1}f^m_{n+1}$, $\sum_{k=m}^{n-2}\beta_k(g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1})+2\beta_{m-1}g^m_{n+1}$, *если* $n=2m$, *и*

$$\sum_{k=m+1}^{n-2}\beta_k(f^{k+1}_{n+1}-f^k_{n+1})+\beta_m f^m_{n+1},\ \sum_{k=m}^{n-2}\beta_k(g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1}),\ \textit{если}\ n=2m+1.$$

Доказательство. (i) Согласно предложению 1 и леммы 6, все следствия из h_n в $P_{n+1}(\mathfrak{M})$ составляют S_{n+1}-модуль M, $M\subset M(n,1)+M(n-1,2)+2M(n-1,1^2)$. Мы докажем, что здесь имеет место равенство. Используем соответствия модульной структуры S_n-модуля P_n и $GL(m,K)$-модуля $L^{(n)}_m$.

Подставляя yx вместо y в h_n, мы получаем h_{n+1}, т. е. $M(n,1)\subset M$.

Будем использовать формулы:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{i}=\binom{k+n+1}{n},\quad (yx^k)(zx^{n-k-2})=\sum_{i=0}^{n-k-2}(-1)^i\binom{n-k-2}{i}yx^{k+i}zx^{n-k-2-i},$$

$$yx^kzx^{n-k-2}=\sum_{i=0}^{n-k-2}\binom{n-k-2}{i}(yx^{k+i})(zx^{n-k-2-i}),\ \operatorname{lin}h_n=\Sigma x_nx_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n-1)},\ \sigma\in S_{n-1},$$

которые легко проверяются.

Подставляем yx вместо x_n, y — вместо x_{n-1}, x — вместо $x_1,\dots,x_{n-2}$ и получаем $(n-2)!\sum_{2j>n}\left(\binom{n-1}{j-1}-\binom{n-1}{j}\right)f^j_{n+1}$, т. е. $M(n-1,2)\subset M$.

Аналогично, подставляя однажды yx вместо x_n, z — вместо x_{n-1}, x — вместо $x_1,\dots,x_{n-2}$, а потом zx вместо x_n, y — вместо x_{n-1} и x — вместо $x_1,\dots,x_{n-2}$ и вычитая полученные результаты, получаем

$$(n-2)!\sum_{2j\geq n-1}\left(\binom{n-1}{j-1}-\binom{n-1}{j+1}\right)g^j_{n+1}.$$

Подставляем yz вместо x_n и x — вместо $x_1,\ldots,x_{n-1}$ и получаем $(n-1)!\sum_{2j\geq n-1}\binom{n-1}{j}g^j_{n+1}$, т. е. $2M(n-1,1^2)\subset M$.

(ii), (iii) Как и в (i), все следствия f^k_n (соотв. g^k_n) в $P_{n+1}(\mathfrak{M})$ составляют. S_{n+1}-модуль N(соотв. P), который содержится в сумме $M(n-1,2)+M(n-1,1^2)$ Мы докажем, что и здесь имеет место знак равенства.

Линеаризациями f^k_n и g^k_n являются соответственно:

$\Sigma\Sigma(x_{\tau(n)}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(k)})(x_{\tau(n-1)}x_{\sigma(k+1)}\ldots x_{\sigma(n-2)})$, где S_2 действует на $\{n-1,\ n\}$, и $\Sigma\Sigma(-1)^\tau(x_{\tau(n)}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(k)})(x_{\tau(n-1)}x_{\sigma(k+1)}\ldots x_{\sigma(n-2)})$, $\tau\in S_2$, где S_2 действует на $\{n-1,\ n\}$.

Подставляя соответственно yx вместо x_n, y — вместо x_{n-1}, x — вместо $x_1,\ldots,x_{n-2}$, получаем, что из f^k_n следует $f^{k+1}_{n+1}+f^k_{n+1}$ для $2k>n-1$, и f^{k+1}_{n+1} для $2k=n-1$.

Аналогично, из g^k_n следует $f^{k+1}_{n+1}-f^k_{n+1}$ для $2k>n-1$, f^{k+1}_{n+1} для $2k=n-1$, и $2f^{k+1}_{n+1}$ для $2k=n-2$.

Подставляем сначала yx вместо x_n, z — вместо x_{n-1}, x — вместо $x_1,\ldots,x_{n-2}$, потом zx — вместо x_n, y — вместо x_{n-1} и x — вместо $x_1,\ldots,x_{n-2}$. Вычитаем эти два тождества и получаем, что:

из f^k_n следует $g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1}$ для $2k\geq n-1$,

из g^k_n следует $g^{k+1}_{n+1}-g^k_{n+1}$ для $2k>n-2$, а $2\cdot g^{k+1}_{n+1}$, когда $2k=n-2$.

Таким образом, $N\cong P\cong M(n-1,2)+M(n-1,1^2)$.

Мы получили следствия f^k_n и g^k_n „синхронно" для любого k, и отсюда следует утверждение теоремы.

4. Описание T-идеала H^2. В [1] доказано, что T-идеал H^d порождается своими полилинейными многочленами q_λ, которые порождают неприводимые S_n-модули $M(\lambda)$, такие, что высота $h(\lambda)$ равна $d+1$ или $d+2$.

Лемма 8. *T-идеал H^d порождается многочленами q_λ, для которых $h(\lambda)=d+1$.*

Доказательство. Пусть $P_n\cap H^d=\Sigma M(\mu)+\Sigma M(\nu)$, где $h(\mu)$ равно $d+1$ или $d+2$, $h(\nu)>d+2$. Не теряя общности, мы будем рассматривать только те многочлены f_μ, для которых $h(\mu)=d+2$.

Элементы P_n левонормированные, поэтому P_n является гомоморфным образом $(P_{n-1}\otimes P_1)\uparrow S_n$. Пусть $P_{n-1}=\Sigma k(\lambda)M(\lambda)$, где суммирование ведется по разбиениям $n-1$.

Тогда $(P_{n-1}\otimes P_1)\uparrow S_n=\Sigma k(\lambda)(M(\lambda)\otimes M(1))\uparrow S_n$. Согласно следствию 2, неприводимые компоненты $M(\mu)$ высоты $d+2$ из P_{n+1} получаются из тех $(M(\lambda)\otimes M(1))\uparrow S_n$, для которых $h(\lambda)$ равно $d+1$ или $d+2$. Поэтому f_μ является следствием из тождеств f_λ в H^d степени $n-1$, для которых $h(\lambda)$ равно $d+1$ или $d+2$. Потом — индукция по n.

Следующая теорема утверждает, что T- идеал H^2 порождается своими полилинейными тождествами пятой степени.

Теорема 9. *Тождества:*

$$v_4=\Sigma(-1)^\sigma(x_2x_1x_{\sigma(1)})(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}),\quad \sigma\in S_3,$$
$$v_5=\Sigma(-1)^\sigma(x_1x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}),\quad \sigma\in S_4$$

составляют базис T-идеала H^2.

Доказательство. По лемме 8, для нахождения минимальной системы образующих H^2, мы ограничимся рассмотрением многочленов q_λ, для которых $h(\lambda)=3$. Используем разложение P_5 и P_6 в сумме неприводимых модулей из [3], а также и обозначения, принятые там:

$$P_5=M(4,1)+M(3,2)+M(3,1^2)+M(2,2,1)+M(2,1^3),$$

где $M(2, 2, 1)$ и $M(2, 1^3)$ порождаются соответственно линеаризациями многочленов из $H^2\cap P_5$,

$$v_4=\Sigma(-1)^\sigma(x_2x_1x_{\sigma(1)})(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}),\quad v_5=\Sigma(-1)^\sigma(x_1x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}).$$

Сначала покажем, что можно работать по модулю $(L^2)^3$. Из [3] следует, что $P_6\cap(L^2)^3=M(3,2,1)+M(2,2,1^2)+M(2,1^4)$, и модули справа порождаются линеаризациями

$$w_6=\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_1)(x_2x_1)(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}),$$

$$w_7=\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})(x_2x_1)(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}),$$

$$w_8=\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_1)(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}),$$

$\sigma\in S_3$, S_4, S_5 соответственно.

Тождество v_5 эквивалентно $\Sigma(-1)^\sigma y(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})$. В этом новом тождестве подставляем x_2x_1 вместо y и получаем w_7. Аналогично, умножая его на $x_{\sigma(5)}$ и суммируя знакопеременно, мы получаем w_8.

Линеаризуем v_4 по x_2, пусть вместо x_2 подставим $u+v$, вместо x_3 — w, и пусть

$$V(x_1,u,v,w)=(ux_1^2)(wv)+(vx_1^2)(wu)-(ux_1v)(wx_1)-(vx_1u)(wx_1)$$

$$-(wux_1)(vx_1)-(wvx_1)(ux_1)+(wx_1u)(vx_1)+(wx_1v)(ux_1).$$

Пусть $z_1=V(x_1, x_2x_1, x_2, x_3)$, $z_2=V(x_1, x_2x_1, x_3, x_2)$, $z_3=V(x_1, x_3x_1, x_2, x_2)$, $z_4=V(x_1, x_3, x_2, x_2x_1)$. В $v_5=v_5(x_1, x_2, x_3, x_4)$ подставляем x_2x_1 вместо x_4 и получаем $z_5=v_5(x_1, x_2, x_3, x_2x_1)$.

Тогда $w_6=-(z_1+z_2+z_3)/2=-(z_1+2z_3+z_5)/2$, т. е. w_6 следует из v_4 и v_5.

Следовательно, все неприводимые подмодули $P_6\cap(L^2)^3$ содержатся в H^2 и мы можем работать по модулю $(L^2)^3$. Справедливо сравнение

$$(x_1x_2x_3x_4)(x_5x_6)\equiv(x_1x_2x_4x_3)(x_5x_6)\ (\mathrm{mod}\,(L^2)^3). \tag{2}$$

Неприводимые подмодули в P_n высоты 3 соответствуют разбиениям $(n-3,1^3)$, $(n-3, 2, 1)$ или $(n-3, 3)$. Используя (2) и тождество Якоби (в виде $u_1u_2u_3=u_1u_3u_2-u_2u_3u_1$), получаем, что в P_n подмодули $M(n-3, 1^3)$ порождаются линеаризациями линейных комбинаций из:

$$p_n^k=p_n^k(x_1, x_2, x_3, x_4)=\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_1^k)(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_1^l),\quad \sigma\in S_4,$$

где $k+l=n-4$, $k\geq l\geq 0$.

Таким же способом подмодули $M(n-3, 2, 1)$ получаются из

$$q_n^k=q_n^k(x_1, x_2, x_3)=\Sigma(-1)^\sigma(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_1^k)(x_2x_1^lx_{\sigma(3)}),\quad \sigma\in S_3,$$

где $k+l=n-4$, $k, l\geq 0$, и

$$r_n^k=r_n^k(x_1, x_2, x_3)=\Sigma(-1)^\sigma(-1)^\tau(x_{\sigma(1)}x_1^kx_{\tau(1)})(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_1^lx_{\tau(2)}),$$

где $\sigma \in S_3$, $\tau \in S_2$, $k+l=n-5$, $k, l \geqq 0$.

Образующие $M(n-3, 3)$ получаются из

$$S_n^k = S_n^k(x_1, x_2) = \Sigma(-1)^\tau (x_2 x_1^k x_{\tau(1)})(x_2 x_1^l x_{\tau(2)}), \quad \tau \in S_2,$$

для $k+l=n-4$, $k, l \geqq 0$.

Тогда $q_n^k(x_1, x_2, x_2x_1) = S_{n+1}^{k+1}$,

$p_n^k(x_1, x_2, x_3, x_4x_1) + p_n^k(x_1, x_2, x_1x_3, x_4) + p_n^k(x_1, x_2x_1, x_3, x_4) = p_{n+1}^{k+1} + p_{n+1}^k$.

Пусть $q_n^k(x_1, u+v, w) = Q_n^k(x_1, u, v, w)$, т. е.

$$Q_n^k = -(ux_1^{k+1})(vx_1^l w) - (vx_1^{k+1})(ux_1 w) - (wux_1^k)(vx_1^{l+1}) - (wvx_1^k)(ux_1^{l+1}) + (wx_1^{k+1})(vx_1^l u). \tag{3}$$

Из (3) получаем $a^k = Q_n^k(x_1, x_2x_1, x_2, x_3)$, $b^k = Q_n^k(x_1, x_2, x_2, x_3x_1)$, $c^k = Q_n^k(x_1, x_3, x_2, x_2x_1)$. Аналогично получаем R_n^k из r_n^k и $a_1^k = R_n^k(x_1, x_3, x_2, x_2x_1)$, $b_1^k = R_n^k(x_1, x_2, x_2, x_3x_1)$, $c_1^k = R_n^k(x_1, x_3, x_2, x_2x_1)$.

Тогда $q_{n+1}^k = b^{k+1} + b_1^{k+1} + c^k + c_1^k - b^{k-1}$, $r_{n+1}^{k+1} = b^{k+1} + b_1^{k+1} - b^k$, $r_{n+1}^{k+1} - r_{n+1}^k = a^k - b^k$. Таким образом, все r_{n+1}^k следуют из v_4 и v_5. Но $q_{n+1}^{k+1} - q_{n+1}^k = a^k + b^k$, мы уже получили q_{n+1}^{n-4}, поэтому отсюда имеем q_{n+1}^{n-3} (для $k=n-4$).

Как и прежде, из (3) получаем $A^k = Q_n^k(x_1, x_4, x_3x_1, x_2)$, $A_1^k = Q_n^k(x_1, x_2, x_3x_1, x_4)$, $B^k = Q_n^k(x_1, x_3, x_4x_1, x_2)$, $B_1^k = Q_n^k(x_1, x_2, x_4x_1, x_3)$ $C^k = Q_n^k(x_1, x_4, x_2x_1, x_3)$ $C_1^k = Q_n^k(x_1, x_3, x_2x_1, x_4)$.

Пусть $D^k = (B^k - B_1^k) + (C^k - C_1^k) - (A^k - A_1^k)$. Тогда $D^k - D^{l+1} = -p_{n+1}^{k+1} + 3p_{n+1}^{k-1}$ $(k+l=n-4)$.

Но мы уже получили $p_{n+1}^{k+1} + p_{n+1}^k$ и снова все p_{n+1}^k следуют из v_4 и v_5. Таким образом, доказательство теоремы полностью завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Бенедиктович, А. Е. Залесский. *T*-идеалы свободных алгебр Ли с полиномиальным ростом коразмерностей. *Известия АН БССР, сер. физико-матем. наук*, 1980, № 3, 5—10.
2. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр *Мат. сб.*, **115**, 1981, 98—115.
3. В. С. Дренски. О решетках многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика*, **8**, 1982, 20—31.
4. Ю. А. Бахтурин. О тождествах в метабелевых алгебрах Ли. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, вып. 1, 1975, 45—56.
5. J. A. Bahturin. Lectures on Lie Algebras. Berlin, 1978.
6. Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп. Москва, 1982.
7. J. A. Green. Polynomial Representations of GL_n. *Lecture Notes in Math.*, **830**, 1980.
8. А. Л. Шмелькин. Свободные полинильпотентные группы. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **28**, 1964, 91—122.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 16. 3. 1983