PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ИНВАРИАНТЫ УЛЬМА—КАПЛАНСКОГО СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП ГРУПП НОРМИРОВАННЫХ ЕДИНИЦ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР БЕСКОНЕЧНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть KG — групповая алгебра абелевой p-группы G над полем K, характеристика которого отлична от p, $S(KG)$ — силовская p-подгруппа группы $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG, $f_\alpha(S)$ — α-ый инвариант Ульма—Капланского группы $S(KG)$, где α — любое порядковое число и ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля K, $i \in N_0=\{0, 1, 2, \dots\}$. Следуя С. Д. Бермана [1967], назовем поле K полем первого рода относительно p, если степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots):K)=\infty$, а в противном случае — полем второго рода относительно p. Если K — поле первого рода относительно p, то множество $s_p(K)=\{i \in N_0 | K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})\}$ называется спектром поля K относительно p. В настоящей работе доказано, что если G — бесконечная сепарабельная абелева p-группа, B — ее базисная подгруппа и K — поле первого рода относительно p, то $S(KG)$ — сепарабельная абелева p-группа и для каждого $i \in N_0$ выполнено

$$f_i(S)=\begin{cases} |B|, & \text{если } i+1 \in s_p(K), \\ 0, & \text{если } i+1 \notin s_p(K). \end{cases}$$

Пусть G — абелева p-группа, $|G|$ — мощность G и K — поле, характеристика которого отлична от p, т. е. KG — полупростая групповая алгебра. Берман и Росса [2] дают описание силовской p-подгруппы $S(KG)$ группы $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG, когда группа G счетна. В [4] изучена группа $S(KG)$, когда K — поле второго рода относительно p, а G — любая бесконечная абелева p-группа. Когда K — поле первого рода относительно p и G — бесконечная абелева p-група, в [4] доказано, что a) $S(KG) \cong \Pi_{|G|} Z(p^\infty) \times S(K(G/G^1))$, где $Z(p^\infty)$ — квазициклическая группа типа p^∞ и G^1 — подгруппа элементов бесконечной высоты группы G, т. е. $S(KG)$ изоморфна (ограниченному) прямому произведению группы $S(K(G/G^1))$ и $|G|$ групп типа $Z(p^\infty)$, и b) если группа G сепарабельна, то $S(KG)$ сепарабельна. Таким образом, естественно возникает задача вычисления инвариантов Ульма—Капланского группы $S(K(G/G^1))$ для поля K первого рода относительно p, т. е. для вычисления i-ого инварианта $f_i(S)$ Ульма—Капланского групп $S(KG)$ для любого $i \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, когда группа G сепарабельна. Результаты статьи анонсированы в [5].

Если $r(G)$ — ранг абелевой p-группы G ([6, с. 103]), $G[p]=\{g \in G | g^p=1\}$ и $G^{p^i}=\{g^{p^i} | g \in G\}$ для $i \in N_0$, то i-ый инвариант $f_i(G)$ Ульма—Капланского группы G определяется следующим образом: $f_i(G)=r(G^{p^i}[p]/G^{p^{i+1}}[p])$([6, с. 182]). Пусть χ — характер абелевой p-группы G. Обозначим через $K(\chi)$ поле, полученное в результате присоединения всех значений характера χ группы G к полю K. Если H — конечная подгруппа группы G и идемпотент e алгебры KH соответствует ограничению $\chi|_H$ характера χ на подгруппе H, то будем говорить, что характер χ проходит через идемпотент e. Пусть ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы и K — поле первого рода относительно p. Тогда спектр $s_p(K)$ поля K относительно p определяется следующим образом: $s_p(K) = \{i \in N_0 | K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})\}$. Если K — поле первого рода относительно p, то существует такое натуральное число $t = t(p)$, которое назовем константой поля K относительно p, что $K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})$ при $i \geqq t$, причем $K(\varepsilon_1) = \ldots = K(\varepsilon_t)$, если $p \neq 2$, и $K(\varepsilon_2) = \ldots = K(\varepsilon_t)$), если $p = 2$ (см. [1]). Через Z_p будем обозначать поле, состоящее из p-элементов. Отметим, что ввиду мультипликативной записи рассматриваемых абелевых групп, будем говорить не о прямой сумме этих групп, а об их (ограниченном) прямом произведении. Докажем предварительно некоторые вспомагательные утверждения.

Предложение 1. *Пусть G — сепарабельная абелева p-группа, K — коммутативное кольцо с единицей и H — сервантная подгруппа группы G. Тогда группа $V(KH)$ нормированных единиц алгебры KH и ее силовская q-подгруппа $S_q(KH)$, где q — любое простое число сервантны соответственно в $V(KG)$ и в $S_q(KG)$.*

Доказательство. Пусть $a \in S_q(KH)$ и уравнение

$$x^{q^m} = a \tag{1}$$

разрешимо в $S_q(KG)$. Тогда $a \in S_q(KF)$, где F — конечный прямой множитель группы H. Так как подгруппа H сервантна в G, то F — прямой множитель группы G. Следовательно, ввиду леммы 6 [4], $S_q(KG) = S_q(KF) \times T$ для некоторой подгруппы T группы $S_q(KG)$, т. е. $S_q(KF)$ сервантна в $S(KG)$. Следовательно, уравнение (1) имеет решение и в $S_q(KF) \subseteq S_q(KH)$. Аналогично доказывается, что $V(KH)$ — сервантная подгруппа группы $V(KG)$.

Лемма 2. *Если G — сепарабельная абелева p-группа с неограниченным показателем, K — поле первого рода относительно p и $i+1 \in s_p(K)$, то $f_i(S) \geqq |B|$, где B — базисная подгруппа группы G.*

Доказательство. Так как B — сервантная подгруппа группы G, то, ввиду предложения 1, $S(KB)$ — сервантная подгруппа группы $S(KG)$. Поскольку B — прямое произведение циклических групп, то $S(KB)$ — прямое произведение циклических групп и $S(KB) = T_{i+1} \times \overline{T}_{i+1}$, где T_{i+1} и $\overline{T}_{i+1}$ — подгруппы группы $S(KB)$, $T_{i+1} \cong \Pi_{|B|}(p^{i+1})$ и (p^{i+1}) — циклическая группа порядка p^{i+1} (см. [4]). Так как T_{i+1} имеет конечный показатель и T_{i+1} сервантна в $S(KB)$, а $S(KB)$ сервантна в $S(KG)$, то T_{i+1} — прямой множитель группы $S(KG)$. Следовательно, $f_i(S(KG)) \geqq f_i(T_{i+1}) = |B|$.

Предложение 3. *Пусть H — конечная абелева p-группа, K — поле первого рода относительно p, $a \in S(KH)$ и $i \in s_p(K)$. Если уравнение $x^{p^\lambda} = a$ разрешимо в групповой алгебре $K(\varepsilon_i)H$, где $\lambda \geqq i$, λ — целое число, то это уравнение разрешимо и в $S(KH)$.*

Доказательство. Пусть E — множество минимальных идемпотентов алгебры KH. Покажем, что если e — любой идемпотент множества E, то уравнение

$$x^{p^\lambda} = ae \tag{2}$$

разрешимо в KH. Действительно, если $ae = e$, то (2) имеет тривиальное решение. Пусть $ae \neq e$ и x — решение (2) в $K(\varepsilon_i)H$. Если T — множество K-сопряженных характеров группы H, которому соответствует идемпотент e, то для каждого $\chi \in T$ имеет место $K(\chi) = K(\varepsilon_q)$, где q — фиксированное число спектра $s_p(K)$, т. е. не зависит от выбора характера χ множества T. Пусть $e=\Sigma_{u\in U}u$ — разложение идемпотента e в сумме минимальных идемпотентов алгебры $K(\varepsilon_i)H$ и порядок $O(ae)$ элемента ae равняется r. Докажем, что $i<q$. Допустим, что $i\geq q$. Из (2) следует, что $O(xe)=p^{\lambda+r}$. Следовательно, $O(xu)=p^{\lambda+r}$ по крайней мере для одного $u\in U$. Если через $K(\varepsilon_i)Hu$ обозначим идеал алгебры $K(\varepsilon_i)H$, порожденный идемпотентом u, то $xu\in K(\varepsilon_i)Hu\cong K(\varepsilon_i)(\chi)=K(\varepsilon_i, \varepsilon_q)=K(\varepsilon_i)$ для некоторого $\chi\in T$, откуда получается, что $O(xu)\leq p^i$, т. е. $p^{\lambda+r}\leq p^i$ или $\lambda+r\leq i$. Следовательно, $\lambda<i$, что является противоречием. Таким образом, $i<q$. Тогда аналогично получается $K(\varepsilon_i)Hu\cong K(\varepsilon_q)$. Из $O(ae)=p^r$ следует, что $O(au)=p^r$ для некоторого $u\in U$. Кроме того, имеет место $K(\varepsilon_i)Hu\cong K(\varepsilon_q)\cong KHe$. Из $x^{p^\lambda}=a$ вытекает $x^{p^\lambda}u=au$. Так как $O(au)=O(ae)$, то можно найти такой изоморфизм $\varphi:(K(\varepsilon_i)Hu)_p\to(KHe)_p$, где $(K(\varepsilon_i)Hu)_p$ и $(KHe)_p$ — силовские p-подгруппы мультипликативных групп соответственно полей $K(\varepsilon_i)Hu$ и KHe, что $\varphi(au)=ae$. Если $\varphi(xu)=ye$, то $y^{p^\lambda}e=ae$, т. е. уравнение (2) разрешимо в силовской p-подгруппе $S^*(KH)$ мультипликативной группы $U(KH)$ алгебры KH. Так как $S^*(KH)=K_p\times S(KH)$, где K_p — силовская p-подгруппа мультипликативной группы поля K, то уравнение $x^{p^\lambda}=a$ разрешимо в $S(KH)$. Предложение доказано.

Лемма 4. *Пусть G — абелева p-группа, K — поле первого рода относительно p и $i+1\in s_p(K)$. Тогда $f_i(S(KG))\leq f_i(S(K(\varepsilon_{i+1})G))$.*

Доказательство. Обозначим $K(\varepsilon_{i+1})=K_{i+1}$, $S=S(KG)$ и через $h_G(g)$ — высоту элемента g в группе G. Тогда существует такое подмножество M группы S, что $|M|=f_i(S)$ и которое удовлетворяет следующие три условия: 1) каждый элемент a множества M принадлежит нижнему слою $S(KG)[p]$ группы $S(KG)$; 2) $h_S(a)=i$ для каждого $a\in M$; 3) для любых различных элементов a и b множества M имеет место $h_S(ab^{-1})=i$.

Рассмотрим множество M в $S(K_{i+1}G)$. Оно обладает очевидно свойством 1). Если допустим, что высота элемента a в $S(K_{i+1}G)$ не меньше $i+1$, то уравнение $x^{p^{i+1}}=a$ будет разрешимо в алгебре $K_{i+1}H$ для некоторой конечной подгруппы H группы G и, следовательно, ввиду предложения 3, то же самое уравнение будет разрешимо и в $S(KH)$, т. е. $h_S(a)\geq i+1$, что противоречит свойству 2) элементов множества M. Аналогично доказывается, что если a и b — любые элементы множества M, то высота произведения ab^{-1} в $S(K_{i+1}G)$ равна i. Лемма доказана.

Пусть F — конечная абелева группа, L — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы F, e — идемпотент алгебры LF, соответствующий характеру χ группы F. Идемпотент e называется одномерным, а характер χ — одномерным или L-характером группы F, если $L(\chi)=L$, т. е. если $LFe\cong L$.

Лемма 5. *Пусть G — сепарабельная абелева p-группа, F — конечная подгруппа группы G и L — поле первого рода относительно p. Если e — одномерный идемпотент алгебры LF, который соответствует характеру φ группы F и φ не продолжается до L-характера группы G, то существует такая конечная подгруппа $\overline{F}$ группы G, содержащая F, что идемпотент e разлагается в $L\overline{F}$ в сумме неодномерных идемпотентов.*

Доказательство. Допустим, что для каждой конечной подгруппы A группы G, содержащей F, e имеет в LA одномерную компоненту. Пусть $\overline{G}$ — конечный прямой множитель группы G и $\overline{G}\supseteq F$. Тогда e имеет в $L\overline{G}$ одномерную компоненту u, т. е. $e=u+\ldots$ и u соответствует одномерному характеру χ группы $\overline{G}$. Очевидно $\chi|_F=\varphi$. Так как $\overline{G}$ — пряомй множитель группы G, то χ продолжается тривиально до L-характера группы G. Следовательно, φ продолжается до L-характера группы G, что есть противоречие. Следовательно, для идемпотента e существует такая конечная подгруппа $\bar{F}$ группы G, содержащая F, что e разлагается в $L\bar{F}$ в сумме неодномерных идемпотентов. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — абелева p-группа, H и F — конечные подгруппы группы G, K — поле, характеристика которого отлична от p, и χ — одномерный характер группы G, а u и v — минимальные идемпотенты соответственно алгебр KH и KF. Характер χ проходит через идемпотент uv алгебры $K(HF)$ тогда и только тогда, когда χ проходит через u и v.*

Доказательство. Необходимость. Разложим u и v в $K(HF)$ в сумме минимальных идемпотентов:

$$u=\sum_{u'\in M} u', \quad v=\sum_{v'\in N} v', \tag{3}$$

где M, N — подмножества множества минимальных идемпотентов алгебры $K(HF)$. Тогда

$$uv=\sum_{t\in M\cap N} t,$$

Так как uv — минимальный идемпотент алгебры $K(HF)$, то $M\cap N=\{uv\}$. Тогда (3) можно записать в виде $u=uv+\ldots$ и $v=uv+\ldots$ Поскольку uv соответствует ограничению $\chi|_{HF}$, то из полученных двух разложений вытекает, что u соответствует характеру $\chi|_H$, а v — характеру $\chi|_F$, т. е. χ проходит через u и v.

Достаточность. Пусть характеру χ соответствует идемпотент e алгебры $K(HF)$. Докажем, что $e=uv$. Так как χ проходит через u и v, то $u=e+\ldots$ и $v=e+\ldots$. Тогда $uve=ue.ve=ee=e$, т. е. $uve\neq 0$. В силу того, что uv и e — минимальные идемпотенты алгебры $K(HF)$ и их произведение $uv.e\neq 0$, то они совпадают. т. е. $uv=e$ или χ проходит через uv. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть G — бесконечная сепарабельная абелева p-группа, B — ее базисная подгруппа и K — поле первого рода относительно p. Тогда силовская p-подгруппа $S(KG)$ группы $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG сепарабельна и если i — целое неотрицательное число, то для i-ого инварианта $f_i(S)$ Ульма—Капланского группы $S(KG)$ имеет место*

$$f_i(S)=\begin{cases} |B|, & \text{если } i+1\in s_p(K),\\ 0, & \text{если } i+1\notin s_p(K).\end{cases}$$

Доказательство. В [4] доказано, что $S(KG)$ — сепарабельная группа. Рассмотрим сначала случай, когда $i+1\notin s_p(K)$, где $i\in N_0$. Пусть x — такой элемент нижнего слоя $S[p]$, что $x=y^{p^i}$, где $y\in S(KG)$. Элемент $y\in KF$, где F — конечная подгруппа группы G. Следовательно, x принадлежит прямому произведению A циклических групп порядка p^j, где j пробегает $s_p(K)$. Так как $i+1\notin s_p(K)$, то в A нет циклических прямых множителей порядка p^{i+1}. Следовательно, поскольку $x=y^{p^i}$ — элемент нижнего слоя $A[p]$, то справедливо $h_A(x)>i$, т. е. элементов группы $S[p]$ с высотой i нет и $f_i(S)=0$.

Пусть $i+1\in s_p(K)$. Если G — прямое произведение циклических групп, то $|G|=|B|$ и $f_i(S)=|B|$ (см. [4]). Пусть G не является прямым произведением циклических групп. Из первой и второй теорем Прюфера [3, с. 164], следует, что G — несчетная группа с неограниченным показателем. Тогда B также с неограниченным показателем. Введем обозначение $L=K(\varepsilon_{i+1})$. Пусть M — подмножество группы $S(LG)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $M\subseteq S(LG)[p]$; 2) $h_S(x)=i$ для всех $x\in M$, где $S=S(LG)$ и 3) $h_S(yz^{-1})=i$ для всех $y, z\in M$, $y\neq z$. Докажем, что $|M|\leq|B|$. Допустим противное, что $|M|>|B|$. Для каждого $x\in M$ зафиксируем такую конечную подгруппу H_x группы G, что $x\in LH_x$. Так как $G=BG^{p^{i+1}}$ [6, с. 170, свойство A], то можно выбрать полную систему Π представителей смежных классов группы G по подгруппе $G^{p^{i+1}}$, содержащуюся в B. Таким образом, мы имеем отображение $l: G\to\Pi$, сопоставляющее каждому $g\in G$ единственный элемент $l(g)=g'\in\Pi\cap gG^{p^{i+1}}$. Обозначим через $l(H)$ образ любого подмножества H группы G при отображении l. Так как $\Pi\subseteq B$, то $|\Pi|\leq|B|$. Теперь определим отображение $\Phi: M\to\mathfrak{B}(\Pi)$, где $\mathfrak{B}(\Pi)$ — множество всех конечных подмножеств множества Π, полагая $\Phi(x)=l(H_x)$ для всех $x\in M$. Рассмотрим полные прообразы всех элементов множества $\operatorname{Im}\Phi$. Если все эти полные прообразы конечны, то получится $|M|=|\operatorname{Im}\Phi|\leq|\mathfrak{B}(\Pi)|=|\Pi|\leq|B|$, что противоречит условию $|M|>|B|$. Следовательно, существует множество $T\in\operatorname{Im}\Phi$, полный прообраз U которого бесконечен. Так как группа G сепарабельна, то конечное множество T можно вложить в конечный прямой множитель A группы G. Для каждого $x\in U$ положим $H_xA=F_x$. Тогда $x\in LF_x$. Если H — подгруппа группы G, то обозначим через $\mathfrak{X}(H)$ множество всех L-характеров группы H, которые обладают продолжениями до L-характеров группы G. Докажем, что существует биективное отображение $\psi:\mathfrak{X}(F_x)\to\mathfrak{X}(A)$. Для этой цели положим $\psi(\chi)=\chi|_A$ для всех $\chi\in\mathfrak{X}(F_x)$. Отображение ψ корректно определено, так как $A\subseteq F_x$. Чтобы доказать инъективность, допустим что $\chi_1|_A=\chi_2|_A$, $\chi_1, \chi_2\in\mathfrak{X}(F_x)$. Докажем, что $\chi_1=\chi_2$. Действительно, если $h\in H_x$, то $h=h'h''$, где $h'\in T\subseteq A$, а $h''\in G^{p^{i+1}}$. Пусть φ_i являются L-характерами группы G, продолжающие χ_i, $i=1, 2$. Тогда $\chi_1(h)=\chi_1(h'h'')=\varphi_1(h')\varphi_1(h'')=\varphi_1(h')$, где второе равенство следует из того, что φ_1 — продолжение характера χ_1, а третье вытекает из $h''\in G^{p^{i+1}}\subseteq\operatorname{Ker}\varphi_1$. Следовательно, $\chi_1(h)=\varphi_1(h')$ и аналогично $\chi_2(h)=\varphi_2(h')$. Однако, $\varphi_1(h')=\varphi_2(h')$, так как $h'\in A$ и $\varphi_1|_A=\chi_1|_A=\chi_2|_A=\varphi_2|_A$. Таким образом $\chi_1(h)=\chi_2(h)$. Если $f\in F_x$, то $f=ha$, где $h\in H_x$ и $a\in A$. Тогда $\chi_1(f)=\chi_1(h)\chi_1(a)=\chi_2(h)\chi_2(a)=\chi_2(f)$, т. е. $\chi_1=\chi_2$. Следовательно, отображение ψ инъективно. Пусть теперь $\chi\in\mathfrak{X}(A)$. Так как A — прямой множитель группы G, то существует такой L-характер φ группы G, что $\varphi|_A=\chi$. Введем обозначение $\varphi|_{Fx}=\varphi_x$. Тогда $\varphi_x|_A=\chi$, что доказывает сюръективность отображения ψ. Следовательно, ψ — биективное отображение. Так как существует биективное отображение множества $\mathfrak{X}(F_x)$ на множество $E_x=\{e_{x1},\ldots, e_{xn}\}$ всех идемпотентов алгебры LF_x, через которые приходят L-характеры группы G, то существует биективное отображение множества $\mathfrak{X}(A)$ на множество E_x.

Из вышеизложенного видно, что номерацию идемпотентов в E_x можно сделать так, чтобы для переменного $x\in U$ и для постоянного i через идемпотенты e_{xi} переходил один и тот же L-характер группы G. Каждый элемент $x\in U$, ввиду того, что $x\in S(LG)[p]$, можно записать однозначно в виде $x=x'+x''$, где

$$x'=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_1^{r_{xj}}e_{xj},\quad r_{xj}\in N_0. \tag{4}$$

x'' — сумма элементов вида xe, e — идемпотент алгебры LF_x, через который не проходит L-характер группы G, и $x^p e = e$. Слагаемое x' назовем h — лучем элемента x. Очевидно h-луч x' элемента x определяется однозначно элементом x. Пусть $\mathfrak{X}(A) = \{w_1, \ldots, w_n\}$ и W — векторное пространство над полем Z_p с базисом $w_1, \ldots, w_n$. Зададим отображение $\varphi : U \to W$ следующим образом: для каждого $x \in U$ с h-лучом x', записанным в виде (4), положим $\varphi(x) = \Sigma_{j=1}^{n} r_{xj} w_j$, где коэффициенты r_{xj} берутся по модулю p. Так как W — конечное пространство, а U — бесконечное множество, то существуют по крайней мере два различные элемента y и z множества U, такие, что $\varphi(y) = \varphi(z)$. Следовательно, y и z будут иметь одинаковые коэффициенты перед идемпотентами e_{yj} и e_{zj} своих h-лучей y' и z' для каждого фиксированного j, $j = 1, \ldots, n$. Если E_y и E_z — множества минимальных идемпотентов соответственно алгебр LF_y и LF_z, то yz^{-1} можно записать в виде $yz^{-1} = e_{y1}e_{z1} + \ldots + e_{yn}e_{zn} + a$, где в a участвуют как слагаемые идемпотенты вида uv, взятые с некоторыми коэффициентами из алгебры LG, где $u \in E_y$, $v \in E_z$, и или a) u и v — одномерные идемпотенты и через них проходят различные L-характеры группы G, или b) u и v — одномерные идемпотенты и по крайней мере через один из них не проходит L-характер группы G, или c) по крайней мере один из идемпотентов u и v неодномерен. Если имеет место a) или b), то, ввиду леммы 6, через uv не проходит L-характер группы G и, следовательно, в силу леммы 5, существует такая подгруппа $\bar{F}$ группы G, содержащая F, что uv разлагается в сумму неодномерных идемпотентов в $L\bar{F}$. Если имеет место c), то очевидно uv разлагается в сумму неодномерных идемпотентов в некоторой алгебре $L\bar{F}$, где $\bar{F}$ — конечная подгруппа группы $\bar{G}$ и $\bar{F} \supseteq F$. Следовательно, слагаемые a_j, участвующие в a, принадлежат соответственно полям P_j, для которых $P_j \supseteq U_j \cong L(\varepsilon_{i+2}) \supset L$ и U_j — подполе поля P_j. Так как $a_j^p = 1$, то элементы a_j имеют в соответствующих силовских p-подгруппах $(P_j)_p$ высоту больше чем i и $h_S(yz^{-1}) \geq i+1$, $S = S(LG)$, что противоречит свойству 3) множества M. Следовательно, $f_i(S(LG)) \leq |B|$. Однако, ввиду леммы 4, $f_i(S(KG)) \leq f_i(S(LG))$, где $L = K(\varepsilon_{i+1})$. Следовательно, $f_i(S(KG) \leq |B|$. Так как, в силу леммы 2, $f_i(S(KG)) \geq |B|$, то $f_i(S(KG)) = |B|$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math.*, 14, 1967, 356—405.
2. С. Д. Берман, А. П. Росса. Силовская p-подгруппа групповой алгебры счетной абелевой p-группы. *Доповідi АН УРСР*, 10, 1968, 870—872.
3. А. Г. Курош. Теория групп. Москва, 1967, с. 648.
4. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групп нормированных единиц полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Плиска*, 8, 1986, 34—46.
5. Т. Ж. Моллов. Инварианты Ульма — Капланского силовских p-подгрупп групп нормированных единиц полупростых групповых алгебр бесконечных сепарабельных абелевых p-групп. *Доклады БАН*, 36, 1983, 1013—1014.
6. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. Москва, 1974, с. 353.

Поступила 20.3.1983

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария