PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ФОРМУЛЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

БИСТРА Б. ЦАРЕВА

Пусть в двумерном пространстве Вейля W_2 с основным тензором g_{is} и дополнительным вектором T_k сеть (v, w) принята за координатную. В настоящей работе найдены: координаты трансверсальных векторов полей v_i и w_i; чебышевские и геодезические кривизны координатных линий; коэффициенты связности и кривизны пространства W_2. Получены основные формы пространства W_2 в параметрах следующих специальных сетей: полугеодезических, получебышевских, $Б_1$, $Б_2$, изочебышевских и изогеодезических.

1. Основная форма пространства W_2.

(1) $$\Phi = A^2(u, v)du^2 + 2A(u, v)C(u, v)\cos\omega\, du dv + C^2(u, v)dv^2,$$

где ω — угол сети (v, w). Направляющие векторы v_i и w_i нормированы согласно [1].

Для основного тензора, основной компоненты дискриминантного бивектора, версора и направляющих векторов координатных линий имеем, как и в [2],

(2) $$g_{11} = A^2, \quad g_{12} = AC\cos\omega, \quad g_{22} = C^2;$$

(3) $$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = AC\sin\omega, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = (AC\sin\omega)^{-1};$$

(4) $$g^{11} = (A\sin\omega)^{-2}, \quad g^{12} = -\operatorname{cotg}\omega\,(AC\sin\omega)^{-1}, \quad g^{22} = (C\sin\omega)^{-2};$$

(5) $$g_1^1 = -g_2^2 = \operatorname{cotg}\omega, \quad g_1^2 = -A(C\sin\omega)^{-1}, \quad g_2^1 = C(A\sin\omega)^{-1};$$

(6) $$v^i(A^{-1}, \ 0), \ w^i(0, \ C^{-1}),$$
$$v_i(0, \ C\sin\omega), \quad w_i(-A\sin\omega, \ 0).$$

Координаты векторов $\tilde{v}_i = g_i^k v_k$ и $\tilde{v}^i = -g_k^i v_i$:

(7) $$\tilde{v}^i(-A^{-1}\operatorname{cotg}\omega, C^{-1}\sin^{-1}\omega), \ \ \tilde{w}^i(-A^{-1}\sin^{-1}\omega, \ C^{-1}\operatorname{cotg}\omega),$$
$$\tilde{v}_i(-A, \ -C\cos\omega), \ \ \tilde{w}_i(-A\cos\omega, \ -C).$$

Из (3) известно, что трансверсальный вектор поля v_i имеет вид

(8) $$t_i = -\varepsilon^{sk}(v_i\partial_k v_s + \tilde{v}_i\partial_k\tilde{v}_s) - g_i^m T_m.$$

Из (5) непосредственно следуют равенства

(9) $$g_1^m T_m = T_1\operatorname{cotg}\omega - T_2 A(C\sin\omega)^{-1},$$
$$g_2^m T_m = T_1 C(A\sin\omega)^{-1} - T_2\operatorname{cotg}\omega.$$

Используя (3), (6), (7), (8) и (9), получаем

ПЛИСКА Български математически студии. Том 9, 1987, с. 7—11.

$$\underset{v}{t_1}=(C_u \cos\omega - C\,\omega_u \sin\omega - T_1 C \cos\omega - A_v + AT_2)(C\sin\omega)^{-1},$$

$$\underset{v}{t_2}=(C_u - T_1 C - A_v\cos\omega + T_2 A\cos\omega)(A\sin\omega)^{-1}.$$

Согласно [1] и (2) функции $A(u, v)$ и $C(u, v)$ являются спутниками веса $\{1\}$ тензора g_{is}. Тогда в параметрах сети (v, w) для координат трансверсального вектора поля v_i имеем

(10) $$\underset{v}{t_i}\{[\partial^{\cdot}_u(C\cos\omega)-\partial^{\cdot}_v A](C\sin\omega)^{-1},\ (\partial^{\cdot}_u C-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_v A)(A\sin\omega)^{-1}\}.$$

Аналогично получаем

(11) $$\underset{w}{t_i}\{(\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C-\partial^{\cdot}_v A)(C\sin\omega)^{-1},\ [\partial^{\cdot}_u C-\partial^{\cdot}_v(A\cos\omega)]\,(A\sin\omega)^{-1}\}.$$

В силу [1], (6), (10), (11) для геодезических и чебышевских кривизн координатных линий находим

(12) $$\underset{v}{г}=[\partial^{\cdot}_u(C\cos\omega)-\partial^{\cdot}_v A](AC\sin\omega)^{-1},$$
$$\underset{w}{г}=[\partial^{\cdot}_u C-\partial^{\cdot}_v(A\cos\omega)](AC\ \sin)^{-1}.$$

и

(13) $$\underset{v}{r}=(\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C-\partial^{\cdot}_v A)(AC\sin\omega)^{-1},$$
$$\underset{w}{r}=(\partial'_u C-\cos\omega\partial^{\cdot}_v A)(AC\sin\omega)^{-1}.$$

Так как $\underset{\tilde v}{г}=\underset{\tilde v}{t_s}\tilde v^s=\underset{v}{t_s}\tilde v^s$, $\underset{\tilde v}{r}=\underset{\tilde w}{t_s}\tilde v^s=\underset{w}{t_s}\tilde v^s$, то для геодезических и чебышевских кривизн линий сети $(\tilde v, \tilde w)$ имеем

(14) $$\underset{\tilde v}{г}=(AC\sin\omega)^{-1}\partial^{\cdot}_u(C\sin\omega),\quad \underset{\tilde w}{г}=(AC\sin\omega)^{-1}\partial^{\cdot}_v(A\sin\omega),$$
$$\underset{\tilde v}{r}=(AC)^{-1}\partial^{\cdot}_u C+(C\sin\omega)^{-1}\,\omega_v,\quad \underset{\tilde w}{r}=(AC)^{-1}\partial^{\cdot}_v A+(A\sin\omega)^{-1}\,\omega_u.$$

Согласно [4], коэффициенты связности W_2:

(15) $$\Gamma^k_{ij}=\left\{ {k \atop ij} \right\}-(T_i\delta^k_j+T_i\delta^k_i-T_r\,g^{rk}g_{ij}),$$

где

$$\left\{ {k \atop ij} \right\}=\frac{1}{2}\tilde g^{ks}(\partial_i g_{js}+\partial_j g_{is}-\partial_s g_{ij}).$$

Для каждой функции f веса $\{k\}$ функция $\partial_i \ln f$ имеет вес $\{0\}$. Используя (2), (4), (15), $\Gamma^i_{im}=\partial_m\ln\varepsilon$, $\partial_u\ln\varepsilon=\partial^{\cdot}_u\ln\varepsilon$ и $\partial_v\ln\varepsilon=\partial^{\cdot}_v\ln\varepsilon$, можем представить коэффициенты связности двумерного пространства Вейля в виде

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=(\partial^{\cdot}_v A-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C)A^{-1}\sin^{-2}\omega=C\underset{v}{r}\sin^{-1}\omega,$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=(\partial^{\cdot}_u C-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_v A)C^{-1}\sin^{-2}\omega=A\underset{w}{r}\sin^{-1}\omega,$$

$$\Gamma^2_{11}=A(C\sin\omega)^{-2}[\partial^{\cdot}_u(C\cos\omega)-\partial^{\cdot}_v A]=A^2(C\sin\omega)^{-1}\underset{v}{r},$$

(16)
$$\Gamma^1_{22}=C(A\sin\omega)^{-2}[\partial^{\cdot}_v(A\cos\omega)-\partial^{\cdot}_u C]=-C^2(A\sin\omega)^{-1}\underset{w}{r},$$

$$\Gamma^1_{11}=\partial^{\cdot}_u\ln(AC\sin\omega)-(\partial^{\cdot}_u C-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_v A)C^{-1}\sin^{-2}\omega=\partial^{\cdot}_u\ln(AC\sin\omega)-A\underset{w}{r}\sin^{-1}\omega,$$

$$\Gamma^2_{22}=\partial^{\cdot}_v\ln(AC\sin\omega)-(\partial^{\cdot}_v A-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C)A^{-1}\sin^{-2}\omega=\partial^{\cdot}_v\ln(AC\sin\omega)+C\underset{v}{r}\sin^{-1}\omega.$$

Кривизны W_2: $K=\nabla^i t_i=\varepsilon^{12}(\partial_2 t_1-\partial_1 t_2)$ и $Q=-\nabla^i T_i$. Из (3) и (10) следует

(17)
$$K=-(AC\sin\omega)^{-1}[\omega_{uv}+\partial_u(\partial^{\cdot}_u C-\cos\omega\,\partial^{\cdot}_v A)(A\sin\omega)^{-1}$$
$$-\partial_v(\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C-\partial^{\cdot}_v A)(C\sin\omega)^{-1}].$$

Имея в виду (13) можем записать K следующим образом:

(18)
$$K=-(AC\sin\omega)^{-1}[\omega_{uv}+\partial_u(C\underset{w}{r})-\partial_v(A\underset{v}{r})].$$

Результаты, полученные в п. 1 настоящей работы, являются обобщением результатов [2, § 36]. Действительно, если пространство W_2 риманово, то дополнительный вектор T_k является градиентным ($T_k=\partial_k T$), и мы можем перенормировать основной тензор следующим образом: $\overset{*}{g}_{is}=e^{-2T}g_{is}$. Тогда $\overset{*}{T}_k=T_k+\partial_k\ln e^{-T}=0$. Отсюда видно, что, если только заменим продолженную производную частной производной, то из полученных нами результатов вытекают результаты, полученные в [2, § 36].

2. Приложение формул из п. 1. Определим основную форму пространства W_2, когда специальная сеть $(v,\ w)$ принята за координатную.

А. Координатная сеть $(v,\ w)$ чебышевская, т. е. $\underset{v}{r}=\underset{w}{r}=0$. Тогда согласно (12), имеем $\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C=\partial^{\cdot}_v A$ и $\partial^{\cdot}_u C=\cos\omega\,\partial^{\cdot}_v A$, откуда находим $\partial^{\cdot}_u C=\partial^{\cdot}_v A=0$, и основная форма W_2 принимает вид

(19)
$$\Phi=e^{2\int T_2 dv}du^2+2e^{\int T_2 dv+\int T_1 du}\cos\omega\,du\,dv+e^{2\int T_1 du}dv^2.$$

Учитывая (16), (18) и (19), для коэффициентов связности и кривизны K пространства W_2 в параметрах чебышевской сети находим

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,$$

$$\Gamma^2_{11}=-\omega_u e^{\int T_2 dv-\int T_1 du}\sin^{-1}\omega,$$

(20)
$$\Gamma^1_{22}=-\omega_v e^{\int T_1 du-\int T_2 dv}\sin^{-1}\omega,$$

$$\Gamma^1_{11}=\partial_u\int T_2 d_v+T_1+\omega_u\operatorname{cotg}\omega,\quad \Gamma^2_{22}=\partial_v\int T_1 du+T_2+\omega_v\operatorname{cotg}\omega,$$

$$K=-\omega_{uv}e^{-\int T_1 du-\int T_2 du}\sin^{-1}\omega.$$

Б. Координатная сеть $(v,\ w)$ получебышевская.

Пусть $\underset{v}{r}=0$. Следовательно, $\partial^{\cdot}_v A=\cos\omega\,\partial^{\cdot}_u C$ и

$$A = e^{\int T_2 dv}\,[f(u) + \int e^{-\int T_2 dv}\cos\omega\,\partial'_u C\,dv], \tag{21}$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Пусть $\underset{w}{r}=0$. Тогда $\partial'_u C = \cos\omega\,\partial'_v A$ и

$$C = e^{\int T_1 du}[\varphi(v) + \int e^{-\int T_1 du}\cos\omega\,\partial'_v A\,du], \tag{22}$$

где $\varphi(u)$ — произвольная функция.

В. Координатная сеть $(v,\ w)$ полугеодезическая.

Когда $\underset{v}{\text{г}}=0$, то $\partial'_v A = \partial'_u(C\cos\omega)$, откуда получаем

$$A = e^{\int T_2 dv}[f(u) + \int e^{-\int T_2 dv}\,\partial'_u(C\cos\omega)dv]. \tag{23}$$

Когда $\underset{w}{\text{г}}=0$, то $\partial'_u C = \partial'_v(A\cos\omega)$, откуда получаем

$$C = e^{\int T_1 du}[\varphi(v) + \int e^{-\int T_1 du}\partial'_v(A\cos\omega)du]. \tag{24}$$

В (23) и (24) функции $f(u)$ и $\varphi(v)$ произвольные.

Г. Координатная сеть $(v,\ w)$ — $Б_1$-сеть. Угол ω $Б_1$-сети удовлетворяет уравнению $\omega_s v^s = \underset{v}{\text{г}}\,\mathrm{tg}\,\omega$, полученном в [5]. В параметрах $Б_1$-сети это уравнение принимает вид $\partial_u \ln C = T_1$, из решения которого заключаем, что, когда $Б_1$-сеть принята за координатную, то основную форму пространства W_2 можем записать в виде

$$\Phi = A^2du^2 + 2Ae^{\int T_1 du}\cos\omega\,du\,dv + e^{2\int T_1 du}dv^2. \tag{25}$$

Теперь пусть $(v,\ w)$ — полугеодезическая $Б_1$-сеть.

Если $\underset{w}{\text{г}}=0$, то из (12) и (25) легко видно, что $\partial'_v(A\cos\omega) = \partial'_u(e^{\int T_1 du}) = 0$, а основная форма W_2 принимает вид

$$\Phi = e^{2\int T_2 dv}\cos^{-2}\omega\,du^2 + 2e^{\int T_1 du + \int T_2 dv}du\,dv + e^{2\int T_1 du}dv^2. \tag{26}$$

Если $\underset{v}{\text{г}}=0$, то из (12) и (15) следует $\partial'_v A = \partial'_u(e^{\int T_1 du}\cos\omega)$, откуда находим

$$A = e^{\int T_2 du}[f(u) - \int e^{\int T_1 du - \int T_2 du}\omega_u \sin\omega\,d_v]. \tag{27}$$

Здесь функция $f(u)$ произвольная.

Д. Координатная сеть $(v,\ w)$ как $Б_2$-сеть. Так как, согласно [5], она характеризуется $\dot{\nabla}^s\ w_s/\sin\omega = 0$, то для ее угла получаем уравнение

$$\omega_s w^s = \underset{w}{\text{г}}\,\mathrm{tg}\,\omega. \tag{28}$$

В силу (6) и (14) при нашем специальном выборе координатной системы уравнение (28) имеет вид $\partial_v \ln A = T_2$. Решая его, устанавливаем, что основная форма пространства W_2 в параметрах $Б_2$-сети:

$$\Phi = e^{2\int T_2 dv}du^2 + 2Ce^{\int T_2 du}\cos\omega\,du\,dv + C^2dv^2. \tag{29}$$

Теперь пусть $(v,\ w)$ — полугеодезическая $Б_2$-сеть.

Если $\underset{v}{\text{г}}=0$, то

$$\Phi = e^{2\int T_2 du} du^2 + 2e^{\int T_2 dv + \int T_1 du} du dv + e^{-2\int T_1 du} \cos^{-2} \omega dv^2. \tag{30}$$

Если $\underset{w}{\Gamma} = 0$, то

$$C = e^{\int T_1 du}[\varphi(v) - \int e^{\int T_2 dv - \int T_1 du} \omega_v \sin \omega du], \tag{31}$$

где $\varphi(v)$ — произвольная функция.

Имея в виду [6] и п. 2 настоящей работы, приходим к следующим результатам:

В пространстве Вейля с основной формой (30) существует бесконечное множество дополнений геодезического поля v_i до симметричных три-тканей (v, w, p), так что их сети (v, w) и (w, p) являются соответственно $Б_2$- и $Б_1$-сетями. Угол 3-ткани определяется произволом функции одной переменной.

В квазиевклидовом пространстве с основной формой (19) существует бесконечное множество дополнений геодезического поля v_i до симметричных три-тканей (v, w, p), так что их сети (v, w) и (w, p) являются $Б_1$-сетями. Угол три-ткани $\omega = \omega(v)$.

Е. Координатная сеть (v, w) изогеодезическая.

Когда (v, w) — изогеодезическая сеть первого рода, $\underset{v}{\Gamma} = -\underset{w}{\Gamma}$, следовательно,

$$\partial_u^{\cdot}(C \cos^2 \frac{\omega}{2}) = \partial_v^{\cdot}(A \cos^2 \frac{\omega}{2}). \tag{32}$$

Решая (32), приходим к следующей связи между функциями $A(u, v)$ и $C(u, v)$:

$$A = e^{\int T_2 dv} \cos^{-2} \frac{\omega}{2} [f(u) + \int e^{-\int T_2 dv} \partial_u^{\cdot}(C \cos^2 \frac{\omega}{2}) dv]. \tag{33}$$

Пусть теперь (v, w) — изогеодезическая сеть второго рода. Тогда $\underset{v}{\Gamma} = \underset{w}{\Gamma}$ и

$$A = e^{\int T_2 dv} \sin^{-2} \frac{\omega}{2} [f(u) - \int e^{-\int T_2 dv} \partial_u^{\cdot}(C \sin^2 \frac{\omega}{2}) dv]. \tag{34}$$

Функция $f(u)$ в формулах (33) и (34) произвольная.

Ж. Координатная сеть (v, w) изочебышевская. Следовательно, $\underset{v}{r} = \varepsilon \underset{w}{r}$. Когда сеть (v, w) изочебышевская первого рода, то $\varepsilon = -1$, а когда сеть (v, w) изочебышевская второго рода, то $\varepsilon = +1$. В силу (13), получаем $\partial_u^{\cdot} C = -\varepsilon \partial_v^{\cdot} A$. Итак, если изочебышевская сеть (v, w) принята за координатную, то

$$A = e^{\int T_2 dv}[f(u) - \varepsilon \int e^{-\int T_2 dv} \partial_u^{\cdot} C dv], \tag{35}$$

где функция $f(u)$ произвольная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Златанов. Сети в двумерном пространстве Вейля. *Докл. БАН*, **29**, 1976, 619—622.
2. В. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, 1963.
3. Г. Златанов, Б. Царева. Конформное преобразование сетей в двумерном пространстве Вейля. *Докл. БАН*, **31**, 1978, 15—17.
4. А. Норден. Пространства аффинной связности. Москва, 1976.
5. Б. Царева. Върху някои специални мрежи в двумерно пространство на Вайл. *Научни трудове на Пловдивски университет*, 13, 1975, *Математика*, 189—195.
6. Б. Царева. Симетрични три-тъкани в двумерно пространство на Вайл. *Научни трудове на Пловдивския университет*, **15**, 1977, *Математика*. 93—99.

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 8. VI. 1982