КОМИТЕТ ЗА НАУКА, ТЕХНИЧЕСКИ ПРОГРЕС И ВИСШЕ ОБРАЗОВАНИЕ
ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА
КАДРИ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА - СОФИЯ
СЕКТОР "ГЕОМЕТРИЯ"

Светослав Йорданов Билчев

ГЕОМЕТРИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЯХ И ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(локальная теория)

Д И С Е Р Т А Ц И Я

ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
"КАНДИДАТ НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ"

С О Ф И Я - 1974 год.

С О Д Е Р Ж А Н И Е стр.

Г Л А В А III.

СИСТЕМЫ $S^{(1)}_{2,2}$, ДОПУСКАЮЩИЕ БЕСКОНЕЧНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ЗАВИСЯЩУЮ ОТ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ТРАНЗИТИВНО ДЕЙСТВУЮЩУЮ НА МНОЖЕСТВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ $S^{(1)}_{2,2}$.

Г Л А В А IV.

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ $S^{(1)}_{2,2}$.

Г Л А В А V.

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ $S^{(1)}_{2,2}$.

Г Л А В А VI.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В В Е Д Е Н И Е

Настоящая работа посвящена изучению геометрии (локальных свойств) системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных. Изучение системы проводится методом дифференциально-геометрических исследований, разработанным Г.Ф.Лаптевым [1] и А.М.Васильевым [2] .

Метод дифференциально-геометрических исследований базируется на теории внешних дифференциальных форм и теории представлений групп.

В работах [10] , [11] Э.Картан использовал аппарат внешнего дифференциального исчисления для изучения геометрических свойств дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с n независимыми и S зависимыми переменными. Совокупность n -мерных касательных элементов к многообразию M_{n+S} (пространство независимых и зависимых переменных) образует многообразие $M(n,S)$, размерность которого равна $n+S+n.S$. Исходная система определяет в $M(n,S)$ некоторое подмногообразие. Изучение свойств системы дифференциальных уравнений, инвариантных относительно некоторой группы, сводится к изучению инвариантных свойств этого погруженного многообразия.

В работе [1] Г.Ф.Лаптев разработал общую схему дифференциально-геометрического исследования погруженных многообразий в пространствах с конечной группой Ли. А.М.Васильев обобщил эту схему на бесконечные группы [2] .

Работа Г.М.Кузьминой [27] посвящена геометрии системы двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трех аргументов.

В работе [26] А.М.Васильев изучает геометрию системы трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя неизвестными функциями от двух аргументов. Здесь А.М.Васильев дает общую схему подобных исследований. Изучение геометрии системы трех дифференциальных уравнений дополняет Х.Кильп в работе [31] .

В этих работах рассматриваются невырожденные случаи. У систем, изучаемых в [26] в общем случае имеются три характеристики. А.М.Васильев исследует случай,когда все три характеристики различны. В работе [27] также рассматривается класс систем с невырожденным семейством характеристических элементов, а именно: в каждой трехмерной интегральной площадке двумерные характеристические элементы образуют однопараметрическое семейство,огибающее конус второго порядка. Как известно, системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с четырьмя неизвестными функциями от двух независимых переменных имеют в общем случае четыре характеристики. В работах [28-30] Э.М.Шварцбурд-Кан изучает вырожденный случай-геометрию систем, указаных выше, в предположению, что характеристики попарно совпадают.

Исследование геометрии системы дифференциальных уравнений в частных производных,как видно,шло во восходящем порядке-увеличивалось количество искомых функций. Это с одной стороны, увеличивало общность результатов, построений, но, с другой стороны, уменьшало их глубину, их разнообразие, их количество.

В настоящей работе изучаемые системы дифференциальных уравнений содержат две искомые функции. Уменьшение количество функций привело к увеличению количество результатов, привело к увеличению их глубины и разнообразие. Кроме этого удалось поставить и решить такие въпроси, которые до сих пор в подобных исследованиях не ставились, а именно: найдены некоторые наиболее интересные группы, допускаемые изучаемой системы дифференциальных уравнений; найдены бесконечные группы, зависящие от двух произвольных функций и транзитивно действующих на множестве интегральных многообразий; рассмотрена вариационная задача для изучаемых систем; в ходе исследовании получено много конкретных примеров изучаемой системы дифференциальных уравнений и др.

У систем, которых мы рассматриваем, в общем случае имеются две характеристики. В работе исследуется случай,когда характеристики различны,т.е. изучаемые системы дифференциальных уравнений являются гиперболическими. Этот случай заслуживает внимания еще и потому, что такого типа уравнения встречаются в гидромеханике [32], в газовой динамике [33] , в теории упругости [34] .

ГЛАВА I.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ $S^{(1)}_{2,2}$

§ I.I. Многообразия M_4 и M_6.

Пусть задана система:

(I.I) $$F_i(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)=0 \quad , \quad (i=1,2),$$

где x и y - независимые переменные, а u, v - неизвестные функции от этих переменных.

Предполагаем, что уравнения (I.I) разрешимы относительно каких-либо двух частных производных, т.е. они не налагают конечных соотношений на переменные x,y,u,v. На интегральных многообразиях системы выполняется система Пфаффа:

(I.2) $$\begin{aligned} du-u_x dx-u_y dy=0 \\ dv-v_x dx-v_y dy=0 \end{aligned}$$

Относительно системы (I.2) уравнения (I.I) можно рассматривать как конечные уравнения, связывающие 8 входящих в нее переменных. Из этих 8 переменных два можно выразить через оставшиеся шесть переменных.

Будем изучать геометрию, инвариантно связанную с заданной на четырехмерном аналитическом многообразии M_4 системой (I.I), построенную относительно общей аналитической группы (полная линейная группа $GL(n)$) многообразия M_4.

Пусть задано четырехмерное аналитическое многообразие M_4 с координатной окрестностью X и соответствующими локальными координатами x_i , (i =I,2,3,4). На многообразии M_4 , следуя уже сделанному в работе [26] , можно задать линейные дифференциальные формы:

(I.3) $$\omega^i = x^i_k dx^k ,$$

(i, K=1,2,3,4), где x^i_k - некоторые новые параметры, удовлетворяющие условию $\det\|x^i_k\| \neq 0$, независящие от x^i и между собой.

Дифференцируя формы ω^i внешним образом, потом полученный результат и т.д., находим последовательность равенств:

(1.4) $$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k$$

(1.5) $$\omega^k_i = \tilde{x}^j_k dx^i_j + x^i_{kj}\omega^j = \tilde{\omega}^i_k + x^i_{kj}\omega^j$$

(1.6) $$d\omega^k_i = \omega^i_\ell \wedge \omega^\ell_k + \omega^i_{k\ell} \wedge \omega^\ell$$

$$\omega^i_{k\ell} = dx^i_{k\ell} + x^i_{kj}\omega^j_\ell + x^i_{j\ell}\omega^j_k - x^j_{k\ell}\omega^i_j + x^i_{k\ell j}\omega^j$$

$$d\omega^i_{k\ell} = \omega^i_{kj} \wedge \omega^j_\ell + \omega^i_{j\ell} \wedge \omega^j_k - \omega^j_{k\ell} \wedge \omega^i_j + \omega^i_{k\ell j} \wedge \omega^j$$

. . . .

где $\tilde{x}^j_k$ - элементы матрицы, обратной к $\|x^i_k\|$, а x^i_{kj}, $x^i_{k\ell j}$ - произвольные параметры, удовлетворяющие лишь условиям симметрии по всем нижним индексам.

Таким образом, формы ω^i, ω^i_k, $\omega^i_{k\ell}$ и т.д. определены над одной координатной окрестностью. Определим их и над всем многообразием M_4. Пусть Y - координатная окрестность с локальными координатами y^i, пересекающаяся с X. Над окрестностью Y определены линейные дифференциальные формы $\bar{\omega}^i = y^i_k dy^k$ так же, как ω^i над X. Если положить $y^i_k = x^i_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial y^k}$, то формы $\bar{\omega}^i$ и ω^i совпадают тождественно над пересечением $X \cap Y$. Формы ω^i можно однозначно распространить на все координатные окрестности, потому что этот закон преобразования имеет групповой характер. Следовательно, формы ω^i можно рассматривать над всем многообразием M_4. После этого можно определить над всем многообразием ω^i_k, $\omega^i_{k\ell}$.

Уравнения (I.4) и (I.6) называются структурными уравнениями пространства M_4.

К каждой точке многообразия присоединим репер.

Репером линейного n - мерного пространства называется совокупность n линейно независимых векторов.

В каждой точке области X многообразия M_4 дифференциалы dx^i являются координатами линейного касательного пространства к M_4 относительно некоторого репера $(\vec{e}_i)_o$. Следовательно, линейные дифференциальные формы $\omega^i = x^i_k dx^k$ в каждой точке являются координатами векторов касательного векторного пространства к M_4 относительно "подвижного репера" $\vec{e}_i = \tilde{x}^k_i (\vec{e}_k)_o$. Отсюда, с учетом (I.4) и (I.5) вытекают формулы инфинитезимального перемещения:

$$d\vec{e}_i = -\tilde{\omega}^k_i \vec{e}_k \quad . \tag{I.7}$$

Система форм $\omega^i = 0$, (i =I,2,3,4), вполне интегрируема, ее первые интегралы x^i определяют точку M_4. Параметры x^i (формы ω^i) называются главными параметрами (формами), а x^i_k (формы ω^i_k)- вторичными параметрами (формами) репера. Вторичные параметры определяют свободу выбора репера в точке многообразия. На многообразии M_4 главными параметрами будем считать независимые переменные x и y, и зависимые переменные u, v.

Совокупность первых частных производных от двух неизвестных функций по двум независимым переменным определяет в каждой точке многообразия зависимых и независимых переменных M_4 двумерный касательный элемент (см. [I8], гл. VI, §§ 82, 83, стр. 368). Множество этих двумерных касательных элементов образует многообразие $M_{(2,2)}$ (размерность 2+2+2.2=8), а два уравнения (I.I) между производными и всеми переменными- подмногообразие $M_6 \subset M_{(2,2)}$.

Подмногообразие M_6 интерпретируется как множество интегральных касательных элементов (площадок) во всех точках многообразия M_4. Следовательно, изучение свойств системы (I.I) сводится к изучению погруженного аналитического многообразия M_6 и заданной на нем системы Пфаффа (I.2) в восьмимерном пространстве интегральных элементов $M_{(2,2)}$ системы (I.I) относительно бесконечной группы всех невырожденных аналитических преобразований $M_{(2,2)}$ в себя. Переход из данного пространства M_4 в пространство $M_{(2,2)}$ интегральных элементов системы (I.I) со соответствующим преобразованием самой задачи называется продолжением, а Пфаффова система, рассматриваемая на продолженном многообразии M_6 - продолжением исходной системы $S^{(1)}_{2,2}$.

Многообразие $M_{(2,2)}$ можно задать системой Пфаффа:

(I.8) $$\omega^i = 0\ , \quad \omega^a_\lambda = 0\ ,$$

(i =I,2,3,4; λ =I,2; a =3,4). Как видно из (I.4) и (I.6), система (I.8) вполне интегрируема. Пользуясь уравнениями (I.7), получаем:

$$d\vec{e}_1 = -\tilde{\omega}^1_1\vec{e}_1 - \tilde{\omega}^2_1\vec{e}_2$$
$$d\vec{e}_2 = -\tilde{\omega}^1_2\vec{e}_1 - \tilde{\omega}^2_2\vec{e}_2$$

где $\tilde{\omega}^\tau_\ell = \omega^\tau_\ell$ при $\omega^i = 0$. Следовательно, любое максимальное интегральное многообразие системы (I.8) представляет собой совокупность реперов в касательном пространстве одной точки M_4 , векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ которых лежат в фиксированном двумерном подпространстве, т.е. интегральные многообразия системы (I.8) находятся в естественном соответствии с "двумерными касательными элементами" или "двумерными площадками" многообразия M_6 . Совокупность этих касательных элементов образует 8-мерное многообразие $M_{(2,2)}$. Дифференциальные формы ω^i и ω^a_λ являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов координат над каждой координатной окрестностью многообразия $M_{(2,2)}$.

В дальнейшем под изучением свойств системы $S^{(1)}_{2,2}$ будем понимать изучение свойств подмногообразия $M_6 \subset M_{(2,2)}$. Как мы уже предполагали, будем считать, что среди уравнений системы (I.I) нет уравнений только между переменными x , y , u , v , т.е. не содержащих производных. Геометрически это надо понимать так- при естественном отображении $M_{(2,2)} \to M_4$ многообразие M_6 отображается на все многообразие M_4 или, по крайней мере, на некоторую его область. Еще будем считать многообразие M_6 достаточно гладким.

Подмногообразие M_6 , согласно методике Картана, должно быть задано линейными уравнениями между линейными дифференциальными формами ω^i и ω^a_s . Точнее, подмногообразие должно быть задано двумя уравнениями, т.е. нужно выделить 6 форм, независимых на M_6 , а остальные выразить через них. Удобно считать все формы ω^i формами, независимыми на M_6 . Две остальные формы можно выбрать среди ω^a_s . Для любых многообразий M_6 выбор этих двух форм неоднозначен. Имея ввиду, что все индексы a равноправны между собой, а все s - между собой, то возможны следующие случаи: I) среди индексов вибранных двух форм присуствуют все a и все s ; 2) присуствуют два индекса a и один s ; 3) присуствуют один индекс a и два s .

Рассмотрим первый случай и будем считать базисными формами ω^3_1 и ω^4_2 (остальные случаи рассматриваются аналогично). На подмногообразии M_6 будут иметь место соотношения:

$$
\begin{aligned}
\omega^3_2 &= A^3_2\,\omega^3_1 + B^3_2\,\omega^4_2 + H^3_{2i}\,\omega^i \\
\omega^4_1 &= A^4_1\,\omega^3_1 + B^4_1\,\omega^4_2 + H^4_{1i}\,\omega^i
\end{aligned}
\qquad (I.9) \qquad , \quad (i=1,2,3,4) .
$$

Свойства коэффициентов уравнений (I.9), которые над любой координатной окрестностью X являются функциями от переменных x^i, x^i_k, x^i_{kl}, входящих в формы ω^i, ω^i_k, отражают свойства многообразия M_6. Дифференцируя уравнения (I.9) внешним образом, подставляя в полученные уравнения, где это нужно, соотношения (I.9) и применяя затем лемму Картана относительно шести базисных форм, получим дифференциалы коэффициентов A^a_s, B^a_s, H^a_{si}. Эти дифференциалы выразятся через ω^k_i, ω^k_{il} с коэффициентами - многочленами от тех же переменных, и через ω^i - с новыми переменными. Из полученных уравнений видно, что в выражениях дифференциалов dA^a_s, dB^a_s входят лишь ω^k_i, ω^i, причем коэффициенты при ω^k_i - функции от тех же A^a_s и B^a_s. Геометрически этот факт обьясняется так. В фиксированной точке многообразия M_4 имеется двухпараметрическое семейство $M_{(2)}$ двумерных плоских элементов (плоскостей касательного пространства), принадлежащих M_6. На $M_{(2)}$ формы ω^i и ω^a_s связаны уравнениями $\omega^i=0$ и соотношениями (I.9). Следовательно, коэффициенты A^a_s и B^a_s характеризуют свойства семейства $M_{(2)}$ в любой точке M_4 в том смысле и в той же степени, в какой все коэффициенты A^a_s, B^a_s, H^a_{si} характеризуют свойства всего M_6.

Переходя к рассмотрению свойств систем дифференциальных уравнений (I.I), определяемых многообразиями M_6, мы можем сказать, что решения системы (I.I) это такие двумерные подмногообразия $M_{(2)}$ многообразия M_4, все тангенциальные элементы которых принадлежат многообразию M_6.

В процессе исследования , в целях упрощения, будем проводить канонизацию. Канонизация производится засчет специального выбора репера. Из семейства реперов, присоединенных к каждой точке M_4, выделяем различные подсемейства реперов, которые инвариантно связаны с изучаемым в многообразии геометрическим образом (например, в нашем случае - с системой (I.2)) и преобразуются друг в друга некоторой подгруппой полной линейной группой. На вторичные и главные параметры налагаются такие условия, чтобы компоненты геометрического образа удовлетворяли некоторым заданным соотношениям. В большинстве случаев некоторые компоненты приводятся к постоянным (единицам или нулям). Однако зависимости между вторичными и главными параметрами не должны связывать главные параметры.

Аналитически результат введения функциональной зависимости приводит к тому, что ряд вторичных форм или их линейные комбинации выражаются через главные формы. Засчет уменьшения числа переменных могут быть значительно упрощены формулы, описывающие свойства изучаемого обьекта.

Практические приемы канонизации изложены в [3] , [4] , [9] . О некоторых приемах будет рассказано в процессе самой канонизации. Канонизация не налагает условий на изучаемый в многообразии геометрический образ, если не снижает числа независимых дифференциальных уравнений, определяющих это многообразие (в нашем случае - уравнений (I.9) и уравнений, полученных из них указанным выше способом и содержащих дифференциалы коэффициентов уравнений (I.9)).

Существуют многообразия, для которых какая-то канонизация невозможна. Они характеризуются системой алгебраических уравнений на канонизируемые переменные. Для этих многообразий канонизация проводится другим способом, и в некоторых случаях удается вновь выделить специальные подклассы.

Две канонизации эквивалентны, т.е. определяют один и тот же класс многообразий, если от одних уравнений на канонизированные переменные можно перейти к другим с помощью замены форм, не противоречащей структурным уравнениям, которым удовлетворяют эти формы, т.е. в нашем случае - уравнениями (I.4) и (I.6).

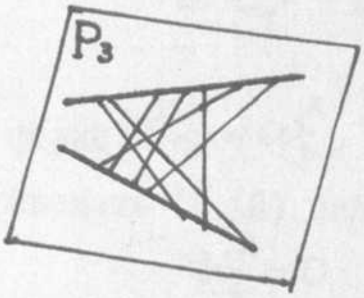
Таким образом, канонизация позволяет не только упростить выкладки, но и провести классификацию изучаемых многообразий.

§ 1.2. Полуканонический репер. Структурные уравнения многообразия $\mathfrak{M}_{(4)}$.

Зафиксируем точку многообразия M_4. В касательном пространстве $T(M_4)$ к многообразию M_4 в этой точке имеется двухпараметрическое семейство $M_{(2)}$ двумерных плоских элементов (плоскостей касательного пространства) принадлежащих M_6. Как мы уже писали в § 1.1, решения системы (1.1) это такие двумерные подмногообразия $M_{(2)}$ многообразия M_4, все тангенциальные элементы которых принадлежат многообразию M_6.

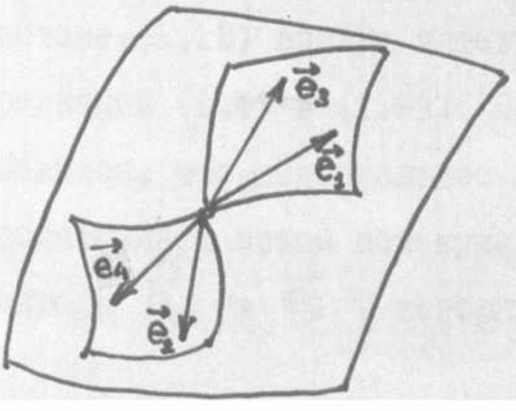
Дальше будем рассматривать те системы (1.1), у которых семейство $M_{(2)}$ состоит из плоскостей, пересекающих две фиксированные плоскости по прямым и именно эти системы мы обозначаем $S^{(1)}_{2,2}$.

Более наглядную интерпретацию этого образа получим, если рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3, получаемое при проектировании четырехмерного векторного пространства $T(M_4)$, касательного к M_4, на бесконечно удаленную гиперплоскость.



В P_3 имеем двухпараметрическое семейство прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$. Мы рассматриваем такое двухпараметрическое семейство $\mathfrak{M}_{(2)}$, которое состоит из прямых, пересекающих две фиксированные прямые.

Канонизируем репер в фиксированной точке многообразия M_4 в касательном пространстве $T(M_4)$ к этой точке так: в одной



фиксированой двумерной плоскости касательного пространства, проходящей через эту точку, поместим векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, а в другой фиксированной двумерной касательной плоскости, проходящей через ту же точку,-векторы

$\vec{e}_2, \vec{e}_4$. Тогда двумерная площадка будет принадлежать многообразию M_6, если она натянута на любые два вектора вида $\vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_3$ и $\vec{e}_2 + \mu \vec{e}_4$. Значит, интегральными многообразиями будут все многообразия, на которых выполнены уравнения

(1.10) $$\omega^3 = \lambda \omega^1 , \quad \omega^4 = \mu \omega^2 .$$

Уравнения (1.10) равносильны двум внешним дифференциальным уравнениям

(1.11) $$\omega^3 \wedge \omega^1 = 0 , \quad \omega^4 \wedge \omega^2 = 0 .$$

Система (1.11) является, в характеристических переменных, системой $S^{(1)}_{2,2}$, которой мы будем изучать.

При так проведенной канонизации формулы инфинитезимальных перемещений репера в каждой точке многообразия M_4 принимают вид:

(1.12) $$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= -\tilde{\omega}_1^1 \vec{e}_1 - \tilde{\omega}_1^3 \vec{e}_3 \\ d\vec{e}_2 &= -\tilde{\omega}_2^2 \vec{e}_2 - \tilde{\omega}_2^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_3 &= -\tilde{\omega}_3^1 \vec{e}_1 - \tilde{\omega}_3^3 \vec{e}_3 \\ d\vec{e}_4 &= -\tilde{\omega}_4^2 \vec{e}_2 - \tilde{\omega}_4^4 \vec{e}_4 \end{aligned}$$

где формы $\tilde{\omega}_i^k = \omega_i^k$ в фиксированной точке, т.е. при $\omega^i = 0$.
Из равенств (1.12) видно, что

(1.13) $$\begin{aligned} &\omega_i^\alpha = 0 , \quad \omega_\alpha^i = 0 , \\ &\omega^j = 0 , \end{aligned}$$

где $i = 1,3$; $\alpha = 2,4$; $j = 1,2,3,4$.

Система (1.13) вполне интегруруема, как следует из структурных уравнений (1.4) и (1.6). Пользуясь формулами (1.12), нетрудно убедится, что максимальное интегральное многообразие системы(1.13) представляет собой совокупность реперов в точке многообразия M_4, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, которых принадлежат одному фиксированному двумерному подпространству касательного пространства, а векторы $\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$ - другому. Эти два подпространства находятся в общем положении. Таким образом, левые части системы (1.13) можно рассматривать как базисные формы многообразия $M_{(12)}$ всех двоек двумерных подпространств (в общем положении) всех касательных пространств к M_4. Задание в каждой точке M_4 двойки подпространств определяет четырехмерное подмногообразие $\mathfrak{M}_{(4)}$ многообразия $M_{(12)}$. На подмногообразии $\mathfrak{M}_{(4)}$ левые части уравнений (1.13) выразятся линейно через ω^i, (i = 1,2,3,4), т.е.

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \omega_\alpha^i = b_{\alpha j}^i \omega^j. \tag{1.14}$$

Подставив зависимости (1.14) в уравнения (1.4) и обозначая

$$b_{42}^1 - b_{24}^1 = a^1, \; b_{31}^2 - b_{13}^2 = a^2, \; b_{42}^3 - b_{24}^3 = a^3, \; b_{31}^4 - b_{13}^4 = a^4,$$

получим структурные уравнения:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^1 \wedge \omega^3 + a^1 \omega^2 \wedge \omega^4 \\ d\omega^2 &= \omega_2^2 \wedge \omega^2 + \omega_4^2 \wedge \omega^4 + a^2 \omega^1 \wedge \omega^3 \\ d\omega^3 &= \omega_1^3 \wedge \omega^1 + \omega_3^3 \wedge \omega^3 + a^3 \omega^2 \wedge \omega^4 \\ d\omega^4 &= \omega_2^4 \wedge \omega^2 + \omega_4^4 \wedge \omega^4 + a^4 \omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Обратно, задание над M_4 линейно независимых форм ω^i, удовлетворяющих уравнениям (1.15), равносильно выражению левых частей уравнений (1.13) через ω^i, т.е. заданию подмногообразия $\mathfrak{M}_{(4)}$. Но теперь изучение многообразия M_6 свелось к изучению многообразия $\mathfrak{M}_{(4)}$, и мы имеем право вести продолжение уравнений (1.15), задающие изучаемый обьект, считая базисными формами лишь формы ω^i, (i = 1,2,3,4), а на формы ω_1^3 и ω_2^4 смотреть как на вторичные (хотя они остаются базисными на многообразии M_6).

Уравнения (1.15)-это структурные уравнения пфаффовой G-структуры со структурной группы G на многообразии $\mathfrak{M}_{(4)}$, оставляющей инвариантными площадки ($\vec{e}_1, \vec{e}_3$) и ($\vec{e}_2, \vec{e}_4$) в точке. Объект $\{a^1, a^2, a^3, a^4\}$ называется структурным тензором G - структуры. Он распадается на два подтензора $\{a^1, a^3\}$ и $\{a^2, a^4\}$, являющимися тензорами неголономности площадки ($\vec{e}_2, \vec{e}_4$) и ($\vec{e}_1, \vec{e}_3$) соответственно.

Продифференцировав первое уравнение системы (1.15), получаем

$$\Delta\omega_1^1 \wedge \omega^1 + \Delta\omega_3^1 \wedge \omega^3 + \Delta a^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 = 0 \tag{1.16}$$

где

$$\Delta\omega_1^1 = d\omega_1^1 - \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + a^1 a^2 \omega^3 \wedge \omega^4 + a^1 a^4 \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\Delta\omega_3^1 = d\omega_3^1 - \omega_1^1 \wedge \omega_3^1 - \omega_3^1 \wedge \omega_3^3 \tag{1.17}$$

$$\Delta a^1 = da^1 + a^1(\omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) - a^3\omega_3^1$$

Из уравнения (1.16), применяя обобщенную лемму Картана (см., например, [3]) и проводя некоторые очевидные упрощения, находим, что:

$$\Delta\omega_1^1 = \omega_{11}^1 \wedge \omega^1 + \omega_{31}^1 \wedge \omega^3 - a_1^1 \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$\Delta\omega_3^1 = \omega_{31}^1 \wedge \omega^1 + \omega_{33}^1 \wedge \omega^3 - a_3^1 \omega^2 \wedge \omega^4 \tag{1.18}$$

$$\Delta a^1 = a_i^1 \omega^i ,$$

где ω_{11}^1, ω_{31}^1, ω_{33}^1 - наиболее общие формы, удовлетворяющие уравнению (1.16). Из (1.17) и (1.18) получаем:

$$d\omega_1^1 = \omega_{11}^1 \wedge \omega^1 + \omega_{31}^1 \wedge \omega^3 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 - a^1 a^2 \omega^3 \wedge \omega^4 -$$
$$- a^1 a^4 \omega^2 \wedge \omega^3 - a_1^1 \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$d\omega_3^1 = \omega_{31}^1 \wedge \omega^1 + \omega_{33}^1 \wedge \omega^3 + \omega_1^1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^1 \wedge \omega_3^3 - a_3^1 \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$da^1 = a_i^1 \omega^i + a^1(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4) + a^3 \omega_3^1$$

Аналогично из остальных трех уравнениях системы (I.I5) находим:

$$d\omega_2^2 = \omega_{22}^2 \wedge \omega^2 + \omega_{42}^2 \wedge \omega^4 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^4 - a^2 a^1 \omega^4 \wedge \omega^3 - $$
$$- a^2 a^3 \omega^1 \wedge \omega^4 - a_2^2 \omega^1 \wedge \omega^3$$

$$d\omega_4^2 = \omega_{42}^2 \wedge \omega^2 + \omega_{44}^2 \wedge \omega^4 + \omega_2^2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^2 \wedge \omega_4^4 - $$
$$- a_4^2 \omega^1 \wedge \omega^3$$

$$da^2 = a_i^2 \omega^i + a^2(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3) + a^4 \omega_4^2$$

(I.I9)
$$d\omega_1^3 = \omega_{11}^3 \wedge \omega^1 + \omega_{31}^3 \wedge \omega^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_1^1 + \omega_3^3 \wedge \omega_1^3 - $$
$$- a_1^3 \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$d\omega_3^3 = \omega_{31}^3 \wedge \omega^1 + \omega_{33}^3 \wedge \omega^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - a^2 a^3 \omega^4 \wedge \omega^1 - $$
$$- a^3 a^4 \omega^1 \wedge \omega^2 - a_3^3 \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$da^3 = a_i^3 \omega^i + a^3(\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_4^4) + a^1 \omega_1^3$$

$$d\omega_2^4 = \omega_{22}^4 \wedge \omega^2 + \omega_{42}^4 \wedge \omega^4 + \omega_2^4 \wedge \omega_2^2 + \omega_4^4 \wedge \omega_2^4 - $$
$$- a_2^4 \omega^1 \wedge \omega^3$$

$$d\omega_4^4 = \omega_{42}^4 \wedge \omega^2 + \omega_{44}^4 \wedge \omega^4 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^2 - a^1 a^4 \omega_1^3 \wedge \omega^2 -$$
$$- a^3 a^4 \omega_1^2 \wedge \omega^1 - a_4^4 \omega_1^1 \wedge \omega^3$$

$$da^4 = a_i^4 \omega^i + a^4(\omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3) + a^2 \omega_2^4$$

Система (1.19) является первым продолжением системы (1.15). Из уравнений (1.19) видно, что выражения для дифференциалов $d\omega_2^2$, $d\omega_4^2$, $d\omega_2^4$, $d\omega_4^4$, da^2 и da^4 получаются соответственно из выражений для дифференциалов $d\omega_1^1$, $d\omega_1^3$, $d\omega_3^1$, $d\omega_3^3$, da^1 и da^3 заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$, $3 \longleftrightarrow 4$. Подобная симметрия имеет место и в последующих продолжениях системы. Для сокращения записи, где это возможно, мы будем пользоватся этим фактом.

Рассмотрим величины a^1 и a^3. Если зафиксировать точку многообразия M_4 получим:

$$da^1 = a^1(\tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_4^4) + a^3 \tilde{\omega}_3^1$$
(1.20)
$$da^3 = a^3(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_4^4) + a^1 \tilde{\omega}_1^3 .$$

Пользуясь уравнениями (1.12) и (1.20), находим дифференциал вектора

$$\vec{\mathbb{E}}_{13} = a^1 \vec{e}_1 + a^3 \vec{e}_3 ,$$

принадлежащего площадке $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$:

$$d\vec{\mathbb{E}}_{13} = d(a^1\vec{e}_1 + a^3\vec{e}_3) =$$
$$= da^1 \cdot \vec{e}_1 + a^1 d\vec{e}_1 + da^3 \cdot \vec{e}_3 + a^3 d\vec{e}_3 =$$
(1.21)
$$= -(\tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_4^4)(a^1\vec{e}_1 + a^3\vec{e}_3) =$$
$$= -(\tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_4^4)\vec{\mathbb{E}}_{13}$$

Из равенства (1.21) видно, что вектор $\vec{\mathbb{E}}_{13}$ с координатами(a^1, a^3) в площадке $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ сохраняет постоянное направление, т.е. вектор $\mathbb{E}_{13}$ является относительным вектором. Следовательно, подтензор (a^1, a^3) нашей структуры $\mathfrak{M}_{(4)}$ ведет себя как относительный вектор в площадке $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, так как его компоненты являются координатами вектора $\vec{\mathbb{E}}_{13}$.

Аналогично доказываем, что вектор

$$\vec{\mathbb{E}}_{24} = a^2\vec{e}_2 + a^4\vec{e}_4$$

с координатами (a^2, a^4) является относительным вектором в площадке $(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$, так как

$$d\vec{\mathbb{E}}_{24} = -(\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_3^3)\vec{\mathbb{E}}_{24} .$$

Следовательно, подтензор (a^2, a^4) нашей структуры $\mathfrak{M}_{(4)}$ тоже ведет себя как относительный вектор в площадке $(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

Теперь можно сделать следующий шаг канонизации репера в каждой точке многообразия M_4 .

Канонизируем, обращая в нуль первые компоненты и приравнивая к единицам вторые компоненты подтензоров неголономности нашей структуры $\mathfrak{M}_{(4)}$, т.е.:

$$\begin{aligned} &a^1 = a^2 = 0 , \\ (1.22)\qquad &a^3 = a^4 = 1 . \end{aligned}$$

Следовательно, мы как бы совмещаем векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ соответственно с относительными векторами $\vec{\mathbb{E}}_{13}$ и $\vec{\mathbb{E}}_{24}$ в площадках $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$. А на самом деле происходит совмещение направлений векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ соответственно с инвариантными направлениями, определяемыми относительными векторами $\vec{\mathbb{E}}_{13}$ и $\vec{\mathbb{E}}_{24}$.

Симметричный случай, т.е. $a^3 = a^4 = 0$, $a^1 = a^2 = 0$, дальше рассматривается аналогично нашему последующему рассмотрению.

Голономный случай, когда все $a^i = 0$, $(i = 1,2,3,4)$, мы не рассматриваем. Большинство систем изучаемого типа, имеющие непосредственное применение в практике, являются неголономными.

Пользуясь равенствами (1.22), из уравнений (1.19) получаем:

$$\omega_3^1 = -a_i^1 \omega^i$$

$$\omega_1^1 = \omega_4^4 - \omega_3^3 + a_i^4 \omega^i$$

(1.23)

$$\omega_2^2 = \omega_3^3 - \omega_4^4 + a_i^3 \omega^i$$

$$\omega_4^2 = -a_i^2 \omega^i \,.$$

Подставляем выражения (1.22) и (1.23) в (1.19) и (1.15). Из (1.15) следует:

$$d\omega^1 = (\omega_4^4 - \omega_3^3) \wedge \omega^1 - a_2^1 \omega^2_\wedge \omega^3 - a_4^1 \omega^4_\wedge \omega^3 + a_2^4 \omega^2_\wedge \omega^1 + a_4^4 \omega^4_\wedge \omega^1 + (a_3^4 + a_1^1) \omega^3_\wedge \omega^1$$

(1.24)

$$d\omega^2 = (\omega_3^3 - \omega_4^4) \wedge \omega^2 - a_1^2 \omega^1_\wedge \omega^4 - a_3^2 \omega^3_\wedge \omega^4 + a_1^3 \omega^1_\wedge \omega^2 + a_3^3 \omega^3_\wedge \omega^2 + (a_4^3 + a_2^2) \omega^4_\wedge \omega^2$$

$$d\omega^3 = \omega^3_{1\wedge} \omega^1 + \omega^3_{3\wedge} \omega^3 + \omega^2_\wedge \omega^4$$

$$d\omega^4 = \omega^4_{2\wedge} \omega^2 + \omega^4_{4\wedge} \omega^4 + \omega^1_\wedge \omega^3$$

Уравнения структуры (1.24) можно упростить за счет следующей замены форм:

$$\omega_4^4 = \bar{\omega}_4^4 + l_{4i}^4 \omega^i$$

$$\omega_3^3 = \bar{\omega}_3^3 + l_{3i}^3 \omega^i$$

$$\omega_1^3 = \bar{\omega}_1^3 + l_{1i}^3 \omega^i \tag{1.25}$$
$$\omega_2^4 = \bar{\omega}_2^4 + l_{2i}^4 \omega^i .$$

Чтобы не изменились уравнения (1.24), необходимо и достаточно:

$$l_{32}^3 = l_{34}^3 = l_{41}^4 = l_{43}^4 = l_{12}^3 = l_{14}^3 = l_{21}^4 = l_{23}^4 = 0 \tag{1.26}$$
$$l_{31}^3 = l_{13}^3$$
$$l_{42}^4 = l_{24}^4 .$$

Положим:

$$l_{42}^4 = a_2^4 , \quad l_{31}^3 = a_1^3 \tag{1.27}$$
$$l_{33}^3 = -a_3^4 - a_1^1$$
$$l_{44}^4 = -a_4^3 - a_2^2 .$$

Обозначая $a_4^4 + a_4^3 + a_2^2$ и $a_3^3 + a_3^4 + a_1^1$ соответственно через $\bar{a}_4^4$ и $\bar{a}_3^3$ и делая замену (1.25) в системе (1.24) при условий (1.26) и (1.27), получаем (новые формы и коэффициенты мы будем писать без черточек) :

$$d\omega^1 = (\omega_4^4 - \omega_3^3)_\wedge \omega^1 - a_2^1 \omega^2_\wedge \omega^3 - a_4^1 \omega^4_\wedge \omega^3 + a_4^4 \omega^4_\wedge \omega^1 \tag{1.28}$$
$$d\omega^2 = (\omega_3^3 - \omega_4^4)_\wedge \omega^2 - a_1^2 \omega^1_\wedge \omega^4 - a_3^2 \omega^3_\wedge \omega^4 + a_3^3 \omega^3_\wedge \omega^2$$
$$d\omega^3 = \omega^3_{1\wedge} \omega^1 + \omega^3_{3\wedge} \omega^3 + \omega^2_\wedge \omega^4$$
$$d\omega^4 = \omega^4_{2\wedge} \omega^2 + \omega^4_{4\wedge} \omega^4 + \omega^1_\wedge \omega^3 .$$

Внешнее дифференцирование уравнений (1.28) и дальнейшее разложение по лемме Картана приводит к уравнениям:

$$d\omega_1^3 = \omega_{11}^3 \wedge \omega^1 + (2\omega_3^3 - \omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - a_4^4\omega^4) \wedge \omega_1^3 + \\ + A_1\omega^2 \wedge \omega^3 - (a_{12}^2 + A_4)\omega^4 \wedge \omega^3$$

$$d\omega_2^4 = \omega_{22}^4 \wedge \omega^2 + (2\omega_4^4 - \omega_3^3 + a_4^4\omega^4 - a_3^3\omega^3) \wedge \omega_2^4 + \\ + A_2\omega^1 \wedge \omega^4 - (a_{21}^1 + A_3)\omega^3 \wedge \omega^4$$

$$d\omega_3^3 = (a_3^3\omega^1 + a_2^1\omega^2 + a_4^1\omega^4) \wedge \omega_1^3 + a_3^2\omega^3 \wedge \omega_2^4 + (A_1+1)\omega^2 \wedge \omega^1 + \\ + (a_{31}^3 + a_4^4)\omega^3 \wedge \omega^1 - (a_{12}^2 + A_4)\omega^4 \wedge \omega^1 + A_3\omega^2 \wedge \omega^3 + \\ + (a_2^1 a_1^2 - a_{41}^1 - a_{43}^4)\omega^4 \wedge \omega^3 - a_3^3\omega^2 \wedge \omega^4$$

(1.29)

$$d\omega_4^4 = (a_4^4\omega^2 + a_1^2\omega^1 + a_3^2\omega^3) \wedge \omega_2^4 + a_4^1\omega^4 \wedge \omega_1^3 + (A_2+1)\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + (a_{42}^4 + a_3^3)\omega^4 \wedge \omega^2 - (a_{21}^1 + A_3)\omega^3 \wedge \omega^2 + A_4\omega^1 \wedge \omega^4 + \\ + (a_1^2 a_2^1 - a_{32}^2 - a_{34}^3)\omega^3 \wedge \omega^4 - a_4^4\omega^1 \wedge \omega^3$$

$$da_4^1 = -2a_4^1\omega_3^3 + a_{41}^1\omega^1 + a_{24}^1\omega^2 + a_{43}^1\omega^3 + a_{44}^1\omega^4$$

$$da_3^2 = -2a_3^2\omega_4^4 + a_{13}^2\omega^1 + a_{32}^2\omega^2 + a_{33}^2\omega^3 + a_{34}^2\omega^4$$

$$da_2^1 = a_2^1(2\omega_4^4 - 3\omega_3^3) - a_4^1\omega_2^4 + a_{21}^1\omega^1 + a_{22}^1\omega^2 + a_{23}^1\omega^3 + \\ + (a_{24}^1 + a_2^1 a_4^4)\omega^4$$

$$da_1^2 = a_1^2(2\omega_3^3 - 3\omega_4^4) - a_3^2\omega_1^3 + a_{11}^2\omega^1 + a_{12}^2\omega^2 + a_{14}^2\omega^4 + $$
$$+ (a_{13}^2 + a_1^2 a_3^3)\omega^3$$

$$da_3^3 = -a_3^3\omega_3^3 + a_3^2\omega_2^4 + a_{31}^3\omega^1 + a_{32}^3\omega^2 + a_{33}^3\omega^3 +$$
$$+ (a_{34}^3 + a_{43}^4 + a_{41}^1 - a_2^1 a_1^2)\omega^4$$

$$da_4^4 = -a_4^4\omega_4^4 + a_4^1\omega_1^3 + a_{41}^4\omega^1 + a_{42}^4\omega^2 + a_{44}^4\omega^4 +$$
$$+ (a_{43}^4 + a_{34}^3 + a_{32}^2 - a_1^2 a_2^1)\omega^3$$

Отметим, что канонизация неполная. Свободными остались формы ω_1^3, ω_3^3, ω_2^4, ω_4^4. Они входят в дифференциальные уравнения некоторых коэффициентов структурных уравнений с некоторыми относительными инвариантами в качестве коэффициентов при них и в случае отличия от нуля последних возможно провести дальнейшую канонизацию. Репер, который мы получили в результате выше изложенной канонизации, назовем полуканоническим репером.

Уравнения (1.28) и (1.29) являются структурными уравнениями пространства $\mathfrak{M}_{(4)}$, т.е. они являются структурными уравнениями G_1 -структуры. Величины a_4^1, a_3^2, a_2^1, a_1^2, a_3^3 и a_4^4 представляют собой компонентами структурного тензора G_1 - структуры со структурной группой G_1. Структурная группа G сужается до $G_1 \subset G$ соотношениями, выражающими формы ω_3^1, $\omega_1^1 + \omega_3^3 - \omega_4^4$, ω_4^2, $\omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_3^3$ через главные формы многообразия M_4 (см.(1.23)).

Из выписанных дифференциальных уравнений (1.29) ясно,какие системы коэффициентов образуют геометрические объекты.

1) a_4^1 и a_3^2 - относительные инварианты.

Однокомпонентный линейный геометрический обьект называется относительным инвариантом. Его дифференциальное уравнение имеет вид:

$$(*) \qquad dI - I\cdot\theta = \ldots\ldots,$$

где в правой части линейная комбинация главных форм многообразия, а форма θ при фиксации точки многообразия становится полным дифференциалом: $\tilde{\theta} = d\delta$. Уравнения вида ($*$) интегрируются: $I = I_0 e^{\delta}$, где I_0 - функция только от локальных координат многообразия.

Обращение относительного инварианта в нуль имеет инвариантный смысл и выделяет специальные классы изучаемых геометрических образов (см. [26]).

2) (a_4^1, a_2^1) ; (a_3^2, a_1^2) ; (a_4^1, a_4^4) ; (a_3^2, a_3^3) - двухкомпонентные линейные однородные геометрические обьекты.

В последующих параграфах этой главы будет выяснен геометрический смысл относительных инвариантов и двухкомпонентных геометрических обьектов в связи с классификацией изучаемых систем $S_{2,2}^{(1)}$. Этот вопрос связан с отысканием систем Пфаффа, ассоциированных с заданной системы дифференциальных уравнений, с отысканием характеристических систем, с определением классов систем, для которых многообразие независимых и зависимых переменных допускает те или иные инвариантные расслоения. Аналогично и для многообразия M_6.

§ 1.3. Строение касательного пространства $T(M_4)$ в каждой точке многообразия M_4. Системы Пфаффа в M_4, ассоциированные с заданной системой. Классификация систем $S^{(1)}_{2,2}$.

Рассмотрим вопрос о системах Пфаффа, ассоциированных с заданной системой дифференциальных уравнений (1.11).

Системы Пфаффа в M_4, ассоциированных с заданной системой дифференциальных уравнений, можно получить исходя из геометрических соображений, так как система S уравнений Пфаффа в n-мерном многообразии определяется заданием в каждом касательном пространстве $(n-S)$ - мерного линейного подпространства. Найдем последние в $T(M_4)$. При этом введем для инвариантных подпространств и соответствующих им систем Пфаффа одно обозначение. Например, $S_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \equiv S_{(\varepsilon_3\varepsilon_4)}$ означает и систему $\omega^{\varepsilon_1} = \omega^{\varepsilon_2} = 0$ и подпространство $(\vec{e}_{\varepsilon_3}, \vec{e}_{\varepsilon_4})$, где ε_i, (i = 1,2,3,4), принимают значения 1,2,3,4.

После проведенной частичной канонизации, в каждой точке многообразия M_4 в касательном пространстве $T(M_4)$ выделяется семейство реперов, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид (см.(1.12) и (1.23)):

$$
\begin{aligned}
d\vec{e}_1 &= -(\tilde{\omega}^4_4 - \tilde{\omega}^3_3)\vec{e}_1 - \tilde{\omega}^3_1\vec{e}_3 \\
d\vec{e}_2 &= -(\tilde{\omega}^3_3 - \tilde{\omega}^4_4)\vec{e}_2 - \tilde{\omega}^4_2\vec{e}_4 \\
d\vec{e}_3 &= -\tilde{\omega}^3_3\vec{e}_3 \\
d\vec{e}_4 &= -\tilde{\omega}^4_4\vec{e}_4
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

Пользуясь равенствами (1.30), убеждаемся, что векторы $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ принадлежат одному фиксированному трехмерному подпространству касательного пространства $T(M_4)$ с уравнением

$$S_1: \quad \omega^1 = 0 ,$$

а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ принадлежат другому фиксированному трехмерному подпространству касательного пространства $T(M_4)$ с уравнением

$$S_2: \quad \omega^2 = 0 .$$

Кроме того, в каждой точке задано три двумерных подпространства касательного пространства $T(M_4)$, натянутые соответственно на векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_4$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$, определяющих три системы Пфаффа :

$$S_{13}: \quad \omega^1 = 0 , \quad \omega^3 = 0 ;$$

$$S_{24}: \quad \omega^2 = 0 , \quad \omega^4 = 0 ; \tag{1.31}$$

$$S_{12}: \quad \omega^1 = 0 , \quad \omega^2 = 0 .$$

Подпространства S_{13} и S_{24} -это рассматриваемые нами исходные фиксированные плоскости касательного пространства :($\vec{e}_2, \vec{e}_4$) и ($\vec{e}_1, \vec{e}_3$), а подпространство S_{12} натянуто на найденные в §1.2 инвариантные векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

Наконец, имеется два одномерных подпространства, каждое из которых натянуто на один из найденных в § 1.2 инвариантных векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ исходных двумерных подпространств. Им соответствуют системы :

$$S_{123}: \quad \omega^1 = 0 , \quad \omega^2 = 0 , \quad \omega^3 = 0 ; \qquad S_{124}: \quad \omega^1 = 0 , \quad \omega^2 = 0 , \quad \omega^4 = 0 .$$

2. Докажем, что системы S_{13} и S_{24} задают два семейства действительных характеристических линий на интегральных многообразиях изучаемой системы (I.II).

Характеристики - это многообразия $q<p$ измерений, содержащиеся на рассматриваемом интегральном многообразии V_p данного числа p измерений и обладающие тем свойством, что их q - мерные касательные элементы не регулярны. Значение характеристик следует из замечания, что теорема Коши-Ковалевской теряет силу, если попытатся определить интегральное многообразие размерности $q+1$, которое их содержит. Их отыскание связано с предварительной задачей отыскания q - мерных интегральных элементов мн-я V_p, которые не регулярны. Существование таких элементов не влечет за собой само по себе существование q - мерных характеристических многообразий, кроме случая $q=1$; это происходит в силу условий совместности, которые не удовлетворяются сами по себе при $q>1$ (см. [4], п. 73).

Для общего случая систем двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных доказано, что каждое общее интегральное многообразие допускает вообще два семейства характеристических линий (см. [4], п. 76).

Мы найдем характеристические линии ($q=1$) интегральных многообразий, задаваемых системы (I.II). Для этого напишем уравнения полярного элемента линейного интегрального элемента с компонентами:

$$\delta x, \ \delta y, \ \delta u, \ \delta v,$$

$$\delta(u'_x), \ \delta(u'_y), \ \delta(v'_x), \ \delta(v'_y)$$

(см. [4] ,п.57,58). Пусть формы ω^i и θ^i -это одна и та же форма, выписанная соответственно для дифференциалов d и δ, (i = 1,2,3,4). Тогда, чтобы получить уравнения полярного элемента линейного интегрального элемента, надо присоединить к двум уравнениям системы (1.11) уравнения

$$\omega^3\theta^1-\theta^3\omega^1=0$$
$$(1.11') \qquad \omega^4\theta^2-\theta^4\omega^2=0 \quad .$$

Рассматриваемый линейный интегральный элемент будет особым, если ранг полярной матрицей уравнений (1.11) и (1.11$'$) снизится на единицу. Полярной матрицей, столбцы которой соответствуют формам $\theta^4, \theta^3, \theta^1, \theta^2$ будет матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 & \omega^3 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix} .$$

Ее ранг снизится на единицу, если все шесть определителей второго порядка обратятся в нуль, т.е. если

$$\omega^1\omega^2=0 \quad , \quad \omega^2\omega^3=0 \quad , \quad \omega^1\omega^4=0 \quad , \quad \omega^3\omega^4=0 .$$

Следовательно, одномерные характеристические решения,которые сводят ранг полярной матрицы к единице, определяются уравнениями :

$$S_{13}: \quad \omega^1=0 \quad , \quad \omega^3=0$$

и

$$S_{24}: \quad \omega^2=0 \quad , \quad \omega^4=0 .$$

Или, на каждом общем интегральном многообразии изучаемых систем $S^{(1)}_{2,2}$ существуют два семейства действителных характеристических линий, определяемых уравнениями S_{13} и S_{24}, т.е.системы $S^{(1)}_{2,2}$ являются гиперболическими.(см. [9] -§ 6, [16] , [17] , [33]).

Мы можем считать, что на интегральных многообразиях системы (1.11) характеристики задаются уравнениями

$\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$,

так как на интегральных многообразиях выполняются уравнения(1.10) и,если $\omega^1 = 0$ $(\omega^2 = 0)$, то следует из (1.10), что $\omega^3 = 0$ $(\omega^4 = 0)$.

3. Пусть в M_n задана вполне интегрируемая система Пфаффа: $\omega^i = 0$,$(i = 1,2,\ldots,K)$. Систему форм ω^i можно рассматривать как совокупность главных форм некоторого K -мерного пространства M_K . Обращение в нуль форм ω^i фиксирует в M_K точку, а в M_n выделяет $(n-K)$-мерное подмногообразие M_{n-K}, соответствующее этой точке, на котором формы ω^j, $(j = K+1,\ldots,n)$, линейно независимы.

Следовательно, задание вполне интегрируемой системы определяет локальное инвариантное расслоение пространства M_n на $(n-K)$-мерные слои с K -мерной базой M_K .

Отображение расслоенного пространства M_n в базу M_K : $M_n \to M_K$ задает отображение касательных пространств в соответствующих точках: $T(M_n) \longrightarrow T(M_K)$. При сдвиге точки по слою формы ω^i обращаются в нуль.

Интегралы системы $\omega^i = 0$ являются независимыми переменными на базе расслоения M_K .

Следовательно, системы S_{123} и S_{124} задают расслоение пространства M_4 по интегральным кривым. Интегралы данной системы являются независимыми переменными на базе соответствующего расслоения.

4. Рассмотрим внешнее уравнение Пфаффа: $\omega^1 = 0$.Найдем его характеристическую систему.

Характеристической системой уравнений Пфаффа $\theta_i = 0$ называется ассоциированная система внешних форм

$$\theta_i \ , \quad \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_s \wedge D\theta_s \ , \qquad (i=1,2,\dots,s).$$

Интегралы характеристической системы дают наименьшее число переменных, через которых можно выразить все уравнения исходной системы (см. [3], гл. IV, §§ 6,7; [4]).

Ассоциированной системой линейных форм называется совокупность всех алгебрических производных $(p-1)$- порядка от внешней формы F порядка p (см. [3]).

Определение характеристической системы указывает способ ее составления. Например, характеристическая система системы S_{12} состоит из уравнений (1.31) и добавленных к ним уравнений, полученных приравниванием к нулю алгебраических производных от

$$(1.32)\quad \begin{aligned} d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &= -a^1_4\, \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \\ d\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 &= -a^2_3\, \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 = 0 \ , \end{aligned}$$

т.е. характеристическая система состоит из уравнений

$$(1.33)\quad \begin{gathered} \omega^1 = 0 \ , \ \omega^2 = 0 \ , \\ a^1_4 \omega^4 = 0 \ , \ a^1_4 \omega^3 = 0 \ , \ a^2_3 \omega^3 = 0 \ , \ a^2_3 \omega^4 = 0 . \end{gathered}$$

Дифференцирование в левых частях равенств (1.32) производится с помощью структурных уравнений (1.28).

Аналогично ищутся характеристические системы и в других случаях.

Следовательно, характеристическая система уравнения S_1 ищется из уравнения

$$(1.34)\quad d\omega^1 \wedge \omega^1 = -a^1_2\, \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - a^1_4\, \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 = 0 .$$

К алгебрическим производным второго порядка из уравнения (1.34) нужно добавить само́ уравнение S_1. Характеристическая система распадается на четыре уравнения:

$$a_2^1 \omega^2 + a_4^1 \omega^4 = 0$$

(1.35) $$a_2^1 \omega^3 = 0 \quad , \quad \omega^1 = 0 \quad , \quad a_4^1 \omega^4 = 0 \, .$$

Если относительный инвариант a_4^1 обратится в нуль, то характеристическая система (1.35) совпадает с S_{123} при условии $a_2^1 \neq 0$.

Следовательно, если выполнено

$$a_4^1 = 0 \; , \; a_2^1 \neq 0 \; ,$$

форма ω^1 является формой на базе расслоения, задаваемого системой S_{123}.

Когда $a_4^1 = a_2^1 = 0$, система (1.35) совпадает с S_1.

Или, обращение в нуль двухкомпонентного линейного геометрического обьекта (a_4^1 , a_2^1) является необходимым и достаточным для полной интегрируемости уравнения S_1. Можно считать, что интеграл вполне интегрируемого уравнения S_1 является независимой переменной x, т.е. $\omega^1 = p dx$.

Аналогично выясняем геометрический смысл обращения в нуль относительного инварианта a_3^2 и двухкомпонентного обьекта (a_3^2, a_1^2).

Если относительный инвариант $a_3^2 = 0$, а $a_1^2 \neq 0$, то характеристическая система уравнения S_2 совпадает с S_{124}, т.е. ω^2 -форма на базе расслоения, задаваемого системой S_{124}. Условие обращения в нуль двухкомпонентного обьекта (a_3^2 , a_1^2) является необходимым и достаточным для полной интегрируемости уравнения S_2. Можно считать, что интеграл уравнения S_2 является независимой переменной y, т.е. $\omega^2 = q dy$.

Из уравнений (1.33) замечаем, что одновременное обращение в нуль двух относительных инвариантов a_4^1 и a_3^2 является необходимым и достаточным для полной интегрируемости системы S_{12}, так как в этом случае ее характеристическая система совпадает с самой S_{12} . Если выполнено

(I.36) $$a_4^1 = 0 \quad , \quad a_3^2 = 0 \ ,$$

можно считать, что интегралы вполне интегрируемой системы S_{12} определяют пространство независимых переменных.

Из структурных уравнений (I.29) видно, что если $a_4^1 = 0$ и $a_3^2 = 0$, то компоненты a_2^1 , a_4^4 , a_1^2 и a_3^3 становятся относительными инвариантами.

Считая $a_4^1 = a_3^2 = 0$, выясним геометрический смысл обращения в нуль новых относительных инвариантов a_3^3 и a_4^4 . Рассмотрим внешнюю дифференциальную форму второй степени: $\omega^1 \wedge \omega^2$. Найдем ее характеристическую систему.

Характеристической системой семейства внешних дифференциальных форм Ω_i называется система линейных форм ассоциированная совокупности форм Ω_i и их внешних дифференциалов $D\Omega_i$ (см. [3] , гл. IV , § 6 или гл. XI, § 3).

Следовательно, характеристическая система формы $\omega^1 \wedge \omega^2$ состоит из уравнений, полученных приравниванием к нулю алгебраических производных от форм $\omega^1 \wedge \omega^2$ и $d(\omega^1 \wedge \omega^2)$. Она распадается на три уравнения:

(I.37)
$$a_4^4 \omega^4 + a_3^3 \omega^3 = 0$$
$$\omega^1 = 0 \qquad , \qquad \omega^2 = 0 \ .$$

Если $a_3^3 = 0$, то система (I.37) совпадает с S_{124} , а если $a_4^4 = 0$ - система (I.37) совпадает с S_{123} .

Следовательно, при условии

$$a_4^1 = 0 \quad , \quad (a_3^2, a_3^3) = 0 \ ,$$

форма $\omega^1 \wedge \omega^2$ является формой на базе расслоения, задаваемого системой S_{124} , а при условии

$$a_3^2=0 \quad , \quad (a_4^1, a_4^4)=0 \ ,$$

$\omega^1 \wedge \omega^2$ - форма на базе расслоения, задаваемого системой S_{123}

Если одновременно эти два относительных инварианта a_3^3 и a_4^4 обратятся в нуль, т.е. при

$$(a_4^1, a_4^4)=0 \quad , \quad (a_3^2, a_3^3)=0 \ ,$$

форма $\omega^1 \wedge \omega^2$ является формой на многообразии независимых переменных S_{12} . Следовательно, она имеет вид:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = f(x,y)\, dx \wedge dy \ ,$$

форма $\omega^1 \wedge \omega^2$, в этом случае, является замкнутой и выделяется инвариантный элемент площади.

И, наконец, рассмотрим случай обращения в нуль всех относительных инвариантов и двухкомпонентных линейных геометрических обьектов:

$$a_4^1 \ , \ a_3^2 \ , \ (a_4^1, a_2^1) , \ (a_3^2, a_1^2) \ , (a_4^1, a_4^4) \ , \ (a_3^2, a_3^3) \ .$$

Дадим геометрическую характеристику этого класса. Из структурных уравнении (I.28) и (I.29) находим:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \theta \wedge \omega^1 \\ d\omega^2 &= -\theta \wedge \omega^2 \qquad \text{(I.38)} \\ d\theta &= K \omega^1 \wedge \omega^2 \ , \end{aligned}$$

где $\theta = \omega_4^4 - \omega_3^3$ и $K = A_1 + A_2 + 2$.

Следовательно, на базе расслоения $\omega^1=0, \omega^2=0$ задается псевдориманова метрика; $(-K)$ - гауссова (полная) кривизна этой метрики.

И, в самом деле, псевдориманова метрика реализуется на двумерной поверхности так: в касательном пространстве к базе в каждой точке выбираем векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, так чтобы их скалярные произведения равнялись

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=0\ ,\quad (\vec{e}_2,\vec{e}_2)=0\ ,\quad (\vec{e}_1,\vec{e}_2)=1\ ,$$

т.е. мы направляем векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ по изотропным направлениям касательной плоскости, их длина нулевая. Тогда формы ω^1 и ω^2, являющимися координатами векторов касательного пространства относительно "подвижного репера" (см. § I.I), удовлетворяют структурным уравнениям (I.38). Формулы инфинитезимальных перемещений выбранного репера имеют вид:

$$d\bar{M}=\omega^i\vec{e}_i$$

$$d\vec{e}_1=-\theta\cdot\vec{e}_1$$

$$d\vec{e}_2=\theta\cdot\vec{e}_2\ .$$

Вычисляя первую квадратичную форму поверхности ds^2, мы получаем:

$$ds^2=(d\bar{M})^2=2\omega^1\omega^2=2pq\,dx\,dy=2\,\tilde{f}(x,y)\,dx\,dy\ ,$$

т.е. она неположительно определена. Отсюда ясно, что на базе расслоения $\omega^1=0\,,\omega^2=0$, после такого построения, задается псевдориманова метрика (см. [5], [I8] - §§ 85, I03, 44).

5. Ниже мы будем рассматривать проекцию касательного пространства $T(M_4)$ на бесконечно удаленную гиперплоскость, т.е. трехмерное проективное пространство P_3 (см. начало § I.2). Оставим обозначения базисных точек в P_3 те же, что и для векторов в M_4. Подвижному реперу в M_4 соответствует подвижной репер в P_3 и, следовательно, формулы их инфинитезимальных перемещений одинаковы.

в P_3 имеем двухпараметрическое семейство прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$.

Рассмотрим задачу проектирования семейства прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$ в базы различных расслоений пространства M_4.

Пространство зависимых и независимых переменных M_4 допускает ряд локальных инвариантных расслоений. В качестве базы можно брать пространство первых интегралов следующих вполне интегрируемых, при некоторых условий, систем:

I. $S_{123}: \ \omega^1=0, \ \omega^2=0, \ \omega^3=0;$

II. $S_{124}: \ \omega^1=0, \ \omega^2=0, \ \omega^4=0;$

III. $S_{12}: \ \omega^1=0, \ \omega^2=0.$

I. Первые интегралы вполне интегрируемой системы S_{123} определяют трехмерное пространство - базу расслоения, а в M_4 выделяется одномерный слой. При проектировании семейства $\mathfrak{M}_{(2)}$ вдоль слоя формы базы ω^i, (i = I, 2, 3), обращаются в нуль.

Уравнения инфинитезимального перемещения репера в каждой точке базы легко можно получить из структурных уравнений (I.28):

$$d\vec{e}_1 = -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3 + a_4^4\omega^4)\vec{e}_1 - a_1^2\omega^4\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_1^3\vec{e}_3$$

$$d\vec{e}_2 = -(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4)\vec{e}_2 + \omega^4\vec{e}_3$$

$$d\vec{e}_3 = a_4^1\omega^4\vec{e}_1 - a_3^2\omega^4\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_3^3\vec{e}_3,$$

где $\tilde{\omega}_q^p$ - вторичные формы, взятые при фиксированных значениях форм базы ($\omega^i=0$).

Из уравнений (I.39) видно, что инвариантными могут быть следующие образы:

I) точка $\vec{e}_3$, если $a_4^1 = a_3^2 = 0$;

2) прямая $\vec{e}_1\vec{e}_3$, если (a_3^2, a_1^2) $= 0$;

3) прямая $\vec{e}_2\vec{e}_3$, если $a_4^1 = 0$.

Проекция семейства прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$ в касательное пространство базы представляет собой пучок прямых, проходящих через некоторую точку $\vec{e}_3$.

II. Первые интегралы вполне интегрируемой системы S_{124} определяют трехмерную базу расслоения, а в M_4 выделяется одномерный слой.

Проектируем семейство прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$ в касательное пространство базы вдоль трехмерного слоя $\omega^1, \omega^2, \omega^4$. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$d\vec{e}_1 = -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3 - a_3^3\omega^3)\vec{e}_1 + \omega^3\vec{e}_4$$

$$d\vec{e}_2 = -a_2^1\omega^3\vec{e}_1 - (\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4 + a_3^3\omega^3)\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_2^4\vec{e}_2$$

$$d\vec{e}_4 = -a_4^1\omega^3\vec{e}_1 + a_3^2\omega^3\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_4^4\vec{e}_4$$

Выделяются следующие инвариантные образы:

I) точка $\vec{e}_4$, если $a_4^1 = a_3^2 = 0$;

2) прямая $\vec{e}_2\vec{e}_4$, если $(a_4^1, a_2^1) = 0$;

3) прямая $\vec{e}_1\vec{e}_4$, если $a_3^2 = 0$.

Проекция семейства прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$ в касательное пространство базы представляет собой пучок прямых, проходящих через некоторую точку $\vec{e}_4$.

III) База расслоения - пространство независимых переменных (пространство первых интегралов вполне интегрируемой, при условии (I.36), системы S_{12}). Слой - интегральное многообразие. Уравнения инфинитезимальных перемещений имеют вид:

$$d\vec{e}_1 = -\left(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3 + a_4^4\omega^4\right)\vec{e}_1 - a_1^2\omega^4\vec{e}_2$$

$$d\vec{e}_2 = -\left(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4 + a_3^3\omega^3\right)\vec{e}_2 - a_2^1\omega^3\vec{e}_1 \quad .$$

Инвариантными могут быть образы:

1) точка $\vec{e}_1$, при

(I.40) $$a_1^2 = 0 \quad , \quad a_3^2 = a_4^1 = 0 \quad ;$$

2) точка $\vec{e}_2$, при

(I.4I) $$a_2^1 = 0 \quad , \quad a_4^1 = a_3^2 = 0 \quad .$$

Следовательно, проекция семейства прямых $\mathfrak{M}_{(2)}$ в касательное пространство базы представляет собой однопараметрическое семейство линий, проходящее через точки $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Но, так как условия (I.40) и (I.4I) обеспечивают полную интегрируемость систем S_1 и S_2 , то следует, что характеристики соответствующего семейства для всех интегральных многообразий системы $S_{2,2}^{(1)}$ проектируются в пространство независимых переменных в однопараметрическое семейство кривых.

§ 1.4. Строение касательного пространства $T(M_6)$ в каждой точке M_6. Системы Пфаффа, инвариантно присоединенные к изучаемой системе $S_{2,2}^{(1)}$.

Совокупность первых частных производных от искомых функций по двух независимым переменным определяет в каждой точке M_4 двумерный касательный элемент, натянутый на векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Множество этих касательных элементов как раз и образует пространство $M_{(2,2)}$, а две уравнения между производными и всеми переменными - подмногообразие M_6. На M_6 формы $\omega_1^3, \omega_2^4, \omega^i$, ($i$ = 1,2,3,4) остаются независимыми (см.(1.9)).

После проведенной частичной канонизации в каждой точке многообразия M_6 в касательном пространстве $T(M_6)$ к этой точке выделяется семейство реперов, инфинитезимальные перемещения которых имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&d\vec{e}_1 = -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_1 - \tilde{\omega}_{11}^3\vec{e}_{31}\\
&d\vec{e}_2 = -(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4)\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_{22}^4\vec{e}_{42}\\
&d\vec{e}_3 = -\tilde{\omega}_3^3\vec{e}_3\\
&d\vec{e}_4 = -\tilde{\omega}_4^4\vec{e}_4\\
&d\vec{e}_{31} = -(2\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4)\vec{e}_{31}\\
&d\vec{e}_{42} = -(2\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_{42}
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Уравнения (1.42) мы получили из структурных уравнений (1.28) и (1.29).

Изучим геометрию систем $S_{2,2}^{(1)}$, связанную с рассмотрением их продолжений в M_6. А именно, для более детального выяснения роли двухкомпоненнтных линейных однородных геометрических объектов рассмотрим вопрос о системах Пфаффа, инвариантно присоединенных к системе (1.11) в многообразии M_6 .

Пользуясь формулами (1.42), убеждаемся, что в каждой точке векторы $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ и $\vec{e}_{42}$ принадлежат одному четырехмерному инвариантному подпространству касательного пространства $T(M_6)$ с уравнением

$$S_{51}: \quad \omega_1^3 = 0 \quad , \quad \omega^1 = 0 \ ,$$

а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ и $\vec{e}_{31}$ другому четырехмерному инвариантному подпространству касательного пространства $T(M_6)$ с уравнением :

$$S_{62}: \quad \omega_2^4 = 0 \quad , \quad \omega^2 = 0 \ .$$

Замечание: Здесь мы пользуемся уже введенным в § 1.3 обозначением для инвариантных подпространств и соответствующих им систем Пфаффа. В этом случае $\varepsilon_i = 1,2,3,4,5,6$ и $\omega^5 \equiv \omega_1^3$, $\omega^6 \equiv \omega_2^4$.

Условия полной интегрируемости S_{51} :

$$\begin{aligned} &a_2^1 = a_4^1 = 0 \ , \\ &A_1 = a_{12}^2 + A_4 = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.43}$$

Условия полной интегрируемости S_{62} :

$$\begin{aligned} &a_1^2 = a_3^2 = 0 \ , \\ &A_2 = a_{21}^1 + A_3 = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.44}$$

Пространства S_{51} и S_{62} пересекаются по двумерной плоскости, натянутой на векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

Имеется два пятимерных подпространства, каждое из которых содержит одно из четырехмерных. Соответствующие уравнения Пфаффа имеют вид :

$$S_1 : \quad \omega^1 = 0 \quad ;$$
$$S_2 : \quad \omega^2 = 0 \quad .$$

Эти подпространства являются инвариантными и в многообразии M_4. Мы уже их рассматривали. (см. § 1.3)

Четыре трехмерных подпространства принадлежат соответствующим четырехмерным подпространствам. Им соответствуют системы Пфаффа:

$$S_{512} : \quad \begin{array}{l} \omega_1^3 = 0 \quad , \\ \omega^1 = 0 \quad , \\ \omega^2 = 0 \quad ; \end{array}$$

$$S_{612} : \quad \begin{array}{l} \omega_2^4 = 0 \quad , \\ \omega^1 = 0 \quad , \\ \omega^2 = 0 \quad ; \end{array}$$

$$S_{513} : \quad \begin{array}{l} \omega_1^3 = 0 \quad , \\ \omega^1 = 0 \quad , \\ \omega^3 = 0 \quad ; \end{array}$$

$$S_{624} : \quad \begin{array}{l} \omega_2^4 = 0 \quad , \\ \omega^2 = 0 \quad , \\ \omega^4 = 0 \quad . \end{array}$$

Подпространства S_{512} и S_{612} пересекаются по той же двумерной плоскости, натянутой на векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$. Условия полной интегрируемости системы

$$(1.45) \qquad S_{512}: \quad a^1_4 = a^2_3 = a^2_{12} + A_4 = 0 \quad ;$$

$$(1.46) \qquad S_{612}: \quad a^1_4 = a^2_3 = a^1_{21} + A_3 = 0 \quad .$$

Имеется четыре двумерные подпространства с соответствующими вполне интегрируемыми системами Пфаффа :

$$S_{5123}: \quad \omega^3_1 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;, \quad \omega^3 = 0 \;;$$

$$S_{5124}: \quad \omega^3_1 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;, \quad \omega^4 = 0 \;;$$

$$S_{6123}: \quad \omega^4_2 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;, \quad \omega^3 = 0 \;;$$

$$S_{6124}: \quad \omega^4_2 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;, \quad \omega^4 = 0 \;;$$

и двумерное подпространство

$$S_{5612}: \quad \omega^3_1 = 0 \;, \quad \omega^4_2 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;.$$

Условия полной интегрируемости S_{5612} : $a^1_4 = a^2_3 = a^2_{12} + A_4 = a^1_{21} + A_3 = 0$.
Подпространства S_{5123} , S_{5124} , S_{6123} , S_{6124} принадлежат соответствующим четырех - и трехмерным подпространствам. Подпространство S_{5612} является двумерной плоскостью пересечения четырехмерных подпространств. Подпространства S_{5123} и S_{5124} ; S_{6123} и S_{6124} ; S_{5123} и S_{5612} , S_{5123} и S_{6123} , S_{5612} и S_{6123} ; S_{5124} и S_{5612} , S_{5124} и S_{6124} , S_{5612} и S_{6124} пересекаются по одномерным подпространствам, соответственно натянутым на векторы $\vec{e}_{42}$, $\vec{e}_{31}$, $\vec{e}_4$ и $\vec{e}_3$. Прямые пересечения определяют четыре системы обыкновенных дифференциальных уравнений, инвариантно присоединенных к нашей системе.

Им соответствуют вполне интегрируемые системы Пфаффа:

$$S_{(6)}:\ \omega_1^3=0,\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega^3=0,\ \omega^4=0;$$

$$S_{(5)}:\ \omega_2^4=0,\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega^3=0,\ \omega^4=0;$$

$$S_{(4)}:\ \omega_1^3=0,\ \omega_2^4=0,\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega^3=0;$$

$$S_{(3)}:\ \omega_1^3=0,\ \omega_2^4=0,\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega^4=0.$$

Условия полной интегрируемости всех указанных в настоящем параграфе систем получены из структурных уравнений (I.28) и (I.29).

Подпространства S_{5123}, S_{5124}, S_{6123}, S_{6124}, $S_{(6)}$, $S_{(5)}$, $S_{(4)}$ и $S_{(3)}$ образуют голономные поля инвариантных подпространств в M_6, т.к. соответствующие им системы Пфаффа вполне интегрируемы.

§ 1.5. Характеристические системы систем S_{51}, S_{512}, S_{513}, S_{5123}, S_{5124}, S_{5612}, $S_{(4)}$, $S_{(6)}$. Инвариантное значение некоторых геометрических объектов.

1. Определим класс и найдем характеристическую систему для каждой из указанных в заглавии настоящего параграфа системы. Остальные инвариантно присоединенные системы (см. § 1.4) рассматриваются аналогичным образом.

Классом системы внешних дифференциальных форм называется наименьшее число переменных x_i, через которые можно выразить все формы системы так, чтобы под знаком дифференциалов и в коэффициенты не входило других переменных.

Эти переменные называются характеристическими.

Класс системы внешних дифференциальных форм равен рангу ее характеристической системы. (см. [3], гл. IV, § 6)

Рассмотрим систему S_{51}. Ее характеристическая система находится из уравнений самой системы $\omega^1=0$, $\omega_1^3=0$ и

$$d\omega^1{}_\wedge\omega^1{}_\wedge\omega_1^3=-a_2^1\omega^2{}_\wedge\omega^3{}_\wedge\omega^1{}_\wedge\omega_1^3-a_4^1\omega^4{}_\wedge\omega^3{}_\wedge\omega^1{}_\wedge\omega_1^3=0$$

$$d\omega_1^3{}_\wedge\omega_1^3{}_\wedge\omega^1=A_1\omega^2{}_\wedge\omega^3{}_\wedge\omega_1^3{}_\wedge\omega^1-(a_{12}^2+A_4)\omega^4{}_\wedge\omega^3{}_\wedge\omega_1^3{}_\wedge\omega^1=0$$

Из последних уравнений находим, что характеристическая система $\tilde{S}_{51}$ системы S_{51} состоит из уравнений :

$$\omega^1=0$$

$$\omega_1^3=0$$

$$a_2^1\omega^2+a_4^1\omega^4=0$$

$$A_1\omega^2-(a_{12}^2+A_4)\omega^4=0$$

$$a_2^1\omega^3=0$$

$$a_4^1\,\omega^3 = 0$$
$$A_1\,\omega^3 = 0 \tag{1.47}$$
$$(a_{12}^2 + A_4)\,\omega^3 = 0 \quad .$$

<u>Замечание</u>: Дальше характеристические системы соответствующих систем будем обозначать с той же буквой как и сама система, но с волной $/\sim/$.

Система (1.47) в общем случае содержит пять независимых уравнений, т.е. класс системы S_{51} равен пяти (см. [2]). Действительно, ранг матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} a_2^1 & 0 & a_4^1 \\ A_1 & 0 & -(a_{12}^2 + A_4) \\ 0 & a_2^1 & 0 \\ 0 & a_4^1 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & a_{12}^2 + A_4 & 0 \end{matrix} \right\|$$

в общем случае равен трем / да еще два уравнения $\omega^1 = 0$ и $\omega_1^3 = 0$ /. Класс системы S_{51} будет равен четырем лишь в случае, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_4^1 \\ A_1 & -(a_{12}^2 + A_4) \end{vmatrix} = 0 \qquad ,$$

но не все компоненты этого определителя равны нулю. Тогда $\widetilde{S}_{51}$ состоит из уравнений

$$\omega^1 = 0$$

$$\omega_1^3 = 0$$

$$\omega^3 = 0$$

$$a_2^1 \omega^2 + a_4^1 \omega^4 = 0 \ .$$

Если имеют места равенства:

$a_2^1 = a_4^1 = A_1 = a_{12}^2 + A_4 = 0$, т.е.условия (1.43), то класс системы S_{51} равен двум. Следовательно система S_{51} совпадает со своей характеристической системой $\widetilde{S}_{51}$,т.е. S_{51} вполне интегрируема (см. [3] ,гл.IV, § 7). Тогда уравнение

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0 \ ,$$

которое инвариантно присоединяется к нашей системе (1.11),имеет в этом случае (его характеристическая система состоит из уравнений $\omega^1 = 0$, $\omega_1^3 = 0$) очевидное общее решение: одна из характеристических переменных системы S_{51} является произвольной функцией от другой.

Рассмотрим систему S_{512} . Система $\widetilde{S}_{512}$ находится из уравнений: $\omega_1^3 = 0$, $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ и

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 = -a_4^1 \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 = 0$$

$$(1.48) \qquad d\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega_1^3 = -a_3^2 \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0$$

$$d\omega_1^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = -(a_{12}^2 + A_4)\omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

Из уравнений (1.48) видно, что если хотя бы один из коэффициентов a_4^1 , a_3^2 и ($a_{12}^2 + A_4$) отличен от нуля, то класс системы S_{512} равен пяти и $\widetilde{S}_{512}$ состоит из уравнений :

$$\omega_1^3 = 0 \quad , \quad \omega^1 = 0 \quad , \quad \omega^2 = 0 ,$$

$$\omega^3 = 0 \quad , \quad \omega^4 = 0 .$$

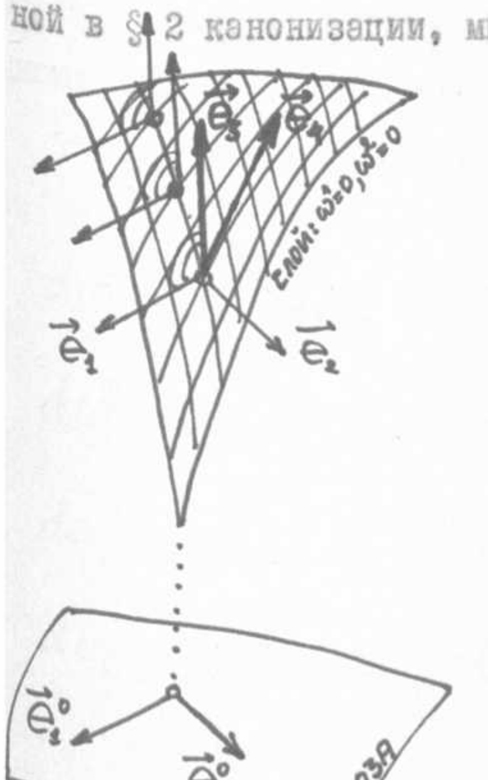
Следовательно, система $\widetilde{S}_{512}$ совпадает с $S_{(6)}$.

В случае, когда

$$a_4^1 = 0 \quad , \quad a_3^2 = 0 \quad , \quad a_{12}^2 + A_4 = 0 ,$$

т.е. выполнены равенства (1.45), класс S_{512} равен трем. Система S_{512} совпадает с $\widetilde{S}_{512}$, S_{512} - вполне интегрируема. В этом случае система $S_{12} : \omega^1 = 0, \omega^2 = 0$ вполне интегрируема и задает расслоение пространства четырех переменных M_4 (см.§ 1.3).

Рассмотрим это расслоение. Слой задается уравнениями : $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, а первые интегралы этой системы являются независимыми переменными на базе расслоения. Вследствие проведенной в § 2 канонизации, мы рассматриваем векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ фиксированы касательные к слою, а проекции (при дифференцируемом отображении расслоенного пространства M_4 на базу первых интегралов системы S_{12}) $\vec{e}_1^{\,\circ}$ и $\vec{e}_2^{\,\circ}$ векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ -произвольные касательные к базе. Полная интегрируемость системы S_{512} геометрически означает, что задается некий паралелизм вектора $\vec{e}_1$ вдоль слоя, т.е. если зададим вектор $\vec{e}_1$ в одной точке, то в любой другой точке вдоль слоя определится вектор $\vec{e}_1$. Задается паралелизм площадок($\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$),



Это объясняется тем, что уравнение инфинитезимального перемещения вектора $\vec{e}_1$ в точке многообразия M_4 имеет вид:

$$d\vec{e}_1 = -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_1 - \tilde{\omega}_1^3 \vec{e}_3$$

и форма $\tilde{\omega}_1^3$ вдоль слоя $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ обращается в нуль, так как система S_{512} : $\omega_1^3=0$, $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ вполне интегрируема. Следовательно

$$d\vec{e}_1 = -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_1$$

т.е. вектор $\vec{e}_1$ сохраняет постоянное направление.

Класс системы S_{513} равен пяти, так как ранг $\tilde{S}_{513}$ всегда равен пяти. $\tilde{S}_{513}$ состоит из уравнений :

$$\omega_1^3 = 0 \quad , \quad \omega^1 = 0 \quad , \quad \omega^3 = 0$$
$$\omega^2 = 0 \quad , \quad \omega^4 = 0 \; ,$$

т.е. $\tilde{S}_{513}$ совпадает с системой $S_{(6)}$.

Дальше находим, что $\tilde{S}_{5123}$ и $\tilde{S}_{5124}$ совпадают соответственно с S_{5123} и S_{5124} . Следовательно класс систем S_{5123} и S_{5124} равен четырем и они вполне интегрируемы.

$\tilde{S}_{5612}$ получаем из уравнений: $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$, $\omega^1=0$, $\omega^2=0$

и

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^4 = -a_4^1 \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^4 = 0$$

$$d\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^4 = -a_3^2 \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^4 = 0$$

$$d\omega_1^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^4 = -(a_{12}^2 + A_4)\omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^4 = 0$$

$$d\omega_2^4 \wedge \omega_2^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 = -(a_{21}^1 + A_3)\omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega_2^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 = 0 \; .$$

Если хотя бы один из коэффициентов :

$$a_4^1 \quad , \quad a_3^2 \quad , \quad a_{12}^2 + A_4 \quad , \quad a_{21}^1 + A_3$$

отличен от нуля, класс системы S_{5612} равен шести и $\widetilde{S}_{5612}$ состоит из уравнений:

$$\omega_1^3 = 0 \;, \quad \omega_2^4 = 0 \;, \quad \omega^1 = 0 \;, \quad \omega^2 = 0 \;,$$
$$\omega^3 = 0 \;, \quad \omega^4 = 0 \;.$$

В случае, когда

$$a_4^1 = a_3^2 = a_{12}^2 + A_4 = a_{21}^1 + A_3 = 0 \;,$$

класс S_{5612} равен четырем, $\widetilde{S}_{5612}$ совпадает с S_{5612}. Система S_{5612} вполне интегрируема. Геометрически этот факт означает, что задается паралелизм векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ вдоль слоя $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ (система S_{12} вполне интегрируема и задает расслоение пространства M_4 как и в случае с системой S_{512}), т.е. если задать в одной точке векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то в любой другой точке определятся векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Задается паралелизм площадок $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$ вдоль слоя.

Остальные две системы $S_{(4)}$ и $S_{(6)}$ вполне интегрируемы, так как они совпадают со своими характеристическими системами $\widetilde{S}_{(4)}$ и $\widetilde{S}_{(6)}$. Класс систем $S_{(4)}$ и $S_{(6)}$ равен пяти. Они задают расслоение пространства M_6 по интегральным кривым. Интегралы этих систем являются независимыми переменными на базе соответствующего расслоения.

Рассмотрим случай, когда одновременно являются вполне интегрируемыми системы S_{51} и S_{62}, т.е. когда выполны условия (1.43) и (1.44). Но a_{21}^1 и a_{12}^2 обращаются в нуль вследствие равенств $a_1^2 = a_2^1 = 0$. Следовательно, условия полной интегрируемости систем S_{51} и S_{62} имеют вид:

(1.49) $$a_4^1 = a_3^2 = a_1^2 = a_2^1 = A_i \;, \quad (i = 1,2,3,4).$$

Тогда уравнения:

$$\overline{S}_{51}: \quad \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0 \quad ,$$

$$\overline{S}_{62}: \quad \omega^2 \wedge \omega_2^4 = 0 \quad ,$$

которые имеют инвариантный смысл в пространстве M_6, допускают очевидные общие решения - одна из характеристических переменных системы $\overline{S}_{51}$ является произвольной функцией от другой (аналогично и для системы $\overline{S}_{62}$)

Посмотрим, что происходит с системой

$$S: \begin{matrix} \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0 \\ \omega^2 \wedge \omega_2^4 = 0 \end{matrix}$$

в шестимерном пространстве M_6. Эти формы задают многообразие интегральных элементов в пространстве M_6. Возьмем по одному решению уравнений $\overline{S}_{51}$ и $\overline{S}_{62}$, т.е.

$$\text{(1.50)} \qquad \begin{aligned} \omega_1^3 &= \lambda \omega^1 \\ \omega_2^4 &= \mu \omega^2 \end{aligned}$$

Таким образом, из всех интегральных элементов мы выделяем четырехпараметрическое семейство и ищем именно это семейство, для которого выполнены уравнения (1.50). Рассмотрим двумерное подпространство, натянутое на векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Оно определяется уравнениями:

$$S_{34}: \quad \omega^3 = 0 \quad , \quad \omega^4 = 0$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений в точке для векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют вид:

$$\text{(1.51)} \qquad \begin{aligned} d\vec{e}_1 &= -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_1 - \tilde{\omega}_1^3 \vec{e}_3 \\ d\vec{e}_2 &= -(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4)\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_2^4 \vec{e}_4 \end{aligned}$$

Из уравнений (1,51) видно, что в нашем случае, т.е.когда выполнены уравнения (1.50), в любой точке выделяется только одна площадка, натянутая на векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Или решение системы S сводится к интегрированию вполне интегрируемой системы S_{34} . Система S_{34} вполне интегрируема, так как выполнены равенства (1.49) и (1.50).

Рассмотрим вполне интегрируемую систему S_{5123} . Она задает расслоение пространства M_6 по двумерным интегральным элементам. Первые интегралы системы S_{5123} являются независимыми переменными на базе расслоения, т.е. они определяют четырехмерное пространство - базу расслоения. Слой задается уравнениями:

$$\omega_1^3=0 \quad , \ \omega^1=0 \ , \omega^2=0 \ , \ \omega^3=0 \ .$$

Векторы $\vec{e}_4$ и $\vec{e}_{42}$ касательные к слою. Напишем уравнения инфинитезимальных перемещений на базе расслоения (точка зафиксирована):

$$d\vec{e}_1=-\left(\tilde{\omega}_4^4-\tilde{\omega}_3^3+a_4^4\omega^4\right)\vec{e}_1-a_1^2\omega^4\vec{e}_2-\tilde{\omega}_{11}^3\,\vec{e}_{31}$$

$$d\vec{e}_2=-\left(\tilde{\omega}_3^3-\tilde{\omega}_4^4\right)\vec{e}_2+\omega^4\vec{e}_3$$

$$d\vec{e}_3=a_4^1\omega^4\vec{e}_1-a_3^2\omega^4\vec{e}_2-\tilde{\omega}_3^3\,\vec{e}_3+\left(a_{12}^2+A_4\right)\omega^4\vec{e}_{31}$$

$$d\vec{e}_{31}=-\left(2\,\tilde{\omega}_3^3-\tilde{\omega}_4^4-a_4^4\omega^4\right)\vec{e}_{31}$$

где $\tilde{\omega}_p^q$ - формы, взятые при фиксированных значениях форм базы. Из этих уравнений видно, что в любой точке выделяется двухпараметрическое семейство двухмерных плоскостей и условия:

$$a_4^1=a_1^2=a_{12}^2+A_4=0$$

являются необходимыми и достаточными условиями, что это семейство есть рассматриваемое нами семейство двухмерных плоскостей, т.е. выделяются две фиксированные плоскости :

$(\vec{e}_1, \vec{e}_{31})$ и $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2. Укажем инвариантное значение некоторых геометрических обьектов, охваченных указанными в § I.4 инвариантными подпространствами.

При $a_4^1 = a_3^2 = a_{12}^2 + A_4 = a_{21}^1 + A_3 = 0$ решения систем $S_{(3)}$ и $S_{(4)}$ образуют "четырехугольную" 2-ткань в смысле Бляшке (см. [20], гл. IV, § 49), т.е. лежат на одних и тех же двумерных поверхностях-решениях системы $S_{5612} \equiv S_{(34)}$. Аналогично обстоит дело с решениями систем $S_{(3)}$ и $S_{(5)}$, $S_{(3)}$ и $S_{(6)}$, $S_{(4)}$ и $S_{(5)}$, $S_{(4)}$ и $S_{(6)}$, $S_{(5)}$ и $S_{(6)}$. Решения систем $S_{(3)}$, $S_{(4)}$ и $S_{(5)}$ при $a_4^1 = a_3^2 = a_{21}^1 + A_3 = 0$ образуют в интегральном многообразии системы $S_{612} \equiv S_{(345)}$ 3-ткань в смысле Бляшке. Аналогично - решения систем $S_{(3)}$, $S_{(4)}$ и $S_{(6)}$ при $a_4^1 = a_3^2 = a_{12}^2 + A_4 = 0$ образуют в интегральном многообразии системы $S_{512} \equiv S_{(346)}$ 3-ткань в смысле Бляшке. При $a_4^1 = a_3^2 = 0$ решения систем $S_{(3)}$, $S_{(4)}$, $S_{(5)}$ и $S_{(6)}$ образуют в интегральном многообразии системы S_{12} 4-ткань в смысле Бляшке.

Если системы S_{6124}, S_{5123} (или S_{6123}, S_{5124}) и S_{12} вполне интегрируемые, то решения первых двух образуют четырехугольную 2-ткань в интегральном многообразии системы S_{12}.

В случае полной интегрируемости систем S_{5123}, $S_{(3)}$ или S_{5124}, $S_{(4)}$ и S_{512} (S_{6123}, $S_{(3)}$ или S_{6124}, $S_{(4)}$ и S_{612}) решения первых двух образуют четырехугольную 2-ткань соответственно в интегральных многообразиях систем S_{512} и S_{612}.

Наконец, при полной интегрируемости систем S_{513}, S_{6124} и S_1, решения систем S_{513} и S_{6124} образуют четырехугольную 2-ткань в интегральном многообразии уравнения S_1. Аналогично верно и для систем S_{624}, S_{5123} и S_2.

Сделанные выводы имеют прямое отношение к изучаемой системе (I.II). Например, в случае 2-ткани S_{5123} , $S_{(3)}$ или S_{5124} , $S_{(4)}$ на S_{512} (S_{6123} , $S_{(3)}$ или S_{6124} , $S_{(4)}$ на S_{612} ; или $S_{(3)}$, $S_{(4)}$ на S_{5612} ; или $S_{(3)}$, $S_{(5)}$ на S_{6124} ; или $S_{(4)}$, $S_{(5)}$ на S_{6123}) за одну (одну, две соответственно) из искомых функций системы (I.II) естественно взять интегралы системы S_{512} (S_{612} ; S_{5612} ; S_{6124} ; S_{6123} соответственно), не являющимися интегралами системы S_{12} .

Г Л А В А II.

СИСТЕМЫ $S^{(1)}_{2,2}$, ДОПУСКАЮЩИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СИСТЕМ

§ 2.I. Полная канонизация репера

Рассмотрим двухкомпонентный линейный геометрический обьект (a_4^1 , a_4^4). Если зафиксировать точку многообразия M_4 , из уравнений (I.29) получим :

(2.I)
$$\begin{aligned} da_4^1 &= -2a_4^1\tilde{\omega}_3^3 \\ da_4^4 &= -a_4^4\tilde{\omega}_4^4 + a_4^1\tilde{\omega}_1^3 \end{aligned}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера в фиксированной точке имеют вид (из (I.28)) :

(2.2)
$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= -(\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_3^3)\vec{e}_1 - \tilde{\omega}_1^3\vec{e}_3 \\ d\vec{e}_2 &= -(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_4^4)\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_2^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_3 &= -\tilde{\omega}_3^3\vec{e}_3 \\ d\vec{e}_4 &= -\tilde{\omega}_4^4\vec{e}_4 \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (2.I) и (2.2), находим дифференциал вектора

$$\vec{\mathbb{K}}_{13} = a_4^1\vec{e}_1 + a_4^4\vec{e}_3$$

принадлежащего площадке ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$) :

(2.3)
$$\begin{aligned} d\vec{\mathbb{K}}_{13} &= d(a_4^1\vec{e}_1 + a_4^4\vec{e}_3) = \\ &= da_4^1.\vec{e}_1 + a_4^1 d\vec{e}_1 + da_4^4.\vec{e}_3 + a_4^4 d\vec{e}_3 = \end{aligned}$$

$$= -\left(\tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4\right)\left(a_4^1 \vec{e}_1 + a_4^4 \vec{e}_4\right) =$$
$$= -\left(\tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4\right) \vec{\mathbb{K}}_{13}$$

Уравнение (2.3) показывает, что вектор $\vec{\mathbb{K}}_{13}$ с координатами (a_4^1 , a_4^4) в площадке ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$) сохраняет постоянное направление. Вектор $\vec{\mathbb{K}}_{13}$ только растягивается вдоль самого себя. Следовательно, вектор $\vec{\mathbb{K}}_{13}$ является относительным вектором. Тогда и двухкомпонентный линейный геометрический обьект (a_4^1 , a_4^4) ведет себя как относительный вектор в площадке ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$), так как его компоненты являются координатами вектора $\vec{\mathbb{K}}_{13}$.

Аналогично доказываем, что вектор

$$\vec{\mathbb{K}}_{24} = a_3^2 \vec{e}_2 + a_3^3 \vec{e}_4$$

с координатами компоненты линейного геометрического обьекта (a_3^2 ,a_3^3) является относительным вектором в площадке ($\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$), так как

$$d\,\vec{\mathbb{K}}_{24} = -\left(\tilde{\omega}_4^4 + \tilde{\omega}_3^3\right) \vec{\mathbb{K}}_{24} \quad .$$

Следовательно, двухкомпонентный линейный геометрический обьект (a_3^2 , a_3^3) ведет себя в площадке ($\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$) как относительный вектор.

Теперь можно сделать последний шаг канонизации репера в каждой точке многообразия M_4 . Будем считать, что $a_4^1 \neq 0$ и $a_3^2 \neq 0$.

Канонизируем, обращая в нуль вторые компоненты и приравнивая к единицам первые компоненты двухкомпонентных линейных геометрических обьектов (a_4^1 , a_4^4) и (a_3^2 , a_3^3), т.е.

$$a_4^1 = a_3^2 = 1 \quad , \quad a_3^3 = a_4^4 = 0 \quad . \tag{2.4}$$

Геометрически это означает, что происходит совмещение направлений векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно с инвариантными направлениями, определяемыми относительными векторами $\vec{\mathbb{K}}_{13}$ и $\vec{\mathbb{K}}_{24}$.

Алгебрически этот шаг канонизации происходит засчет определения форм ω_1^3, ω_2^4, ω_3^3 и ω_4^4 как линейные комбинации базисных форм многообразия M_4. После подставления (2.4) в равенства (1.29) получаем:

$$
(2.5)\quad
\begin{aligned}
\omega_1^3 &= -a_{41}^4\omega^1 - a_{42}^4\omega^2 - (a_{43}^4 + a_{34}^3 + a_{32}^2 - a_1^2a_2^1)\omega^3 - a_{44}^4\omega^4 \\
\omega_2^4 &= -a_{31}^3\omega^1 - a_{32}^3\omega^2 - a_{33}^3\omega^3 - (a_{34}^3 + a_{43}^4 + a_{41}^1 - a_2^1a_1^2)\omega^4 \\
\omega_3^3 &= \frac{1}{2}\left(a_{41}^1\omega^1 + a_{24}^1\omega^2 + a_{43}^1\omega^3 + a_{44}^1\omega^4\right) \\
\omega_4^4 &= \frac{1}{2}\left(a_{13}^2\omega^1 + a_{32}^2\omega^2 + a_{33}^2\omega^3 + a_{34}^2\omega^4\right)
\end{aligned}
$$

Для удобства сделаем следующие переобозначения:

$$
(2.6)\quad
\begin{gathered}
A = \frac{1}{2}\left(a_{33}^2 - a_{43}^1\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(a_{44}^1 - a_{34}^2\right), \\
A_{21} = \frac{1}{2}\left(a_{32}^2 - a_{24}^1\right), \\
b_{21} = -a_{42}^4, \quad b_{41} = -a_{44}^4, \quad b_{23} = \frac{1}{2}a_{24}^1, \\
b_{31} = a_1^2a_2^1 - a_{43}^4 - a_{34}^3 - a_{32}^2 - \frac{1}{2}a_{41}^1, \\
b_{43} = \frac{1}{2}a_{44}^1 .
\end{gathered}
$$

Тогда подставляя (2.5) в (1.28) и имея ввиду равенства (2.4) и (2.6), находим структурные уравнения:

$$
d\omega^1 = A_{21}\,\omega^2\wedge\omega^1 + A\,\omega^3\wedge\omega^1 - B\,\omega^4\wedge\omega^1 - a_2^1\,\omega^2\wedge\omega^3 + \omega^3\wedge\omega^4
$$

$$d\omega^3 = b_{21}\,\omega^2_\wedge\omega^1 + b_{31}\,\omega^3_\wedge\omega^1 + b_{41}\,\omega^4_\wedge\omega^1 + b_{23}\,\omega^2_\wedge\omega^3 + b_{43}\,\omega^4_\wedge\omega^3 + \omega^2_\wedge\omega^4 \qquad (2.7)$$

Выражения для дифференциалов $d\omega^2$ и $d\omega^4$ получаются соответственно из $d\omega^1$ и $d\omega^3$ заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$, $3 \longleftrightarrow 4$ и $A \longleftrightarrow B$. Коэффициенты B_{12} , b_{12} , b_{42} , b_{32} , b_{14} , b_{34} получаются соответственно из выражений для коэффициентов A_{21} , b_{21} , b_{31} , b_{41} , b_{23} , b_{43} при помощи той же замены индексов. Еще имеет место соотношение :

$$b_{31} + b_{23} + A_{21} = b_{42} + b_{14} + B_{12} \,. \qquad (2.8)$$

Следовательно, мы провели полную канонизацию. Все двухиндексные формы стали главными, т.е. стали линейными комбинациями главных форм ω^i , (i =I,2,3,4). Структурные уравнения приняли вид (2.7).

Равенства (2.7) являются структурными уравнениями E - структуры со структурной группы E (E - тождественная группа). Величины b_{ij} , A_{21} , B_{12} , A , B , a^2_1 и a^1_2 , удовлетворяющие соотношение (2.8), являются компонентами структурного тензора E - структуры. Структурная группа G_1 сужается до $E \subset G_1$ соотношениями (2.5), выражающими формы ω^3_1 , ω^4_2 , ω^3_3 и ω^4_4 через главные формы многообразия M_4 .

Полезно заметить еще, что система

$$\omega^3 = 0 \quad , \quad \omega^4 = 0 \qquad (2.9)$$

вполне интегрируема при $b_{12} = b_{21} = 0$, так как в этом случае характеристическая система системы (2.9) совпадает с равенствами (2.9). Геометрически это означает, что в каждой точке многообразия M_4 выделяется голономная двумерная площадка, натянутая на векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Аналогично, из (2.7) видно, что система

$$\omega^2 = 0 , \quad \omega^3 = 0$$

вполне интегрируема при $b_{41} = a_1^2 = 0$, а система

$$\omega^1 = 0 , \quad \omega^4 = 0$$

вполне интегрируема при $b_{32} = a_2^1 = 0$.

§ 2.2. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Системы со структурными уравнениями первого и второго типа.

1. В этом и в следующем параграфе рассмотрим задачу об отыскании групп, допускаемых изучаемыми системами дифференциальных уравнений $S^{(1)}_{2,2}$.

Система (S) допускает группу H , если уравнения системы (S) остаются неизменными под действием любого преобразования $T_a \in H$ (см. [6], [8], [9]).

Будем искать непрерывную группу преобразований -группу Ли оставляющую неизменными уравнения системы (1.11). Так как внешние формы ω^i ,(i = 1,2,3,4), присоединяются инвариантно к этой системе, то группа H оставляет инвариантными и формы ω^i , а так же и их внешние произведения и внешние дифференциалы ([6]) . Следовательно, группа H сохраняет левые стороны и внешние произведения в правых сторонах структурных уравнений. Потребуем, чтобы группа H была максимальной размерности, т.е. чтобы H была четырехпараметрической группой.

Тогда, согласно третьей основной теоремы групп Ли (см. [6], п.199, и 218) следует, что коэффициенты $b_{ij}, A_{21}, B_{12}, a_1^2, a_2^1, A, B$ в структурных уравнениях (2.7) являются абсолютными постоянными, удовлетворяющими некоторыми соотношениями между собой. Эти постоянные называются структурными константами группы H .

Дальнейшее продолжение (внешнее дифференцирование) структурных уравнений приведет, ввиду независимости базисных форм ω^i , к неоднородной системе второй степени из шестнадцати уравнений с шестнадцатью неизвестными - это соотношения, которые должны удовлетворять структурные константы группы H согласно третьей основной теоремы групп Ли. Эта система имеет очень громоздкий вид и мы ее не будем выписывать. При ее решении нужно еще иметь ввиду уравнение (2.8). Система имеет бесконечное число решений. Они разбиваются на классы. Рассмотрим по одному наиболее интересному типу из каждого класса:

(2.10) $(0,0,1,-1,-1,1,0,0,\ldots\ldots,0)$

(2.11) $(0,0,-1,1,1,-1,0,0,\ldots\ldots,0)$

(2.12) $(K,\frac{1}{K},0,0,\ldots\ldots\ldots\ldots,0)$, $K\neq 0$

где

$$(x^1,x^2,\ldots,x^{16})=(b_{41},b_{32},b_{31},A_{21},B_{12},b_{42},\ldots)\ .$$

Структурные уравнения вида (2.7), соответствующие структурным тензорам (2.10),(2.11) и (2.12) :

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} d\omega^1&=\omega^1\wedge\omega^2+\omega^3\wedge\omega^4\\ d\omega^2&=\omega^2\wedge\omega^1+\omega^4\wedge\omega^3\\ d\omega^3&=\omega^3\wedge\omega^1+\omega^2\wedge\omega^4\\ d\omega^4&=\omega^1\wedge\omega^3+\omega^4\wedge\omega^2\end{aligned}\ ,$$

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} d\omega^1&=\omega^2\wedge\omega^1+\omega^3\wedge\omega^4\\ d\omega^2&=\omega^1\wedge\omega^2+\omega^4\wedge\omega^3\\ d\omega^3&=\omega^1\wedge\omega^3+\omega^2\wedge\omega^4\\ d\omega^4&=\omega^1\wedge\omega^3+\omega^2\wedge\omega^4\end{aligned}\ ,$$

$$d\omega^1 = \omega^3 \wedge \omega^4$$

(2.15)
$$d\omega^2 = \omega^4 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^3 = K\omega^4 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$d\omega^4 = \frac{1}{K}\omega^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega^3$$

замкнутые, внешнее дифференцирование не дает новых уравнений.

2. Рассмотрим структуру (2.13), соответствующую структурному тензору (2.10):

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4$$

$$d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^1 + \omega^4 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^3 = \omega^3 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^4$$

$$d\omega^4 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^4 \wedge \omega^2 .$$

Докажем, что эта структура соответствует группе движений и растяжений евклидова пространства.

К каждой точке $\overline{\mathbb{M}}$ двумерного евклидова пространства присоединим семейство реперов ($\vec{e}_1 \vec{e}_2$), таких, что скалярное произведение векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_k$ имеет вид :

(2.16)
$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta\, \delta_{ik} ,$$

где δ -произвольная функция локальных координат пространства, а $i,k = 1,2$. Формулы инфинитезимальных перемещений семейства реперов будут:

$$d\,\overline{\mathbb{M}} = \theta^i \vec{e}_i$$

(2.17)
$$d\,\vec{e}_i = \theta_i^k \vec{e}_k ,$$

$i, k = 1,2$.

Дифференцируя уравнения (2.16) при помощи (2.17), приходим к равенствам

$$\theta_i^k + \theta_k^i = \delta_{ik}\, d\ln \delta , \tag{2.18}$$

откуда получаем:

$$\theta_1^1 = \theta_2^2 = \frac{1}{2} d\ln \delta \tag{2.19}$$

и

$$\theta_1^2 + \theta_2^1 = 0 . \tag{2.20}$$

Структурные уравнения двумерного евклидова пространства записываются так:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \theta_1^1 \wedge \theta^1 + \theta_2^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \theta_1^2 \wedge \theta^1 + \theta_2^2 \wedge \theta^2 \end{aligned} , \tag{2.21}$$

$$d\theta_1^2 = \theta_1^1 \wedge \theta_1^2 + \theta_1^2 \wedge \theta_2^2 = (\theta_1^1 - \theta_2^2) \wedge \theta_1^2 . \tag{2.22}$$

Но из (2.19), (2.20) и (2.21), обозначая

$$\theta_1^1 = \theta_2^2 = \theta , \tag{2.23}$$

имеем

$$d\theta = 0 \tag{2.24}$$

и

$$d\theta_1^2 = - d\theta_2^1 = 0 . \tag{2.25}$$

Уравнения (2.20), ввиду (2.21)-(2.23), можно записать так

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \theta \wedge \theta^1 + \theta_2^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \theta_1^2 \wedge \theta^1 + \theta \wedge \theta^2 \end{aligned} , \tag{2.26}$$

где

$$\theta_1^2 + \theta_2^1 = 0$$

(2.27)
$$d\theta = 0$$
$$d\theta_1^2 = 0 .$$

Так построенное семейство реперов ($\vec{e}_1 \vec{e}_2$) со структурными уравнениями (2.26),(2.27) изоморфно группе движений и растяжений евклидова пространства. Следовательно, структурные уравнения группы движений и растяжений двумерного евклидова пространства имеют вид (2.26), (2.27).

Положим :

(2.28)
$$\omega^1 - \omega^2 = \theta^1 \quad , \quad \omega^3 - \omega^4 = \theta^2 \quad ,$$
$$\omega^1 + \omega^2 = -\theta \quad , \quad \omega^3 + \omega^4 = \theta_1^2 \quad .$$

Из равенств (2.28) и (2.13), получим :

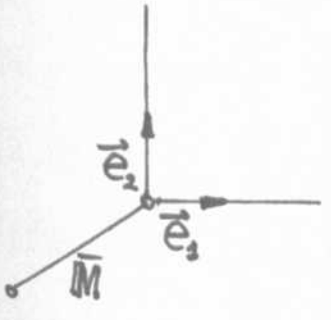
$$d\theta^1 = d(\omega^1 - \omega^2) = 2(\omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4) =$$
$$= -(\omega^1 + \omega^2) \wedge (\omega^1 - \omega^2) - (\omega^3 + \omega^4) \wedge (\omega^3 - \omega^4) =$$
$$= \theta \wedge \theta^1 + \theta_2^1 \wedge \theta^2 ,$$
$$d\theta^2 = d(\omega^3 - \omega^4) = 2(\omega^3 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^4) =$$
$$= +(\omega^3 + \omega^4) \wedge (\omega^1 - \omega^2) - (\omega^1 + \omega^2) \wedge (\omega^3 - \omega^4) =$$
$$= \theta_1^2 \wedge \theta^1 + \theta \wedge \theta^2 ,$$
$$d\theta = -d(\omega^1 + \omega^2) = 0 \quad ,$$
$$d\theta_1^2 = d(\omega^3 + \omega^4) = 0 \quad .$$

Следовательно, формы $\theta^1, \theta^2, \theta, \theta_1^2, \theta_2^1$, определяемые уравнениями (2.28), удовлетворяют (2.26) и (2.27), т.е. структура (2.13) соответствует группе движений и растяжений евклидова пространства.

Как уже отмечалось в § 1.2, система (1.11) является, в характеристических переменных, системой двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя искомыми функциями от двух независимых переменных. Решение этой системы есть двухпараметрическое семейство-поле векторов. Пользуясь формулами (2.28), приводим сумму и разность уравнений системы (1.11) к виду :

$$\begin{aligned} &\theta_1^2 \wedge \theta - \theta^2 \wedge \theta^1 = 0 \\ &\theta_1^2 \wedge \theta^1 + \theta \wedge \theta^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Система (2.29) эквивалентна системе (1.11). Класс векторных полей, удовлетворяющих уравнениям (2.29), состоит из векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, равных по длине и взаимноперпендикулярных. Следовательно, имеем двухпараметрическое семейство векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и как только задан в точке вектор $\vec{e}_1$ сразу в той же точке определяется вектор $\vec{e}_2$. Этот класс векторных полей инвариантен по отношению к группе движений и растяжений евклидовой плоскости.



Уравнения инфинитезимального перемещения репера, присоединенного к каждой точке евклидовой плоскости, имеют вид :

$$\begin{aligned} &d\vec{e}_1 = -\theta.\vec{e}_1 - \theta_1^2.\vec{e}_2 \\ &d\vec{e}_2 = -\theta_2^1.\vec{e}_1 - \theta.\vec{e}_2 \\ &d\bar{M} = \theta^1.\vec{e}_1 + \theta^2.\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Из системы (2.29) и структурных уравнений (2.26) находим :

(2.31) $$d\theta^2 = 0.$$

Разлагая второе уравнение (2.29) по лемме Картана, ввиду независимости форм θ^1 и θ^2 , получаем:

(2.32) $$\begin{aligned} \theta_1^2 &= a_{11}\theta^1 + a_{12}\theta^2 \\ \theta &= a_{12}\theta^1 + a_{22}\theta^2. \end{aligned}$$

Подставляя (2.32) в первое уравнение (2.19), находим :

(2.33) $$(a_{12})^2 - a_{11}a_{22} = 1 ,$$

так как $\theta^1 \wedge \theta^2 \neq 0$.

Следовательно, система (2.29) свелась к уравнению (2.33). Оказывается, что можно найти вид уравнения (2.33) в декартовых координатах.

И, в самом деле, группу движений и растяжений в евклидовой плоскости записывается в виде (см. [3] , [5] , [9]-гл.I, § 1)

(2.34) $$\begin{aligned} \theta^1 &= a(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy) \\ \theta^2 &= a(-\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy). \end{aligned}$$

Из уравнений (2.34) и (2.26) находим :

(2.35) $$\theta = d\ln a \quad , \quad \theta_1^2 = -d\varphi .$$

Уравнение (2.31) дает

(2.31′) $$\theta^2 = df ,$$

где функция $f = f(x,y)$, т.е.

$$\theta^2 = df = f'_x\, dx + f'_y\, dy = a(-\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy)$$

или

(2.36) $$\begin{aligned} f'_x &= -a\sin\varphi \\ f'_y &= a\cos\varphi , \end{aligned}$$

откуда

(2.37) $$a=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}\ .$$

Подставляя (2.34) и (2.36) в первое уравнение (2.29), получаем:

(2.38) $$d\varphi_\wedge da = a^3 dx_\wedge dy$$

Дифференцируя внешне первое и второе уравнения системы (2.36), перемножая внешне полученные два уравнения и сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.38), находим

(2.39) $$df_y'{}_\wedge df_x' = a^4 dx_\wedge dy\,.$$

Из (2.39), имея ввиду уравнение (2.37) и независимость дифференциалов переменных x и y, т.е. $dx_\wedge dy\neq 0$, получаем

(2.40) $$\left(f''_{xy}\right)^2 - f''_{xx}\cdot f''_{yy} = \left(f_x'^2+f_y'^2\right)^2$$

Следовательно, система (2.29), а с тем и система (1.11), свелась к дифференциальному уравнению (2.40).

Дальше будем считать, что все коэффициенты a_{ij} в равенствах (2.32) константы. Тогда дифференцируя уравнения (2.32) и пользуясь структурными уравнениями (2.26) и (2.27), получаем:

(2.41) $$a_{11}\left(a_{11}+a_{22}\right)\theta^2{}_\wedge\theta^1=0$$
$$a_{12}\left(a_{11}+a_{22}\right)\theta^2{}_\wedge\theta^1=0\,.$$

Но $\theta^2{}_\wedge\theta^1\neq 0$ и коэффициенты a_{11} и a_{22} не могут обратится одновременно в нуль, так как они удовлетворяют равенства (2.33). Следовательно, из (2.41) следует :

(2.42) $$a_{11}+a_{22}=0\,.$$

Из (2.33) и (2.42) находим :

$$\left(a_{12}\right)^2+\left(a_{11}\right)^2=1\ ,$$

т. е. $a_{12} = \sin\alpha$.

$a_{11} = \cos\alpha$, где $\alpha = const.$

Тогда формы θ_1^2 и θ принимают вид:

$$\theta_1^2 = \theta^1\cos\alpha + \theta^2\sin\alpha$$

(2.43)

$$\theta = \theta^1\sin\alpha - \theta^2\cos\alpha$$

Из уравнений (2.43) и уравнений инфинитезимальных перемещений (2.30) видно, что:

$$d\left(\overline{\mathbb{M}} + \sin\alpha.\overrightarrow{e}_1 - \cos\alpha.\overrightarrow{e}_2\right) = 0.$$

Следовательно, точка

$$\overline{\mathbb{P}} = \overline{\mathbb{M}} + \sin\alpha.\overrightarrow{e}_1 - \cos\alpha.\overrightarrow{e}_2$$

фиксирована.

Теперь мы можем дать геометрическое истолкование решений системы (2.29). В рассматриваемом случае решение системы(2.29) есть поле векторов, полученных из одного вектора при помощи вращения и растяжения около неподвижной точки $\overline{\mathbb{P}}$.

3. Структуре (2.I4), соотвествующей структурному тензору (2.II), тоже отвечает группа движений и растяжений в евклидовом пространстве. Формы θ^1 , θ^2 , θ и θ_2^1 , в этом случае, принимают вид:

$$\theta^1 = \omega^1 - \omega^2$$

$$\theta^2 = \omega^3 + \omega^4$$

(2.44)

$$\theta = \omega^1 + \omega^2$$

$$\theta_2^1 = \omega^3 - \omega^4 .$$

Они удовлетворяют уравнениям (2.26) и (2.27). Выражая из (2.44) формы ω^i, (i=I,2,3,4), через θ^1, θ^2, θ и θ^1_2, подставляя их в систему (I.II), суммируя и вычитая полученные два уравнения, мы приходим к системе (2.29).

Следовательно, дальнейшее рассмотрение структуры (2.I4) совпадает с рассмотрением предидущего случая (см. п.2 этого параграфа).

Или, в обоих рассмотренных случаях, изучаемые системы $S^{(1)}_{2,2}$ допускают группу $H^{(1)}$, соответствующую группе движений и растяжений евклидова пространства.

§ 2.3. Системы со структурными уравнениями третьего типа.

Рассмотрим структуру (2.15), соответствующую структурному тензору (2.12):

$$d\omega^1 = \omega^3 \wedge \omega^4$$
$$d\omega^2 = \omega^4 \wedge \omega^3$$
$$d\omega^3 = K\omega^4 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^4$$
$$d\omega^4 = \frac{1}{K}\omega^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega^3 \quad ,$$

где $K \neq 0$, $K = const$. Эту структуру можно записать в виде:

(2.45)
$$d\omega^1 = \omega^3 \wedge \omega^4$$
$$d\omega^2 = \omega^4 \wedge \omega^3$$
$$d\omega^3 = \omega^4 \wedge (K\omega^1 - \omega^2)$$
$$d\omega^4 = \frac{1}{K}(K\omega^1 - \omega^2) \wedge \omega^3$$

I. В случае, когда $K \neq -1\ , 0$, структура (2.45) эквивалентна структуре:

(2.46)
$$d(K\omega^1 - \omega^2) = (K+1)\omega^3 \wedge \omega^4$$
$$d\omega^3 = \omega^4 \wedge (K\omega^1 - \omega^2)$$
$$d\omega^4 = \frac{1}{K}(K\omega^1 - \omega^2) \wedge \omega^3$$
$$d(\omega^1 + \omega^2) = 0 \quad .$$

Из равенств (2.46) видно, что уравнение

$$\omega^3+\sqrt{-K}\,\omega^4=0$$

при $K<0$ (комплексный случай $K>0$ рассматривается аналогично) вполне интегрируемо, так как

$$d\left(\omega^3+\sqrt{-K}\,\omega^4\right)\wedge\left(\omega^3+\sqrt{-K}\,\omega^4\right)=0.$$

Следовательно, можно положить

$$\omega^3+\sqrt{-K}\,\omega^4=p\,d\Omega_1, \tag{2.47}$$

где p и Ω_1 - произвольные функции. Кроме этого, из последнего уравнения равенств (2.46) имеем:

$$\omega^1+\omega^2=d\,\Omega_2, \tag{2.48}$$

где Ω_2 - произвольная функция. Дальше, пользуясь равенствами (2.47), (2.48) и (2.46), находим вид базисных форм $K\omega^1-\omega^2$, ω^3, ω^4, $\omega^1+\omega^2$, удовлетворяющих уравнения (2.36):

$$K\omega^1-\omega^2=\sqrt{-K}\left(\ell\,d\,\Omega_1-d\ln p\right)$$

$$\omega^3=\frac{p^2(K+1)+K\ell^2}{2p(K+1)}\,d\,\Omega_1-\frac{K}{p(K+1)}\,d\ell$$

$$\omega^4=\frac{p^2(K+1)-K\ell^2}{2\sqrt{-K}\,p(K+1)}\,d\,\Omega_1-\frac{\sqrt{-K}}{p(K+1)}\,d\ell$$

$$\omega^1+\omega^2=d\,\Omega_2$$

где Ω_1, Ω_2, p и ℓ -произвольные функции.

Следовательно, в этом случае имеем прямое произведение простой трехмерной группы $\mathfrak{N}_3$ с базисными формами

$$K\omega^1-\omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4$$

на коммутативную группу K_1 с базисной формой

$$\omega^1+\omega^2 ,$$

т.е. изучаемые системы $S^{(1)}_{2,2}$ допускают группу $H^{(2)}=\mathfrak{N}_3\otimes K_1$.

2. Более интересным представляется случай, когда $K=-1$. Тогда структура (2.46) принимает вид:

$$
(2.49)\qquad
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega^3\wedge\omega^4\\
d\omega^2 &= \omega^4\wedge\omega^3\\
d\omega^3 &= (\omega^1+\omega^2)\wedge\omega^4\\
d\omega^4 &= (\omega^1+\omega^2)\wedge\omega^3
\end{aligned}
$$

Полагая

$$
\begin{aligned}
\omega^3+\omega^4 &= \theta^1\\
\omega^3-\omega^4 &= \theta^2\\
\omega^1+\omega^2 &= \theta ,
\end{aligned}
$$

из структуры (2.49) получаем эквивалентную ей структуру:

$$
(2.50)\qquad
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \frac{1}{2}\,\theta^2\wedge\theta^1\\
d\theta^1 &= \theta\wedge\theta^1\\
d\theta^2 &= -\theta\wedge\theta^2\\
d\theta &= 0 .
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения (2.50) находим, что

$$\theta = d\varphi ,$$

где ψ - произвольная функция. Будем считать, что

$$\psi = \ln u ,$$

т.е.

(2.5I) $$\theta = \frac{du}{u} .$$

Подставляем уравнение (2.5I) во второе уравнение равенств (2.50):

$$d\theta^1 = \frac{du}{u} \wedge \theta^1 .$$

Тогда

$$u\, d\theta^1 - du \wedge \theta^1 = 0 ,$$

т.е.

$$d\left(\frac{\theta^1}{u}\right) = 0$$

или

$$\frac{\theta^1}{u} = df_1 .$$

Следовательно

(2.52) $$\theta^1 = u\, df_1 ,$$

где f_1 - произвольная функция.

Аналогично, интегрируя остальные уравнения (2.50) при помощи равенств (2.5I) и (2.52), получаем, что:

(2.53) $$\theta^2 = \frac{1}{u} \cdot df_2$$
$$\omega^1 = \frac{1}{2} f_2\, df_1 + dh ,$$

где f_2 и h - произвольные функции.

Пользуясь инвариантностью форм, т.е.

$$\tilde{\theta} = \theta$$
$$\tilde{\theta}^1 = \theta^1$$
$$\tilde{\theta}^2 = \theta^2$$
$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1 ,$$

получаем уравнения преобразования. Если

$$\tilde{\theta}=\theta\ ,$$

то

$$\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}}=\frac{du}{u}\ .$$

Интегрируя последнее уравнение находим

$$\tilde{u}=c_1 u$$

Аналогично получаем дальше:

(2.54)
$$\begin{aligned}\tilde{f}_1&=\frac{1}{c_1}f_1+C_2\\ \tilde{f}_2&=c_1 f_2+C_3\\ \tilde{h}&=h-\frac{C_3}{2C_1}f_1+C_4\ .\end{aligned}$$

Следовательно, структура (2.49) соответствует четырехпараметрической группе преобразований $\mathfrak{N}_4$ в евклидовом пространстве с метрикой расстояний $\sqrt{f_1 f_2}$, т.к. при $C_2=C_3=0$ имеем:

$$\tilde{f}_1\tilde{f}_2=f_1 f_2\ .$$

Или структурная группа $H^{(3)}$ в этом случае представляет собой четырехпараметрическая группа $\mathfrak{N}_4$ в евклидовом пространстве с уравнениями преобразований группы (2.54). Изучаемые системы $S^{(1)}_{2,2}$ допускают группу $H=\mathfrak{N}_4$.

Г Л А В А III

СИСТЕМЫ $S^{(1)}_{2,2}$, ДОПУСКАЮЩИЕ БЕСКОНЕЧНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ЗАВИСЯЩУЮ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ТРАНЗИТИВНО ДЕЙСТВУЮЩУЮ НА МНОЖЕСТВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ $S^{(1)}_{2,2}$.

§ 3.I. Общая постановка задачи

I. Настоящая глава посвящена выделению из изучаемых систем $S^{(1)}_{2,2}$ системы, которых можно привести к линейным при некотором выборе зависимых и независимых переменных.

Любая линейная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка допускает бесконечную группу преобразований с двумя произвольными функциями, транзитивно действующую на множестве интегральных многообразий и оставляющую неизменными независимые переменные. Например, для системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1(x,y)\cdot u + B_1(x,y)\cdot v$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = A_2(x,y)\cdot u + B_2(x,y)\cdot v$$

эта группа имеет вид :

$$\tilde{x} = x$$
$$\tilde{y} = y$$
$$\tilde{u} = u + \overline{\varphi}(x,y)$$
$$\tilde{v} = v + \overline{\psi}(x,y) \ ,$$

где $(\overline{\varphi}(x,y),\ \overline{\psi}(x,y))$ - любое решение указанной системы.

Можно предположить, что всякая система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, допускающая бесконечную группу с двумя произвольными функциями и транзитивно действующую на множестве интегральных многообразий, является линейной при некотором выборе зависимых и независимых переменных. Но это предположение, как оказывается в нашем исследовании, неверно. Случаи, приведенные в §§ 3.3, 3.4, опровергающие это предположение, единственные пока в этом смысле.

И так, мы ищем те системы $S_{2,2}^{(1)}$, которые допускают бесконечную группу преобразований, зависящую от двух произвольных функций и транзитивно действующую на множестве интегральных многообразий. А потом для этих систем $S_{2,2}^{(1)}$ выясним вопрос: можно ли их сделать линейными при некотором выборе зависимых и независимых переменных или нельзя.

2. Двухиндексные формы ω_1^3 и ω_2^4 из структурных уравнений (I.28) и (I.29) характеризуют системы изучаемого типа $S_{2,2}^{(1)}$, т.е. (I.II), в том смысле, что, если их нельзя выразить самостоятельно как линейные комбинации базисных форм при последовательном дифференцировании (продолжении) структурных уравнений и соответствующей канонизации параметров, то система (I.II) допускает бесконечную группу преобразований $\widetilde{G}$, зависящую от двух произвольных функций и транзитивно действующую на множестве интегральных многообразий, как мы и доказываем ниже.

Из структурных уравнений (I.29) видно, что необходимым условием существования группы G является обращение в нуль относительных инвариантов a_4^1 и a_3^2. В случае, когда

$$a_4^1 = 0\ ,\quad a_3^2 = 0\ , \tag{3.I}$$

в дифференциалах остальных компонентов структурного тензора G_1 - структуры не содержатся формы ω_1^3 и ω_2^4. Из равенств (I.29), имея ввиду (3.I), получаем:

$$a^1_{41} = a^1_{24} = a^1_{43} = a^1_{44} = a^2_{13} = a^2_{32} = a^2_{33} = a^2_{34} = 0$$

(3.2)
$$\begin{aligned}
da^1_2 &= a^1_2(2\omega^4_4 - 3\omega^3_3) + a^1_{21}\omega^1 + a^1_{22}\omega^2 + a^1_{23}\omega^3 + a^1_2 a^4_4 \omega^4 \\
da^2_1 &= a^2_1(2\omega^3_3 - 3\omega^4_4) + a^2_{11}\omega^1 + a^2_{12}\omega^2 + a^2_{14}\omega^4 + a^2_1 a^3_3 \omega^3 \\
da^3_3 &= -a^3_3\omega^3_3 + a^3_{31}\omega^1 + a^3_{32}\omega^2 + a^3_{33}\omega^3 + (a^3_{34} + a^4_{43} - a^2_1 a^1_2)\omega^4 \\
da^4_4 &= -a^4_4\omega^4_4 + a^4_{41}\omega^1 + a^4_{42}\omega^2 + a^4_{44}\omega^4 + (a^4_{43} + a^3_{34} - a^1_2 a^2_1)\omega^3
\end{aligned}$$

Внешнее дифференцирование (продолжение) первых двух уравнений (3.2) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\left[da^1_{21} + a^1_{21}(2\omega^3_3 - \omega^4_4) + (a^1_{23} + 3a^1_2 a^3_3)\omega^3_1 - 2a^2_1 a^1_2 \omega^4_2\right]\wedge\omega^1 + \\
&+\left[da^1_{22} + a^1_{22}(4\omega^3_3 - 3\omega^4_4) + 3(a^1_2)^2\omega^3_1 - a^1_2 a^4_4 \omega^4_2\right]\wedge\omega^2 + \\
&+\left[da^1_{23} + a^1_{23}(4\omega^3_3 - 2\omega^4_4)\right]\wedge\omega^3 = \ldots\ldots
\end{aligned}$$

(3.3)
$$\begin{aligned}
&\left[da^2_{11} + a^2_{11}(4\omega^4_4 - 3\omega^3_3) + 3(a^2_1)^2\omega^4_2 - a^2_1 a^3_3 \omega^3_1\right]\wedge\omega^1 + \\
&+\left[da^2_{12} + a^2_{12}(2\omega^4_4 - \omega^3_3) + (a^2_{14} + 3a^2_1 a^4_4)\omega^4_2 - 2a^2_1 a^1_2 \omega^3_1\right]\wedge\omega^2 + \\
&+\left[da^2_{14} + a^2_{14}(4\omega^4_4 - 2\omega^3_3)\right]\wedge\omega^4 = \ldots\ldots
\end{aligned}$$

(Здесь в правой части равенств (3.3) не выписаны линейные комбинации базисных форм ω^i).

Из уравнений (3.3) видно, что необходимым условием существования группы $\widetilde{G}$ является выполнение равенств:

$$(a_2^1)^2=0 \quad , \quad (a_1^2)^2=0 \quad ,$$

(3.4) $$a_2^1 a_4^4=0 \quad , \quad 2a_1^2 a_2^1=0 \quad , \quad a_1^2 a_3^3=0 \quad ,$$

$$a_{14}^2+3a_1^2 a_4^4=0 \quad , \quad a_{23}^1+3a_2^1 a_3^3=0 \; .$$

Уравнения (3.4) удовлетворяются, если

(3.5) $$a_2^1=0 \quad , \quad a_1^2=0 \; ,$$

так как из (3.5) и (3.2) следует:

$$a_{21}^1=a_{22}^1=a_{23}^1=a_{11}^2=a_{12}^2=a_{14}^2=0 \; .$$

Остались уравнения:

(3.6) $$\begin{aligned} da_3^3 &= -a_3^3\omega_3^3+a_{31}^3\omega^1+a_{32}^3\omega^2+a_{33}^3\omega^3+(a_{34}^3+a_{43}^4)\omega^4 \\ da_4^4 &= -a_4^4\omega_4^4+a_{41}^4\omega^1+a_{42}^4\omega^2+a_{44}^4\omega^4+(a_{43}^4+a_{34}^3)\omega^3 \; . \end{aligned}$$

Внешнее дифференцирование (продолжение) уравнений (3.6) и последующие разложения по лемме Картана приводит к равенствам:

$$da_{33}^3=-2a_{33}^3\omega_3^3+\cdots\cdot\cdot$$

$$da_{44}^4=-2a_{44}^4\omega_4^4+\cdots\cdot\cdot$$

$$da_{31}^3=-a_{31}^3\omega_4^4-\left[a_{33}^3+(a_3^3)^2\right]\omega_1^3+\cdots\cdot\cdot$$

$$(3.7) \qquad \begin{aligned} d a^4_{42} &= -a^4_{42}\omega^3_3 - \left[a^4_{44} + (a^4_4)^2\right]\omega^4_2 + \dots\dots \\ d a^3_{32} &= -a^3_{32}\left(2\omega^3_3 - \omega^4_4\right) - \left(a^3_{34} + a^4_{43}\right)\omega^4_2 + \dots\dots \\ d a^4_{41} &= -a^4_{41}\left(2\omega^4_4 - \omega^3_3\right) - \left(a^4_{43} + a^3_{34}\right)\omega^3_1 + \dots\dots \\ d\left(a^3_{34} + a^4_{43}\right) &= -\left(a^3_{34} + a^4_{43}\right)\left(\omega^3_3 + \omega^4_4\right) + \dots\dots \end{aligned}$$

Удовлетворение условий:

$$(3.8) \qquad a^3_{33} + \left(a^3_3\right)^2 = 0 \quad , \quad a^4_{44} + \left(a^4_4\right)^2 = 0 \; , \qquad a^3_{34} + a^4_{43} = 0 \; ,$$

необходимо для существования группы $\widetilde{G}$. После подставления равенств (3.8) в (3.7), уравнения (3.7) приводятся к виду:

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} d a^3_{31} &= -a^3_{31}\omega^4_4 + a^3_{31,1}\omega^1 + a^3_{31,2}\omega^2 + a^3_3\left(a^4_4 - a^3_{31}\right)\omega^3 - \\ &\quad - \left(a^3_3 A_4 + a^3_{31} a^4_4\right)\omega^4 \\ d a^4_{42} &= -a^4_{42}\omega^3_3 + a^4_{42,1}\omega^1 + a^4_{42,2}\omega^2 + a^4_4\left(a^3_3 - a^4_{42}\right)\omega^4 - \\ &\quad - \left(a^4_4 A_3 + a^4_{42} a^3_3\right)\omega^3 \\ d a^3_{32} &= a^3_{32}\left(\omega^4_4 - 2\omega^3_3\right) + \left[a^3_{31,2} - a^3_3\left(A_1 + 1\right)\right]\omega^1 + a^3_{32,2}\omega^2 - \\ &\quad - \left(3a^3_3 a^3_{32} + a^3_3 A_3\right)\omega^3 \\ d a^4_{41} &= a^4_{41}\left(\omega^3_3 - 2\omega^4_4\right) + \left[a^4_{42,1} - a^4_4\left(A_2 + 1\right)\right]\omega^2 + a^4_{41,1}\omega^1 - \\ &\quad - \left(3a^4_4 a^4_{41} + a^4_4 A_4\right)\omega^4 \end{aligned}$$

Кроме равенств (3.9), получаются конечные соотношения:

(3.I0) $$a_3^3 a_{43}^4 = 0 \quad , \quad a_4^4 a_{34}^3 = 0 \; .$$

Но из (3.8) имеем:

$$a_{34}^3 + a_{43}^4 = 0 \; .$$

Следовательно, дальше необходимо рассмотреть три класса систем $S_{2,2}^{(1)}$, для которых выполнено:

КлассI. $a_3^3 = a_4^4 = 0 \quad , \quad a_{34}^3 = -a_{43}^4 \neq 0 \; ;$

Класс 2. $a_3^3 \neq 0 \; , \; a_4^4 \neq 0 \; , \; a_{34}^3 = 0 \; , \; a_{43}^4 = 0 \; ;$

Класс 3. $a_3^3 = 0 \; , \; a_4^4 \neq 0 \; , \; a_{34}^3 = 0 \; , \; a_{43}^4 = 0$

(аналогично рассматривается случай:

$$a_3^3 \neq 0 \; , \; a_4^4 = 0 \; , \; a_{34}^3 = 0 \; , \; a_{43}^4 = 0) \; .$$

Дальнейшее рассмотрение выше приведенных трех классов будет проведено в §§ 3.2, 3.3, 3.4.

§ 3.2. Системы $S_{2,2}^{(1)}$ первого класса. Необходимые и достаточные условия линейности систем $S_{2,2}^{(1)}$.

Системы $S_{2,2}^{(1)}$ первого класса характеризуются конечными соотношениями (3.I), (3.5) и

(3.II) $$a_3^3 = 0 \ , \quad a_4^4 = 0 \ , \qquad a_{34}^3 = -a_{43}^4 \neq 0 \ .$$

После подставления равенств (3.I), (3.5) и (3.II) в (I.28) и (I.29), структурные уравнения приводятся к виду:

(3.I2)
$$d\omega^1 = (\omega_4^4 - \omega_3^3)_\wedge \omega^1$$
$$d\omega^2 = (\omega_3^3 - \omega_4^4)_\wedge \omega^2$$
$$d\omega^3 = \omega_{1\wedge}^3 \omega^1 + \omega_{3\wedge}^3 \omega^3 + \omega_\wedge^2 \omega^4$$
$$d\omega^4 = \omega_{2\wedge}^4 \omega^2 + \omega_{4\wedge}^4 \omega^4 + \omega_\wedge^1 \omega^3$$
$$d\omega_1^3 = (2\omega_3^3 - \omega_4^4)_\wedge \omega_1^3 + A_1 \omega_\wedge^2 \omega^3 + A_4 \omega_\wedge^3 \omega^4 + \omega_{11\wedge}^3 \omega^1$$
$$d\omega_2^4 = (2\omega_4^4 - \omega_3^3)_\wedge \omega_2^4 + A_2 \omega_\wedge^1 \omega^4 + A_3 \omega_\wedge^4 \omega^3 + \omega_{22\wedge}^4 \omega^2$$
$$d\omega_3^3 = (A_1 + 1)\omega_\wedge^2 \omega^1 + A_3 \omega_\wedge^2 \omega^3 + A_4 \omega_\wedge^1 \omega^4 + a_{43}^4 \omega_\wedge^3 \omega^4$$
$$d\omega_4^4 = (A_2 + 1)\omega_\wedge^1 \omega^2 + A_4 \omega_\wedge^1 \omega^4 + A_3 \omega_\wedge^2 \omega^3 + a_{43}^4 \omega_\wedge^3 \omega^4$$

Внешнее дифференцирование последних двух уравнений (3.I2) приводит к равенствам:

$$(dA_1 - A_4\omega_2^4 + A_3\omega_1^3)\wedge\omega^2\wedge\omega^1 + [dA_4 + A_4(2\omega_4^4 - \omega_3^3) + a_{43}^4\omega_1^3]\wedge\omega^2\wedge\omega^4 +$$

(3.I3) $$+[dA_3 + A_3(2\omega_3^3 - \omega_4^4) - a_{43}^4\omega_2^4]\wedge\omega^2\wedge\omega^3 + [da_{43}^4 + a_{43}^4(\omega_3^3 + \omega_4^4)]\wedge\omega^3\wedge\omega^4 = 0$$

$$(dA_2 + A_4\omega_2^4 - A_3\omega_1^3)\wedge\omega^1\wedge\omega^2 + [dA_4 + A_4(2\omega_4^4 - \omega_3^3) + a_{43}^4\omega_1^3]\wedge\omega^1\wedge\omega^4 +$$

$$+[dA_3 + A_3(2\omega_3^3 - \omega_4^4) - a_{43}^4\omega_2^4]\wedge\omega^2\wedge\omega^3 + [da_{43}^4 + a_{43}^4(\omega_3^3 + \omega_4^4)]\wedge\omega^3\wedge\omega^4 = 0$$

Следовательно, для существования группы $\widetilde{G}$ необходимо обращение в нуль относительного инварианта a_{43}^4 и двухкомпонентных линейных дифференциальных обьектов (A_3, a_{43}^4) и (A_4, a_{43}^4), т.е.

(3.I4) $$A_3 = A_4 = a_{43}^4 = 0 .$$

Подставление равенств (3.I4) в (3.I3) и разложение по обобщенной лемме Картана приводит к уравнениям:

(3.I5) $$dA_1 = A_{11}\omega^1 + A_{12}\omega^2$$
$$dA_2 = A_{12}\omega^1 + A_{22}\omega^2 .$$

Дальнейшие дифференцирования (продолжения) и разложения по леммам Картана уравнений (3.I5) и (3.I2) приводят к последовательности дифференциальных уравнений:

$$dA_{11} = A_{11}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + A_{111}\omega^1 + A_{112}\omega^2$$

$$dA_{12} = A_{12}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + A_{112}\omega^1 + A_{122}\omega^2$$

$$dA_{21} = A_{21}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + A_{211}\omega^1 + A_{212}\omega^2$$

$$dA_{22} = A_{22}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + A_{212}\omega^1 + A_{222}\omega^2$$

$$dA_{111} = 2A_{111}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + A_{1111}\omega^1 + A_{1112}\omega^2$$

$$dA_{112} = [A_{1112} + A_{11}(A_1 + A_2 + 2)]\omega^1 + [A_{1221} + A_{12}(A_1 + A_2 + 2)]\omega^2$$

$$dA_{122} = 2A_{122}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + A_{1221}\omega^1 + A_{1222}\omega^2$$

. . . .

$$dA_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} = (n-1)A_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + A_{\underbrace{11\ldots11}_{n+1}}\omega^1 + A_{\underbrace{11\ldots1}_{n}2}\omega^2$$

$$dA_{1\underbrace{2\ldots2}_{n-1}} = (n-1)A_{1\underbrace{2\ldots2}_{n-1}}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + A_{1\underbrace{2\ldots2}_{n-1}1}\omega^1 + A_{1\underbrace{2\ldots22}_{n}}\omega^2$$

$$dA_{2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} = (n-1)A_{2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + A_{2\underbrace{1\ldots11}_{n}}\omega^1 + A_{2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2}\omega^2$$

$$dA_{\underbrace{22\ldots2}_{n}} = (n-1)A_{\underbrace{22\ldots2}_{n}}(\omega_4^4 - \omega_3^3) + A_{\underbrace{22\ldots2}_{n}1}\omega^1 + A_{\underbrace{22\ldots22}_{n+1}}\omega^2 \qquad (3.16)$$

. . . .

$$d\omega_{11}^3 = \omega_{11}^3 \wedge (2\omega_4^4 - 3\omega_3^3) + (3A_1 + A_2 + 3)\omega^2 \wedge \omega_1^3 + A_{11}\omega^3 \wedge \omega^2 + \omega_{111}^3 \wedge \omega^1$$

. . . .

$$d\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} = \omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} \wedge \left(C^1_n \omega^4_4 - C^2_{n+1}\omega^3_3\right) +$$

$$+ \left[C^2_n A_1 + C^2_{n+1} A_2 + (n^2-1)\right] \omega^2_\wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} +$$

$$+ \left[C^3_{n+1} A_{11} + C^3_n A_{21}\right] \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-2}} \wedge \omega^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \left[C^{n-k+1}_{n+1} A_{\underbrace{1\ldots1}_{n-k}} + C^{n-k+1}_n A_{2\underbrace{1\ldots1}_{n-k-1}}\right] (-1)^{n-k+1} \omega^2_\wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{k}} + \ldots +$$

$$+ \left[(n+1) A_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} + A_{2\underbrace{1\ldots1}_{n-2}}\right] (-1)^n \omega^2_\wedge \omega^3_1 + A_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} (-1)^n \omega^3_\wedge \omega^2 +$$

$$+ \omega^3_{\underbrace{11\ldots11}_{n+1}} \wedge \omega^1$$

. . . .

Выражения для дифференциалов $d\omega^4_{22}, \ldots\ldots, d\omega^4_{\underbrace{22\ldots2}_{n}}, \ldots\ldots$ получаются соответственно из $d\omega^3_{11}, \ldots\ldots, d\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}, \ldots\ldots$ заменой индексов I $\longleftrightarrow$ 2 и 3 $\longleftrightarrow$ 4.

Справедливость равенств (3.I6) для любого n можно вывести при помощи полной математической индукции.

Следовательно, рассматриваемая система (I.II) допускает бесконечную группу преобразований, зависящую от двух произвольных функций.

Или мы пришли к следующему результату:

ТЕОРЕМА I. Обращение в нуль инвариантов $a^1_4, a^2_3, a^2_1, a^1_2, a^3_3, a^4_4, a^4_{43}, a^3_{34}, A_3, A_4$ достаточно для того чтобы рассматриваемая нами система допускала бесконечную группу $\widetilde{G}$, зависящую от двух произвольных функций.

Более того, мы дальше докажем, что условия теоремы I необходимы и достаточны для линейности систем $S^{(1)}_{2,2}$, а следовательно необходимы и достаточны для того, чтобы группа $\tilde{G}$ действовала транзитивно на множестве интегральных многообразий.

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> Обращение в нуль инвариантов $a^1_4, a^2_3, a^1_2, a^2_1, a^3_3, a^4_4, a^4_{43}, a^3_{34}, A_3, A_4$ необходимо и достаточно для того чтобы рассматриваемая нами система становилась линейной при некотором выборе зависимых и независимых переменных.

Для доказательство теоремы 2 вспомним, прежде всего, что обращение в нуль инвариантов $a^1_4, a^2_3, a^1_2, a^2_1, a^3_3, a^4_4$ обеспечивает полную интегрируемость уравнений

$$S_1: \omega^1 = 0 \quad , \quad S_2: \omega^2 = 0$$

и систем

$$S_{123}: \omega^1 = 0, \ \omega^2 = 0, \ \omega^3 = 0;$$

$$S_{124}: \omega^1 = 0, \ \omega^2 = 0, \ \omega^4 = 0.$$

Выберем переменные x, y, u, v таким образом, чтобы x было интегралом уравнения S_1, y - уравнения S_2, u было интегралом системы S_{123}, независимым от x и y, а v обладало теми же свойствами для системы S_{124}. Тогда будем иметь

$$\omega^1 = p\,dx \quad , \quad \omega^2 = q\,dy \,, \tag{3.I7}$$

где p и q - произвольные функции от x, y, u, v. Теперь уравнения (I.II) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} &(du - f^3 dy) \wedge dx = 0 \\ &(dv - f^4 dx) \wedge dy = 0 \,, \end{aligned} \tag{3.I8}$$

т.е. формы ω^3 и ω^4 примут вид:

(3.I9)
$$\omega^3 = m^3\left(du - s\,dx - f^3 dy\right)$$
$$\omega^4 = m^4\left(dv - \mu\,dy - f^4 dx\right),$$

где f^3 и f^4 - определенные функции от x, y, u, v. Сами уравнения (I.II) запишутся в виде (см. (3.I8)):

(3.20)
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f^3(x, y, u, v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = f^4(x, y, u, v).$$

Найдем дифференциалы форм ω^3 и ω^4 :

(3.2I)
$$d\omega^3 = \left(d\ln m^3 + \frac{\partial f^3}{\partial u}dy\right)\wedge\omega^3 + \frac{m^3}{p}\left[\left(\frac{\partial f^3}{\partial x} + f^4\frac{\partial f^3}{\partial v} + s\frac{\partial f^3}{\partial u}\right)dy - ds\right]\wedge\omega^1 + \frac{m^3}{q m^4}\cdot\frac{\partial f^3}{\partial v}\,\omega^2\wedge\omega^4$$

$$d\omega^4 = \left(d\ln m^4 + \frac{\partial f^4}{\partial v}dx\right)\wedge\omega^4 + \frac{m^4}{q}\left[\left(\frac{\partial f^4}{\partial y} + f^3\frac{\partial f^4}{\partial u} + \mu\frac{\partial f^4}{\partial v}\right)dx - d\mu\right]\wedge\omega^2 + \frac{m^4}{p m^3}\cdot\frac{\partial f^4}{\partial u}\,\omega^1\wedge\omega^3$$

Сравнивая (3.2I) с равенствами (3.I2) и (3.I4), получаем:

(3.22)
$$\frac{m^3}{q m^4}\cdot\frac{\partial f^3}{\partial v} = 1$$
$$\frac{m^4}{p m^3}\cdot\frac{\partial f^4}{\partial u} = 1$$

и

$$\omega_3^3 = d\ln m^3 + \frac{\partial f^3}{\partial u}dy + l\omega^3 + l_2\omega^1$$

$$\omega_4^4 = d\ln m^4 + \frac{\partial f^4}{\partial v}dx + m\omega^4 + m_1\omega^2$$

$$\omega_1^3 = \frac{m^3}{p}\left[\left(\frac{\partial f^3}{\partial x} + f^4\frac{\partial f^3}{\partial v} + s\frac{\partial f^3}{\partial u}\right)dy - ds\right] + \tag{3.23}$$

$$+ l_1\omega^1 + l_2\omega^3$$

$$\omega_2^4 = \frac{m^4}{q}\left[\left(\frac{\partial f^4}{\partial y} + f^3\frac{\partial f^4}{\partial u} + \mu\frac{\partial f^4}{\partial v}\right)dx - d\mu\right] +$$

$$+ m_2\omega^2 + m_1\omega^4 \; .$$

Сравнивая дифференциалы форм ω^1 и ω^2, заданных уравнениями (3.17), т.е.

$$d\omega^1 = d\ln p \wedge \omega^1$$

$$d\omega^2 = d\ln q \wedge \omega^2$$

с первыми двумя уравнениями равенств (3.12) и ползуясь (3.23) находим, что

$$l = \frac{\dfrac{\partial^2 f^3}{\partial v \partial u}}{m^3\dfrac{\partial f^3}{\partial v}}, \quad m = \frac{\dfrac{\partial^2 f^4}{\partial u \partial v}}{m^4\dfrac{\partial f^4}{\partial u}}$$

$$l_2 = \frac{1}{p\dfrac{\partial f^3}{\partial v}}\cdot\left[\frac{\partial f^4}{\partial v}\cdot\frac{\partial f^3}{\partial v} + \frac{\partial^2 f^3}{\partial v \partial x} + f^4\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2} + s\frac{\partial^2 f^3}{\partial v \partial u}\right] \tag{3.24}$$

$$m_1 = \frac{1}{q\dfrac{\partial f^4}{\partial u}}\cdot\left[\frac{\partial f^3}{\partial u}\cdot\frac{\partial f^4}{\partial u} + \frac{\partial^2 f^4}{\partial u \partial y} + f^3\frac{\partial^2 f^4}{\partial u^2} + \mu\frac{\partial^2 f^4}{\partial u \partial v}\right]$$

Кроме уравнений (3.24) должно выполнятся и соотношение:

$$\frac{\partial f^3}{\partial v}\cdot\frac{\partial f^4}{\partial u}=A(x,y)\,, \tag{3.25}$$

где $A(x,y)$ - произвольная функция.

Пользуясь уравнениями (3.2I) и (3.22), из (3.23) находим дифференциалы форм ω_3^3 и ω_4^4 :

$$\begin{aligned} d\omega_3^3 &= C_{21}^3\,\omega^2\wedge\omega^1 + C_{23}^3\,\omega^2\wedge\omega^3 + C_{14}^3\,\omega^1\wedge\omega^4 + C_{43}^3\,\omega^4\wedge\omega^3 \\ d\omega_4^4 &= C_{12}^4\,\omega^1\wedge\omega^2 + C_{14}^4\,\omega^1\wedge\omega^4 + C_{23}^4\,\omega^2\wedge\omega^3 + C_{34}^4\,\omega^3\wedge\omega^4\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$C_{43}^3=\frac{1}{m^3m^4\left(\frac{\partial f^3}{\partial v}\right)^2}\cdot\left[\frac{\partial^3 f^3}{\partial v\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial f^3}{\partial v}-\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}\right]$$

$$\begin{aligned} C_{14}^3=\frac{1}{pm^4\left(\frac{\partial f^3}{\partial v}\right)^2}\cdot\Bigg[&\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}f^4+\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial x}\right)- \\ &-\frac{\partial f^3}{\partial v}\left(\frac{\partial f^3}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 f^4}{\partial v^2}+\frac{\partial f^4}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 f^4}{\partial v^2}+\frac{\partial^3 f^3}{\partial v\partial x\partial v}+f^4\frac{\partial^3 f^3}{\partial v^3}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} C_{21}^3=\frac{1}{pq\left(\frac{\partial f^3}{\partial v}\right)^2}\Bigg[&\left(\frac{\partial^2 f^4}{\partial v\partial y}-\frac{\partial^2 f^3}{\partial u\partial x}\right)\left(\frac{\partial f^3}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f^3}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial f^4}{\partial y}+\right. \\ &\left.+f^4\frac{\partial^3 f^3}{\partial v^2\partial y}+\frac{\partial^3 f^3}{\partial v\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial f^3}{\partial x}+f^3\frac{\partial^3 f^3}{\partial v\partial x\partial u}\right)- \\ &-f^3\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial x}-f^4\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial y}\Bigg] \end{aligned}$$

$$C_{23}^{3}=\frac{1}{q m^{3}\left(\frac{\partial f^{3}}{\partial v}\right)^{2}}\cdot\Big[\frac{\partial f^{3}}{\partial v}\Big(\frac{\partial^{3} f^{3}}{\partial v\partial u\partial y}+f^{3}\frac{\partial^{3} f^{3}}{\partial v\partial u^{2}}\Big)+$$
$$+\frac{\partial^{2} f^{3}}{\partial v\partial u}\Big(\frac{\partial f^{3}}{\partial u}\cdot\frac{\partial f^{3}}{\partial v}-\frac{\partial^{2} f^{3}}{\partial v\partial y}-f^{3}\frac{\partial^{2} f^{3}}{\partial v\partial u}\Big)-$$
$$-\frac{\partial^{2} f^{3}}{\partial u^{2}}\Big(\frac{\partial f^{3}}{\partial v}\Big)^{2}\Big]$$

Коэфициенты C_{ij}^{4} получаются соответственно из $C_{\tilde{i}\tilde{j}}^{3}$ заменой индексов I $\longleftrightarrow$ 2, 3 $\longleftrightarrow$ 4, переменных $x \leftrightarrow y$, $u \leftrightarrow v$ и $p \leftrightarrow q$ (при этой замене должно $\tilde{i} \leftrightarrow i$ и $\tilde{j} \leftrightarrow j$).

Сравнивая выражений для коэффициентов C_{23}^{3} , C_{14}^{3} и C_{43}^{3} соответственно с выражениями для коэффициентов C_{23}^{4} , C_{14}^{4} и $(-C_{34}^{4})$ мы убеждаемся, что они равны при условии (3.25).

Далее, сравнивая уравнения (3.26) с равенствами (3.I2) и (3.I4), находим инварианты A_3 , A_4 и a_{43}^{4} , т.е. должно выполнятся

(3.28) $$a_{43}^{4}=C_{43}^{3}=-C_{34}^{4}=0 \quad ,$$

(3.29) $$A_4=C_{14}^{3}=C_{14}^{4}=0 \quad , \quad A_3=C_{23}^{4}=C_{23}^{3}=0 \; .$$

Интегрируя уравнения третьего порядка (3.28), мы убеждаемся, что обращение в нуль относительного инварианта a_{43}^{4} характеризует системы (3.20), правые стороны которых приводятся к виду:

(3.30) $$\begin{aligned} f^{3}(x,y,u,v)&=\varphi_1(x,y,u)\cdot\varphi_2(x,y,v)+\varphi_3(x,y,u)\\ f^{4}(x,y,u,v)&=\psi_1(x,y,v)\cdot\psi_2(x,y,u)+\psi_3(x,y,v) \quad , \end{aligned}$$

где φ_i и ψ_i - произвольные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_1(x,y,u)\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}=2h_1(x,y)$$

(3.3I)

$$\psi_1(x,y,v)\frac{\partial\psi_2(x,y,v)}{\partial v}=2h_2(x,y),$$

где h_i -произвольные функции. Условия (3.3I) получаем, подставляя (3.30) в (3.25).

Интегрируя уравнения (3.29) только один раз, приходим к дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\frac{\partial f^4}{\partial v}+f^4\frac{\frac{\partial^2 f^3}{\partial v^2}}{\frac{\partial f^3}{\partial v}}+\frac{\frac{\partial^2 f^3}{\partial v\partial x}}{\frac{\partial f^3}{\partial v}}=\Phi_1(x,y,u)$$

(3.32)

$$\frac{\partial f^3}{\partial u}+f^3\frac{\frac{\partial^2 f^4}{\partial u^2}}{\frac{\partial f^4}{\partial u}}+\frac{\frac{\partial^2 f^4}{\partial u\partial y}}{\frac{\partial f^4}{\partial u}}=\Phi_2(x,y,v),$$

где Φ_i - произвольные функции. Подставляя выражения (3.30) в (3.32), мы приходим к дифференциальным уравнениям, из которых, после интегрирования, получаем:

$$\varphi_3(x,y,u)\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}=2K_1(x,y)\varphi_2(x,y,u)+2K_2(x,y)-\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial y}$$

(3.33)

$$\psi_4(x,y,v)\frac{\partial\psi_2(x,y,v)}{\partial v}=2\tilde{K}_1(x,y)\psi_2(x,y,v)+2\tilde{K}_2(x,y)-\frac{\partial\psi_2(x,y,v)}{\partial x}.$$

Следовательно, система (3.20), ввиду равенств (3.30) и (3.3I), примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2h_1(x,y)\cdot\frac{\varphi_2(x,y,v)}{\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}}+\varphi_3(x,y,u)$$

(3.34) $$\frac{\partial v}{\partial x} = 2h_2(x,y)\cdot\frac{\varphi_2(x,y,u)}{\frac{\partial\varphi_2(x,y,v)}{\partial v}} + \varphi_4(x,y,v) ,$$

т.е.

(3.35) $$\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 2h_1(x,y)\cdot\varphi_2(x,y,v) + \varphi_3(x,y,u)\frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}$$
$$\frac{\partial\varphi_2(x,y,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2h_2(x,y)\cdot\varphi_2(x,y,u) + \varphi_4(x,y,v)\frac{\partial\varphi_2(x,y,v)}{\partial v}$$

Сделаем в (3.34) замену переменных:

(3.36) $$\tilde{u} = \varphi_2(x,y,u)$$
$$\tilde{v} = \varphi_2(x,y,v) ,$$

т.е.

(3.37) $$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_2(x,y,u)}{\partial u}$$
$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v} = \frac{\partial\varphi_2(x,y,v)}{\partial v} .$$

Тогда, пользуясь равенствами (3.33), (3.36) и (3.37), систему (3.35.) можно привести к виду:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} = K_1(x,y)\cdot\tilde{u} + h_1(x,y)\tilde{v} + K_2(x,y)$$
$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} = \overline{K}_1(x,y)\cdot\tilde{v} + h_2(x,y)\tilde{u} + \overline{K}_2(x,y) .$$

Следовательно, система (I.II) является линейной при таком выборе зависимых и независимых переменных.

Обратно, непосредственно проверяется, что для линейной системы все инварианты a_4^1, a_3^2, a_2^1, a_1^2, a_3^3, a_4^4, a_{43}^4, a_{34}^3, A_3, A_4 равны нулю.

Теорема доказана.

Полезно заметить еще, что в этом случае уравнения $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$, и системы:

$$\omega^1=0 \quad , \quad \omega^2=0 \quad , \quad \omega_4^4-\omega_3^3=0 \; ;$$

$$\omega^1=0 \quad , \quad \omega_4^4-\omega_3^3=0 \; ;$$

$$\omega^2=0 \quad , \quad \omega_4^4-\omega_3^3=0 \; ,$$

вполне интегрируемые, так как из (3.I2) имеем:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= (\omega_4^4-\omega_3^3)\wedge\omega^1 \\ d\omega^2 &= \omega^2\wedge(\omega_4^4-\omega_3^3) \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$d(\omega_4^4-\omega_3^3)=(A_1+A_2+2)\,\omega^1\wedge\omega^2 \quad .$$

Класс системы $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.I2), (3.I5) и (3.I6) при условии (3.I4) соответствует разложимой структуре, так как из уравнений (3.I2), в этом случае, выделяется самостоятельная подструктура (3.38). Когда инварианты A_1 и A_2 - константы, подструктуре (3.38) соответствует трехмерная группа с базисными формами ω^1, ω^2 и $\omega_4^4-\omega_3^3$.

Если $A_1+A_2+2=0$, уравнение

$$\omega_4^4-\omega_3^3=0$$

вполне интегрируемо.

Из равенств (3.38) видно, что на подструктуре выделяется инвариантный элемент площади $\omega^1\wedge\omega^2$, так как $d(\omega^1\wedge\omega^2)=0$.

§ 3.3 Системы $S^{(1)}_{2,2}$ второго класса

Системы $S^{(1)}_{2,2}$ второго класса характеризуются конечными соотношениями (3.I), (3,5) и

$$a^3_3 \neq 0 , \quad a^4_4 \neq 0$$
$$a^3_{34} = 0 , \quad a^4_{43} = 0 . \tag{3.39}$$

После подставления уравнений (3.I), (3.5) и (3.39) в (I.28) и (I.29), структурные уравнения приводятся к виду:

$$d\omega^1 = (\omega^4_4 - \omega^3_3)\wedge\omega^1 + a^4_4\,\omega^4\wedge\omega^1$$

$$d\omega^3 = \omega^3_1\wedge\omega^1 + \omega^3_3\wedge\omega^3 + \omega^2\wedge\omega^4$$

$$da^4_4 = -a^4_4\,\omega^4_4 + a^4_{41}\,\omega^1 + a^4_{42}\,\omega^2 - (a^4_4)^2\,\omega^4$$

$$d\omega^3_1 = (2\omega^3_3 - \omega^4_4 + a^3_3\omega^3 - a^4_4\omega^4)\wedge\omega^3_1 + A_1\,\omega^2\wedge\omega^3 + A_4\,\omega^3\wedge\omega^4 + \omega^3_{11}\wedge\omega^1 \tag{3.40}$$

$$d\omega^3_3 = a^3_3\,\omega^1\wedge\omega^3_1 + (A_1+1)\,\omega^2\wedge\omega^1 + (a^3_{31} + a^4_4)\,\omega^3\wedge\omega^1 + A_4\,\omega^1\wedge\omega^4 + A_3\,\omega^2\wedge\omega^3 - a^3_3\,\omega^2\wedge\omega^4$$

Кроме уравнений (3.40) еще имеют места и соотношения (3.9). Дифференциалы $d\omega^2, d\omega^4, da^3_3, d\omega^4_2, d\omega^4_4$ получаются соответственно из выражений для дифференциалов $d\omega^1$, $d\omega^3$, da^4_4, $d\omega^3_1$, $d\omega^3_3$ заменой индексов I $\longleftrightarrow$ 2 и 3 $\longleftrightarrow$ 4.

Внешнее дифференцирование (продолжение) уравнений для дифференциалов $d\omega^3_3$ и $d\omega^4_4$ из (3.40) и последующие разложения по лемме Картана, приводят к равенствам

$$dA_1 = -\left(a^3_{32} + A_3\right)\omega^3_1 + A_4\omega^4_2 + \ldots\ldots$$

$$dA_2 = -\left(a^4_{41} + A_4\right)\omega^4_2 + A_3\omega^3_1 + \ldots\ldots$$

(3.4I)
$$dA_3 = A_3\left(\omega^4_4 - 2\omega^3_3\right) + A_{13}\,\omega^1 + A_{32}\,\omega^2 + A_{33}\,\omega^3$$

$$dA_3 = A_3\left(\omega^4_4 - 2\omega^3_3\right) + \left(A_{13} - A_2 a^3_3\right)\omega^1 + A_{32}\,\omega^2 + A_{33}\,\omega^3$$

$$dA_4 = A_4\left(\omega^3_3 - 2\omega^4_4\right) + \left(A_{24} - A_1 a^4_4\right)\omega^2 + A_{41}\,\omega^1 + A_{44}\,\omega^4$$

$$dA_4 = A_4\left(\omega^3_3 - 2\omega^4_4\right) + A_{24}\,\omega^2 + A_{41}\,\omega^1 + A_{44}\,\omega^4$$

из которых получаем необходимые условия для существования группы G:

$$a^3_{32} + A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \quad ,$$

$$a^4_{41} + A_4 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad ,$$

т.е.

(3.42)
$$A_3 = A_4 = a^3_{32} = a^4_{41} = 0 \quad .$$

Сравнение последних четырех уравнений (3.4I) дает условия:

(3.43)
$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad .$$

Равенства (3.42) и (3.43), после их подставления в (3.9) и (3.4I), приводят к соотношениям:

(3.44)
$$a^3_{31} = a^4_4 \quad , \quad a^4_{42} = a^3_3 \quad .$$

Следовательно, структурные уравнения принимают вид:

$$d\omega^1 = \left(\omega^4_4 - \omega^3_3\right)\wedge\omega^1 + a^4_4\,\omega^4\wedge\omega^1$$

$$d\omega^3 = \omega^3_1\wedge\omega^1 + \omega^3_3\wedge\omega^3 + \omega^2\wedge\omega^4$$

$$da_4^4 = -a_4^4\omega_4^4 + a_3^3\omega^2 - (a_4^4)^2\omega^4$$

(3.45)

$$d\omega_1^3 = (2\omega_3^3 - \omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - a_4^4\omega^4)\wedge\omega_1^3 + \omega_{11}^3\wedge\omega^1$$

$$d\omega_3^3 = a_3^3\omega^1\wedge\omega_1^3 + \omega^2\wedge\omega^1 + 2a_4^4\omega^3\wedge\omega^1 - a_3^3\omega^2\wedge\omega^4$$

Дифференциалы $d\omega^2$, $d\omega^4$, da_3^3, $d\omega_2^4$, $d\omega_4^4$ получаются соответственно из выражений для дифференциалов $d\omega^1$, $d\omega^3$, da_4^4, $d\omega_1^3$, $d\omega_3^3$ заменой индексов I $\longleftrightarrow$ 2 и 3 $\longleftrightarrow$ 4.

Дальнейшие дифференцирования и разложения уравнений (3.45) по леммам Картана приводят к последовательности уравнений:

$$d\omega_{11}^3 = (3\omega_3^3 - 2\omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - 2a_4^4\omega^4)\wedge\omega_{11}^3 + \omega_{111}^3\wedge\omega^1 + (3a_4^4\omega^3 + 3\omega^2)\wedge\omega_1^3$$

$$d\omega_{111}^3 = (4\omega_3^3 - 2\omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - 3a_4^4\omega^4)\wedge\omega_{111}^3 + \omega_{1111}^3\wedge\omega^1 + (8a_4^4\omega^3 + 8\omega^2 - 2a_3^3\omega_1^3)\wedge\omega_{11}^3$$

$$d\omega_{1111}^3 = (5\omega_3^3 - 4\omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - 4a_4^4\omega^4)\wedge\omega_{1111}^3 + \omega_{11111}^3\wedge\omega^1 + (15a_4^4\omega^3 + 15\omega^2 - 5a_3^3\omega_1^3)\wedge\omega_{111}^3 + 10a_4^4\omega_1^3\wedge\omega_{11}^3$$

$$d\omega_{11111}^3 = (6\omega_3^3 - 5\omega_4^4 + a_3^3\omega^3 - 5a_4^4\omega^4)\wedge\omega_{1111}^3 + \omega_{111111}^3\wedge\omega^1 + (24a_4^4\omega^3 + 24\omega^2 - 9a_3^3\omega_1^3)\wedge\omega_{1111}^3 + 5a_3^3\omega_{111}^3\wedge\omega_{11}^3 + 30a_4^4\omega_1^3\wedge\omega_{111}^3$$

(3.46) . . . .

$$d\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} = \left[(n+1)\omega^3_3 - n\omega^4_4 + a^3_3\omega^3 - n a^4_4\omega^4\right] \wedge \omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} +$$

$$+ \left[(n^2-1)a^4_4\omega^3 + (n^2-1)\omega^2 - \frac{1}{2}(n-2)(n+1)a^3_3\omega^3_1\right] \wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} +$$

$$+ N_4(n)\, a^4_4\, \omega^3_1 \wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-2}} +$$

$$+ N_5(n)\, a^3_3\, \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-2}} \wedge \omega^3_{11} +$$

$$+ N_6(n)\, a^4_4\, \omega^3_{11} \wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-3}} +$$

$$+ N_7(n)\, a^3_3\, \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-3}} \wedge \omega^3_{111} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots +$$

$$+ N_n(n) \cdot \left[\frac{1-(-1)^n}{2}a^3_3 + \frac{1+(-1)^n}{2}a^4_4\right]\omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{[\frac{n}{2}]+(-1)^{n+1}}} \wedge \omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{[\frac{n}{2}]}} +$$

$$+ \omega^3_{\underbrace{11\ldots11}_{n+1}} \wedge \omega^1 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где $n \geq 3$ и

$$N_4(n) = \frac{1}{2}n(n+1)(n-3),$$

$$N_5(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n-4),$$

$$N_6(n) = \frac{1}{24}(n+2)(n-5)(3n^2-5n+12) \quad \text{и т.д.}$$

Выражения для дифференциалов $d\omega^4_{22}, d\omega^4_{222}, \ldots, d\omega^4_{\underbrace{22\ldots2}_{n}}, \ldots$ ..... получаются соответственно из выражений для дифференциалов $d\omega^3_{11}, d\omega^3_{111}, \ldots, d\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}, \ldots\ldots$ заменой индексов I $\longleftrightarrow$ 2, 3 $\longleftrightarrow$ 4.

Справедливость равенства (3.46) можно вывести при помощи полной математической индукции.

Следовательно, системы $S^{(1)}_{2,2}$ второго класса тоже допускают бесконечную группу преобразований $\tilde{G}$, зависящую от двух произвольных функций.

Мы доказали:

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> Обращение в нуль инвариантов $a^1_4, a^2_3, a^1_2, a^2_1, a^3_{34}, a^4_{43}, A_1, A_2, A_3, A_4$ достаточно для того чтобы рассматривая нами система допускала бесконечную группу $\bar{G}$, зависящую от двух произвольных функции.

Но системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (3.45) и (3.46) к линейным не приводятся. Мы приведем пример системы $S^{(1)}_{2,2}$, соотвествующий структурным уравнениям (3.45) - (3.46), которого нельзя привести к линейному виду ни при каком выборе зависимых и независимых переменных.

Действительно, если положим в уравнениях (3.45):

$$a^3_3 = 1, \quad a^4_4 = 1,$$

то тогда

$$\omega^3_3 = \omega^1 - \omega^3$$

$$\omega^4_4 = \omega^2 - \omega^4$$

и уравнения (3.45) и (3.46) приведутся к виду:

$$d\omega^1 = (\omega^3 + \omega^2) \wedge \omega^1$$

$$d\omega^2 = (\omega^4 + \omega^1) \wedge \omega^2$$

$$d\omega^3 = \omega^3_1 \wedge \omega^1 + \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^4$$

(3.47) $$d\omega^4 = \omega^4_2 \wedge \omega^2 + \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^3_1 = (2\omega^1 - \omega^2 - \omega^3) \wedge \omega^3_1 + \omega^3_{11} \wedge \omega^1$$

$$d\omega^4_2 = (2\omega^2 - \omega^1 - \omega^4) \wedge \omega^4_2 + \omega^4_{22} \wedge \omega^2$$

. . . .

Это структурные уравнения бесконечной группы $\tilde{G}^{(1)}$.

Рассмотрим нелинейную систему:

(3.48)
$$\frac{\partial u}{\partial y} = uv$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = uv \quad .$$

Ее можно привести к виду:

(3.49)
$$(du - uv\,dy) \wedge dx = 0$$
$$(dv - uv\,dx) \wedge dy = 0$$

Сравнивая систему (3.49) с (I.II), находим, что формы ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 должны иметь вид:

(3.50)
$$\omega^1 = p\,dx$$
$$\omega^2 = q\,dy$$

$$\omega^3 = m^3(du - s\,dx - uv\,dy)$$

$$\omega^4 = m^4(dv - \mu\,dy - uv\,dx).$$

Дальше, подставляя равенства (3.50) в структурные уравнения (3.47) и проводя исследование подобное уже сделанному в доказательстве теоремы 2, находим общий вид форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^3_1, \omega^4_2, \omega^3_{11}, \omega^4_{22}, \ldots\ldots$, удовлетворяющих (3.47):

(3.5I)

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = u\,dx\\
&\omega^2 = v\,dy\\
&\omega^3 = \frac{1}{u}(du - s\,dx - uv\,dy)\\
&\omega^4 = \frac{1}{v}(dv - \mu\,dy - uv\,dx)\\
&\omega^3_1 = -\frac{ds}{u^2} + \left(1 + \frac{s}{u^2}\right)(\omega^3 + \omega^2) + \tilde{m}_1\omega^1\\
&\omega^4_2 = -\frac{d\mu}{v^2} + \left(1 + \frac{\mu}{v^2}\right)(\omega^4 + \omega^1) + \tilde{m}_2\omega^2\\
&\omega^3_{11} = d\tilde{m}_1 + \left(1 + \frac{s}{u^2}\right)\left(\omega^3_1 - \frac{2ds}{u^2}\right) + \tilde{m}_{11}\omega^1 +\\
&\qquad + \left(2\tilde{m}_1 + 1 + \frac{s}{u^2} - \frac{2s^2}{u^4}\right)(\omega^3 + \omega^2)\\
&\omega^4_{22} = d\tilde{m}_2 + \left(1 + \frac{\mu}{v^2}\right)\left(\omega^4_2 - \frac{2d\mu}{v^2}\right) + \tilde{m}_{22}\omega^2 +\\
&\qquad + \left(2\tilde{m}_2 + 1 + \frac{\mu}{v^2} - \frac{2\mu^2}{v^4}\right)(\omega^4 + \omega^1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Следовательно, системе (3.48) соответствуют структурные уравнения вида (3.47) для форм (3.5I).

Возникает вопрос: может ли существовать другая система $\bar{S}$ изучаемого типа с соответствующими формами $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}_i^j$, удовлетворяющими структурными уравнениями (3.47). Согласно теории бесконечных групп Картана (см. [I4]) любые две совокупности форм ω^i и $\bar{\omega}^i$, удовлетворяющих структурным уравнениям бесконечной группы, эквивалентны в том смысле, что между соответствующими пространствами зависимых и независимых переменных $M_4: \omega^i = 0$ и $\bar{M}_4: \bar{\omega}^i = 0$, (i = I,2,3,4), можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором форме ω^i соответствует форма $\bar{\omega}^i$, а системы (3.48) и $\bar{S}$ переходят одну в другую. Или, система (3.48) определена однозначно с точностью до замены переменных.

Группа преобразований $\tilde{G}$ для системы (3.48) имеет вид

$$\tilde{G}^{(1)}: \quad \tilde{x} = f(x), \quad \tilde{y} = \varphi(y), \quad \hat{u} = \frac{u}{f'(x)}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\varphi'(y)}. \tag{3.52}$$

Группа $\tilde{G}^{(1)}$ оставляет неизменными уравнения системы (3.48), т.е.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{u}\tilde{v}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{u}\tilde{v}.$$

Общее решение системы (3.48) имеет вид:

$$u(x,y) = -\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x) + \beta(y)}$$

$$v(x,y) = -\frac{\beta'(y)}{\beta(y) + \alpha(x)},$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ - произвольные функции.

Группа $\tilde{G}^{(1)}$ действует транзитивно на множестве интегральных многообразий (решений) системы (3.48), так как из точки (решения)

$$\tilde{u}_0(\tilde{x},\tilde{y}) = -\frac{1}{\tilde{x}+\tilde{y}}$$

$$\tilde{v}_0(\tilde{x},\tilde{y}) = -\frac{1}{\tilde{x}+\tilde{y}}$$

при помощи преобразований (3.52) группы $\tilde{G}^{(1)}$ можно перейти в любую точку (решение):

$$u(x,y) = -\frac{f'(x)}{f(x)+\varphi(y)}$$

$$v(x,y) = -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)+f(x)} ,$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - произвольные функции. Если обозначим преобразования

$$T_{01} : (\tilde{u}_0,\tilde{v}_0) \longrightarrow (u_1,v_1)$$

и

$$T_{02} : (\tilde{u}_0,\tilde{v}_0) \longrightarrow (u_2,v_2) ,$$

где (u_1,v_1) и (u_2,v_2) - произвольные точки (решения), то

$$T_{01}^{-1}\cdot T_{02} : (u_1,v_1) \longrightarrow (u_2,v_2) ,$$

т.е. из любой заданной точки (u_1 , v_1) можно перейти в любую заданную точку (u_2 , v_2) при помощи преобразования

$$T_{01}^{-1}\cdot T_{02} \in \tilde{G}^{(1)} .$$

Как видно из равенств (3.52), преобразования зависимых переменных определяются преобразованиями независимых переменных. Это противоречит сказанному в § 3.I настоящей главы, что линейная система допускает бесконечную группу преобразований, транзитивно действующую на множестве интегральных многообразий и оставляющую неизменными независимые переменные. Так что систему (3.48) нельзя привести к линейной ни при каком выборе зависимых и независимых переменных.

Следовательно, системы $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.45) и (3.46) к линейным не приводятся.

Полезно заметить еще, что в этом случае уравнения $\omega^1=0$; $\omega^2=0$ и системы

$$\omega^1=0 \ , \ \omega_1^3=0 \ ;$$

$$\omega^2=0 \ , \ \omega_2^4=0 \ ;$$

$$\omega^1=0 \ , \ \omega^2=0 \ , \ \omega_3^3=0 \ ;$$

$$\omega^1=0 \ , \ \omega^2=0 \ , \ \omega_4^4=0$$

вполне интегрируемые, как видно из (3.45).

§ 3.4. Системы $S^{(1)}_{2,2}$ третьего класса

Системы $S^{(1)}_{2,2}$ третьего класса класса характеризуются конечными соотношениями (3.I), (3.5) и

$$a^3_3 = 0, \quad a^4_4 \neq 0,$$
$$a^3_{34} = 0, \quad a^4_{43} = 0. \tag{3.53}$$

После подставления уравнений (3.I), (3.5) и (3.53) в (I.28) и (I.29), структурные уравнения приводятся к виду:

$$d\omega^1 = (\omega^4_4 - \omega^3_3)\wedge\omega^1 + a^4_4\omega^4_\wedge\omega^1$$
$$d\omega^2 = (\omega^3_3 - \omega^4_4)\wedge\omega^2$$
$$d\omega^3 = \omega^3_{1\wedge}\omega^1 + \omega^3_{3\wedge}\omega^3 + \omega^2_\wedge\omega^4$$
$$d\omega^4 = \omega^4_{2\wedge}\omega^2 + \omega^4_{4\wedge}\omega^4 + \omega^1_\wedge\omega^3$$
$$da^4_4 = -a^4_4\omega^4_4 + a^4_{41}\omega^1 + a^4_{42}\omega^2 - (a^4_4)^2\omega^4 \tag{3.54}$$
$$da^4_{41} = a^4_{41}(\omega^3_3 - 2\omega^4_4) + [a^4_{42,1} - a^4_4(A_2+1)]\omega^2 + $$
$$+ a^4_{41,1}\omega^1 - a^4_4(3a^4_{41} + A_4)\omega^4$$
$$da^4_{42} = -a^4_{42}\omega^3_3 + a^4_{42,1}\omega^1 + a^4_{42,2}\omega^2 - a^4_4A_3\omega^3 - a^4_4a^4_{42}\omega^4$$
$$d\omega^3_1 = \omega^3_{11\wedge}\omega^1 + (2\omega^3_3 - \omega^4_4 - a^4_4\omega^4)_\wedge\omega^3_1 + A_1\omega^2_\wedge\omega^3 +$$
$$+ A_4\omega^3_\wedge\omega^4$$
$$d\omega^4_2 = \omega^4_{22\wedge}\omega^2 + (2\omega^4_4 - \omega^3_3 + a^4_4\omega^4)_\wedge\omega^4_2 + A_2\omega^1_\wedge\omega^4 +$$
$$+ A_3\omega^4_\wedge\omega^3$$

$$d\omega_3^3 = (A_1+1)\,\omega^2\wedge\omega^1 + a_4^4\,\omega^3\wedge\omega^1 + A_4\,\omega^1\wedge\omega^4 + A_3\,\omega^2\wedge\omega^3$$

$$d\omega_4^4 = a_4^4\,\omega^2\wedge\omega_2^4 + (A_2+1)\,\omega^1\wedge\omega^2 + a_{42}^4\,\omega^4\wedge\omega^2 + A_3\,\omega^2\wedge\omega^3 + A_4\,\omega^1\wedge\omega^4 - a_4^4\,\omega^1\wedge\omega^3$$

Замечание: Выражения для дифференциалов da_{41}^4, da_{42}^4 получены после продолжения пятого уравнения (3.54).

Внешнее дифференцирование последних двух уравнений равенств (3.54) и разложение по лемме Картана приводит к уравнениям:

(3.55)
$$dA_1 = -A_3\,\omega_1^3 + A_4\,\omega_2^4 + \ldots\ldots$$
$$dA_2 = -(a_{41}^4 + A_4)\,\omega_2^4 + A_3\,\omega_1^3 + \ldots\ldots$$
$$dA_3 = A_3(\omega_4^4 - 2\omega_3^3) + \ldots\ldots$$
$$dA_4 = A_4(\omega_3^3 - 2\omega_4^4) + \ldots\ldots$$

и к конечному соотношению

(3.56) $$A_1 = 0 \ .$$

(Здесь не выписаны линейные комбинации базисных форм).

Для существования группы $\widetilde{G}$ необходимо обращение в нуль относительных инвариантов A_3 и A_4, и выражение $a_{41}^4 + A_4$, т.е.

(3.57)
$$A_3 = 0 \ , \qquad A_4 = 0 \ ,$$
$$a_{41}^4 = 0 \ .$$

Подставление равенств (3.56) и(3.57) в (3.54) и (3.55) приводит к соотношениям:

$$a^4_{42} = 0 \quad , \quad A_2 = -1 \ .$$

Следовательно, структурные уравнения (3.54) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
& d\omega^1 = (\omega^4_4 - \omega^3_3) \wedge \omega^1 + a^4_4 \omega^4 \wedge \omega^1 \\
& d\omega^2 = (\omega^3_3 - \omega^4_4) \wedge \omega^2 \\
& d\omega^3 = \omega^3_1 \wedge \omega^1 + \omega^3_3 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^4 \\
& d\omega^4 = \omega^4_2 \wedge \omega^2 + \omega^4_4 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 \\
& da^4_4 = -a^4_4 \omega^4_4 - (a^4_4)^2 \omega^4 \\
(3.58) \qquad & d\omega^3_1 = \omega^3_{11} \wedge \omega^1 + (2\omega^3_3 - \omega^4_4 - a^4_4 \omega^4) \wedge \omega^3_1 \\
& d\omega^4_2 = \omega^4_{22} \wedge \omega^2 + (2\omega^4_4 - \omega^3_3 + a^4_4 \omega^4) \wedge \omega^4_2 + \omega^4 \wedge \omega^2 \\
& d\omega^3_3 = a^4_4 \omega^3 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^1 \\
& d\omega^4_4 = a^4_4 \omega^3 \wedge \omega^1 + a^4_4 \omega^2 \wedge \omega^4_2
\end{aligned}
$$

Дальнейшее продолжение уравнений (3.58) приводит к бесконечной группе преобразований, т.е. все полученные уравнения (3.58) и их продолжения являются структурными уравнениями бесконечной группы преобразований $\tilde{G}$. Мы доказали:

ТЕОРЕМА 4. Обращение в нуль инвариантов $a^1_4, a^2_3, a^1_2, a^2_1$, a^3_3, a^3_{34}, a^4_{43}, A_1, A_3, A_4, и $A_2 = -1$ достаточно для того чтобы рассматриваемая нами система допускала бесконечную группу преобразований $\tilde{G}$, зависящую от двух произвольных функций.

Но системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (3.58) к линейным не приводятся. Мы приведем конкретный пример системы $S^{(1)}_{2,2}$, соответствующий структурным уравнениям (3.58).

Действительно, если мы положим в уравнениях (3.58)

$$a^4_4 = 1 ,$$

то тогда $\omega^4_4 = -\omega^4$ и уравнения (3.58) приведутся к виду ($n \geqslant 2$):

$$
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^3_3 \\
d\omega^2 &= (\omega^3_3 + \omega^4) \wedge \omega^2 \\
d\omega^3 &= \omega^3_1 \wedge \omega^1 + \omega^3_3 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^4 \\
d\omega^4 &= \omega^4_2 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega^3 \\
d\omega^3_3 &= (\omega^3 + \omega^2) \wedge \omega^1 \\
d\omega^3_1 &= 2\omega^3_3 \wedge \omega^3_1 + \omega^3_{11} \wedge \omega^1 \\
d\omega^4_2 &= \omega^4_2 \wedge (\omega^3_3 + \omega^4) + \omega^4 \wedge \omega^1 + \omega^4_{22} \wedge \omega^2 \\
d\omega^3_{11} &= 3\omega^3_3 \wedge \omega^3_{11} + 2(\omega^3 + \omega^2) \wedge \omega^3_1 + \omega^3_{111} \wedge \omega^1 \\
d\omega^4_{22} &= \omega^4_{22} \wedge (\omega^3_3 + \omega^4) + \omega^4_{222} \wedge \omega^2
\end{aligned}
\qquad (3.59)
$$

. . . .

$$d\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} = (n+1)\omega^3_3\wedge\omega^3_{\underbrace{11\ldots1}_{n}} + \frac{1}{2}(n-1)(n+2)(\omega^3+\omega^2)\wedge\omega^3_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} + $$
$$+ \omega^3_{\underbrace{11\ldots11}_{n+1}}\wedge\omega^1$$

$$d\omega^4_{\underbrace{22\ldots2}_{n}} = (n-1)\omega^4_{\underbrace{22\ldots2}_{n}}\wedge(\omega^3_3+\omega^4) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\omega^4_{\underbrace{2\ldots2}_{n-1}}\wedge(\omega^4_2-\omega^1) +$$
$$+ \omega^4_{\underbrace{22\ldots22}_{n+1}}\wedge\omega^2$$

Рассмотрим нелинейную систему:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v$$
$$(3.60)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = uv\,.$$

Ее можно привести к виду:

$$(du - v\,dy)\wedge dx = 0$$
$$(3.6I)\qquad (dv - uv\,dx)\wedge dy = 0\,.$$

Сравнивая (3.6I) с (I.II), убеждаемся что должно выполнятся:

$$\omega^1 = p\,dx$$
$$\omega^2 = q\,dy$$
$$(3.62)\qquad \omega^3 = m^3(du - s\,dx - v\,dy)$$
$$\omega^4 = m^4(dv - \mu\,dy - uv\,dx)$$

Дальше, подставляя равенства (3.62) в структурные уравнения (3.59) и проводя исследование подобное сделанному в доказательстве теоремы 2, находим общий вид форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^3_3$, ω^3_1, ω^4_2, ω^3_{11}, ω^4_{22}, ω^3_{111} и т.д., удовлетворяющих (3.59):

$$\omega^1 = p\,dx$$

$$\omega^2 = \frac{v}{p}\,dy$$

$$\omega^3 = \frac{1}{p}\left(du - s\,dx - v\,dy\right)$$

$$\omega^4 = \frac{1}{v}\left(dv - \mu\,dy - uv\,dx\right)$$

$$\omega^3_3 = -d\ln p + \frac{u}{p}\,\omega^1$$

$$\omega^3_1 = -\frac{ds}{p^2} + \frac{u}{p}\left(\omega^2 + \omega^3\right) + \tilde{m}_1\,\omega^1$$

(3.63)
$$\omega^4_2 = -\frac{p}{v^2}\,d\mu + \left(1 + \frac{\mu u}{v^2}\right)\omega^1 - \frac{\mu p}{v^2}\,\omega^4 + \tilde{m}_2\,\omega^2$$

$$\omega^3_{11} = d\tilde{m}_1 + \frac{3\tilde{m}_1}{p}\,dp - \frac{3u}{p^3}\,ds + \tilde{m}_{11}\,\omega^1 + \frac{2u^2 - s}{p^2}\left(\omega^2 + \omega^3\right)$$

и т.д.

Следовательно, системе (3.60) соответствуют структурные уравнения вида (3.59) для форм (3.63). Система (3.60) определена однозначно с точностью до замены переменных. (см. § 3.3, стр. 93-94).

Группа преобразований $\tilde{G}$ для системы (3.60) имеет вид:

(3.64)
$$\tilde{G}^{(2)}: \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \psi(x) \\ \tilde{y} &= \varkappa(y) \\ \tilde{u} &= \frac{u}{\psi'(x)} - \frac{\psi''(x)}{[\psi'(x)]^2} \end{aligned}$$

$$\tilde{v} = \frac{v}{\psi'(x)\varkappa'(y)} ,$$

где $\tilde{G}^{(2)} : \{x, y, u, v\} \longrightarrow \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}\}$.

Группа $\tilde{G}^{(2)}$ оставляет неизменными уравнения (3.60), т.е.

$$(3.65) \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{v}, \qquad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{u}\tilde{v} .$$

Общее решение системы (3.60) имеет вид:

$$u = \frac{f''(x)}{f'(x)} - 2\frac{f'(x)}{f(x)+\varphi(y)}$$

$$v = \frac{2f'(x)\varphi'(y)}{[f(x)+\varphi(y)]^2},$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ - произвольные функции.

Группа $\tilde{G}^{(2)}$ действует транзитивно на множестве интегральных многообразий (решений) системы (3.60), так как из точки (решения):

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{2}{\tilde{x}+\tilde{y}}$$

$$\tilde{v}_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{2}{(\tilde{x}+\tilde{y})^2}$$

при помощи преобразования (3.64) группы $\tilde{G}^{(2)}$ можно перейти в любую точку (решение):

$$u(x,y)=\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}-2\frac{\psi'(x)}{\psi(x)+\varkappa(y)}$$

$$v(x,y)=\frac{2\psi'(x)\varkappa'(y)}{[\psi(x)+\varkappa(y)]^2}$$

где $\psi(x)$ и $\varkappa(y)$ - произвольные функции.

Тогда из любой заданной точки (u_1 , v_1) можно перейти в любую точку (u_2 , v_2) при помощи преобразования $T_{01}^{-1}\cdot T_{02}\in$ $\in\tilde{G}^{(2)}$ (см. § 3.3, стр. 94).

Как видно из равенств (3.65) преобразования зависимых переменных определяются преобразованиями независимых переменных.

Следовательно, системы $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.59) к линейным не приводятся.

Или, мы пришли к следующему более общему результату:

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ $\tilde{G}$, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ТРАНЗИТИВНО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СИСТЕМЫ $S_{2,2}^{(1)}$, СОСТОЯТ В ТОМ, ЧТО ДОЛЖНО ВЫПОЛНЯТСЯ КАКОЕ-НИБУДЬ ИЗ УСЛОВИЙ:

а) ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ ИНВАРИАНТОВ: $a_4^1, a_3^2, a_2^1, a_1^2, a_3^3, a_4^4, a_{43}^4, a_{34}^3, A_3, A_4$;

б) ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ ИНВАРИАНТОВ: $a_4^1, a_3^2, a_2^1, a_1^2, a_{43}^4, a_{34}^3, A_1, A_2, A_3, A_4$;

в) ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ ИНВАРИАНТОВ: $a_4^1, a_3^2, a_2^1, a_1^2, a_3^3, a_{34}^3, a_{43}^4, A_1, A_3, A_4$, и $A_2=-1$.

В СЛУЧАЕ а) УСЛОВИЯ НЕОБХОДИМЫ И ДОСТАТОЧНЫ ДЛЯ ПРИВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ $S_{2,2}^{(1)}$ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ ПРИ НЕКОТОРОМ ВЫБОРЕ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. СЛУЧАИ б) и в) К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ НЕ ПРИВОДЯТСЯ.

Г Л А В А IV.

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ $S^{(1)}_{2,2}$.

§ 4.1. О существовании законов сохранения

1. Интегралом или законом сохранения системы дифференциальных уравнений первого порядка называется внешняя форма θ степени p в многообразии зависимых и независимых переменных, интеграл от которой равен нулю для всякого p -мерного цикла, лежащего на интегральном многообразии системы и гомологичного на нем нулю. (см. [26], § 3).

В силу теоремы Стокса, форма θ будет интегралом тогда и только тогда, когда ее внешний дифференциал $d\theta$ обращается в нуль вследствие уравнений системы.

Пусть известен нетривиальный интеграл системы (т.е.внешний дифференциал которого - не тождественный нуль).Тогда условия, выражающие, что $d\theta=0$ на интегральном многообразии, составляют часть уравнений системы. При наличие у системы достаточного числа интегралов всем ее уравнениям можно приписать аналогичный смысл. В этом случае говорят, что система "представима в дивиргентной форме". (см. [26]).

Будем решать задачу отыскания законов сохранения следующим образом. В пространстве зависимых и независимых переменных будем искать дифференциальные формы Ω степени $p+1$,замкнутые ($d\Omega=0$) и обращающиеся в нуль на всех интегральных многообразиях системы. Тогда, всякая форма θ такая, что $d\theta=\Omega$ будет интегралом системы (хотя бы при локальном рассмотрении такая форма всегда найдется).

2. Для систем (1.11) изучаемого нами типа не существует 0-мерных интегралов, т.е.функций ,постоянных на всех интеграль-

ных многообразиях.

Действительно, пусть существует форма

$$\Omega = t_i \omega^i ,$$

(i = 1,2,3,4), обращающаяся в нуль на всех интегральных многообразиях, где t_i -функции точки пространства зависимых и независимых переменных M_4. На интегральных многообразиях выполняются уравнения (1.10).

Следовательно, для того чтобы Ω обращалась в нуль на всех интегральных многообразиях системы (1.11), необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль при любом наборе параметров λ, μ (см.уравнения (1.10)), т.е.

$$\Omega = t_1\omega^1 + t_2\omega^2 + t_3\lambda\omega^1 + t_4\mu\omega^2 = 0 ,$$

откуда

$$(4.1) \qquad \Omega = (t_1 + \lambda t_3)\omega^1 + (t_2 + \mu t_4)\omega^2 = 0 .$$

В силу независимости форм ω^1 и ω^2 из (4.1) следует, что

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} t_1 + \lambda t_3 = 0 \\ t_2 + \mu t_4 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (4.2) должны удовлетворятся для любых наборов параметров λ, μ. Это возможно лишь в случае, когда все $t_i = 0$, (i = 1,2,3,4), т.е. для систем (1.11) не существует 0-мерных интегралов.

3. Значит, будем искать лишь одномерные интегралы или соответствующие им двумерные формы Ω. Всякая форма второго порядка, обращающаяся в нуль вследствие системы (1.11), имеет вид:

$$\Omega = M\omega^3\wedge\omega^1 + N\omega^4\wedge\omega^2 \quad . \tag{4.3}$$

Задача сводится к отысканию замкнутых фарм вида (4.3).

Продифференцируем (4.3) внешним образом, пользуясь структурными уравнениями (1.28) и (1.29) и приравняем внешний дифференциал к нулю, т.е.

$$\Delta M\wedge\omega^3\wedge\omega^1 + \Delta N\wedge\omega^4\wedge\omega^2 = 0 , \tag{4.4}$$

где
$$\Delta M = dM + M\omega_4^4 - N\omega^2 + Ma_4^4\omega^4 ,$$
$$\Delta N = dN + N\omega_3^3 - M\omega^1 + Na_3^3\omega^3 .$$

Применяя обобщенную лемму и лемму Картана, получаем дифференциальные уравнения для коэффициентов M , N .

$$\begin{aligned} dM &= -M\omega_4^4 + M_1\omega^1 + N\omega^2 + M_3\omega^3 - Ma_4^4\omega^4 \\ dN &= -N\omega_3^3 + M\omega^1 + N_2\omega^2 + N_4\omega^4 - Na_3^3\omega^3 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь M_1, M_3, N_2, N_4 -новые искомые функции.

Для совместности системы (4.5) необходимо, чтобы в результате внешнего дифференцирования уравнений (4.5) не было членов с $\omega^2\wedge\omega^4$ и $\omega^1\wedge\omega^3$ соответственно в первом и во втором уравнении. Приравняем коэффициенты перед формами $\omega^2\wedge\omega^4$ и $\omega^1\wedge\omega^3$ к ную и получаем два одинаковых уравнений вида:

$$M_3 + Ma_3^3 = N_4 + Na_4^4 \quad . \tag{4.6}$$

Обозначая

$$P = M_3 + Ma_3^3 = N_4 + Na_4^4$$

и разлагая внешние дифференциалы уравнений (4.5) по леммам Картана, приходим к равенствам:

$$dM_1 = -M_1\left(2\omega_4^4 - \omega_3^3 + 2a_4^4\omega^4\right) - Ma_1^2\omega_2^4 - (P - Ma_3^3)\omega_1^3 +$$
$$+ M_{11}\omega^1 - MA_2\omega^2 + \left[M(a_4^4 - a_{31}^3) + N(a_{12}^2 + a_{41}^4) -\right.$$
$$\left.- M_1 a_3^3 + N_2 a_1^2\right]\omega^3 - (Na_1^2 + Ma_{41}^4)\omega^4$$

$$dN_2 = -N_2\left(2\omega_3^3 - \omega_4^4 + 2a_3^3\omega^3\right) - Na_2^1\omega_1^3 - (P - Na_4^4)\omega_2^4 +$$
$$+ N_{22}\omega^2 - NA_1\omega^1 + \left[N(a_3^3 - a_{42}^4) + M(a_{21}^1 + a_{32}^3) -\right.$$
$$\left.- N_2 a_4^4 + M_1 a_2^1\right]\omega^4 - (Ma_2^1 + Na_{32}^3)\omega^3$$

(4.7) $$dP = -P\left(\omega_3^3 + \omega_4^4 + a_3^3\omega^3 + a_4^4\omega^4\right) + \left[Ma_4^1 + N(a_{12}^2 + a_{41}^4) +\right.$$
$$\left.+ N_2 a_1^2\right]\omega^1 + \left[M(a_{21}^1 + a_{32}^2) + Na_3^3 + M_1 a_2^1\right]\omega^2 +$$
$$+ \left[N(a_{43}^4 + a_{32}^2 - a_2^1 a_1^2) - Ma_4^1 + N_2 a_3^2\right]\omega^3 +$$
$$+ \left[M(a_{34}^3 + a_{41}^1 - a_1^2 a_2^1) - Na_3^2 + M_1 a_4^1\right]\omega^4,$$

где M_{11} и N_{22} - новые искомые функции.

Для совместности системы (4.7) необходимо в уравнении, полученном внешним дифференцированием первого уравнения системы(4.7), приравнять к нулю коэффициенты при членах с $\omega^2\wedge\omega^3$, $\omega^2\wedge\omega^4$ и $\omega^3\wedge\omega^4$. Аналогично, во втором уравнении надо приравнять к нулю коэффициенты при $\omega^1\wedge\omega^3$, $\omega^1\wedge\omega^4$ и $\omega^3\wedge\omega^4$, а в третьем -коэффициенты при $\omega^1\wedge\omega^2, \omega^1\wedge\omega^3, \omega^1\wedge\omega^4, \omega^2\wedge\omega^3, \omega^2\wedge\omega^4, \omega^3\wedge\omega^4$.

Дифференцируя внешние уравнения (4.7), пользуясь равенствами (1.28), (1.29) и уравнениями :

$$da^2_{11} = a^2_{11}(3\omega^3_3 - 4\omega^4_4) + (a^2_1 a^3_3 - 2a^2_{13})\omega^3_1 - 3(a^2_1)^2\omega^4_2 + a^2_3\omega^3_{11} + \ldots..$$

$$da^2_{12} = a^2_{12}(\omega^3_3 - 2\omega^4_4) + (2a^2_1 a^1_2 - a^2_{32})\omega^3_1 - (3a^2_1 a^4_4 + a^2_{14})\omega^4_2 + \ldots..$$

$$da^2_{13} = a^2_{13}(\omega^3_3 - 3\omega^4_4) - 2a^2_1 a^2_3\omega^4_2 - a^2_{33}\omega^3_1 + \ldots..$$

$$da^2_{14} = a^2_{14}(2\omega^3_3 - 4\omega^4_4) + (a^2_3 a^4_4 - a^2_1 a^1_4 - a^2_{34})\omega^3_1 + \ldots..$$

$$da^1_{41} = -a^1_{41}(\omega^3_3 + \omega^4_4) - (2a^1_4 a^3_3 + a^1_{43})\omega^3_1 + \ldots..$$

$$da^1_{43} = -3a^1_{43}\omega^3_3 - 2a^1_4 a^2_3\omega^4_2 + \ldots..$$

$$da^1_{44} = -a^1_{44}(\omega^4_4 + 2\omega^3_3) - 2(a^1_4)^2\omega^3_1 + \ldots..$$

$$da^3_{31} = -a^3_{31}\omega^4_4 - [a^3_{33} + (a^3_3)^2]\omega^3_1 + a^2_{13}\omega^4_2 + \ldots..$$

$$da^3_{32} = -a^3_{32}(2\omega^3_3 - \omega^4_4) - a^1_2 a^3_3\omega^3_1 - (a^3_{34} + a^4_{43} + a^1_{41} - a^1_2 a^2_1 - a^2_{32})\omega^4_2 - \\ - a^2_3\omega^4_{22} + \ldots..$$

$$da^3_{33} = -2a^3_{33}\omega^3_3 + (a^2_{33} - 2a^2_3 a^3_3)\omega^4_2 + \ldots..$$

$$d(a^3_{34} + a^4_{43}) = -(a^3_{34} + a^4_{43})(\omega^4_4 + \omega^3_3) + (a^2_{34} + a^2_3 a^4_4 - a^2_1 a^1_4)\omega^4_2 + (a^1_{43} + a^1_4 a^3_3 - \\ - a^1_2 a^2_3)\omega^3_1 + \ldots..$$

$$dA_1 = (A_4 + a^2_{12})\omega^4_2 - (A_3 + a^2_{32} - a^1_{21})\omega^3_1 - a^1_2\omega^3_{11} + \ldots..$$

$$dA_3 = A_3(\omega^4_4 - 2\omega^3_3) + (a^4_{43} + a^4_{41} - a^2_{32} - a^2_1 a^1_2)\omega^4_2 + (3a^1_2 a^3_3 + a^1_{23})\omega^3_1 + a^2_3\omega^4_{22} + \ldots..$$

(здесь не выписаны линейные комбинации базисных форм ω^i, $i=1,2,3,4$, а дифференциалы $da^1_{22}, da^1_{21}, da^1_{24}, da^1_{23}, da^2_{32}, da^2_{34}, da^2_{33}, da^4_{42}, da^4_{41}, da^4_{44}, dA_2$ и dA_4 получаются соответственно из выписанных дифференциалов заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$

и $3 \longleftrightarrow 4$), являющимися продолжениями структурных уравнений (1.29), мы получим указанным путем 12 линейных однородных, независимых в общем случае, алгебраических уравнений относительно семи неизвестных $M, N, M_1, P, N_2, M_{11}, N_{22}$. Мы не будем выписывать эту систему из-за ее громоздкого вида. Метод ее нахождения ясен из вышеизложенного.

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы ранг матрицы полученной системы был меньше семи. Мы пришли к следующему результату:

<u>ТЕОРЕМА 5</u>. Изучаемые системы $S^{(1)}_{2,2}$ обладают геометрическими объектами, являющимися минорами седмого порядка матрицы системы линейных уравнений, обращение в нуль которых необходимо для существования у системы хотя бы одного закона сохранения.

В случае равенства нулю этих геометрических объектов нужно производить дальнейшее исследование совместности системы (4.7). В следующем параграфе этой главы и в главе VI будут даны примеры такого исследования.

4. Для изучаемых систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (1.28) и (1.29) не существуют законов сохранения частного вида, т.е. когда $M \neq 0$, $N=0$ (форма $\Omega = M\omega^3 \wedge \omega^1$) или $N \neq 0$, $M=0$ (форма $\Omega = N\omega^4 \wedge \omega^2$).

Действительно, если будем искать замкнутую форму Ω вида

$$\Omega = M\omega^3 \wedge \omega^1,$$

то следует

$$d\Omega = \left(dM + M\omega^4_4 + Ma^4_4\omega^4\right) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + M\omega^2 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 = 0.$$

Для совместности последнего уравнения необходимо, чтобы $M=0$, что приводит к нашему утверждению.

Аналогично доказываем, что не существует замкнутых форм Ω вида: $\Omega = N\omega^4 \wedge \omega^2$.

Следовательно, для изучаемых систем $S_{2,2}^{(1)}$ могут существовать лишь законы сохранения общего вида, т.е. когда

$$M \neq 0, \ N \neq 0.$$

§ 4.2. Законы сохранения для систем $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями первого, второго и третьего вида и класса

1. Рассмотрим вопрос о существовании законов сохранения для изучаемых систем $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (2.13), (2.14) и (2.15).

Пусть дана система $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (2.13). Будем искать дифференциальную форму второй степени Ω замкнутую ($d\Omega=0$) и обращающуюся в нуль вследствии уравнений (1.11). Следовательно Ω имеет вид:

$$\Omega = M\omega^3\wedge\omega^1 + N\omega^4\wedge\omega^2$$

где M и N -искомые функции.

Уравнения (4.5),(4.6) и (4.7) в рассматриваемом случае соответственно будут:

$$(4.5') \quad \begin{aligned} dM &= M_1\omega^1 + (M+N)\omega^2 + M_3\omega^3 \\ dN &= N_2\omega^2 + (N+M)\omega^1 + N_4\omega^4 \end{aligned}$$

$$(4.6') \quad M_3 = N_4$$

$$(4.7') \quad \begin{aligned} dM_1 &= M_{11}\omega^1 + 2M_1\omega^2 \\ dN_2 &= N_{22}\omega^2 + 2N_2\omega^1 \\ dP &= P(\omega^1+\omega^2) + (N_2-M-N)\omega^3 + (M_1-M-N)\omega^4, \end{aligned}$$

где мы обозначили $P=M_3=N_4$, а $M_1, N_2, P, M_{11}, N_{22}$ -

новые искомые функции. Внешнее дифференцирование уравнений (4.7) приводит к равенствам:

$$
\begin{aligned}
&[dM_{11}+(2M_1-3M_{11})\omega^2]\wedge\omega^1+(M_{11}-2M_1)\omega^3\wedge\omega^4=0\\
(4.8)\quad &[dN_{22}+(2N_2-3N_{22})\omega^1]\wedge\omega^2+(N_{22}-2N_2)\omega^4\wedge\omega^3=0\\
&(M_{11}-2M_1)\omega^1\wedge\omega^4+(N_{22}-2N_2)\omega^2\wedge\omega^3=0
\end{aligned}
$$

Из (4.8) следует :

$$
(4.9)\quad \begin{aligned}
&M_{11}-2M_1=0\\
&N_{22}-2N_2=0
\end{aligned}
$$

Подставляя (4.9) в первые два уравнения (4.8), мы убеждаемся, что эти уравнения удовлетворяются тождественно. Следовательно, получили замкнутую систему

$$
\begin{aligned}
&dM=M_1\omega^1+(M+N)\omega^2+P\omega^3\\
&dN=N_2\omega^2+(M+N)\omega^1+P\omega^4\\
(4.10)\quad &dM_1=2M_1(\omega^1+\omega^2)\\
&dN_2=2N_2(\omega^1+\omega^2)\\
&dP=P(\omega^1+\omega^2)+(N_2-M-N)\omega^3+(M_1-N-M)\omega^4,
\end{aligned}
$$

где функции M и N , как видно, являются функциями точки пространства зависимых и независимых переменных M_4 .

Внешнее дифференцирование равенств (4.10) не дает новых уравнений. Полученная система (4.10) замкнутая, в инволюции (см. [3]) и определяет решение с произволом в пять произвольных постоянных.

Следовательно, в рассматриваемом случае, всегда существуют законы сохранения. Они определяются с произволом в пять произвольных постоянных.

Интересно отметить, что из структурных уравнений (2.13) можно найти конкретный вид одного закона сохранения:

$$(4.11) \qquad \theta = \omega^3 \quad \text{или} \quad \hat{\theta} = \omega^4 .$$

Как видно из (2.13) : $d(\theta+\hat{\theta})=0$,т.е. $\theta+\hat{\theta}=dh$.
Отсюда следует, что θ и $\hat{\theta}$ дают один и тот же закон сохранения, так как их сумма является полным дифференциалом от функции h
Формы θ и $\hat{\theta}$ из (4.11) являются законами сохранения, так как

$$d\theta = d\omega^3 = \omega^3_1\omega^1 - \omega^4_1\omega^2$$

$$d\hat{\theta} = d\omega^4 = -\omega^3_1\omega^1 + \omega^4_1\omega^2 ,$$

т.е. их внешние дифференциалы обращаются в нуль на интегральных многообразиях.

Аналогично, рассматривая системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.14) и (2.15), доказываем существование законов сохранения. Решения существуют и определяются с произволом в пять произвольных постоянных.

Уравнения (4.5),(4.6),(4.7),(4.9) и (4.10) для системы со структурными уравнениями (2.15) принимают вид:

$$(4.5'') \qquad \begin{aligned} dM &= M_1\omega^1 + N\omega^2 + M_3\omega^3 \\ dN &= N_2\omega^2 + M\omega^1 + N_4\omega^4 ; \end{aligned}$$

$$(4.6'') \qquad M_3 = N_4 \qquad ;$$

$$dM_1 = M_{11}\omega^1 + M\omega^2 - \kappa P\omega^4$$

(4.7")
$$dN_2 = N_{22}\omega^2 + N\omega^1 - \frac{1}{\kappa}P\omega^3$$

$$dP = (N_2 - M)\omega^3 + (M_1 - N)\omega^4$$

$$M_{11} = \kappa N_2 - (\kappa - 1)M$$

(4.9")
$$N_{22} = \frac{1}{\kappa}M_1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa}N$$

$$dM = M_1\omega^1 + N\omega^2 + P\omega^3$$

$$dN = N_2\omega^2 + M\omega^1 + P\omega^4$$

(4.10")
$$dM_1 = [\kappa N_2 - (\kappa-1)M]\omega^1 + M\omega^2 - \kappa P\omega^4$$

$$dN_2 = \left[\frac{1}{\kappa}M_1 + \frac{\kappa-1}{\kappa}N\right]\omega^2 + N\omega^1 - \frac{1}{\kappa}P\omega^3$$

$$dP = (N_2 - M)\omega^3 + (M_1 - N)\omega^4,$$

где мы ввели новое обозначение $M_3 = N_4 = P$.

В случае системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.14) можно выписать конкретный вид одного закона сохранения:

(4.11') $\theta_1 = \omega^3$ или $\hat{\theta}_1 = \omega^4$

Как видно из (2.14) и (4.11'):

$$d(\theta_1 - \hat{\theta}_1) = 0 \quad ,$$

т.е.

$$\theta_1 - \hat{\theta}_1 = dh_1 .$$

Следовательно, функции θ_1 и $\hat{\theta}_1$ дают один и тот же закон сохранения, т.к. они отличаются на полный дифференциал функции h_1 .

2. Рассмотрим вопрос о существовании законов сохранения для изучаемых систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (3.12) - (3.16) ; (3.45)-(3.46) и (3.58).

Пусть дана система $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (3.12)-(3.16). Будем искать дифференциальную форму второй степени Ω вида:

$$\Omega = M\omega^3\wedge\omega^1 + N\omega^4\wedge\omega^2$$

где M и N -искомые функции.

Уравнения (4.5)-(4.7) в рассматриваемом случае соответственно будут:

$$dM = -M\omega^4_4 + M_1\omega^1 + M_3\omega^3 + N\omega^2$$

(4.5''')

$$dN = -N\omega^3_3 + N_2\omega^2 + N_4\omega^4 + M\omega^1$$

(4.6''') $$M_3 = N_4$$

$$dM_1 = -M_1\left(2\omega^4_4 - \omega^3_3\right) - P\omega^3_1 - MA_2\omega^2 + M_{11}\omega^1$$

(4.7''') $$dN_2 = -N_2\left(2\omega^3_3 - \omega^4_4\right) - P\omega^4_2 - NA_1\omega^1 + N_{22}\omega^2$$

$$dP = -P\left(\omega^3_3 + \omega^4_4\right),$$

где мы обозначили $M_3 = N_4 = P$, а M_1, N_2, P, M_{11} и N_{22} - новые искомые функции. Внешнее дифференцирование уравнений(4.7''') приводит к равенствам

$$dM_{11} = -M_{11}\left(3\omega^4_4 - 2\omega^3_3\right) - \left[M_1\left(3A_2 + A_1 + 3\right) + MA_{21}\right]\omega^2 + M_{111}\omega^1$$

(4.12)
$$dN_{22}=-N_{22}(3\omega_3^3-2\omega_4^4)-[N_2(3A_1+A_2+3)+NA_{12}]\omega^1+N_{222}\omega^2$$

и $P=0$.

Будем исследовать вопрос о существовании интегрального многообразия размерности 4 системы :

(4.13)
$$dM=-M\omega_4^4+M_1\omega^1+N\omega^2$$
$$dN=-N\omega_3^3+N_2\omega^2+M\omega^1$$
$$dM_1=-M_1(2\omega_4^4-\omega_3^3)-MA_2\omega^2+M_{11}\omega^1$$
$$dN_2=-N_2(2\omega_3^3-\omega_4^4)-NA_1\omega^1+N_{22}\omega^2$$
$$dM_{11}=-M_{11}(3\omega_4^4-2\omega_3^3)-[M_1(3A_2+A_1+3)+MA_{21}]\omega^2+M_{111}\omega^1$$
$$dN_{22}=-N_{22}(3\omega_3^3-2\omega_4^4)-[N_2(3A_1+A_2+3)+NA_{12}]\omega^1+N_{222}\omega^2$$

Для доказательство существования воспользуемся критерием Картана.[3]. Ищем интегральное многообразие, на котором выполняется $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4\neq 0$. Система ковариантов $d\theta_s=0,(s=1,2,\dots,8)$, где

$$\theta_1=dM+M\omega_4^4-M_1\omega^1-N\omega^2$$
$$\theta_3=dM_1+M_1(2\omega_4^4-\omega_3^3)+MA_2\omega^2-M_{11}\omega^1$$
$$\theta_5=dM_{11}+M_{11}(3\omega_4^4-2\omega_3^3)+[M_1(3A_2+A_1+3)+MA_{21}]\omega^2-M_{111}\omega^1,$$

(θ_2 , θ_4 и θ_6 получаются соответственно из форм θ_1, θ_3 и θ_5 заменой $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, $M \leftrightarrow N$), имеет $q=2$ независимые формы

$$\tilde{\omega}_q : dM_{111},\ dN_{222} \quad , \quad (q=1,2).$$

Дифференцируя уравнения (4.13), мы убеждаемся, что число независимых квадратичных уравнений $S_1=2$ и так как $q=S_1+S_2+S_3+S_4$, то $S_2=0$, т.е.

$$S_1=2 \quad , \quad S_2=S_3=S_4=0 \quad , \quad (S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant S_4 \geqslant 0).$$

Тогда число Картана Q равняется

$$Q=S_1+2S_2+3S_3+4S_4=2+2.0+3.0+4.0=2.$$

Разлагая дифференциалы уравнений (4.13) по лемме Картана, получаем:

(4.14)

$$dM_{111}=-M_{111}(4\omega_4^4-3\omega_3^3)-[M_{11}(6A_2+3A_1+8)+M_1(4A_{21}+ \\ +A_{11})+MA_{211}]\omega^2+M_{1111}\omega^1$$

$$dN_{222}=-N_{222}(4\omega_3^3-3\omega_4^4)-[N_{22}(6A_1+3A_2+8)+N_2(4A_{12}+ \\ +A_{22})+NA_{122}]\omega^1+N_{2222}\omega^2$$

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ зависит от двух параметров: M_{1111}, N_{2222}, т.е. $N=2$. Или $N=Q=2$, т.е. число Картана совпадает с числом произвольных параметров наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_4$.

Следовательно, ([3] , гл. VIII, § 11), система в инволюции и законы сохранения существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента ($S_1=2$).

Аналогично, рассматривая системы $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.45)-(3.46) и (3.58) доказываем существование законов сохранения. Они определяются соответственно с произволом двух функций одного аргумента и одной функции одного аргумента. Уравнения (4.13) и (4.14), например в случае структурных уравнений (3.58), имеют вид:

$$dM = -M(\omega_4^4 + a_4^4\omega^4) + N\omega^2 + M_1\omega^1 + Na_4^4\omega^3$$

$$dN = -N\omega_3^3 + M\omega^1$$

$$dM_1 = -M_1(2\omega_4^4 - \omega_3^3 + 2a_4^4\omega^4) - a_4^4 N\omega_1^3 + M\omega^2 + a_4^4 M\omega^3 + M_{11}\omega^1$$

$$dM_{11} = -M_{11}(3\omega_4^4 - 2\omega_3^3 + 3a_4^4\omega^4) - 2a_4^4 M\omega_1^3 + a_4^4 N\omega_{11}^3 + M_{111}\omega^1$$

Интересно отметить еще, что в случае системы $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.45)-(3.46) можем выписать конкретный вид одного закона сохранения

$$\theta_2 = \frac{a_4^4}{a_3^3}\omega^1 + \frac{a_3^3}{a_4^4}\omega^2 . \tag{4.11"}$$

Докажем, что форма θ_2 является законом сохранения. Для этого нужно доказать во-первых, что форма θ_2 является формой на многообразии M_4, т.е. ее можно записать при помощи переменных многообразия M_4, и во-вторых, что внешний дифференциал $d\theta_2$ обращается в нуль на интегральных многообразиях изучаемых систем.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>. Из (4.11") видно, что форма θ_2 может быть, вообще говоря, формой в многообразии большего числа переменных чем M_4, так как в ее коэффициентах могут входить новые

переменные. Сами формы ω^i, $(i = 1,2,3,4)$, зависят только от переменных многообразия M_4. Найдем дифференциал формы θ_2, пользуясь структурными уравнениями (3.45)-(3.46):

$$(**) \qquad d\theta_2 = a_4^4 \omega_1^3 \wedge \omega^1 + a_3^3 \omega_1^4 \wedge \omega^2$$

Равенство $(**)$ показывает, что форма зависит только от переменных многообразия M_4, так как иначе в $d\theta_2$ входили бы дифференциалы новых переменных. Еще из $(**)$ видно, что дифференциал формы θ_2 обращается в нуль вследствии уравнений (1.11).

Следовательно, форма θ_2 являются законом сохранения для систем $S_{2,2}^{(1)}$ со структурными уравнениями (3.45)-(3.46).

§ 4.3. Обобщенные функции тока

1. Рассмотрим специальный вопрос, касающийся законов сохранения, вопрос об обобщенных функциях тока.

Система обладает обобщенной функцией тока, если у нее есть интеграл, обращающийся в нуль на каждом интегральном многообразии вдоль одного семейства характеристик. (см. [26])

Например, функция тока для характеристик $\omega^1=0$, (см. § 1.3, п.2), определяется формой вида

$$\theta = \alpha\omega^3 + \gamma\omega^1, \tag{4.15}$$

замкнутой на всяком интегральном многообразии.

Пользуясь уравнениями структуры (1.28), при внешнем дифференцировании равенства (4.15) получим:

$$\begin{aligned} d\theta = {} & \left[d\gamma + \gamma\left(\omega^4_4 - \omega^3_3\right) + \alpha\omega^3_1\right]\wedge\omega^1 + \left[d\alpha + \alpha\omega^3_3\right]\wedge\omega^3 + \\ & + \alpha\omega^2\wedge\omega^4 - \gamma a^1_2\omega^2\wedge\omega^3 - \gamma a^1_4\omega^4\wedge\omega^3 + \gamma a^4_4\omega^4\wedge\omega^1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Если $\alpha=0$, то коэффициенты при $\omega^3\wedge\omega^2$, $\omega^3\wedge\omega^4$ в выражении $d\theta$ имеют вид соответственно

$$\gamma a^1_2 \quad , \quad \gamma a^1_4 .$$

В случае, когда $\alpha\neq 0$, разложение уравнения (4.16) по лемме Картана приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} & d\gamma = \gamma(\omega^3_3 - \omega^4_4) - \alpha\omega^3_1 + \gamma_1\omega^1 + \gamma_3\omega^3 - \gamma a^4_4\omega^4 \\ & d\alpha = -\alpha\omega^3_3 + \alpha_1\omega^1 + \gamma a^1_2\omega^2 + \alpha_3\omega^3 + \gamma a^1_4\omega^4 . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для совместности системы (4.17) необходимо, чтобы в результате внешнего дифференцирования уравнений (4.17) не было членов с $\omega^2 \wedge \omega^4$, т.е. необходимо, чтобы

$$\mu_3 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = -\alpha a_3^3 \quad . \tag{4.18}$$

Подставляя зависимости (4.18) во внешние дифференциалы уравнений (4.17), ввиду независимости форм ω^i, (i = 1,2,3,4), получаем конечные равенства:

$$\begin{aligned}
& a_2^1 \mu_1 + A_1 \alpha + a_{21}^1 \mu = 0 \\
& a_4^1 \mu_1 - \left(a_{12}^2 + A_4\right)\alpha + \left(a_{41}^1 - a_2^1 a_1^2\right)\mu = 0 \\
& a_2^1 \alpha_1 + \left(a_{32}^2 + A_3\right)\alpha + \left(a_{23}^1 + 2a_2^1 a_3^2\right)\mu = 0 \\
& a_4^1 \alpha_1 + \left(a_{34}^3 + a_{41}^4 - a_{41}^1\right)\alpha + \left(a_{43}^1 + a_4^1 a_3^3 - a_2^1 a_3^2\right)\mu = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Для существования ненулевого решения системы (4.19) необходимо и достаточно условие:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_2^1 & A_1 & a_{21}^1 \\ 0 & a_4^1 & -a_{12}^2 - A_4 & a_{41}^1 - a_2^1 a_1^2 \\ a_2^1 & 0 & a_{31}^3 + A_3 & a_{23}^1 + 2a_2^1 a_3^2 \\ a_4^1 & 0 & a_{34}^3 + a_{41}^4 - a_{41}^1 & a_{43}^1 + a_4^1 a_3^3 - a_2^1 a_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Компоненты определителей Δ_i выражаются через производные не более третьего порядка коэффициентов системы $S_{2,2}^{(1)}$.

Мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6. Система (1.11) может обладать обобщенной функцией тока относительно характеристик $\omega^1=0$ либо при $\Delta_1=0$ либо при обращение в нуль двухкомпонентного дифференциального обьекта (a_4^1, a_2^1), т.е.

$$a_4^1 = a_2^1 = 0 .$$

Аналогичную роль для характеристик $\omega^2=0$ играют условия

$$\Delta_2 = 0 \quad , \quad (a_3^2, a_1^2) = 0 ,$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & A_2 & a_{12}^2 \\ 0 & a_3^2 & -a_{12}^1 - A_3 & a_{32}^2 - a_1^2 a_2^1 \\ a_1^2 & 0 & a_{41}^1 + A_4 & a_{34}^2 + 2a_1^2 a_4^1 \\ a_3^2 & 0 & a_{43}^4 + a_{32}^3 - a_{32}^2 & a_{34}^2 + a_3^2 a_4^4 - a_1^2 a_4^1 \end{vmatrix}$$

2. Пусть уравнение Пфаффа

$$S_1 : \omega^1 = 0$$

обладает интегралом нулевого порядка, т.е. функцией, постоянной на каждом интегральном многообразии уравнения S_1. Для существования этого интеграла необходимо и достаточно обращение в нуль двухкомпонентного дифференциального геометрического обьекта (a_4^1, a_2^1), как видно из структурных уравнений (1.28). Пусть, кроме того, наша система (1.11) обладает функцией тока для характеристик $\omega^1=0$.

ТЕОРЕМА 7. Произведение интеграла, дающего функцию тока

$$\theta = \alpha\omega^3 + \gamma\omega^1 , \quad (\alpha \neq 0),$$

на любой интеграл уравнения S_1 дает новый интеграл того же типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f -интеграл уравнения S_1. Тогда

$$df = F\omega^1$$

и

$$d(f\theta) = df\wedge\theta + f.d\theta = F\omega^1\wedge\theta + f.d\theta =$$

$$= F\omega^1\wedge(\alpha\omega^3 + \mu\omega^1) + f\Omega =$$

$$= F\alpha\omega^1\wedge\omega^3 + f\Omega,$$

где $d\theta = \Omega$. (см. (4.3)).

Следовательно, выражение $d(f\theta)$ всегда вместе с Ω имеет вид (4.3), т.е. форма $f\theta$ замкнута на всяком интегральном многообразии.

Имея ввиду, что у нас

$$F\alpha \neq 0,$$

то уравнения

$$d\theta = 0$$

(4.20)
$$d(f\theta) = 0$$

равносильны системе (1.11), причем одно из них

$$d(f\theta) = df\wedge\theta + fd\theta = df\wedge\theta = 0$$

равносильно уравнению $\omega^3\wedge\omega^1 = 0$, так как

$$df\wedge\theta = F\alpha\,\omega^1\wedge\omega^3.$$

Отсюда получаем, что уравнение $\omega^3 = s\omega^1$ равносильно уравнению

(4.21) $$df = f_1 \theta .$$

Продифференцировав (4.21), находим

$$df_1 \wedge \theta = 0 ,$$

т.е.

(4.22) $$df_1 \wedge df = 0 ,$$

так как из (4.21) имеем $\theta = \frac{df}{f_1}$. Уравнение (4.22) выполняется, если в качестве f_1 взять любой другой интеграл уравнения S_1:

(4.23) $$f_1 = f_1(f) .$$

Подставив соотношение (4.23) во второе уравнение системы (1.11) (первое уравнение (4.20)), приходим к уравнению с одной искомой функцией, т.е. в этом случае имеется промежуточный интеграл.

3. функциями тока для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.13) и (2.14) являются формы:

$$\alpha\omega^3 , \ \beta\omega^4 , \ (\alpha = const, \ \beta = const)$$

как легко заметить из последних двух уравнений (2.13) и (2.14). Дифференциалы форм $\alpha\omega^3$ и $\beta\omega^4$ приводятся к виду (4.3), т.е. обращаются в нуль на интегральных многообразиях.

Рассмотрим системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.15). Функция тока для характеристик $\omega^1 = 0$ определится из условия

$$d(\alpha\omega^3 + \gamma\omega^1) = \Omega ,$$

что приводит, в силу (2.15), к уравнениям

(4.24) $$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha_1\omega^1 + \alpha_3\omega^3 + \gamma\omega^4 \\ d\gamma &= \gamma_1\omega^1 + \gamma_3\omega^3 - \alpha K\omega^4 . \end{aligned}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (4.24) приводит к равенствам:

$$[d\alpha_1-\gamma_1\omega^4-\gamma\omega^3+\alpha_3 K\omega^4]\wedge\omega^1+[d\alpha_3-\alpha_1\omega^4-\beta_3\omega^4-\frac{\beta}{K}\omega^2]\wedge\omega^3+\alpha_3\omega^2\wedge\omega^4=0$$

(4.25)

$$[d\gamma_1+K\alpha_1\omega^4+\alpha K\omega^3+\gamma_3 K\omega^4]\wedge\omega^1+[d\gamma_3-\gamma_1\omega^4+K\alpha_3\omega^4+\alpha\omega^2]\wedge\omega^3+\gamma_3\omega^2\wedge\omega^4=0$$

Для совместимости системы (4.24) необходимо, чтобы коэффициенты перед формами $\omega^2\wedge\omega^4$ в (4.25) равнялись нулю, т.е.

(4.26) $$\alpha_3=0\ ,\quad \gamma_3=0\ .$$

Следовательно,

$$d\alpha=\alpha_1\omega^1+\gamma\omega^4\ ,$$

$$d\gamma=\gamma_1\omega^1-\alpha K\omega^4\ ,$$

и уравнения (4.25), в силу (4.26), приводятся к виду:

$$(d\alpha_1-\gamma\omega^3-\gamma_1\omega^4)\wedge\omega^1+\alpha_1\omega^3\wedge\omega^4-\frac{\gamma}{K}\omega^2\wedge\omega^3=0$$

$$(d\gamma_1+K\alpha\omega^3+K\alpha_1\omega^4)\wedge\omega^1+\gamma_1\omega^3\wedge\omega^4+\alpha\omega^2\wedge\omega^3=0$$

откуда получаем

(4.27)
$$\alpha_1=0\ ,\quad \frac{\gamma}{K}=0\ ,$$

$$\gamma_1=0\ ,\quad \alpha=0\ .$$

Из равенств (4.27) видно, что функция тока для характеристик $\omega^1=0$ в случае системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.15), не существует.

Аналогично, доказываем, что не существует функция тока для характеристик $\omega^2=0$ в рассматриваемом случае.

Г Л А В А V.

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ $S^{(1)}_{2,2}$.

§ 5.1. Вариационная задача для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями общего вида.

Рассмотрим четырехмерное пространство M_4 с базисными формами ω^i, $(i = 1,2,3,4)$, т.е. пространство $\{M_4 : \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$. Добавляем новую переменную W и получаем пятимерное пространство $M_5 = M_4 \times R^1$.

Пусть дифференциальная форма первой степени θ является одним из законов сохранения для систем $S^{(1)}_{2,2}$, т.е. ее внешний дифференциал обращается в нуль на интегральных многообразиях или (см. § 4.1, п.3):

$$d\theta = M\omega^3 \wedge \omega^1 + N\omega^4 \wedge \omega^2 \tag{5.1}$$

где M и N -некоторые функции от переменных многообразия M_4.

Рассмотрим форму: $dW + \theta$. Эта дифференциальная форма первой степени линейно не зависит от форм ω^i, $(i = 1,2,3,4)$. Будем исследовать вариационную задачу для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (1.28), (1.29).

Ищем замкнутую форму Φ вида:

$$\Phi = (dW + \theta) \wedge (p\omega^3 \wedge \omega^1 + q\omega^4 \wedge \omega^2) \tag{5.2}$$

где p и q -неизвестные функции.

Дифференцируем внешне равенство (5.2), пользуясь структурными уравнениями (1.28), (1.29) и уравнением (5.1):

$$\begin{aligned} d\Phi = {} & (M\omega^3 \wedge \omega^1 + N\omega^4 \wedge \omega^2) \wedge (p\omega^3 \wedge \omega^1 + q\omega^4 \wedge \omega^2) - \\ & - (dW + \theta) \wedge d(p\omega^3 \wedge \omega^1 + q\omega^4 \wedge \omega^2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Так как форма $d\Phi$ должна быть замкнутой: $d\Phi=0$, а форма $dW+\theta$ не зависит от форм ω^i ,(i = 1,2,3,4), то из (5.3) следует:

(5.4) $$(M\omega^3\wedge\omega^1+N\omega^4\wedge\omega^2)\wedge(p\omega^3\wedge\omega^1+q\omega^4\wedge\omega^2)=0,$$

(5.5) $$(dW+\theta)\wedge d(p\omega^3\wedge\omega^1+q\omega^4\wedge\omega^2)=0$$

Равенство (5.4) приводит к соотношению

$$Mq+Np=0, \text{ т.е.}$$

(5.6) $$p=KM, \quad q=-KN,$$

где K -произвольная функция. Вносим (5.6) в (5.5), откуда следует

(5.7) $$d(KM\omega^3\wedge\omega^1-KN\omega^4\wedge\omega^2)=0.$$

Дальше, пользуясь равенствами (4.5),(4.6), уравнение (5.7) принимает вид:

(5.8) $$(MdK+2NK\omega^2)\wedge\omega^3\wedge\omega^1-(NdK+2MK\omega^1)\wedge\omega^4\wedge\omega^2=0.$$

Разлагаем уравнение (5.8) по обобщенной лемме Картана ([3]):

(5.9) $$\begin{aligned} &MdK+2NK\omega^2=K_1\omega^1+K_3\omega^3\\ &NdK+2MK\omega^1=K_2\omega^2+K_4\omega^4, \end{aligned}$$

но $M\neq0$ и $N\neq0$ (см.§ 4.1,п.4) и из (5.9) находим

(5.10) $$dK=\frac{K_1}{M}\omega^1-\frac{2NK}{M}\omega^2+\frac{K_3}{M}\omega^3,$$

(5.11) $$dK=-\frac{2MK}{N}\omega^1+\frac{K_2}{N}\omega^2+\frac{K_4}{N}\omega^4.$$

Сравнивая равенства (5.10) и (5.11), получаем:

$$K_1=-2\frac{M^2}{N}K\ ,\ K_2=-2\frac{N^2}{M}K\ ,\ K_3=K_4=0\quad ,\ \text{т.е.}$$

(5.12) $$dK=-2K\left(\frac{M}{N}\omega^1+\frac{N}{M}\omega^2\right).$$

Следовательно, K является абсолютным инвариантом. Уравнение (5.12) должно быть замкнуто. В противном случае оно не совместно. Или необходимо

$$d\left(\frac{M}{N}\omega^1+\frac{N}{M}\omega^2\right)=0\ ,$$

т.е.

(5.13)
$$\left[\frac{MN_2}{N^2}-\frac{NM_1}{M^2}\right]\omega^1{}_\wedge\omega^2+\frac{P}{N}\omega^3{}_\wedge\omega^1+\frac{P}{M}\omega^4{}_\wedge\omega^2+\left(a_4^1\frac{M}{N}-a_3^2\frac{N}{M}\right)\omega^3{}_\wedge\omega^4+$$
$$+\left[a_4^4\frac{M}{N}+a_1^2\frac{N}{M}-\frac{MP}{N^2}\right]\omega^4{}_\wedge\omega^1+\left[a_3^3\frac{N}{M}+a_2^1\frac{M}{N}-\frac{NP}{M^2}\right]\omega^3{}_\wedge\omega^2=0$$

Ввиду независимости базисных форм ω^i, (i =1,2,3,4), следует, что все коэффициенты перед формами второго порядка в равенстве (5.13) должны обращатся в нуль, откуда получаем

(5.14)
$$(M)^3N_2-(N)^3M_1=0\quad ,\quad P=0\ ,$$
$$a_4^4(M)^2+a_1^2(N)^2=0\quad ,$$
$$a_2^1(M)^2+a_3^3(N)^2=0\quad ,$$
$$a_4^1(M)^2-a_3^2(N)^2=0\quad .$$

Имея ввиду ,что $M\neq0,\ N\neq0$, равенства (5.14) можно привести к одному из видов:

I. $P=0\quad ,\quad (M)^3N_2-(N)^3\cdot M_1=0\ ,$

$$a_4^1(M)^2 - a_3^2(N)^2 = 0,$$

(5.15)
$$a_4^1 a_1^2 + a_4^4 a_3^2 = 0,$$

$$a_4^1 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 = 0, \quad a_4^1 \neq 0,\ a_3^2 \neq 0;$$

или

II. $P=0,\ (M)^3 N_2 - (N)^3 M_1 = 0$

$$a_4^4 (M)^2 + a_1^2 (N)^2 = 0$$

(5.16)
$$a_3^3 a_4^4 - a_1^2 a_2^1 = 0$$

$$a_4^1 = a_3^2 = 0,\ a_4^4 \neq 0,\ a_1^2 \neq 0;$$

или

III. $P=0,\ (M)^3 N_2 - (N)^3 M_1 = 0,$

$$a_2^1 (M)^2 + a_3^3 (N)^2 = 0$$

(5.17)
$$a_2^1 a_1^2 - a_3^3 a_4^4 = 0$$

$$a_4^1 = a_3^2 = 0,\ a_2^1 \neq 0,\ a_3^3 \neq 0;$$

или IV. $P=0,\ (M)^3 N_2 - (N)^3 M_1 = 0$

(5.18)
$$a_4^1 = a_3^2 = a_3^3 = a_4^4 = a_1^2 = a_2^1 = 0.$$

Замечание 1. Так как $M \neq 0$, $N \neq 0$, то из (5.14) для двоек величин a_4^1 и a_3^2 (a_4^4 и a_1^2 ; a_2^1 и a_3^3) имеем только две возможности: либо $a_4^1 \neq 0$ и $a_3^2 \neq 0$ ($a_4^4 \neq 0$ и $a_1^2 \neq 0$; $a_2^1 \neq 0$ и $a_3^3 \neq 0$), либо $a_4^1 = a_3^2 = 0$ ($a_4^4 = a_1^2 = 0$; $a_2^1 = a_3^3 = 0$)

Следовательно, если выполнено условие (5.14), т.е. какое-нибудь из условий: (5.15)-(5.18), функция K существует и определяется из уравнения (см. (5.12)).

(5.19)
$$d \ln K = -2\left(\frac{M}{N}\omega^1 + \frac{N}{M}\omega^2\right)$$

с произволом в одной постоянной. Или, форма

$$\Phi = K(dW+\theta)\wedge(M\omega^3\wedge\omega^1 - N\omega^4\wedge\omega^2)$$

замкнутая.

Замечание 2. Как показывают примеры, условия (5.14)могут выполнятся. В следующем § 5.2 будут рассмотрены такие примеры.

Тогда существует форма ψ такая, что (см. [4] , п.28 - теорема обратной теореме Пуанкаре):

$$d\psi = \Phi .$$

Дальше потребуем, чтобы вариация интеграла

$$Y = \int\psi$$

равнялась нулю, т.е. чтобы форма Φ на любом векторе $\vec{\zeta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5)$ равнялась нулю (см.,например, [19] , гл.IV):

$$\vec{\zeta}\rfloor\Phi = \vec{\zeta}\rfloor d\psi = 0 . \tag{5.20}$$

Форму $\Phi = d\psi$ можно записать в виде:

$$\Phi = d\psi = \theta^5\wedge(\theta^3\wedge\theta^1 + \theta^4\wedge\theta^2),$$

где:

$$\theta^5 = dW+\theta,\ \theta^3 = KM\omega^3,\ \theta^1 = \omega^1,\ \theta^4 = -KN\omega^4,\ \theta^2 = \omega^2. \tag{5.21}$$

Тогда из (5.20) получаем:

$$\zeta_5(\theta^3\wedge\theta^1 + \theta^4\wedge\theta^2) - \zeta_3\theta^5\wedge\theta^1 + \zeta_1\theta^5\wedge\theta^3 - \zeta_4\theta^5\wedge\theta^2 + \zeta_2\theta^5\wedge\theta^4 = 0. \tag{5.22}$$

Уравнение (5.22) должно выполнятся для любого вектора $\vec{\zeta}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5)$, откуда следует:

$$\theta^3\wedge\theta^1 + \theta^4\wedge\theta^2 = 0$$

$$\theta^5\wedge\theta^1 = 0,\ \theta^5\wedge\theta^3 = 0,\ \theta^5\wedge\theta^2 = 0,\ \theta^5\wedge\theta^4 = 0. \tag{5.23}$$

Из (5.21) видно, что формы θ^i, (i = 1,2,3,4), независимы, так как независимы формы ω^i, и равенства (5.23) удовлетворяются, если

$$\theta^3\wedge\theta^1+\theta^4\wedge\theta^2=0\,,$$

(5.24)

$$\theta^5=0\,.$$

К системе (5.24) надо добавить внешний дифференциал ее второго уравнения

(5.25) $$d\theta^5=d(dW+\theta)=d\theta=M\omega^3\wedge\omega^1+N\omega^4\wedge\omega^2\,.$$

Из (5.24) и (5.25) получаем ($K\neq 0, M\neq 0, N\neq 0$)

$$dW+\theta=0$$

(5.26)

$$\omega^3\wedge\omega^1=0\quad,\quad \omega^4\wedge\omega^2=0\,.$$

Но первое уравнение (5.26) сводится просто к интегрированию. Следовательно, вариационная задача сводится к изучаемой системе $S^{(1)}_{2,2}$ -(1.11). Мы доказали:

ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы уравнения системы $S^{(1)}_{2,2}$ были уравнениями Эйлера для вариации интеграла $\int\psi$, где $d\psi=\Phi=$ $=K(dW+\theta)\wedge(M\omega^3\wedge\omega^1-N\omega^4\wedge\omega^2)$ и $d\ln K=-2\left(\frac{M}{N}\omega^1+\frac{N}{M}\omega^2\right)$ необходимо и достаточно выполнение какое нибудь из условий (5.15)-(5.18).

§ 5.2. Примеры

1. Рассмотрим вариационную задачу для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.13). Первый вопрос, которой возникает, это какую форму выбрать в качестве закона сохранения θ. Из §4.2, п.1 видно, что в качестве формы θ можно взять форму ω^3, либо ω^4, либо $(\omega^4-\omega^3)$. Пусть

$$\theta=\omega^3 .$$

Тогда $d\theta=\omega^3\wedge\omega^1-\omega^4\wedge\omega^2$, т.е. $M=1$, $N=-1$ и равенство (5.12) принимает вид:

$$dK=2K(\omega^1+\omega^2) \tag{5.27}$$

Уравнение (5.27) замкнуто, так как из (2.13) следует

$$d(\omega^1+\omega^2)=0.$$

Так как условия (5.14), точнее (5.15), выполнены, то функция K существует и определяется из уравнения (5.27) с произволом в одной постоянной; существует и замкнутая форма Φ вида (5.2).

Следовательно, согласно теоремы 8, интегральные поверхности системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.13) являются экстремалями Эйлера для рассматриваемой вариационной задачи. Аналогичный результат получаем, если в качестве закона сохранения возьмем форму ω^4 либо форму $(\omega^4-\omega^3)$.

Особо следует отметить случай, когда

$$\theta=\omega^4-\omega^3, \tag{5.28}$$

т.е.

$$d\theta=-2\omega^3\wedge\omega^1+2\omega^4\wedge\omega^2 .$$

Имея ввиду (5.28), первое уравнение (5.26) примет вид:

$$dW+\omega^4-\omega^3=0 . \tag{5.29}$$

Сравнивая (5.29) с уравнениями (2.28) и (2.31$'$), мы находим, что

$$W = f + C$$

и, следовательно, функция W удовлетворяет уравнением второго порядка (2.40), к которому сводится изучаемая система (1.11).

Или, вариационная задача для рассматриваемого случая сводится к уравнению второго порядка

$$(W''_{xy})^2 - W''_{xx} \cdot W''_{yy} = \left(W'^2_x + W'^2_y \right)^2, \tag{5.30}$$

и экстремалями Эйлера являются интегральные многообразия уравнения (5.30).

Пользуясь равенствами (2.28), (2.31), (2.34), (2.35), (5.28), (5.19) и

$$\Phi = d\psi = K(dW + \theta)\wedge(M\omega^3\wedge\omega^1 - N\omega^4\wedge\omega^2)$$

получаем, что $K = \frac{C_1}{a^2}$, где $C_1 = const$, а дальше находим и конкретный вид формы ψ, которой варируем:

$$\psi = -\frac{C_1}{a^2}(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy)\wedge da + dh$$

где h -произвольная функция переменных x, y.

Аналогичные результаты получаем при рассмотрении вариационной задачи для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (2.14).

2. Рассмотрим вариационную задачу для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (см. § 6.1, п.1, (6.16)):

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= a\omega^2\wedge\omega^1 + \omega^3\wedge\omega^4 \\ d\omega^2 &= a\omega^1\wedge\omega^2 + \omega^4\wedge\omega^3 \\ d\omega^3 &= a\omega^1\wedge\omega^3 + \omega^2\wedge\omega^4 \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$d\omega^4 = a\,\omega^2_\wedge\omega^4 + \omega^1_\wedge\omega^3$$

$$da = (1-a^2)(\omega^1+\omega^2).$$

В качестве закона сохранения θ мы выберем форму $\omega^3+\omega^4$. Пользуясь уравнениями (5.31), находим:

$$d\theta = d(\omega^3+\omega^4) = -(a+1)\,\omega^3_\wedge\omega^1 - (a+1)\,\omega^4_\wedge\omega^2\,, \text{ т.е.}$$

$$(5.32)\qquad M = -(a+1)\,,$$

$$N = -(a+1)\,.$$

Если $a=-1$, структурные уравнения (5.31) приводятся к виду (2.13) и, следовательно, имеют места все результаты п.1 настоящего параграфа.

А, если $a\neq -1$, то, подставляя равенства (5.32) в (5.12), получаем:

$$(5.33)\qquad dK = -2K(\omega^1+\omega^2).$$

Уравнение (5.33) замкнуто, так как из (5.31) следует:

$$d(\omega^1+\omega^2) = 0.$$

Следовательно, условия (5.14) выполнены и согласно теоремы 8 интегральные поверхности системы $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (5.31) являются экстремалями Эйлера для рассматриваемой задачи.

Аналогичный результат получаем если в качестве закона сохранения возьмем форму

$$\theta = \omega^4 - \omega^3.$$

Если в качестве закона сохранения возьмем форму $\omega^3, (\omega^4)$, условия теоремы 8 не удовлетворяются.

Г Л А В А VI

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 6.1. Погружение двумерного риманова пространства с постоянной кривизной в трехмерное евклидово пространство.

В качестве иллюстрации изложенного метода, рассмотрим задачу погружения двумерного риманова пространства с постоянной кривизной в трехмерное евклидово пространство.

1. Пусть задана определенная квадратичная форма от двух переменных. Обозначим эту форму ds^2. Найдем все поверхности, обладающие линейным елементом ds^2 в евклидовом пространстве (см. [5], п. 150).

Риманова двумерная геометрия задается внешними формами ω^1, ω^2, ω_1^2, удовлетворяющими структурным уравнениям (см. [5], п. 93; [18], [19], гл. VI, § 6):

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega_1^2 &= K^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \omega_1^2 + \omega_2^1 &= 0 \end{aligned}.$$

Скаляр $(-K^2)$ - внутренная риманова кривизна поверхности. В рассматриваемом случае $K = const$. Так как внешная кривизна-кривизна обьемлющего пространства $K_e = 0$, то внутренная риманова кривизна совпадает с полной кривизной $\frac{1}{R_1 R_2}$ (см. [5], п. 147). Формы ω^1 и ω^2 линейно независимы на многообразии. Квадратичная форма ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 .$$

В трехмерном евклидовом пространстве к двумерной поверхности присоединим семейство ортогональных реперов ($\vec{\mathrm{I}}_1, \vec{\mathrm{I}}_2, \vec{\mathrm{I}}_3$) так, чтобы вектор $\vec{\mathrm{I}}_3$ был направлен по нормали к поверхности, а векторы $\vec{\mathrm{I}}_1$ и $\vec{\mathrm{I}}_2$ касались поверхности. Имеют места формулы:

$$d\vec{\mathrm{I}}_i = \bar{\omega}_i^k \vec{\mathrm{I}}_k$$

$$d\bar{M} = \bar{\omega}^i \vec{\mathrm{I}}_i$$

$$d\bar{s}^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 + (\bar{\omega}^3)^2$$

На поверхности имеем

$$\bar{\omega}^3 = 0 ,$$

т.е.

$$d\bar{s}^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 .$$

Мы требуем, чтобы риманова геометрия индуцировалась метрикой евклидова пространства. Следовательно должно выполнятся соотношение:

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 . \tag{6.2}$$

Соотношение (6.2) показывает, что можно перейти от форм $\bar{\omega}^i$ к ω^i ортогональной подстановкой, т.е.в пространстве, касательном к поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, в каждой точке M этой поверхности можно подвергнуть векторы $\vec{\mathrm{I}}_1$ и $\vec{\mathrm{I}}_2$,выходящие из этой точки, в их совокупности такому вращению вокруг точки M , что будем иметь:

$$\bar{\omega}^i = \omega^i , \quad (i = 1, 2) .$$

Поставленная задача сводится к интегрированию системы Пфаффовых уравнений:

$$\bar{\omega}^i = \omega^i , \quad \bar{\omega}^3 = 0 , \quad (i = 1, 2) . \tag{6.3}$$

Внешнее дифференцирование первых двух уравнений системы (6.3) приводит к уравнениям из которых следует:

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 .$$

Мы получили систему:

$$(6.4)\qquad \begin{aligned} &\bar{\omega}^i = \omega^i \\ &\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 \\ &\bar{\omega}^3 = 0 \quad , \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Дифференцируя внешне уравнение $\bar{\omega}^3 = 0$, получаем:

$$\bar{\omega}^1{}_\wedge \bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}^2{}_\wedge \bar{\omega}_2^3 = 0$$

или (дальше будем писать формы $\bar{\omega}_1^3$ и $\bar{\omega}_2^3$ без черточек):

$$\omega^1{}_\wedge \omega_1^3 + \omega^2{}_\wedge \omega_2^3 = 0 .$$

Кроме этого:

$$(6.5)\qquad d\omega_1^2 = \omega_1^3{}_\wedge \omega_3^2$$

Из (6.1) и (6.5) следует:

$$\omega_1^3{}_\wedge \omega_3^2 = K^2 \omega^1{}_\wedge \omega^2 .$$

Наша задача сводится к уравнениям (6.4) и

$$(6.6)\qquad \begin{aligned} &\omega^1{}_\wedge \omega_1^3 + \omega^2{}_\wedge \omega_2^3 = 0 \\ &\omega_1^3{}_\wedge \omega_2^3 + K^2 \omega^1{}_\wedge \omega^2 = 0 . \end{aligned}$$

После введения новых обозначений

$$\theta^1 = \omega_2^3 + K\omega^1 ,$$
$$\theta^2 = \omega_2^3 - K\omega^1 ,$$

$$\theta^3 = \omega_1^3 - K\omega^2$$

$$\theta^4 = \omega_1^3 + K\omega^2 ,$$

система (6.6) приводится к виду:

$$\theta^3 \wedge \theta^1 = 0$$

$$\theta^4 \wedge \theta^2 = 0 .$$

Из (6.7) получаем

$$\theta^3 = \lambda\theta^1$$

(6.8)

$$\theta^4 = \mu\theta^2 .$$

Дифференцируя внешне уравнения (6.8) $(K = const)$, приходим к равенствам:

$$\Delta\lambda \wedge \theta^1 = 0$$

(6.9)

$$\Delta\mu \wedge \theta^2 = 0 ,$$

где

$$\Delta\lambda = d\lambda - (1+\lambda^2)\omega_1^2$$

$$\Delta\mu = d\mu - (1+\mu^2)\omega_1^2$$

и

$$d(\Delta\lambda) = 2\lambda\omega_1^2 \wedge \Delta\lambda - \frac{1}{4}(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)\theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d(\Delta\mu) = 2\mu\omega_1^2 \wedge \Delta\mu - \frac{1}{4}(1+\mu^2)(\lambda-\mu)\theta^1 \wedge \theta^2 .$$

Но

$$\omega^2 + \lambda\omega^1 = \frac{1}{2K}(\mu-\lambda)\theta^2$$

(6.10) $$\omega^2 + \mu\omega^1 = \frac{1}{2K}(\mu-\lambda)\theta^1 .$$

Сравнивая равенства (6.9) и (6.10), находим, что уравнения (6.9) при $s \neq \mu$ приводятся к виду:

$$\Delta s \wedge (\omega^2 + s\omega^1) = 0$$

$$\Delta\mu \wedge (\omega^2 + \mu\omega^1) = 0 .$$

Обозначим

$$(6.11) \qquad \begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= \zeta \cdot (\Delta\mu) \\ \tilde{\omega}^2 &= \eta \cdot (\Delta s) \\ \tilde{\omega}^3 &= u \cdot (\omega^2 + s\omega^1) \\ \tilde{\omega}^4 &= v \cdot (\omega^2 + \mu\omega^1) , \end{aligned}$$

где ζ, η, u, v - параметры.

Докажем, что формы $\tilde{\omega}^i$ из равенств (6.11) удовлетворяют для некоторых ζ, η, u, v структурным уравнениям вида (1.28).

Продифференцируем внешне два последних уравнения (6.11):

$$d\tilde{\omega}^3 = \left(\frac{du}{u} - s\omega_2^1 + \frac{\Delta s}{s-\mu}\right) \wedge \tilde{\omega}^3 + \frac{u}{\eta v(\mu - s)} \tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^4$$

$$d\tilde{\omega}^4 = \left(\frac{dv}{v} - \mu\omega_2^1 + \frac{\Delta\mu}{\mu - s}\right) \wedge \tilde{\omega}^4 + \frac{v}{\zeta u(s-\mu)} \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^3$$

Коэффициенты перед формами $\tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^4$ и $\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^3$ приравняем к единицам, т.е. получим:

$$(6.12) \qquad \begin{aligned} \eta &= \frac{u}{v}(\mu - s) \\ \zeta &= \frac{v}{u}(s - \mu) . \end{aligned}$$

Подставляя (6.12) в первые два уравнения (6.11) и дифференцируя их внешне, получим:

$$
\begin{aligned}
d\tilde\omega^1 &= (\omega_4^4-\omega_3^3)\wedge\tilde\omega^1 - a_4^1\,\tilde\omega^4\wedge\tilde\omega^3\\
d\tilde\omega^2 &= (\omega_3^3-\omega_4^4)\wedge\tilde\omega^2 - a_3^2\,\tilde\omega^3\wedge\tilde\omega^4\\
d\tilde\omega^3 &= \omega_3^3\wedge\tilde\omega^3 + \tilde\omega^2\wedge\tilde\omega^4\\
d\tilde\omega^4 &= \omega_4^4\wedge\tilde\omega^4 + \tilde\omega^1\wedge\tilde\omega^3 ,
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

где

$$
a_4^1 = \frac{K^2(1+\mu^2)}{u^2(\mu-s)^2}
$$

$$
a_3^2 = \frac{K^2(1+s^2)}{v^2(s-\mu)^2}
$$

$$
\omega_3^3 = \frac{du}{u} + s\,\omega_1^2 + \frac{\Delta s}{s-\mu}
$$

$$
\omega_4^4 = \frac{dv}{v} + \mu\,\omega_1^2 + \frac{\Delta\mu}{\mu-s} .
$$

Приведем коэффициенты a_4^1 и a_3^2 к единицам (см.§ 2.1), т.е.

$$
u = \frac{K\sqrt{1+\mu^2}}{\mu-s}
\tag{6.14}
$$

$$
v = \frac{K\sqrt{1+s^2}}{s-\mu}
$$

Замечание. В равенствах (6.14) для определенности считаем, что $\operatorname{sgn}[Ku(\mu-s)] = \operatorname{sgn}[Kv(s-\mu)] = +$.

нами доказана.

ТЕОРЕМА 9. Уравнения погружения для рассматриваемой задачи погружения двумерного риманова пространства с постоянной отрицательной кривизной в трехмерное евклидово пространство сводятся к уравнениям вида (1.11) для форм:

$$\tilde{\omega}^1 = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+\mu^2}\,(s-\mu)}\,\Delta\mu\,, \qquad \tilde{\omega}^2 = \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+s^2}\,(\mu-s)}\,\Delta s\,,$$

$$\tilde{\omega}^3 = \frac{K\sqrt{1+\mu^2}}{\mu-s}\,(\omega^2+s\omega^1)\,, \qquad \tilde{\omega}^4 = \frac{K\sqrt{1+s^2}}{s-\mu}\,(\omega^2+\mu\omega^1),$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям вида (1.28) (точнее (6.13)).

Дальше, подставляя уравнение (6.14) в (6.13), обозначая выражение

(6.15)
$$\frac{1+s\mu}{\sqrt{1+s^2}\cdot\sqrt{1+\mu^2}} = a$$

и дифференцируя уравнение (6.15) внешне, получаем замкнутую систему:

(6.16)
$$\begin{aligned}
d\tilde{\omega}^1 &= a\,\tilde{\omega}^2\wedge\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^3\wedge\tilde{\omega}^4\\
d\tilde{\omega}^2 &= a\,\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^4\wedge\tilde{\omega}^3\\
d\tilde{\omega}^3 &= a\,\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^3 + \tilde{\omega}^2\wedge\tilde{\omega}^4\\
d\tilde{\omega}^4 &= a\,\tilde{\omega}^2\wedge\tilde{\omega}^4 + \tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^3\\
da &= (1-a^2)(\tilde{\omega}^1+\tilde{\omega}^2)
\end{aligned}$$

2. Законы сохранения для систем $S^{(1)}_{2,2}$ со структурными уравнениями (6.16).

Уравнения (4.5)-(4.7) для определения законов сохранения в рассматриваемом случае примут вид

$$
\begin{aligned}
&dM = M_1\tilde{\omega}^1 + (N - Ma)\tilde{\omega}^2 + M_3\tilde{\omega}^3\\
&dN = N_2\tilde{\omega}^2 + (M - Na)\tilde{\omega}^1 + N_4\tilde{\omega}^4\\
&M_3 = N_4 = P\\
&dM_1 = -2a\,M_1(\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2)\\
&dN_2 = -2a\,N_2(\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2)\\
&dP = -a\,P(\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2) + (Na + N_2 - M)\tilde{\omega}^3 + (Ma + M_1 - N)\tilde{\omega}^4.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Полученная система (6.17) замкнутая, в инволюции и определяет решение с произволом в пять произвольных постоянных.

Следовательно, законы сохранения существуют и определяются с произволом в пять постоянных.

3. Функция тока для характеристик $\tilde{\omega}^1 = 0$ определится из условия

$$d(\alpha\tilde{\omega}^3 + \gamma\tilde{\omega}^1) = \Omega,$$

что приводит, в силу (6.16), к уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&d\alpha = \alpha_1\tilde{\omega}^1 + \alpha_3\tilde{\omega}^3 + \gamma\tilde{\omega}^4\\
&d\gamma = \gamma_1\tilde{\omega}^1 + \gamma_3\tilde{\omega}^3 - \gamma a\tilde{\omega}^2.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Внешнее дифференцирование уравнений (6.18) приводит к условиям

$$\alpha_3 = 0, \quad \gamma_3 = 0$$

и после подстановки их во внешние дифференциалы уравнений (6.18)- к уравнениям

$$\alpha_1 = 0$$

(6.19) $$\gamma_1 = -\gamma a$$

$$(\gamma a \tilde{\omega}^4 - \gamma \tilde{\omega}^3) \wedge \tilde{\omega}^1 = 0 .$$

Последнее уравнение (6.19) удовлетворяется только при $\gamma = 0$, откуда (и из (6.18)) получаем:

$$d\alpha = 0 ,$$

т.е. $\alpha = const$. Доказана

ТЕОРЕМА 10. Функция тока для характеристик $\tilde{\omega}^1 = 0$ в рассматриваемом нами случае существует только при

$$\gamma = 0 \quad , \alpha = const .$$

Аналогично функция тока для характеристик $\tilde{\omega}^2 = 0$, определяемая из условия $d(\beta\tilde{\omega}^4 + \delta\tilde{\omega}^2) = \Omega$ существует только при

$$\delta = 0 \; , \; \beta = const .$$

Или функциями тока являются формы

$$\alpha\tilde{\omega}^3 \quad , \quad \beta\tilde{\omega}^4 \quad , \quad (\alpha = const , \beta = const),$$

как легко заметить из последних уравнений (6.16) - их дифференциалы приводятся к виду (4.3).

Докажем следующая

ТЕОРЕМА 11. Функции, получаемые интегрированием форм $\alpha\tilde{\omega}^3$ и $\beta\tilde{\omega}^4$, $(\alpha, \beta - const)$, с точностью до постоянного множителя равны длине други асимптотических линий одного семейства, отсчитываемой от линии другого семейства, т.е. являются чебышевскими параметрами асимптотических линий изучаемой двумерной римановой поверхности.

Доказательство. Вычислим линейный элемент двумерной римановой поверхности, погруженной в трехмерное евклидово пространство

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \tag{6.20}$$

Из выражений

$$\tilde{\omega}^3 = \frac{K\sqrt{1+\mu^2}}{\mu - s}\left(\omega^2 + s\omega^1\right)$$

$$\tilde{\omega}^4 = \frac{K\sqrt{1+s^2}}{s-\mu}\left(\omega^2 + \mu\omega^1\right)$$

находим

$$\omega^1 = -\frac{1}{K\sqrt{1+\mu^2}}\tilde{\omega}^3 - \frac{1}{K\sqrt{1+s^2}}\tilde{\omega}^4$$

(6.21)

$$\omega^2 = \frac{s}{K\sqrt{1+s^2}}\tilde{\omega}^4 + \frac{\mu}{K\sqrt{1+\mu^2}}\tilde{\omega}^3$$

Подставляем (6.21) в (6.20) и получаем

$$ds^2 = \left(\frac{\tilde{\omega}^3}{K}\right)^2 + 2\frac{1+s\mu}{\sqrt{1+s^2}\cdot\sqrt{1+\mu^2}}\left(\frac{\tilde{\omega}^3}{K}\right)\left(\frac{\tilde{\omega}^4}{K}\right) + \left(\frac{\tilde{\omega}^4}{K}\right)^2. \tag{6.22}$$

Но так как внешние дифференциалы форм $\alpha\tilde{\omega}^3$ и $\beta\tilde{\omega}^4$, $(\alpha, \beta - const)$, обращаются в нуль на интегральных многообразиях - решениях системы вида (1.11) для формы $\tilde{\omega}^i$, $(i = 1,2,3,4)$, то на интегральных многообразиях эти формы являются полными дифференциалами, т.е.

$$\alpha\tilde{\omega}^3 = d\tilde{p} \quad , \quad \beta\tilde{\omega}^4 = d\tilde{q}\,. \tag{6.23}$$

Для удобство положим

(6.24) $$\tilde{p} = \alpha K p \quad , \quad \tilde{q} = \beta K q ,$$

т.е.

(6.25) $$\frac{\tilde{\omega}^3}{K} = dp \quad , \quad \frac{\tilde{\omega}^4}{K} = dq .$$

Легко видно, что для любых δ и μ $(\delta \neq \mu)$ выполняется:

(6.26) $$-1 < a = \frac{1+\delta\mu}{\sqrt{1+\delta^2}\cdot\sqrt{1+\mu^2}} < 1$$

Тогда можно положить

(6.27) $$a = \cos 2\sigma$$

и, имея ввиду равенства (6.25)-(6.27), первая квадратичная форма (6.22) примет вид

(6.28) $$ds^2 = dp^2 + 2\cos 2\sigma \, dp\, dq + dq^2 .$$

Линейный элемент вида (6.28) на произвольных поверхностях впервые рассматривал П.Л.Чебышев в 1878 г.(см. [24] ,стр.708). Сети образованные параметрическими линиями $p = const$, $q = const$ имеют характерное свойство: в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны имеют равную длину (см. [21] -§ 96, [22] -§48).

Действительно, если рассмотрим четырехугольник с вершинами $A(p_1, q_1)$, $B(p_1, q_2)$, $\Gamma(p_2, q_2)$ и $D(p_2, q_1)$, образованный параметрическими линиями $p = p_1$, $p = p_2$ и $q = q_1$, $q = q_2$, ($p_i, q_i - const$),то вдоль q -линий ($p = p_1$ и $p = p_2$)линейный элемент будет иметь вид $ds^2 = dq^2$, откуда

$$s = AB = D\Gamma = \int_A^B dq = \int_D^\Gamma dq = q_2 - q_1 ,$$

т.е.противоположные стороны четырехугольника AB и DC имеют равные длины (аналогично и для AD и BC).

Сети кривых на поверхности, обладающие указанным выше свойством, называются сетями Чебышева. Известно утверждение -для того чтобы координатная сеть на поверхности с линейным элементом: $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы

$$E'_v = G'_u = 0$$

(см.[23],[35]). В рассматриваемом случае $E'_v = G'_u = 0$,так как: $E = G = 1$, $F = \cos 2\sigma$.

Дальше найдем вид второй квадратичной формы (см.[5],п.139):

$$\varphi = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 . \tag{6.29}$$

Пользуясь формулами (6.8),(6.10),(6.21) и

$$\theta^1 = \omega_2^3 + K\omega^1$$

$$\theta^3 = \omega_1^3 - K\omega^2 ,$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\tilde{\omega}^3 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\tilde{\omega}^4 \\ \omega_2^3 &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\tilde{\omega}^3 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\tilde{\omega}^4 . \end{aligned} \tag{6.30}$$

Подставляем (6.21) и (6.30) в (6.29) и находим:

$$\varphi = \frac{2(\lambda-\mu)}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}}\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}^4 = 2K\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}}dp\,dq . \tag{6.31}$$

Но так как

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{s-\mu}{\sqrt{(1+s^2)(1+\mu^2)}} ,$$

то из равенств (6.27) и (6.31) окончательно получаем:

(6.32) $$\varphi = 2K \sin 2\sigma \, dp\, dq .$$

Из равенство (6.32) видно, что параметрические линии $p = const$, $q = const$ являются асимптотическими направлениями поверхности, так как они обращают в нуль вторую квадратичную форму (см. [12] стр.309, [21] -§ 52). Угол δ между координатными линиями $p = const$, $q = const$, определяемый формулой: $\cos\delta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\cos 2\sigma}{\sqrt{1.1}}$, равен 2σ.

Следовательно, на поверхности мы рассматриваем координатную сеть, составленную из асимптотических линий двух разных направлений- параметрические линии $p = const$, $q = const$. Линейный элемент (6.28) -отнесен к такой сети - чебышевской сети с сетевым углом 2σ, состоящей из двух семейств асимптотических линий. Отсюда, имея ввиду равенства (6.23) и (6.24), сразу вытекает утверждение теоремы II.

4. Если к линейному элементу ds^2 из (6.26), выраженному через параметры p, q применить формулу Гаусса (см. [21], § 45) в выражении Бальцера ([36]):

$$(EG-F^2)^2 K = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}F_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} ,$$

где в нашем случае $E = G = 1,\ K = -K^2,\ F = \cos 2\sigma$, то для угла 2σ , образованного двумя асимптотическими линиями, найдем дифференциальное уравнение второго порядка (см.[21], [23]):

$$\frac{\partial^2(2\sigma)}{\partial p\partial q} = K^2 \sin 2\sigma \tag{6.33}$$

Выведем дифференциальное уравнение (6.33), пользуясь структурными уравнениями (6.16). Точнее, мы докажем, что система $S_{2,2}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^1 &= 0 \\ \tilde{\omega}^4 \wedge \tilde{\omega}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.34}$$

в рассматриваемом случае, приведется к виду (6.33).

И, действительно, на интегральных многообразиях системы (6.34) выполняется

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= \lambda \tilde{\omega}^3 \\ \tilde{\omega}^2 &= \mu \tilde{\omega}^4 \end{aligned} \tag{6.35}$$

и (см.(6.16))

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^3 &= 0 \\ d\tilde{\omega}^4 &= 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Дифференцируя уравнения (6.35) при помощи равенств (6.16) и(6.36) и разлагая их по лемме Картана, находим

$$\begin{aligned} d\lambda &= (a\lambda\mu - 1)\tilde{\omega}^4 + \lambda_1 \tilde{\omega}^3 \\ d\mu &= (a\mu\lambda - 1)\tilde{\omega}^3 + \mu_1 \tilde{\omega}^4 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Из (6.27) имеем

$$2\sigma = \arccos a \tag{6.38}$$

Дифференцируем алгебраически (6.38), пользуясь последным уравнением (6.16):

$$d(2\sigma) = \frac{-da}{\sqrt{1-a^2}} = -\sqrt{1-a^2}(\tilde{\omega}^1+\tilde{\omega}^2),$$

т.е.

(6.39) $$d(2\sigma) = -\sin 2\sigma(\tilde{\omega}^1+\tilde{\omega}^2) = -\lambda \sin 2\sigma\cdot\tilde{\omega}^3 - \mu\sin 2\sigma\cdot\tilde{\omega}^4.$$

Найдем $d(\lambda\sin 2\sigma)$ при помощи уравнений (6.37):

(6.40) $$d(-\lambda\sin 2\sigma) = -\sin 2\sigma\cdot d\lambda - \lambda\cos 2\sigma\, d2\sigma = \sin 2\sigma\cdot\tilde{\omega}^4 - (\lambda^2\sin 2\sigma\cos 2\sigma + \lambda_1\sin 2\sigma)\tilde{\omega}^3$$

Из (6.39) и (6.40) получаем:

$$\frac{\partial^2(2\sigma)}{\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}^4} = \frac{\partial^2(2\sigma)}{\partial(Kp)\partial(Kq)} = \sin 2\sigma,$$

откуда

(6.41) $$\frac{\partial^2(2\sigma)}{\partial p\partial q} = K^2\sin 2\sigma.$$

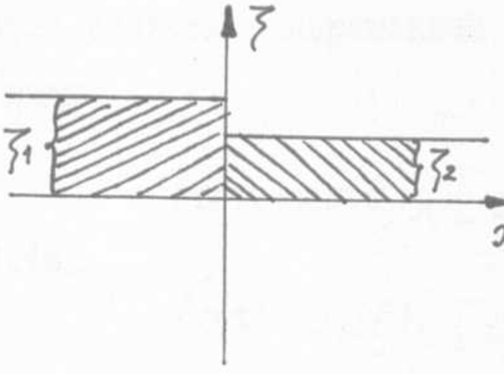
Или, рассматриваемая задача погружения свелась к уравнению второго порядка (6.41) на сетевой угол 2σ .

Допустим, что угол 2σ удовлетворяет уравнением (6.41). Тогда нам заданы обе квадратичные формы ds^2 и φ по формулам (6.28) и (6.32), причем их коэффициенты удовлетворяют условия Гаусса-Петерсона-Кодацци(см.[22]- стр.168,[35]-стр.155).

Следовательно, по теореме Бонне (см., например, [35], глава VIII, § 3) существует и притом единственная с точностью до положения в пространстве поверхность, для которой эти формы являются соответственно первой и второй квадратичными формами, т.е. определена искомая двумерная риманова поверхность.

§ 6.2. Задача о разрушении плотины

Чтобы сделать более ясным наш подход к изучению систем $S_{2,2}^{(1)}$, рассмотрим в качестве иллюстрации одну систему, известную в механике. Эта система является математическим описанием задачи о разрушении плотины (см. [32], гл.VIII, § 37).



Пусть в начальный момент вертикальная перегородка удерживает в равновесии прилегающие к ней слева и справа покоющиеся слои воды толщины ζ_1 и ζ_2 соответственно. Пусть для конкретности $\zeta_1 > \zeta_2$. Перегородка внезапно убирается. Требуется найти движение воды. В качестве дифференциальных уравнений задачи будут служить уравнения

$$(6.42)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial(\zeta u)}{\partial x} = 0 \end{array}\right. ,$$

в которых входят две неизвестные функции: u и ζ (скорость и высота свободной поверхности соотвественно, т.е. $u = v_x$); g -сила тяжести.

Соответствующие равенствам (6.42) внешние дифференциальные уравнения имеют вид:

$$(6.43)\qquad \begin{array}{l} \zeta du \wedge dt + d\zeta \wedge (u dt - dx) = 0 \\[1ex] du \wedge (u dt - dx) + g d\zeta \wedge dt = 0 . \end{array}$$

Берем другие линейные комбинации левых частей равенств (6.43) и получаем систему внешних дифференциальных уравнений

$$(du+\sqrt{g\zeta}\,d\ln\zeta)\wedge[dx-(u+\sqrt{g\zeta})dt]=0$$

(6.44)

$$(du-\sqrt{g\zeta}\,d\ln\zeta)\wedge[dx-(u-\sqrt{g\zeta})dt]=0$$

После введения переменной $\ell=\sqrt{g\zeta}$ система (6.44) приводится к виду

$$(du+2d\ell)\wedge[dx-(u+\ell)dt]=0$$

(6.45)

$$(du-2d\ell)\wedge[dx-(u-\ell)dt]=0 .$$

Уравнения (6.45) имеют вид (1.11). Очевидно основные формы $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ можно взять в виде

$$\omega^1=\alpha_1^1(du+2d\ell)$$

(6.46)

$$\omega^2=\alpha_2^2(du-2d\ell)$$

$$\omega^3=\alpha_3^3[dx-(u+\ell)dt]+\alpha_1^3\omega^1$$

$$\omega^4=\alpha_4^4[dx-(u-\ell)dt]+\alpha_2^4\omega^2 ,$$

где параметрам α_i^K можно давать любые значения (α_i^i - отличны от нуля).

Дифференцируя формы (6.46), выражая дифференциалы через формы ω^i и сравнивая с уравнениями (1.15), получим:

$$a^1=a^2=0 ,$$

(6.47)

$$a^3=-\frac{\alpha_3^3}{8\ell\alpha_2^2\alpha_4^4} , \quad a^4=\frac{\alpha_4^4}{8\ell\alpha_1^1\alpha_3^3} .$$

Проведем канонизацию (см.1.22), положив в (6.47):

$$a^3 = a^4 = 1.$$

После этого будем иметь:

$$\alpha_1^1 = \frac{\alpha_4^4}{8\ell\alpha_3^3}, \qquad \alpha_2^2 = -\frac{\alpha_3^3}{8\ell\alpha_4^4}. \tag{6.48}$$

Получаем четыре формы от 8 переменных $u, \ell, x, t, \alpha_3^3, \alpha_4^4, \alpha_1^3, \alpha_2^4$, инвариантно присоединенных к системе

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \frac{\alpha_4^4}{8\ell\alpha_3^3}(du + 2d\ell)\\
\omega^2 &= -\frac{\alpha_3^3}{8\ell\alpha_4^4}(du - 2d\ell)\\
\omega^3 &= \alpha_3^3\left[dx - (u+\ell)dt\right] + \alpha_1^3\omega^1\\
\omega^4 &= \alpha_4^4\left[dx - (u-\ell)dt\right] + \alpha_2^4\omega^2
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Структурные уравнения (1.28) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= (\omega_4^4 - \omega_3^3)\wedge\omega^1\\
d\omega^2 &= (\omega_3^3 - \omega_4^4)\wedge\omega^2\\
d\omega^3 &= \omega_1^3\wedge\omega^1 + \omega_3^3\wedge\omega^3 + \omega^2\wedge\omega^4\\
d\omega^4 &= \omega_2^4\wedge\omega^2 + \omega_4^4\wedge\omega^4 + \omega^1\wedge\omega^3,
\end{aligned} \tag{6.50}$$

где

$$\omega_3^3 = d\ln\alpha_3^3 - \frac{3\alpha_3^3}{\alpha_4^4}\omega^1 - \frac{\alpha_4^4}{\alpha_3^3}\omega^2$$

$$\omega_1^3 = d\alpha_1^3 + \alpha_1^3\, d\ln \frac{\alpha_4^4}{8e(\alpha_3^3)^2} + B_1\omega^1 + \left[\frac{\alpha_1^3\alpha_4^4}{\alpha_3^3} - 3\frac{\alpha_2^4(\alpha_3^3)^2}{(\alpha_4^4)^2}\right]\omega^2 - 6\frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^4}\omega^3 + 3\frac{(\alpha_3^3)^2}{(\alpha_4^4)^2}\omega^4 \tag{6.51}$$

(B_1 -произвольный параметр). Формы ω_4^4 и ω_1^3 получаются соответственно из форм ω_3^3 и ω_2^4 заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 4$. Дальнейшее дифференцирование равенств (6.51) приводит к тому, что уравнения (1.29) принимают вид:

$$\begin{aligned} d\omega_3^3 &= 4\omega^2 \wedge \omega^1 \\ d\omega_4^4 &= 4\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_1^3 &= \omega_{11}^3 \wedge \omega^1 + (2\omega_3^3 - \omega_4^4)\wedge\omega_1^3 + 3\omega^2\wedge\omega^3 \\ d\omega_2^4 &= \omega_{22}^4 \wedge \omega^2 + (2\omega_4^4 - \omega_3^3)\wedge\omega_2^4 + 3\omega^1\wedge\omega^4, \end{aligned} \tag{6.52}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{11}^3 = {} & dB_1 + B_1(\omega_4^4 - \omega_3^3) + 7\alpha_1^3\frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^4}(2\omega_3^3 - \omega_4^4) - 7\frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^4}d\alpha_1^3 - \\ & - 6\frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^4}\omega_1^3 + \left[12\alpha_2^4\frac{(\alpha_3^3)^3}{(\alpha_4^4)^3} + 11\alpha_1^3\right]\omega^2 + 9\frac{(\alpha_3^3)^2}{(\alpha_4^4)^2}\omega^3 - \\ & - 12\frac{(\alpha_3^3)^3}{(\alpha_4^4)^3}\omega^4 + B_{11}\omega^1 \end{aligned} \tag{6.53}$$

(B_{11} - произвольный параметр). Форма ω_{22}^4 получается из формы ω_{11}^3 заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 4$. Дифференцируя дальше уравнения (6.53) и все последующие за ними, и сравнивая полученную бесконечную последовательность равенств (6.50),(6.52) и т.д. с равенствами (3.12),(3.14) и (3.16), мы видим,что обе исследовательности уравнений совпадают. В рассматриваемом случае имеем: $A_1 = A_2 = 3$

Следовательно, систему (6.42) можно сделать линейной при некотором выборе зависимых и независимых переменных. И в самом деле, положим

$$
\begin{aligned}
u+2\ell &= \eta \\
u-2\ell &= \varkappa
\end{aligned}
\tag{6.54}
$$

Тогда равенства (1.11),т.е. (6.45) или (6.42),имея ввиду (6.49) и (6.54), примут вид

$$
\begin{aligned}
x_{\varkappa} - \frac{1}{4}(3\eta+\varkappa)t_{\varkappa} &= 0 \\
x_{\eta} - \frac{1}{4}(\eta+3\varkappa)t_{\eta} &= 0 .
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

Кроме этого, для изучаемой системы (6.42) имеют место все результаты предидущих и последующих глав, точнее : гл.I; § 3.2; § 4.2,п.2; § 4.3; гл.V.

Систему (6.55) можно привести к одному уравнению второго порядка:

$$
2(\eta-\varkappa)\frac{\partial^2 t}{\partial\eta\partial\varkappa} = 3\left(\frac{\partial t}{\partial\eta} - \frac{\partial t}{\partial\varkappa}\right).
$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г.Ф.ЛАПТЕВ, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды моск.матем.о-ва, II/1953/, с.275-382

[2] Д.М.ВАСИЛЬЕВ, Общие инвариантные методы в дифференциальной геометрии, ДАН СССР, 79, № 1 (1951), с.5-7.

[3] С.П.ФИНИКОВ, Метод внешних форм Картана, М.Л.,Гостехиздат,1848.

[4] Э.КАРТАН, Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, Москва, Изд.МГУ,1962 г.

[5] Э.КАРТАН, Риманова геометрия в ортогональном репере, Москва, Изд.МГУ, 1960.

[6] Э.КАРТАН, Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, Москва, Изд. МГУ, 1963.

[7] Л.П.ЭЙЗЕНХАРТ, Непрерывные группы преобразований, Москва, ИИЛ, 1947 г.

[8] Л.В.ОВСЯННИКОВ, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962 г.

[9] Л.В.ОВСЯННИКОВ, Лекции по групповым свойствам дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд-во Новосиб.госуд.ун-та,1966.

[10] É. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les èquations aux derivèes partielles du second ordre, Oeuvres, p. II, V. 2, Paris, 1953, 927-1011.

[11] É. Cartan, Sur les systèmes en involution d'èquations aux derivees partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables independantes, Oeuvres, p. II., V. 2, Paris, 1953, 1035-1127.

[12] Ж.ФАВАР, Курс локальной дифференциальной геометрии, Москва, ИИЛ, 1960.

[13] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 1, 1888, Bd. 2, 1890, Bd. 3, 1893, Teubner, Leipzig.

[14] Cartan É., Sur la structure des groupes infinis de transformations, Oeuvres, Partie II, V. 2, Paris, 1953, 571-714.

[15] ДЖ.СПРИНГЕР, Введение в теорию римановых поверхностей, ИИЛ, Москва, 1960.

[16] Р.КУРАНТ, Уравнения с частными производными, Изд-во "Мир", Москва, 1964.

[17] Р.КУРАНТ, Д.ГИЛЬБЕРТ, Уравнения математической физики, том 2, ГИТТЛ, М.-Л., 1951.

[18] П.К.РАШЕВСКИЙ, Риманова геометрия и тензорный анализ, Изд. "Наука", Москва, 1964.

[19] С.СТЕРНБЕРГ, Лекции по дифференциальной геометрии, Изд. "Мир", Москва, 1970.

[20] В.БЛЯШКЕ, Введение в геометрию тканей, ГИФМЛ, Москва, 1959.

[21] В.БЛЯШКЕ, Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, ОНТИ-НКТП СССР, М.-Л., 1935.

[22] В.БЛЯШКЕ, Введение в дифференциальную геометрию, ГИТТЛ, Москва, 1957.

[23] В.И.ШУЛИКОВСКИЙ, Класическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, Москва, 1963.

[24] П.Л.ЧЕБЫШЕВ. Сочинения, том 2.

[25] Л.С.ПОНТРЯГИН, Непрерывные группы, ГИТТЛ, М.-Л., 1954.

[26] А.М.ВАСИЛЬЕВ, Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория), Матем.сб.,т.70,(112)4, 1966,с.457-480.

[27] Г.М.КУЗЬМИНА, О геометрии системы двух дифференциальных уравнений в частных производных,"Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии", Ученые записки МГПИ им.В.И.Ленина, № 243 (1965), 99-108.

[28] Э.М.ШВАРЦБУРД, Структурные уравнения системы четырех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка,"Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии",Ученые записки МГПИ им.В.И.Ленина,№ 243 (1965),192-199.

[29] Э.М.КАН, О законах сохранения для квазилинейных систем четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, Известия ВУЗ-ов,Математика, № I,1968, 78-80.

[30] Э.М.КАН, Геометрия системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с четырьмя неизвестными функциями от двух аргументов (диссертация), МГПИ им.В.И. Ленина, Москва, 1969.

[31] Х.КИЛЬП, К геометрии системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, Ученые записки Тартуского ун-та, вып.277,1971, 78-97.

[32] Н.Е.КОЧИН, И.А.КИБЕЛЬ, Н.В.РОЗЕ, Теоретическая гидромеханика, т.1,М.-Л., Гостехиздат,1948.

[33] Л.В.ОВСЯННИКОВ, Лекции по основам газовой динамики, Изд. Новосиб.госуд.ун-та, Новосибирск, 1967.

[34] С.П.ТИМОШЕНКО, С.ВОЙНОВСКИЙ-КРИГЕР,Пластинки и оболочки, Физматгиз, Москва, 1966.

[35] А.В.ПОГОРЕЛОВ, Дифференциальная геометрия,Изд."Наука",

Москва, 1969.

[36] R. Baltzer, Leipzig, Ber., т. 18 (1866), z. 1-6.

[37] С.Й.БИЛЧЕВ, Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (локальная теория), Изд.ВУЗ-ов.,СССР, Математика, № 3, 1970.

[38] С.Й.БИЛЧЕВ, Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (о законах сохранения), Изв.ВУЗ-ов.,СССР, Математика, № 6,1970.

[39] С.Й.БИЛЧЕВ, Системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория),Научни трудове на ВИММЭСХ - Русе, т.XII,кн.III, София, 1970,

[40] С.Й.БИЛЧЕВ, О линейности систем из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, Изв.ВУЗ-ов., СССР, Математика, № I, 1974.

[41] С.Й.БИЛЧЕВ, Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (инвариантно присоединенные системы), Изв.ВУЗ-ов.,СССР, Математика, в печати.