СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
Факултет по математика и механика

Недю Иванов Попиванов

ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА УРАВНЕНИЯ ОТ СМЕСЕН ТИП И ИЗРАЖДАЩИ СЕ ХИПЕРБОЛИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на научната степен
"кандидат на математическите науки"

Научен ръководител
ст.н.с.д-р Г.Д.Каратопраклиев

София, 1975

У В О Д

В дисертацията се поставят и изследват гранични задачи за уравнения от смесен тип с две перпендикулярни линии на израждане и израждащи се многомерни хиперболични уравнения.

Дисертацията се състои от три глави.

В първа глава се разглежда въпросът за съвпадане на слабото и силно решение на гранични задачи за линейни частни диференциални оператори от първи и втори ред. На този въпрос е посветена обширна литература. Ние ще отбележим работите на К.Фридрихс [1 - 3], П.Лакс и Р.Филипс[4], Л.Сарасон[5], Г.Пейзер[6], Р.Филипс и Л.Сарасон[7], Нагумо[8], А.Дезин[9]. С този въпрос са свързани работите на Л.Хьормандер[10 - 12]. Аналогични изследвания при псевдодиференциални оператори са извършени от М.Агранович в[13], където има и богата библиография.

Необходимостта от изследване на случаите, когато слабото и силното решение съвпадат, се дължи на следното. С използуване на стандартна техника за някои гранични задачи могат да се получат априорни оценки, от които следва единственност на силното решение и съществуване на слабо решение. Така че, за да се получи теорема за съществуване и единственост в една и съща съвкупност от решения, остава да се докаже, че слабите решения са силни /обратното винаги е изпълнено/. За оператори от първи ред се доказва, че всяко слабо решение от L_2 е силно. За оператори от втори ред се доказва по-слаб резултат: всяко слабо решение от W_2^1, което удовлетворява граничните условия /в известен смисъл/ е силно. Този резултат изчерпва въпроса в случаите, когато може да се докаже съществуване на слабо решение от W_2^1 с такива свойства. Има примери, които показват, че слабото решение не е единствено в някои случаи /Вж.§2.4./, така че понякога получения резултат не може да се подобри. Естествено, всичко това се доказва при някои предположения за разглеждания оператор и за границата на областта. Ако не се правят такива предположения нямаме съвпадане на слабото и силно решение дори за системи от първи ред /Вж.[7]/. Ще формулираме получените резултати.

Нека $\mathcal{D} \subset R^m$ е област с частично гладка $(m-1)$- мерна граница S. В областта $\mathcal{D}$ разглеждаме системата

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u = f(x),$$

при съответните гранични условия върху S. Въвеждат се понятията слабо и силно решение на разглежданата задача /Вж. Увода към Гл.I/. В §§ 1.1. - 1.3. се предполага, че областта $\mathcal{D}$ е ограничена.

Да разгледаме отначало двукратно гладка част S' от S. Ще казваме, че върху S' граничната матрица зависи само от нормалната на границата променлива, ако след не особена, двукратно гладка трансформация $y = y(x)$, която "изправя" локално S' до част от $y_1 = 0$, коефициентът A^{y_1} пред $\partial/\partial y_1$ се представя така

$$A^{y_1}(y) = E(y)\begin{pmatrix} a_1(y_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n(y_1) \end{pmatrix} C(y),$$

където E и C са неособени, частично гладки матрици. В теорема 1.1. се доказва, че всяко слабо решение е силно, ако граничната матрица зависи само от нормалната на границата променлива. Този резултат обобщава резултатите на Лакс и Филипс[4], Сарасон[5], Пейзер[6], за валидността на които се иска рангът на A^{y_1} да е постоянен в околност на $y_1 = 0$. Ще отбележим, че в редица случаи граничната матрица зависи от нормалната на границата променлива, но не запазва ранга си в околност на границата /Вж.§§ 2.4. и 3.3./.

В § 1.2. се разглежда част от границата S, върху която не са зададени гранични или спрегнати гранични условия. Доказва се, че в този случай всяко слабо решение е силно, дори ако границата е само липшицова /приложение - в § 2.1./. В същност, ако няма гранични условия, това твърдение е доказано от Лакс и Филипс[4]. Ако няма спрегнати гранични условия в дисертацията се доказва и по-силен резултат /Вж. Заб.1.3./. Този резултат, както и аналогичния му при оператори от втори ред се използуват в § 3.3. В § 1.2. се изследват и някои въпроси относно функциите, удовлетворяващи условието на Липшиц. В лема 1.5. се доказва, че ако границата на областта $\mathcal{D}$ е липшицова, всички непрекъснати в $\overline{\mathcal{D}}$ функции, с ограничени първи производни в $\mathcal{D}$, са липшицови в $\mathcal{D}$. В Забел.1.4. се показва, че това не е така за никоя от областите

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ y < |x|^{\frac{1}{\varepsilon}} \right\} \cap \left\{ x^2 + y^2 < 2 \right\}, \varepsilon > 1 ,$$

чиито граници са хьордерови.

В § 1.3. се изследват случаи, когато върху границата S има ъгли. В същност върху липшицовите граници също може да има ъгли, но сега се разглеждат случаи, когато само върху едната стена на ъгъла няма гранични или спрегнати гранични условия, а върху другата се задават и гранични и спрегнати гранични условия. Публикуваните до сега резултати се отнасят само за такива ъгли, които с двукратно гладка трансформация могат да бъдат локално изобразени в прави двустенни ъгли. В теорема 1.3. се доказва, че всяко слабо решение е силно за ненулеви ъгли, едната стена на които е двукратно гладка и върху нея граничната матрица зависи само от нормалната на границата променлива, а другата е липшицова но върху нея няма гранични или спрегнати гранични условия. В теорема 1.4. този резултат се разпространява и за нулеви ъгли. Теорема 1.3. е удобна за приложение при израждащи се уравнения, понеже в редица случаи характеристиките им не са двукратно гладки /напр. уравнението на Трикоми/ и върху тях не се задават гранични условия, или спрегнати гранични условия. Теорема 1.4. е приложима за уравнения, характеристиките на които се допират до повърхнината на израждане /Вж.§ 3.3./.

Всички резултати, формулирани до тук, се отнасят за ограничена област $\mathcal{D}$. В теорема 1.5. те се пренасят за неограничени области, при условие, че елементите на матриците A_j растат не по-бързо от $|x|$. Лема 1.6. уточнява теорема 1.5. и съществено се използува при доказване на теорема 2.3.

В § 1.5. аналогични резултати се формулират и доказват за оператори от втори ред. За ограничени области някои от тях са получени в[14].

В Гл.II се изследват гранични задачи в ограничени и неограничени области за клас уравнения от смесен тип с две перпендикулярни линии на израждане. Върху изследването на уравнения от смесен тип е посветена обширна литература /Вж.монографиите[16],[17] и библиографията към тях/. В последно време се забелязва оживен интерес към уравненията от смесен тип с успоредни или перпендикулярни линии на израждане. Измежду работите от първия вид ще отбележим[20 - 24], а от втория -[25 - 34].

Ние разглеждаме уравнението

$$/1/\ Lu \equiv K(y)u_{xx} + M(x)u_{yy} + \alpha_1(x,y)u_x + \alpha_2(x,y)u_y + \alpha_0(x,y)u = f(x,y),$$

където K и M са непрекъснати функции, за които $yK(y) > 0$ за $y \neq 0$, $xM(x) > 0$ за $x \neq 0$. В работите[25–28] са поставени и изследвани някои характеристични задачи за уравнението /1/ в случая

$$K(y) \equiv y^m, \quad M(x) \equiv x^m, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_0 \equiv 0.$$

За изследването на тези задачи е използуван метода на сингулярните интегрални уравнения. Както се отбелязва в[28], този метод се натъква на големи трудности при наличие на младши членове в уравнението. Ще отбележим и работата[34], в която се разглежда задачата на Коши за уравнението /1/ при

$$K(y) \equiv y, \quad M(x) \equiv x, \quad \alpha_i \equiv 0, \ i = 0, 2, 1.$$

За изследване на /1/ използуваме функционални методи. В §§ 2.1. - 2.3. при $\alpha_0 \equiv 0$ разглеждаме ограничени и неограничени области. В § 2.1. свеждаме уравнението /1/ до система, която симетризираме. За симетризираната система поставяме такава гранична задача, която има едно и само едно силно решение /теорема 2.1./. Ще отбележим, че симетризаторът е особена в точка $(0,0)$ матрица и това води до трудности при пренасяне за уравнението /1/ на получените за системата резултати.

В §§ 2.2. и 2.3. изследваме уравнението /1/. За произволна частично гладка област, лежаща "над" определена крива през точка $(0,0)$, поставяме гранична задача А /Вж.Гл.II §2.2./, за която извеждаме оценката

$$\|u_x\|_{L_2(\mathcal{D})} + \|u_y\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C\,\|Lu\|_{L_2(\mathcal{D})} .$$

По-нататък работим при някои допълнителни предположения за $\partial\mathcal{D}$. В § 2.2. доказваме, че е в сила оценката

$$/2/ \qquad \left\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\|_{L_2(\mathcal{D})} \leq C\left(\|u_x\|_{L_2(\mathcal{D})} + \|u_y\|_{L_2(\mathcal{D})}\right),$$

за всички функции $u \in C^1(\bar{\mathcal{D}})$, с ограничен носител, които удовлетворяват граничните условия на задача А. Оценка /2/ в същност е теорема за влагане с тегло. Върху изследването на подобни въпроси са посветени работите [35-40]. В тях оценки, аналогични на /2/ се доказват в два случая:

а. За функциите, които се анулират върху цялата граница $\partial\mathcal{D}$ [39-40].

б. Оценки с по-голямо тегло[35-38].

Ще отбележим, че в задача A в някои случаи част от границата се освобождава от гранични условия, така че в тях въпросът за валидността на оценка /2/ по-рано не е бил изследван.

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u(x,y)$ се нарича силно решение на задача A, ако съществува редица $\{u_k\} \subset W_2^2(\mathcal{D})$ от функции с ограничени носители, които удовлетворяват граничните условия на задача A и при $k \to \infty$

$$\| u_k - u \|_W \to 0 \ , \ \| L u_k - f \|_{L_2(\mathcal{D})} \to 0 \ .$$

Тук с W бележим хилбертовото пространство с норма

$$\| u \|_W = \left\{ \int_{\mathcal{D}} \frac{u^2(x,y)}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Доказва се следната

Т е о р е м а 2.4. За всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$ задача A има едно и само едно силно решение $u \in W$, при което $u_x \in L_2(\mathcal{D})$, $u_y \in L_2(\mathcal{D})$. За всички функции $u \in W_2^2(\mathcal{D})$, с ограничени носители, които удовлетворяват граничните условия е изпълнена оценката

/3/ $$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|_{L_2(\mathcal{D})} + \| u_x \|_{L_2(\mathcal{D})} + \| u_y \|_{L_2(\mathcal{D})} \le C \| L u \|_{L_2(\mathcal{D})}$$

Естествено възниква въпросът: не може ли да се докаже, че силното решение е не само от W, но и от $L_2(\mathcal{D})$? Не може ли да се подобрят оценки /2/ и /3/? В края на § 2.3. се дава отрицателен отговор на тези въпроси. А именно, да означим за $\beta \geq 0$

$$W_\beta = \left\{ u : \frac{[\ln(2+x^2+y^2)]^\beta}{\sqrt{1+x^2+y^2}} u(x,y) \in L_2(\mathcal{D}) \right\}.$$

В сила е следната

Л е м а 2.3. Нека областта $\mathcal{D}$ е такава, че има ъгъл с ненулев раствор, който се съдържа в нея. Тогава измежду класовете W_β, класът W е единственият, в който за всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$ съществува силно решение на задача А.

Показва се, че оценки /2/ и /3/ вече не са верни, ако в тях вместо нормата в W поставим нормата в W_β за $\beta > 0$.

В § 2.4. за ограничена област се разглежда случая $\mathcal{L}_0 \neq 0$. Формулират се аналогични на горните резултати.

В § 2.5. се поставя и изследва друга гранична задача, при която точката $(0,0)$ е вътре в разглежданата ограничена област $\mathcal{D}'$. Доказва се оценка от вида

$$\|u\|_{W_2^1(\mathcal{D}')} \leq C \|Lu\|_{L_2(\mathcal{D}')}.$$

Получава се такъв резултат: в която и да е навсякъде гъста в $L_2(\mathcal{D}')$ съвкупност има елемент f, за който разглежданата гранична задача няма силно решение. В някои случаи е доказано, че тази задача има слабо решение за всяка дясна част $f \in W_2^{-1}(\mathcal{D}')$.

В трета глава се изучават гранични задачи за класа от израждащи се многомерни хиперболични уравнения

$$/4/\quad Lu \equiv K(x_m)u_{x_m x_m} - M(x_m)\sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)u_{x_i} + \alpha_0(x)u = f(x),$$

където $K(x_m)>0$, $M(x_m)>0$ при $x_m>0$, $a_{ij}=a_{ji}$, $(a_{ij})>0$. За израждащи се хиперболични уравнения са изучени главно задачата на Коши и смесената гранична задача, с начални данни при $x_m=0$. При това болшинството от работите са за случая $K\equiv 1$, $(a_{ij})\geq 0$ /Вж.[41] и библиографията към нея/. Случая $M\equiv 1$, $K\geq 0$ е изследван в[42-47]. За уравнението /4/ при едновременно израждане на цялата старша част на L , дори задачата на Коши и смесената задача са изучени само за уравнението на Ойлер-Поасон-Дарбу:

$$K(x_m)\equiv M(x_m)\equiv x_m\ ,\quad \alpha_i = x_m\gamma_i\ ,\quad i=0,\dots,m-1.$$

/напр.вж.[48-50]/. Ще отбележим и последните работи на Бауенди и Голуик[51-53].

Върху изследване на гранични задачи за хиперболични уравнения са посветени сравнително малък брой работи, от които ще отбележим[54],[55],[62-68].

В работите на Г.Д.Каратопраклиев[59-60]са поставени и изследвани някои гранични задачи за определени класи израждащи се хиперболични уравнения в многомерни области. В работата на В.П.Диденко[61] е изследвана една гранична задача за уравнение от типа /4/.

В трета глава на дисертацията се поставят и изследват гранични задачи за уравнението /4/. Налагат се следните ограничения на коефициентите:

III.1. Ако $M(0)=0$, то $M'(0)>0$.

III.2'. Ако $K(0)=0$, то $K'(0)-2\alpha_m(x',0)>0$.

III.3'. Ако $K(0)=0$ и $M(0)=0$, то

$$\left[\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(x',0)\xi_i\right]^2 < M'(0)\left[K'(0)-2\alpha_m(x',0)\right]a_{ij}(x',0)\xi_i\xi_j .$$

Ако областта е неограничена, предполагаме че условия III.2' и III.3' са изпълнени равномерно в околност на $x_m=0$.
Доказваме, че в някои случаи условието $K'(0)-\alpha_m(x',0)\geq 0$ е необходимо за съществуване на силно решение, т.е. при $K'(0)=0$, условие III.2'. е необходимо и достатъчно. Според нас условие от вида на III.3'. е също необходимо, но този въпрос не е изследван.

За произволна частично гладка област $\mathcal{D}\subset\{x_m\geq 0\}$, за която $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} x_m < \infty$, в § 3.1. се поставя гранична задача и се доказва априорна оценка от вида

$$/5/ \qquad \|u\|_{W_2^1(\mathcal{D})} \leq C\,\|Lu\|_{L_2(\mathcal{D})} .$$

Ще отбележим, че коефициентите в старшата част на L могат да бъдат и неограничени. Граничните условия върху различните части на границата се поставят в зависимост от знаците на n_m и характеристичната форма $H=Kn_m^2-M\sum a_{ij}n_in_j$

върху тях. При някои предположения относно границата на $\mathcal{D}$ се доказва съществуване на слабо решение от $W_2^1(\mathcal{D})$ на поставената задача. В съчетание с теоремите от Глава I за съвпадане на слабите и силни решения, оттук следва съществуване на силни решения на редица гранични задачи. Това илюстрираме в §§ 3.3. и 3.4.

В § 3.2. се поставя и изследва друга гранична задача, която в някои случаи е точно спрегнатата на задачата от § 3.1. Доказва се оценка, аналогична на /5/.

В § 3.3. се разглеждат гранични задачи в област, получена от пресичането на два характеристични конуса и равнината $x_m = 0$. Ще отбележим, че в такава област задачата на Дарбу за вълновото уравнение не е добре поставена[62-65]. Доколкото ни е известно, пълно изследване на този въпрос и до сега не е извършено. За уравнението /4/ ние изследваме в тази област друга задача, поставена от Г.Д.Каратопраклиев в [59]. При $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\alpha_i \equiv 0$ и $K \equiv 1$, $M' > 0$ или $M \equiv 1$, $K' > 0$, в [59] и [60] той доказва единственост на силното й решение, а също така съществуване на слабо решение на съответната задача за системата от първи ред. В случай $a_{ij} = \delta_{ij}$, $K \equiv 1$, $M(x_m) \equiv x_m$, $\alpha_i \equiv 0$, В.П.Диденко в [61] доказва съществуване на слабо решение от W_2^1 на тази задача. В § 3.3. се доказва съществуване на силно решение от W_2^1 на тази задача. Ще отбележим, че не са ни известни теореми за съвпадане на слабото и силно решение за област от този вид. Затова ние изследваме задачата като включваме тази област в система от области, за които изследваме подходящо поставени гранични задачи. С помощта на получените за тях резултати доказваме теорема за съществуване и единственост на силно решение и в първоначалната област.

В § 3.4. се изследва задачата на Бицадзе. В работата си [66] А.В.Бицадзе формулира тази задача като многомерен аналог на задачата на Дарбу, който се явява изключителен случай от работата на С.Л.Соболев [55]. А.В.Бицадзе [66] и А.М.Нахушев, В.М.Пашковский [67] доказват съществуване на слабо решение. При някои ограничения на младшите коефициенти и дясната част, В.Н.Врагов [68] доказва съществуване на силно решение от W_2^2 . Тук ние по друг начин, без ограничение върху коефициентите, доказваме съществуване на силно решение от W_2^1 на задачата на Бицадзе за всяка $f \in L_2$.

Навсякъде в дисертацията се разглеждат само задачи при хомогенни гранични условия. Ще отбележим обаче, че ако за всяка дясна страна на уравнението от L_2 съществува силно решение при хомогенни гранични условия, това ще бъде така и при нехомогенни гранични условия.

Някои от получените резултати в тази дисертация са докладвани на Третия конгрес на българските математици, на Втората и Трета пролетни конференции на БМД, на Петия конгрес на Балканските математици, на Семинара на ст.н.с. Г.Д.Каратопраклиев, на Семинара на чл.кор.А.В.Бицадзе в Математическият институт на АН СССР и на Семинара на професорите Ю.А.Дубинский, С.А.Ломов и С.И.Похожаев в Московския енергетически институт.

Основните резултати на дисертацията са публикувани в[69-76].

Приятен дълг ми е да изразя тук искрената си благодарност към своя научен ръководител ст.н.с. д-р Г.Д. Каратопраклиев за постоянното внимание и ръководство на работата.

ОСНОВНИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЗНАЧЕНИЯ

Тук ще разглеждаме както ограничени, така и неограничени области в реалното евклидово пространство R^m на точките $x=(x_1,\dots,x_m)$. Ще казваме, че някаква повърхнина Γ е от клас C^k /$k=0,1,2,\dots$/, ако за всяка точка $x_0\in\Gamma$ има такава околност U_{x_0}, че множеството $U_{x_0}\cap\Gamma$ може да се зададе с уравнение

$$x_j = F(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_m),$$

където F е k пъти непрекъснато диференцируема функция /$C^0 = C$ /. Нека $\mathcal{D}$ е произволна област и нейната граница е повърхнина от клас C. Парче γ от границата ще наричаме всяко множество $\gamma\subseteq\Gamma$, отворено в индуцираната от R^m топология. Ще казваме, че границата Γ е частично k пъти непрекъснато диференцируема, ако Γ съвпада със затворената обвивка на обединението $\bigcup_i \Gamma_i$, където всяко Γ_i е парче от Γ, което е свързана повърхнина от клас C^k. При това в $\bigcup\Gamma_i$ има или краен брой членове, или изброимо много. В последния случай предполагаме, че с произволно кълбо в R^m само краен брой от Γ_i имат непразно сечение. Под частично гладка граница разбираме частично еднократно непрекъснато диференцируема. В тази работа ще разглеждаме области само с частично гладки, $(m-1)$-мерни граници. Ще казваме, че в точка $x_0\in\Gamma$ повърхнината Γ има нулев ъгъл, ако има две парчета Γ_i и Γ_j /$x_0\in\Gamma_i\cap\Gamma_j$/ и точки $x_p\in\Gamma_i$, $y_p\in\Gamma_j$, клонящи към x_0, при което външната нормала $n(x_p)$ и вътрешната нормала $-n(y_p)$ се стремят да съвпаднат.

За краткост навсякъде в работата под трансформация ще разбираме двукратно гладка и неособена трансформация /т.е. взаимно еднозначна и с якобиан, отличен от нула/.

За функцията $f(x)$ ще казваме, че е частично непрекъсната в някаква област $\mathcal{D}$, ако е непрекъсната в $\mathcal{D}$ с евентуално изключение на множество от частично гладки повърхнини, разделящи $\mathcal{D}$ на краен брой подобласти. Във всяка от тези подобласти се иска функцията $f(x)$ да има единствена едностранна граница при приближаване отвътре към която и да е гранична точка на подобластта. Ще казваме, че една функция е частично гладка в $\mathcal{D}$, ако е непрекъсната в $\bar{\mathcal{D}}$ и първите й производни са частично непрекъснати в $\mathcal{D}$.

С $W_2^\ell(\mathcal{D})$ ще означаваме пространствата на Соболев с норма $\| \ \|_\ell$. С $(\ , \ )$ и $\| \ \|$ ще означаваме скаларното произведение и нормата в $L_2(\mathcal{D})$. Понеже ще работим и с неограничени области, с $\dot{W}_2^2(\mathcal{D})$ ще означаваме съвкупността от функциите от $W_2^2(\mathcal{D})$ с ограничен носител /т.е. за всяка от тях има такова кълбо $\mathcal{U}$, че в $\mathcal{D}\setminus\mathcal{U}$ тя е нула/. Аналогични означения ще използваме и при другите функционални пространства. Предполагаме, че всички разглеждани функции са реални.

ГЛАВА I

СЪВПАДАНЕ НА СЛАБОТО И СИЛНО РЕШЕНИЕ

Нека $\mathcal{D}$ е област в R^m $/m \geq 2/$ с частично гладка $(m-1)$ -мерна граница S. Разглеждаме в $\mathcal{D}$ системата

/1.1./ $$Lu \equiv A^j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu = f,$$

където $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, а A^j и B са $n \times n$ матрици съответно с частично гладки и с частично непрекъснати елементи. По повтарящите се индекси се предполага сумиране от 1 до m. За почти всички $x \in S$ е дефинирана граничната матрица

$$\beta = n_j(x) A^j(x),$$

където $(n_1(x), \dots, n_m(x))$ е единичният вектор на външната нормала към S в точка $x \in S$.

За всяка точка $x \in S$ да означим с $\mathcal{N}(x)$ някакво линейно подпространство на R^n. Граничното условие ще бъде

/1.2./ $$u(x) \in \mathcal{N}(x), \quad x \in S.$$

Спрегнатото му гранично условие ще бъде

/1.3./ $$v(x) \in P(x), \quad x \in S,$$

където $P(x)$ е ортогоналното допълнение на $\beta(x)\mathcal{N}(x)$. Нека L^* е формално спрегнатия на L оператор

$$L^* \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j} A^{j\prime} + B',$$

където $A^{j\prime}$ и B' са транспонираните матрици съответно на A^j и B. Нека $f \in L_2(\mathcal{D})$.

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u \in L_2(\mathcal{D})$ се нарича слабо решение на задача /1.1/, /1.2/, ако

$$(u, L^* v) = (f, v),$$

за всяка частично гладка в $\mathcal{D}$ функция v, която удовлетворява /1.3/ и има ограничен носител.

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u \in L_2(\mathcal{D})$ се нарича силно решение на задача /1.1/, /1.2/, ако съществува редица от частично гладки в $\mathcal{D}$ функции u_k, всяко от които е с ограничен носител, удовлетворява /1.2/ и при $k \to \infty$

$$\| u_k - u \| \to 0, \quad \| L u_k - f \| \to 0.$$

Лесно се вижда, че всяко силно решение е и слабо. В §§ 1.1 -1.3 за ограничени области $\mathcal{D}$ ще докажем, че в някои случаи всяко слабо решение е силно. В § 1.4 пренасяме тези резултати за неограничени области.

§ 1.1. Двукратно гладка граница

Нека границата S е от клас C^2. Да извършим в околност $\mathcal{D}_{x_0}$ в $\overline{\mathcal{D}}$ на произволна точка $x_0 \in S$ трансформация $T : x \longmapsto y$, при което $T(\mathcal{D}_{x_0} \cap S) \subset \{ y_1 = 0 \}$. Разглеждаме следните условия за матрицата A^{y_1}/коефициентът пред $\partial_1 = \partial / \partial y_1$ в оператора L /:

1. Рангът на A^{y_1} е постоянен в околност в $T(\mathcal{D}_{x_0})$ на точката $T(x_0)$.

2. В някаква околност в $T(\mathcal{D}_{x_0})$ на точката $T(x_0) = y_0$

$$A^{y_1}(y) = E(y) \, diag[a_1(y_1), \ldots, a_n(y_1)] \, C(y),$$

където матриците E и C са неособени, с частично гладки елементи; функциите $a_1, .., a_n$ са частично гладки. С $diag[$

$[a_1, \dots, a_n]$ означаваме диагоналната матрица, с елементи по главния диагонал $a_1, \dots, a_n$.

Ако за всяка точка $x_0 \in S$ е изпълнено условие 1, ще казваме, че " β запазва постоянен ранг в околност на границата", а ако е изпълнено 2 - че " β зависи само от нормалната на границата променлива".

Тези условия са свързани с методите за доказателство за съвпадане на слабото и силно решение на задача/1.1/,/1.2/. Различни случаи, при които е изпълено условие 1 са разглеждани в работите на Лакс и Филипс[4], Сарасон[5],Пейзер[6]и други автори. Условие 2 е въведено в работата на автора[70]. Понеже всяка от функциите a_i може да се анулира при $y_1 = 0$, без да е тъждествено нула, условието 2 е по-слабо ограничение от условието 1. В работата на К.Фридрихс[2]се работи с друго условие, което също е по-слабо ограничение от условието 1.

Д е ф и н и ц и я. Ще казваме, че граничното пространство $\mathcal{N}(x)$ е частично гладко върху S, ако съществува съвкупност $\mathcal{N}$ от частично гладки в $\mathcal{D}$ функции u, така че

$$\mathcal{N}(x) = \{u(x) : u \in \mathcal{N}\}, \quad \forall x \in S.$$

П р и м е р 1.1. Нека функциите $\alpha_i(x)$ са частично гладки в околност на границата S и $\sum \alpha_i^2 \neq 0$. Тогава граничното пространство

$$\mathcal{N}(x) = \{u \in R^n : \alpha_1(x)u_1 + \dots + \alpha_n(x)u_n = 0\}$$

е частично гладко върху S.

Наистина, нека $(u_1^0, \dots, u_n^0) \in \mathcal{N}(x_0)$ и например $\alpha_{i_0}(x_0) \neq 0$. Тогава нека функцията $\varphi \in C^1$, $\varphi(x^0) = 1$ и $\varphi \neq 0$ само в околност на x_0, където $\alpha_{i_0}(x)\neq 0$. Тогава определяме частично гладките функции

$$u_i(x)=\varphi(x)u_i^0 \ , \ i\neq i_0 \ ,$$

$$u_{i_0}(x)=-\varphi(x)\alpha_{i_0}^{-1}(x)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}\alpha_i(x)u_i^0 \ ,$$

Понеже

$$u(x)=\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)\in N(x)\ ,\ x\in S\ ,\ u(x_0)=(u_1^0,\dots,u_n^0),$$

твърдението е доказано.

Т е о р е м а 1.1. Нека границата S е от клас C^2 и граничната матрица β зависи само от нормалната на границата променлива. Нека частично гладкото върху S гранично пространство $N(x)$ е с постоянна размерност и съдържа ядрото на $\beta(x)$ във всяка точка $x\in S$. Тогава всяко слабо решение на задача /1.1/, /1.2/ е силно.

Забележка. Случаят, когато рангът на β е постоянен в околност на S, е разгледан от Г.Пейзер в[6].

Доказателство. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_i(0)\neq 0$ за $i=1,\dots,r$ и $a_i(0)=0$ за $i=r+1,\dots,n$ $/ \ 0\leq r\leq n \ /$. Стеснявайки /ако е необходимо/ $\mathcal{D}_{x_0}$, можем да предполагаме, че $a_i\neq 0$ в $\mathcal{D}_{y_0}$ за $i=1,\dots,r$. Тогава съществуват такива неособени и частично гладки в $\mathcal{D}_{y_0}$ матрици E_1 и C_1, че

$$E_1A^{y_1}C_1 = diag\left[1,\dots,1,a_{r+1}(y_1),\dots,a_n(y_1)\right],$$

където $a_{r+1}(0)=\dots=a_n(0)=0$. Да извършим смяна на променливите

/1.4/ $$u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=C_1w\ .$$

Получаваме

$$L^1 w \equiv E_1 L u \equiv \mathrm{diag}[1,\dots,1,a_{r+1},\dots,a_n]\partial_1 w + L_1 w,$$

където L_1 е матричен диференциален оператор от първи ред, не съдържащ ∂_1. След смяната /1.4/ новото гранично пространство е $N_1(y) = C_1^{-1} N(y)$. Обаче върху $\mathcal{D}_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$ имаме $E_1 \beta u = E_1 \beta C_1 w = (w_1,\dots,w_r,0,\dots,0)'$. По условие ядрото на $\beta(y)$ се съдържа в $N(y)$ и матрицата E_1 е неособена. Затова векторите v_i /$i = r+1,\dots,n$/ с координати $v_{ik} = \delta_{ik}$ /символите на Кронекер $\delta_{ik} = 0$ за $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$/ са от $N_1(y)$ за всяко $y \in \mathcal{D}_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$. Те са линейно независими и следователно $p = \operatorname{codim} N_1(y) \leq r$. Векторите $v_{r+1},\dots,v_n$ могат да бъдат допълнени до базис в $N_1(y_0)$ с $v_{p+1},\dots,v_r$, а всичките – до базис в R^n с $v_1,\dots,v_p$. Пространството $N_1(y)$ е частично гладко върху S. Така че можем да намерим частично гладки в $\mathcal{D}_{y_0}$ функции $v_i(y) \in N_1(y)$ за $y \in \mathcal{D}_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$, $v_i(y_0) = v_i$; $(i = p+1,\dots,r)$. При това функциите

$$v_1,\dots,v_p,\ v_{p+1}(y),\dots,v_r(y),\ v_{r+1},\dots,v_n$$

ще бъдат линейно независими в достатъчно малка околност $\mathcal{D}'_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0} \cap \{|y - y_0| \leq \rho_0\}$. Да определим функциите

$$v_i'(y) = (v_{i1}(y),\dots,v_{ir}(y),0,\dots,0), \quad i = 1,\dots,r,$$
$$v_i'(y) = v_i, \qquad\qquad i = r+1,\dots,n.$$

Да означим с C_2 неособената матрица $(v_1',\dots,v_n')$ и да извършим в $\mathcal{D}'_{y_0}$ смяна на променливите

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = C_2\, \omega .$$

Да разгледаме оператора

$$L_2\omega = C_2^{-1}L'w = C_2^{-1}\,diag[1,\dots,1,a_{r+1},\dots,a_n]C_2\partial_1\omega + L_2\omega =$$

$$= diag[1,\dots,1,a_{r+1}(y_1),\dots,a_n(y_1)]\partial_1\omega + L_2\omega,$$

където L_2 не съдържа ∂_1. Граничните условия ще бъдат

/1.5./ $$\omega_1 = \dots = \omega_p = 0,$$

а спрегнатите

/1.6./ $$v_{p+1} = \dots = v_r = 0.$$

Въвеждайки нови означения продължаваме по обичайния път. Построяваме такова крайно отворено покритие на $\overline{\mathcal{D}}$, че всяко множество от него, пресичащо S, се съдържа в множество от вида $\mathcal{D}'_{x_0} = T^{-1}(\mathcal{D}'_{y_0})$ за някаква точка $x_0 \in S$. С помощта на безкрайно гладко разлагане на единицата, подчинено на това покритие, локализираме задачата. За вътрешни подобласти резултатът следва от работата на Фридрихс [1]. Да разгледаме произволна гранична подобласт. Нека я преобразуваме със съответната трансформация в част от $\mathcal{D}' = \{y_1 > 0\}$, като границата й отива в част от $y_1 = 0$. Преработваме оператора и граничните условия както е показано по-горе. Продължаваме задачата в $\overline{\mathcal{D}'}$ и всичко се свежда до решаване на такъв проблем. Функцията $\omega \in L_2(\mathcal{D}')$ е слабо решение на уравнението

/1.7./ $$L\omega = A_j\frac{\partial\omega}{\partial y_j} + B\omega = g,$$

при гранични условия

/1.5/ $$\omega_1(y) = \dots = \omega_p(y) = 0 \quad \text{за} \quad y = (0, y_2, \dots, y_m).$$

Тук матриците A_j са с частично гладки елементи, B – с частично непрекъснати, $A_1 = diag[1,\dots,1,a_{r+1}(y_1),\dots,a_n(y_1)]$.

Носителят на функцията ω е ограничен. Спрегнати гранични условия за $v=(v_1,\dots,v_n)$ са

/1.6/ $$v_{p+1}(y)=\dots=v_r(y)=0 \text{ за } y=(0,y_2,\dots,y_m)$$

Трябва да се докаже, че ω е силно решение на задача /1.7/, /1.5/. Да въведем следният вариант на осреднение по Фридрихс.

Нека $j(s)$ е неотрицателна функция на една променлива s, от клас C^∞, с носител в $(-1,1)$ и $\int j(s)ds=1$. Нека за $\varepsilon>0$ с $K_\varepsilon(y_1-z_1)$ означим диагоналната $n\times n$ матрица, първите p елемента от главния диагонал на която са равни на

$$\varepsilon^{-1} j\left(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)-2\right),$$

следващите $r-p$ елемента са

$$\varepsilon^{-1} j\left(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)+2\right)$$

и последните $n-r$ елемента са

$$\varepsilon^{-1} j\left(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)\right)$$

Нека за $\eta>0$ с $q_\eta(y'-z')$ означим диагоналната $n\times n$ матрица, всички елементи от главния диагонал на която са

$$\eta^{1-m}\prod_{\nu=2}^{m} j\left(\eta^{-1}(y_\nu-z_\nu)\right).$$

Да разгледаме функциите от $\dot{C}^\infty(\overline{\mathcal{D}'})$

$$R_{\varepsilon\eta}\omega(y)=\int_{\mathcal{D}'} K_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')\omega(z)dz,$$

удовлетворяващи /1.5/. За достатъчно малки ε и η те могат да бъдат продължени като нула в $\overline{\mathcal{D}}\setminus\mathcal{D}'_{x_0}$ и при това да останат от $C^\infty(\overline{\mathcal{D}})$. Да означим с $R^*_{\varepsilon\eta}$ спрегнатия на $R_{\varepsilon\eta}$ интегрален оператор. Ядрото му има вид $K_\varepsilon(z_1-y_1)\,q_\eta(z'-y')$. Затова за всяка функция $v\in L_2(\mathcal{D}')$ функциите $R^*_{\varepsilon\eta}v\in C^\infty(\overline{\mathcal{D}'})$ удовлетворяват /1.6/ и следователно

$$(\omega, L^* R^*_{\varepsilon\eta} v) = (g, R^*_{\varepsilon\eta} v).$$

Така че

$$(L^* R^*_{\varepsilon\eta})^* \omega = R_{\varepsilon\eta}\, g ,$$

където $(L^* R^*_{\varepsilon\eta})^*$ е спрегнатия на $L^* R^*_{\varepsilon\eta}$ интегрален оператор. Обаче в $L_2(\mathcal{D}')$ при $\varepsilon,\eta\to 0$

$$R_{\varepsilon\eta}\,\omega \to \omega \qquad \text{и} \qquad R_{\varepsilon\eta}\, g\to g .$$

Да допуснем, че сме намерили такива редици $\varepsilon_k\to +0$ и $\eta_k\to +0$, че е изпълнено

/1.8/ $$\| (L^* R^*_{\varepsilon_k\eta_k})^* \omega - L R_{\varepsilon_k\eta_k}\omega \| \to 0 , \quad k\to\infty .$$

Тогава от всичко казано до тук следва, че ω е силно решение на задача /1.7/, /1.5/, с апроксимираща редица $\{R_{\varepsilon_k\eta_k}\omega\}$.

Да разгледаме

$$J_{\varepsilon\eta} = (L^* R^*_{\varepsilon\eta})^* \omega(y) - L R_{\varepsilon\eta}\,\omega(y) =$$

/1.9/
$$= \int_{\mathcal{D}'} \Big\{ \frac{\partial}{\partial z_j}\Big[\big(A_j(y)K_\varepsilon(y_1-z_1) - K_\varepsilon(y_1-z_1)A_j(z)\big) q_\eta(y'-z')\Big] -$$
$$- \Big[B(y)K_\varepsilon(y_1-z_1) - K_\varepsilon(y_1-z_1)B(z)\Big] q_\eta(y'-z')\Big\}\,\omega(z)\,dz .$$

Теорема 1.1 следва от

Л е м а 1.1. Нека $\mathcal{D}'$ е произволна частично гладка област, в която елементите на A_j са частично гладки, а на

B - частично непрекъснати. Нека функцията $\omega \in L_2(\mathcal{D}')$ има ограничен носител. Тогава, ако елементите на A_j са липшицови функции в $\mathcal{D}'$, за всяка редица $\eta_k \to +0$ има числа $\varepsilon(\eta_k)$ със свойствата: ако за числата ε_k имаме $\varepsilon_k \le \varepsilon(\eta_k)$, $0 < \varepsilon_k < \eta_k$, функциите $J_{\varepsilon_k \eta_k}$ клонят към нула в $L_2(\mathcal{D}')$ при $k \to \infty$.

Доказателството на тази лема ще извършим на няколко етапа. Ще започнем със следната лесно доказуема, но много удобна

Л е м а 1.2. /Г.Пейзер[6]/. При всяко фиксирано $\eta > 0$ изразът ж

$$\int\limits_{\mathcal{D}'} \Big\{ \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial}{\partial z_j} \Big[\big(A_j(z) K_\varepsilon(y_1 - z_1) - K_\varepsilon(y_1 - z_1) A_j(z) \big) q_\eta(y' - z') \Big]$$

$$- \Big[B(z) K_\varepsilon(y_1 - z_1) - K_\varepsilon(y_1 - z_1) B(z) \Big] q_\eta(y' - z') \Big\} \omega(z) dz$$

клони към нула в $L_2(\mathcal{D}')$ при $\varepsilon \to 0$.

Л е м а 1.3. /К.Фридрихс[3], лема 14/. При $\varepsilon \to +0$, $\eta \to +0$, $\varepsilon \le \eta$ изразът

$$\int\limits_{\mathcal{D}'} \Big\{ \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial}{\partial z_j} \Big[\big(A_j(y) - A_j(z) \big) K_\varepsilon(y_1 - z_1) q_\eta(y' - z') \Big] -$$

ж В сравнение с /1.9/ сумирането не включва $j = 1$ и са изменени аргументите на A_j и B.

$$-\left[B(y)-B(z)\right]K_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')\Big\}\omega(z)\,dz$$

клони към нула в $L_2(\mathcal{D}')$.

Да докажем лема 1.1. Нека редицата $\eta_k \to +0$ е произволна. Тогава от леми 1.2 и 1.3 следва, че можем така да подберем числата $\varepsilon(\eta_k)$, че ако $0<\varepsilon_k\le\eta_k$, $\varepsilon_k<\varepsilon(\eta_k)$, изразът $J_{\varepsilon_k\eta_k}$, с изключение на слагаемото при $j=1$, да клони към нула в $L_2(\mathcal{D}')$. Да означим

$$r_{\varepsilon\eta}(y-z)=\frac{1}{\varepsilon\eta^{m-1}}\,j\left(\frac{y_1-z_1}{\varepsilon}\right)\prod_{\nu=2}^{m} j\left(\frac{y_\nu-z_\nu}{\eta}\right).$$

Матрицата A_1 комутира с $K_\varepsilon q_\eta$, понеже е диагонална. Така че остава да се покаже, че за всяко $i=r+1,\dots,n$ изразите

$$I_k=\int\limits_{\mathcal{D}'}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\left[a_i(y_1)-a_i(z_1)\right]r_{\varepsilon_k\eta_k}(y-z)\right\}\omega(z)\,dz$$

клонят към нула в $L_2(\mathcal{D}')$. Това се извършва на три етапа:

1. С интегриране по части се установява, че това е изпълнено за всяка функция $\omega\in C_0^\infty(\mathcal{D}')$. Използува се, че операторите с ядра $r_{\varepsilon_k\eta_k}$ са равномерно ограничени независимо от k, от $L_2(\mathcal{D}')$ в $L_2(\mathcal{D}')$, а функциите a_i са непрекъснати.

2. Доказва се, че операторите, които на всяка функция от $L_2(\mathcal{D}')$ съпоставят интегралите I_k, са равномерно ограничени като оператори от $L_2(\mathcal{D}')$ в $L_2(\mathcal{D}')$. Наистина, I_k е сума от два оператора, от които единият е с ядро $-a_i'(z_1)r_{\varepsilon_k\eta_k}$ и е ограничен, понеже функциите $a_i'(z_1)$ са ограничени. Ядрото на другия оператор е

$$- \frac{a_i(y_1) - a_i(z_1)}{\varepsilon_\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon_\kappa \eta_\kappa^{m-1}} j'\left(\frac{y_1 - z_1}{\varepsilon_\kappa}\right) \prod_{\nu=2}^{m} j\left(\frac{y_\nu - z_\nu}{\eta_\kappa}\right).$$

То не е нула само при $|y_1 - z_1| \le \varepsilon_\kappa$. Така че от липшицовостта на функциите a_i следва, че частното $\varepsilon_\kappa^{-1}[a_i(y_1) - a_i(z_1)]$ е равномерно ограничено. Обаче операторът, имащ за ядро останалата част от ядрото на I_κ , е ограничен и с това 2 е доказано.

3. Произволна функция от $L_2(\mathcal{D}')$ се апроксимира с функции от $C_0^\infty(\mathcal{D}')$ и всичко следва от 1 и 2.

Лема 1.1 е доказана.

Ще отбележим, че тук съществено използувахме, че функциите $a_i(y)$ зависят в същност само от y_1 . Наистина, ако те зависеха от другите променливи, частното $\varepsilon_\kappa^{-1}[a_i(y) - a_i(z)]$ щеше да се оцени с $\eta_\kappa \varepsilon_\kappa^{-1}$. Обаче редицата $\{\varepsilon_\kappa\}$ може да клони към нула много по-бързо от $\{\eta_\kappa\}$ и затова такава оценка не ни е достатъчна.

Понеже елементите на $A_j\ (j = 1,\dots,m)$ удовлетворяват условието на Липшиц в $\mathcal{D}'$, от лема 1.1 следва, че теорема 1.1 е доказана.

З а б е л е ж к а 1.1. Ще отбележим, че трудностите в края на доказателството на теорема 1.1 са главно поради факта, че матрицата K_ε не комутира с произволна $n \times n$ матрица.

З а б е л е ж к а 1.2. В работата [6] лема 1.3 се използува само в случай, че $\mathcal{D}'$ е ъгъл от вида $\{y_1 \ge 0, \dots, y_s \ge 0\}$. В този случай $\mathcal{D}'$ е изпъкнала област и следователно всяка частично гладка функция е липшицова. То обаче не е така за някои области /вж.Забел.1.4 в края на § 1.2/. Затова ние налагаме допълнителното изискване за липшицовост на елементите на A_j . В[8] това не е направено, така че някои от формулираните там теореми трябва да се уточнят.

§ 1.2. Липшицова граница

Д е ф и н и ц и я. Казваме, че границата S е липшицова, ако за всяка нейна точка има околност в S , която след трансформация $T: x \longmapsto y$, може да се зададе с уравнение $y_1 = F(y_2, \ldots, y_m)$, където F удовлетворява условието на Липшиц.

Д е ф и н и ц и я. Казваме, че върху S няма гранични /спрегнати гранични/ условия, ако $N(x) = R^n$ /$P(x) = R^n$/, за всяка точка $x \in S$.

Т е о р е м а 2.1. Нека границата S е липшицова и върху нея няма гранични или спрегнати гранични условия. Тогава ако са изпълнени условията от увода към Гл.II, всяко слабо решение на задача/1.1/, /1.2/ е силно.

Доказателство. С разлагане на единицата локализираме задачата. За вътрешни подобласти резултатът следва от[1]. За граничните подобласти след смяна на координатната система и продължаване на задачата, тя се свежда до следната. Областта е $\mathcal{D}' = \{y_1 \geq F(y_2, \ldots, y_m)\}$, като носителят на F е ограничен и за всеки две точки $y', z' \in R^{m-1}$

$$|F(y') - F(z')| \leq E\,|y' - z'|, \ E = const.$$

В $\mathcal{D}'$ е зададен операторът

$$L = A_j\, \partial / \partial y_j + B.$$

Функцията ω /носителят на която е ограничен/ е слабо решение на уравнението $Lw = g$, с $g \in L_2(\mathcal{D}')$. Гранични условия се задават върху повърхнината $y_1 = F(y_2, \ldots, y_m)$, като при това или а. Няма гранични условия, или б. Няма спрегнати гранични условия. Трябва да се докаже, че w е силно решение. Да разгледаме функциите

$$R'_\varepsilon \, w(y) = \int_{\mathcal{D}'} K'_\varepsilon(y_1 - z_1)\, q_\eta(y' - z')\, w(z)\, dz ,$$

където матрицата K'_ε е диагонална и всичките й елементи върху главния диагонал са равни на

$$\varepsilon^{-1} \, j\left(\varepsilon^{-1}(y_1 - z_1) + \delta_1 (m-1)E + 2\delta_1\right),$$

с $\delta_1 = 1$ или $\delta_1 = -1$ за случаите а и б съответно. Матрицата q_ε е дефинирана в § 1.1 /тук $\eta = \varepsilon$ /. Функциите $R'_\varepsilon w$ и $R'^*_\varepsilon v$ за всяка $v \in L_2(\mathcal{D}')$ са гладки и удовлетворяват съответно граничните и спрегнатите гранични условия. Да покажем напр., че в случай б е изпълнено $R'_\varepsilon w(y) = 0$ за $y_1 \leq F(y') + \varepsilon$. Наистина, за такива точки (y_1, y') и за $(z_1, z') \in \mathcal{D}'$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(y_1 - z_1) - (m-1)E - 2 &\leq \varepsilon^{-1}\left[F(y') + \varepsilon - F(z')\right] - \\ - (m-1)E - 2 &\leq \varepsilon^{-1} E\,|y' - z'| - (m-1)E - 1 . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ако поне едно от неравенствата $|y_\nu - z_\nu| < \varepsilon$ за $\nu = 2, \ldots, m$ е нарушено, то $q_\varepsilon(y' - z') = 0$. Ако всички те са изпълнени, от /1.10/ следва, че $K'_\varepsilon(y_1 - z_1) = 0$, с което твърдението е доказано.

Остава да се докаже /вж.теорема 1.1/, че

$$\|(L^* R'^*_\varepsilon)^* w - L R'_\varepsilon w\| \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 .$$

Това тук се доказва по-леко, отколкото в теорема 1.1. Наистина, матриците K_ε' и q_ε комутират с всяка $n \times n$ матрица, така че имайки пред вид /1.9/ трябва да докажем, че при $\varepsilon \to 0$

$$/1.11/ \quad \left\| \int_{\mathcal{D}'} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\left(A_j(y) - A_j(z)\right) K_\varepsilon' \, q_\varepsilon \right] - \left[B(y) - B(z) \right] K_\varepsilon' q_\varepsilon \right\} \omega(z) dz \right\| \to 0 .$$

Обаче тук $\eta = \varepsilon$, така че слагаемото при $j = 1$ е от същия вид като останалите и /1.11/ ще следва от лема 1.3, ако елементите на A_j удовлетворяват условието на Липшиц в $\mathcal{D}'$. Последното следва от лема 1.5, която ще формулираме и докажем по-долу. Теорема 1.2 е доказана.

З а б е л е ж к а 1.3. Ще отбележим, че ако върху границата няма гранични условия, за верността на теорема 1.2 е достатъчно равенството $(u, L^* v) = (f, v)$ да е изпълнено само за тези функции $v \in C^\infty(\bar{\mathcal{D}})$, които се анулират в околност на границата. Ако пък няма спрегнати гранични условия, функциите от построената апроксимираща редица се анулират в околност на границата. За изследване на някои задачи това се оказва важно /вж. Гл.II и III/.

Ще формулираме следната помощна лема, която и сама по себе си е интересна.

Л е м а 1.4. Нека функцията F удовлетворява условието на Липшиц с константа E в областта

$$G = \{ (y_1, \dots, y_p) : y_1 > 0, \dots, y_k > 0 \} \qquad \text{или} \qquad G = R^p .$$

Тогава съществува равномерно сходяща към F редица от функции от $C^\infty(\bar{G})$, всички първи производни на които са ограничени от константата E .

Доказателство. За $y \in R^p$ ще разгледаме функцията $\bar{F}(y) = F(y)$, ако $G = R^p$ и

$$\bar{F}(y) = F(|y_1|, \dots, |y_k|, y_{k+1}, \dots, y_p)$$

в другия случай. От неравенството на триъгълника следва, че тя удовлетворява условието на Липшиц с постоянна E. За $\varepsilon > 0$ да разгледаме функциите от $C^\infty(R^p)$

$$F_\varepsilon(y) = \int\limits_{R^p} \varepsilon^{-p} \prod_{\nu=1}^{p} j\left(\frac{y_\nu - z_\nu}{\varepsilon}\right) \bar{F}(z)\, dz,$$

където j е функцията от § 1.1. За всяко $h \neq 0$ имаме

$$\left| \frac{F_\varepsilon(y_1, \dots, y_q + h, \dots, y_p) - F(y_1, \dots, y_q, \dots, y_p)}{h} \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{R^p} \varepsilon^{-p} \prod_{\nu=1}^{p} j\left(\frac{y_\nu - z_\nu}{\varepsilon}\right) \left| \frac{\bar{F}(z_1, \dots, z_q + h, \dots, z_p) - \bar{F}(z_1, \dots, z_q, \dots, z_p)}{h} \right| dz.$$

Понеже $\int \varepsilon^{-p} \prod j(\varepsilon^{-1}(y_\nu - z_\nu))\, dz = 1$, то $\left|\frac{\partial F}{\partial y_q}\right| \leq E$ и за всяко $y \in G$ е изпълнено

$$|F_\varepsilon(y) - F(y)| \leq E \int \varepsilon^{-p} \prod j(\varepsilon^{-1}(y_\nu - z_\nu)) |y - z|\, dz \leq pE\varepsilon,$$

с което лема 1.4 е доказана.

Ясно е, че с разлагане на единицата тази лема се пренася и за други области G – например за паралелепипед. Освен това, използувайки смяна на независимите променливи лема 1.4 може да се прилага за доста широк кръг от области.

Л е м а 1.5. Нека функцията F удовлетворява условието на Липшиц с константа E в областта

$$G = \{(y_2, \dots, y_m) : y_2 > 0, \dots, y_k > 0\} \quad \text{или} \quad G = R^{m-1}.$$

Нека функцията $a(y)$ е непрекъсната в

$$\bar{G}' = \{(y_1, \dots, y_m) : y_1 \geq F(y'), y' \in G\}$$

и в G' има ограничени първи производни. Тогава $a(y)$ удовлетворява условието на Липшиц в G'.

Доказателство. Отначало ще покажем, че съществува константа $C>0$, така че

/1.12/ $$|a(F(y'),y')-a(F(z'),z')|\leq C|y'-z'|,\ \forall(y',z')\in G\times G.$$

Нека $\varepsilon_k\to+0$ при $k\to\infty$. Разглеждаме

/1.13/ $$F_k'(y')=F_{\varepsilon_k}(y')+2(m-1)E\varepsilon_k,$$

където F_{ε_k} са функциите от лема 1.4 при $p=m-1$. Функциите /1.13/ са от $C^\infty(\bar{G})$ и първите им производни са ограничени от E. Освен това

/1.14/ $$|F_{\varepsilon_k}(y')-F(y')|\leq(m-1)E\varepsilon_k,$$

така че $F_k'(y')\geq F(y')+(m-1)E\varepsilon_k$. От тук следва, че $(F_k'(y'),y')\in G'$ за всяко $y'\in G$. Всички първи производни на функциите F_k' са равномерно ограничени и областта G е изпъкнала. Тогава от предположенията за $a(y)$ следва: съществува константа C, независеща от k, така че

/1.15/ $$|a(F_k'(y'),y')-a(F_k'(z'),z')|\leq C|y'-z'|,\ \forall(y',z')\in G\times G.$$

от /1.14/ следва, че за всички точки $(y',z')\in G\times G$

$$|a(F(y'),y')-a(F(z'),z')|=\lim_{k\to\infty}|a(F_k'(y'),y')-a(F_k'(z'),z')|.$$

Оттук и от /1.15/ получаваме, че неравенството /1.12/ е изпълнено.

Нека точките $y=(y_1,y')$ и $z=(z_1,z')$ са от G'. Да разгледаме отсечката между тях. Ако тя не пресича границата $\partial G'$ имаме

/1.16/ $|a(y)-a(z)| \le c_1 |y-z|, \quad c_1 = \sum \sup \left|\frac{\partial a}{\partial y_i}\right|.$

Ако отсечката пресича $\partial G'$, това е възможно само в точки от повърхнината $y_1 = F(y')$. Нека първата и последна точка на пресичане /от y към z/ са $(F(u'), u')$ и $(F(v'), v')$. Тогава

$$|a(y)-a(z)| \le |a(y_1, y') - a(F(u'), u')| +$$

$$+ |a(z_1, z') - a(F(v'), v')| + |a(F(u'), u') - a(F(v'), v')| \le C_2 |y-z|,$$

където $C_2 = \max(C, C_1)$. Тук за първите две събираеми приложихме /1.16/, а за последното - /1.12/. С това е доказано, че функцията $a(y)$ е липшицова в G' с константа C_2.

З а б е л е ж к а 1.4. Това, че лема 1.5 е необходима при подобни разглеждания е ясно от следните примери. Да разгледаме в R^2 областите

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{ y < |x|^{\frac{1}{\varepsilon}} \} \cap \{ x^2 + y^2 < 2 \},$$

където $\varepsilon > 0$. От лема 1.5 следва, че за $0 < \varepsilon \le 1$ всяка функция от $C^1(\overline{\mathcal{D}}_\varepsilon)$ е липшицова в $\mathcal{D}_\varepsilon$. Но за $\varepsilon > 1$ това вече не е така. Наистина, да разгледаме в този случай функцията

$$a_\alpha(x,y) = 0 \qquad \text{в} \quad R^2 \setminus \{x>0, y>0\},$$

$$a_\alpha(x,y) = \frac{2y^\alpha}{x+y} \qquad \text{в} \quad \{x>0, y>0\}.$$

За $\alpha > 2$ функцията $a_\alpha \in C^1(\overline{\mathcal{D}}_\varepsilon)$. Обаче ако $\alpha < 1+\varepsilon$, няма такава константа E, че за всички $0<y<1$ да имаме

$$y^{\alpha-1} \le |a_\alpha(y^\varepsilon, y) - a_\alpha(-y^\varepsilon, y)| \le E y^\varepsilon.$$

Така че ако изберем $2 < \alpha < 1+\varepsilon$, функцията $a_\alpha \in C^1(\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon)$, обаче не е липшицова в $\mathcal{D}_\varepsilon$. Ще отбележим, че функцията $|x|^{\frac{1}{\varepsilon}}$ е хьолдерова за $\varepsilon > 0$.

§ 1.3. Граница с ъгли

Публикуваните до сега резултати за съвпадане на слабото и силното решение при наличие на ъгли, се отнасят само за такива, които с някаква трансформация могат да бъдат локално изобразени в прави двустенни ъгли. С други думи, само за някои ненулеви ъгли с двукратно гладки стени. За пълнота в изложението и с оглед на нуждите в Гл.II ние даваме критерий 1.1, посочващ какви трябва да бъдат тези ъгли при две независими променливи. Възниква такъв въпрос. Не може ли да се докаже, че слабото решение е силно и за ненулеви ъгли, едната стена на които е двукратно гладка, а другата - еднократно гладка или дори само липшицова повърхнина? Не може ли да се разгледат и нулеви ъгли? Доколкото ни е известно, такива резултати досега не са публикувани от други автори. Теореми 1.3 и 1.4 дават в някои случаи положителен отговор на тези въпроси.

К р и т е р и й 1.1. Да разгледаме в равнината две двукратно гладки криви, с общо начало точка O. Ако ъгълът между техните тангенти в точка O е ненулев и различен от π от тази страна, където той е по-малък от π има околност на точка O и трансформация, която изпраща тази околност в част от $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$. При това кривите отиват в отсечки от $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$, т.е. страните на ъгъла се изправят.

Формулираното условие е необходимо, т.е. за ъгли не по-малки от π или нулеви такава околност не съществува.

Т е о р е м а 1.3. Нека върху границата на областта има точки само от следните два вида:

1. Такива, в околност на които са приложими теореми 1.1 и 1.2.

2. Такива точки x_0, че съществуват околност $\mathcal{D}_{x_0}$ в $\overline{\mathcal{D}}$ и трансформация T, така че

$$T(\mathcal{D}_{x_0}) \subset \mathcal{D}' = \{ y : y_1 \geq F(y'), y_2 \geq 0, .., y_s \geq 0 \}, T(\mathcal{D}_{x_0} \cap S) \subset \partial\mathcal{D}'.$$

Тук $2 \leq s = s(x_0) \leq m$. Функцията F е липшицова. Нека е изпълнено и едно от следните две условия.

а. Върху тази част на S, която отива в $y_2 = 0$, граничното пространство $N(x)$ е частично гладко, с постоянна размерност и съдържа ядрото на $\beta(x)$; $\beta(x)$ зависи само от нормалната на границата променлива. Върху някои от другите $s-1$ стени няма гранични условия, а върху останалите - спрегнати гранични условия.

б. Върху някои стени няма гранични условия, а върху останалите - спрегнати гранични условия.

Тогава всяко слабо решение на задача /1.1/, /1.2/ е силно.

Доказателство. Можем да смятаме, че с разлагане на единицата вече сме локализирали задачата /вж.теорема 1.1/. При това остава да разгледаме точките от вида 2.

Да разгледаме отначало околност от някаква точка от вида 2а. В разглеждания ъгъл $\mathcal{D}'$ оператора, граничните и спрегнатите гранични условия върху $y_2 = 0$ преобразуваме както в теорема 1.1. Нека E е липшицовата константа на F и $y'' = (y_1, y_3, \dots, y_m)$. Трябва да докажем, че слабото решение е силно. Да построим апроксимиращите го функции. За $0 < \varepsilon \le \eta$ ще ги дефинираме така

$$/1.17/ \quad R''_{\varepsilon\eta}\, \omega(y) = \int_{\mathcal{D}'} K_\varepsilon(y_2 - z_2)\, q'_\eta(y'' - z'')\, \omega(z)\, dz,$$

където K_ε е матрицата от доказателството на теорема 1.1, а q'_η е диагонална матрица, с елементи по главния диагонал, равни на

$$\eta^{1-m} j\left(\frac{y_1 - z_1}{\eta} + 3\delta_1(m-1)E + 2\delta_1\right) \prod_{\nu=3}^{m} j\left(\frac{y_\nu - z_\nu}{\eta} + 2\delta_\nu\right).$$

Тук $\delta_\nu = 0$ за $\nu = s+1, \dots, m$; $\delta_\nu = 1$ $(\delta_\nu = -1)$, ако на ν -тата стена няма гранични /спрегнати гранични/ условия. Функциите $R''_{\varepsilon\eta}\, \omega$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta} V$, за всяка $V \in L_2(\mathcal{D}')$, са от $C^\infty(\overline{\mathcal{D}'})$. Те удовлетворяват съответно граничните и спрегнатите гранични условия. Това е ясно за стените $y_\nu = 0$, $\nu = 2, \dots, s$. Да разгледаме стената $y_1 = F(y')$. Нека например върху нея няма гранични условия. Тогава $\delta_1 = 1$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta} V(y) = 0$ за $y_1 \le F(y') + \eta$. Наистина, за такива точки y и за всички $z \in \mathcal{D}'$ имаме

$$\frac{z_1 - y_1}{\eta} + 3(m-1)E + 2 \ge \frac{F(z') - F(y') - \eta}{\eta} +$$

$$/1.18/ \quad + 3(m-1)E + 2 \ge 3(m-1)E + 1 - \eta^{-1} E \sum_{\nu=2}^{m} |y_\nu - z_\nu|.$$

Ако някои от неравенствата $|y_2 - z_2| < 3\varepsilon$, $|y_\nu - z_\nu| < 3\eta$ $(\nu = 3, \dots, m)$

са нарушени, ядрото $K_\varepsilon(z_2-y_2)q'_\eta(z''-y'')$ на $R''^{*}_{\varepsilon\eta}$ е нула. Ако всички те са изпълнени, от /1.18/ получаваме

$$\eta^{-1}(z_1-y_1)+3(m-1)E+2 \geq 3E+1-3\varepsilon\eta^{-1}E \geq 1,$$

т.е. $q'_\eta(z''-y'')=0$. При това използувахме, че $0<\varepsilon\leq\eta$. Аналогично се разглежда и случая, когато върху стената $y_1=F(y')$ няма спрегнати гранични условия. Матрицата q'_η комутира с всички $n\times n$ матрици. Благодарение на това, по-нататък доказателството протича като това на теорема 1.1 и завършва с избор на редици $\eta_k\to+0,\ 0<\varepsilon_k\leq\eta_k$, $\varepsilon_k\leq\varepsilon(\eta_k)$ и прилагане на лема 1.1. Естествено, че се използува лема 1.5.

Да разгледаме околност на точка от вида 2б. В този случай доказателството протича както в теорема 1.2, с $\eta=\varepsilon$, само че носителят на усредняващото ядро е изместен. Ядрото е диагонална матрица, с елементи по главния диагонал, равни на

$$\varepsilon^{-m} j\left(\frac{y_1-z_1}{\varepsilon}+3\delta_1(m-1)E+2\delta_1\right)\prod_{\nu=2}^{m} j\left(\frac{y_\nu-z_\nu}{\varepsilon}+2\delta_\nu\right).$$

Теорема 1.3 е доказана.

За проверка на условията в теорема 1.3 ще дадем следния

К р и т е р и й 1.2. Нека кривите γ_1 и γ_2 имат за общо начало точка 0 и са съответно еднократно и двукратно гладки. Тогава ако ъгълът между тангентите им в точка 0 е ненулев и различен от π , от страната, където той е по-малък от π , има околност на точка 0 и трансформация, която я изобразява в част от $\{y_1\geq F(y_2),\ y_2\geq 0\}$.

При това γ_1 и γ_2 отиват в $y_1 = F(y_2)$ и $y_2 = 0$. Функцията $F \in C^1$.

Ще обобщим теорема 1.3 и за нулеви ъгли.

Т е о р е м а 1.4. Нека елементите на матриците A_j са липшицови функции в $\mathcal{D}$. Тогава в теорема 1.3, случай 2а условието за липшицовост на F може да се замени със следното:

$$|F(y_2,\dots,y_m) - F(z_2,\dots,z_m)| \le \varphi(|y_2 - z_2|) + E\sum_{\nu=3}^{m}|y_\nu - z_\nu|, \tag{1.19}$$

където функцията φ е ограничена и $\varphi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $E = const$.

Доказателство. Промяна в доказателство в теорема 1.3 ще има само в следното. В случай 2а за $\delta \ge 0$ ще дефинираме монотонно растящата функция $\psi(\delta) = \sup\limits_{0\le\varepsilon\le\delta}\varphi(\varepsilon)$. Очевидно $\varphi \le \psi$ и $\psi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Да разгледаме функциите $R''_{\varepsilon\eta}\omega$ от /1.17/. Можем да смятаме, че $E > 0$. Нека положителните числа ε и η са свързани с неравенството $\psi(3\varepsilon) \le 3E\eta$. Тогава ако $|y_2 - z_2| \le 3\varepsilon$ и $|y_\nu - z_\nu| \le 3\eta$ $(\nu = 3,\dots,m)$, имаме

$$|F(y') - F(z')| \le \psi(|y_2 - z_2|) + E\sum|y_\nu - z_\nu| \le$$

$$\le \psi(3\varepsilon) + 3(m-2)E\eta \le 3(m-1)E\eta .$$

Оттук лесно се доказва, че върху стената $y_1 = F(y')$ функциите $R''_{\varepsilon\eta}\omega$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta}v$ удовлетворяват съответно граничните и спрегнатите гранични условия. В сравнение с теорема 1.3 трябва допълнително да осигурим и условието $\psi(3\varepsilon_k) \le 3E\eta_k$. Обаче $\psi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следователно за всяко $\eta > 0$ можем да намерим такова число $\delta(\eta) > 0$, че $\psi(3\delta(\eta)) \le 3E\eta$. Тогава за всички ε , за които $0 < \varepsilon \le \delta(\eta)$ имаме $\psi(3\varepsilon) \le 3E\eta$. Затова постъпваме така: избираме произволна редица $\eta_k \to +0$, после за всяко k избираме число ε_k , удовлетворяващо неравенствата $0 < \varepsilon_k \leq \eta_k$, $\varepsilon_k \leq \varepsilon(\eta_k)$, $\varepsilon_k \leq \delta(\eta_k)$. От лема 1.1 следва, че редицата $\{R''_{\varepsilon_k \eta_k} \omega\}$ има всички необходими свойства. Теорема 1.4 е доказана.

Забележка 1.5. Ако $\mathcal{D}$ е област в равнината, всяка непрекъсната функция $F(y_2)$, с ограничен носител, удовлетворява условието /1.19/. Наистина, за $\varepsilon \geq 0$ можем да дефинираме $\varphi(\varepsilon) = \max\limits_{|y-z| \leq \varepsilon} |F(y) - F(z)|$.

§ 1.4. Неограничени области

Теорема 1.5. Нека $\mathcal{D}$ е област с частично гладка граница S и ω е слабо решение на задача /1.1/, /1.2/. Предполагаме, че всички точки върху S са от видовете, изброени в теореми 1.3 и 1.4. Нека елементите на матриците A^j растат не по-бързо от $r = |x|$, т.е. $|a^j_{ik}(x)| \leq Cr$. Тогава ω е силно решение на задача /1.1/, /1.2/.

Доказателство. Нека $\phi \in C^\infty(0,2)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(r) \equiv 1$ за $0 \leq r \leq 1$, $\phi(r) \equiv 0$ за $r \geq 3/2$. Разглеждаме $\phi_k(x) = \phi(r 2^{-k}) \in C_0^\infty(R^m)$. Функцията $\omega_k = \phi_k \omega$ е слабо решение на уравнението

$$L\omega_k = f_k \equiv \phi_k f + A^j \omega \partial_j \phi_k .$$

Понеже функциите ω_k и f_k са с ограничени носители, ω_k е силно решение. Следователно съществува редица $\{u_k^n\}_{n=1}^\infty$ от частично гладки функции, удовлетворяващи граничните условия, $\operatorname{supp} u_k^n \subset \{r \leq 2^{k+1}\}$ и при $n \to \infty$

$$\| u_k^n - \omega_k \| \to 0 , \quad \| L u_k^n - f_k \| \to 0 .$$

Тъй като $\partial_j \phi_k \neq 0$ само за $2^k \le r \le 2^{k+1}$ и $|\partial_j \phi_k| \le \max|\phi'|.2^{-k}$, то $\| A^j \omega \partial_j \phi_k \| \le C 2^{-k} \| r\omega \|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{2^k \le r \le 2^{k+1}\})}$.

Тогава при $k \to \infty$

$$\| \omega_k - \omega \| \le 2 \| \omega \|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{r \ge 2^k\})} \to 0,$$

$$\| f_k - f \| \le 2 \| f \|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{r \ge 2^k\})} + \| A^j \omega \partial_j \phi_k \| \to 0,$$

т.е. може да се избере редица $\{u_k^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, която да клони към ω в $L_2(\mathcal{D})$ и $L u_k^{n_k}$ да клони към f в $L_2(\mathcal{D})$. Теорема 1.5 е доказана.

С оглед на нуждите на теорема 2.3 ще уточним теорема 1.5.

Л е м а 1.6. Нека са изпълнени предположенията на теорема 1.5. Тогава ако функцията f има ограничен носител, съществува редица от частично гладки функции ω_k, удовлетворяващи /1.2/, $\operatorname{supp} \omega_k \subset \{ r \le 2^{k+1} \}$ и при $k \to \infty$

$$\| \omega_k - \omega \| \to 0 \ , \ \| L\omega_k - f \| \le (k \ln k)^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказателство. Ще прецизираме доказателството на теорема 1.5. Ако $\operatorname{supp} f \subset \{ r \le 2^{k_0} \}$, за $k \ge k_0$ имаме

$$\| f_k - f \| = \| A^j \omega \partial_j \phi_k \| \le C \| \omega \|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{2^k \le r \le 2^{k+1}\})} .$$

Да допуснем, че не съществува редица от естествени числа $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, за която

/1.20/ $$\sqrt{k_i \ln k_i} \, \| f_{k_i} - f \| \to 0 \ , \ i \to \infty .$$

Тогава има числа $\varepsilon > 0$ и k_1, за които

$$\varepsilon \le \sqrt{k \ln k}\ \|\omega\|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{2^k \le r \le 2^{k+1}\})},\quad \forall k \ge k_1 .$$

Оттук следва, че за всяко $N \ge k_1$ имаме

$$\varepsilon^2 \sum_{k=k_1}^{N} \frac{1}{k \ln k} \le \sum_{k=k_1}^{N} \|\omega\|^2_{L_2(\mathcal{D} \cap \{2^k \le r \le 2^{k+1}\})} \le \|\omega\|^2_{L_2(\mathcal{D})} ,$$

което е невъзможно, понеже редът в ляво е разходящ. Следователно съществува редица $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, за която е изпълнено /1.20/. Тогава за $i \ge i_0$ имаме

$$\|f_{k_i} - f\| \le \frac{1}{2} (k_i \ln k_i)^{-\frac{1}{2}} .$$

Избираме n_i така голямо, че

$$\|L u^{n_i}_{k_i} - f_{k_i}\| \le \frac{1}{2} (k_i \ln k_i)^{-\frac{1}{2}} .$$

Редицата $\{u^{n_i}_{k_i}\}_{i=i_0}^{\infty}$ има нужните свойства, Лема 1.6 е доказана.

§ 1.5. Слабото решение от W_2^1 е силно при оператори от втори ред

Тук ще формулираме аналогични резултати на тези от §§ 1.1 - 1.4, но вече за линейни частни диференциални оператори от втори ред.

Нека в ограничената или неограничена област $\mathcal{D}$ е зададен операторът $K \equiv b_{ij}\, \partial^2_{ij} + b_i\, \partial_i + b_0$,

с частично гладки коефициенти b_{ij} и b_i и с частично непрекъсната функция b. Нека и коефициентите на формално спрегнатия му оператор K^* имат същата гладкост. Разглеждаме следната гранична задача: да се намери решение на уравнението

/1.21/ $Ku = f$ в $\mathcal{D}$,

което удовлетворява граничните условия

/1.22/ $u=0$ върху S_1; $u=0$, $\partial u/\partial\nu = 0$ върху S_2; $u\sim$ върху S_3.

Тук ν е единичният вектор на външната нормала към S; $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. С $u\sim$ означаваме, че върху съответната част на границата няма гранични условия. Видът на спрегнатите на /1.22/ гранични условия е /[18], стр.91/:

$v=0$ върху нехарактеристичните части S' на S_1,

$v\sim$ върху S_2 и върху характеристичните части S'' на S_1.

Условията върху S_3 са по-особени, но точният им вид не ни интересува. Да означим с W^2 и W^2_* затворените обвивки в $W_2^2(\mathcal{D})$ на функциите от $C^2(\bar{\mathcal{D}})$, удовлетворяващи съответно условията /1.22/ и спрегнатите им.

Д е ф и н и ц и я. Нека $f \in L_2(\mathcal{D})$. Функцията $u \in L_2(\mathcal{D})$ ще наричаме слабо решение на задача /1.21/, /1.22/, ако

$$(u, K^*v) = (f, v), \quad \forall v \in \dot{W}^2_*.$$

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u \in L_2(\mathcal{D})$ ще наричаме силно решение на задача /1.21/, /1.22/, ако съществува редица от функции $u_k \in \dot{W}^2$ и

$$\|u_k - u\| \to 0, \ \|Lu_k - f\| \to 0, \ k \to \infty.$$

Ще направим следните предположения за границата:

1. S' се състои от двукратно гладки повърхнини.

2. S_3 и $S_2 \cup S''$ се задават локално с уравнения от вида $y_1 = F_1(y')$, с липшицова функция F_1.

3. За всеки от ъглите, образувани при пресичане на различни парчета от границата, има липшицова функция F и трансформация, която го изпраща в $\{y_1 \geq F(y'), y_2 \geq 0, .., y_3 \geq 0\}$. Върху всяка стена, освен $y_2 = 0$ искаме да няма гранични или спрегнати гранични условия. Освен това или а. Върху $y_2 = 0$ няма гранични или спрегнати гранични условия, или б. $y_2 = 0$ е свободна повърхнина.

В случай 3а условието за липшицовост на функцията F може да се замени с условието /1.20/, ако коефициентът пред $\partial^2/\partial y_2^2$ може да се представи като произведение на две еднократно гладки функции, едната от които зависи само от y_2, а другата не се анулира. Естествено, в този случай трябва да се поиска коефициентите пред вторите производни в K да са липшицови функции.

Т е о р е м а 1.6. Нека S удовлетворява описаните по-горе условия. Нека коефициентите пред производните в K растат не по-бързо от $|x|$. Нека $\omega \in W_2^1(\mathcal{D})$, $\omega = 0$ в $W_2^0(S')$ и ако продължим ω като нула през $S'' \cup S_2$, продължението е от W_2^1. Тогава ако функцията ω е слабо решение на задача /1.21/, /1,22/, тя е и силно решение на тази задача.

Доказателство. Отначало ще сведем задачата до случая на ограничена област, използувайки функциите ϕ_k от § 1.5. Лесно се вижда, че функцията $w_k = \phi_k \omega$ е слабо решение на уравнението

$$K w_k = f_k \equiv \phi_k f + (b_{ij} + b_{ji})(\phi_k)_{x_i} \omega_{x_j} + \left[b_{ij}(\phi_k)_{x_i x_j} + b_i (\phi_k)_{x_i} \right] \omega,$$

при гранични условия /1.22/. Естествено, използувахме, че функцията ω удовлетворява някакви гранични условия върху S. Забелязваме, че

$$\|w_k - \omega\|_{L_2(\mathcal{D})} \le 2\|\omega\|_{L_2(\mathcal{D}\cap\{r \ge 2^k\})} ,$$

$$|\partial_i \phi_k| \le 2^{-k} |\phi'(r2^{-k})| ,$$

$$|\partial^2_{ij} \phi_k| \le 2^{-2k}\left[|\phi''(r2^{-k})| + 2|\phi'(r2^{-k})|\right] ,$$

т.е. при $k \to \infty$ имаме $\|w_k - \omega\| \to 0$, $\|f_k - f\| \to 0$. Така че ако докажем, че всяка от функциите с ограничен носител w_k е силно решение на съответната задача, всичко ще бъде доказано /вж.§ 1.4/. За целта локализираме задачата за w_k. Използуваме крайно разлагане на единицата $\{\varphi_i\} \subset C^\infty$. От разглежданията по-долу ще стане ясно как трябва да са разположени носителите на функциите φ_i. Функцията $\varphi_i \phi_k \omega \in \dot{W}_2^1(\mathcal{D})$ е слабо решение на задача /1.21/, /1.22/ с функция $f = f_{ki}$. Ще докажем, че тя е силно решение на тази задача. В[14] Н.Г.Сорокина е показала как могат да се получат подобни резултати, в случай че носителят на φ_i се намира в строго вътрешна подобласт на $\mathcal{D}$ или в околност на вътрешни точки от S'. Ще отбележим, че тя показва това и в някои частни случаи на точки от вида 2 и 3, за $F \equiv 0$.

Нека носителят на φ_i се съдържа в достатъчно малка околност на точка от вида 2. Въвеждайки нови означения и продължавайки задачата както в § 1.2, достигаме до следната задача. Областта е $\mathcal{D}' = \{y_1 \ge F_1(y_2, \dots, y_m)\}$, където F_1 е липшицова функция в R^{m-1} с константа E. Слабото решение $\omega \in W_2^1(\mathcal{D}')$ на уравнението $K\omega = g$ е с ограничен носител.

За $\varepsilon > 0$ строим усреднението

$$\mathfrak{J}'_\varepsilon \omega(y) = \int\limits_{\mathcal{D}'} \varepsilon^{-m} j\left(\frac{y_1 - z_1}{\varepsilon} + \delta_2 (m-1)E + 2\delta_1\right) \prod_{\nu=2}^{m} j\left(\frac{y_\nu - z_\nu}{\varepsilon}\right) \omega(z)\, dz ,$$

където $\delta_1 = 1$ $(\delta_1 = -1)$, ако върху $y_1 = F_1(y')$ няма гранични /спрегнати гранични/ условия. Понеже $\mathfrak{J}'_\varepsilon \omega \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}'}) \cap \dot{W}^2$ и $\| \mathfrak{J}'_\varepsilon \omega - \omega \|_{L_2(\mathcal{D}')} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, остава да се докаже, че

$$\| K \mathfrak{J}'_\varepsilon \omega - g \|_{L_2(\mathcal{D}')} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 .$$

Тъй като функциите $\mathfrak{J}'_\varepsilon v \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}'}) \cap W_2^2(\mathcal{D}')$ за всяка $v \in L_2(\mathcal{D}')$ и удовлетворяват спрегнати гранични условия, получаваме

$$(K^* \mathfrak{J}'^*_\varepsilon)^* \omega = \mathfrak{J}'_\varepsilon g .$$

Остава да се докаже само, че изразът $(K^* \mathfrak{J}'^*_\varepsilon)^* \omega - K \mathfrak{J}'_\varepsilon \omega$ клони към нула в $L_2(\mathcal{D}')$ при $\varepsilon \to 0$. Ще забележим, че при $\delta_1 = 1$ ядрото на интегралния оператор $\mathfrak{J}'_\varepsilon$ се анулира в околност на границата. В случая $\delta_1 = -1$ имаме $\omega = 0$ върху границата. Така че и в двата случая можем да прехвърлим една производна върху $\omega \in \dot{W}_2^1(\mathcal{D}')$ без поява на граничен член. Доказателството завършва с прилагане на лема 1.3 /при $n = 1$ / за сходимост на получените диференциални изрази от първи ред.

Нека сега носителят на φ_i се съдържа в околност на точка от вида 3. Тук доказателството се извършва аналогично на това от[14] за точките от S' и доказателствата в § 1.3. Естествено и в горния случай, и в този се използува лема 1.5.

Теорема 1.6 е доказана.

З а б е л е ж к а. /Вж.Забел.1.3/. Ще отбележим, че в теорема 1.6 изискването функцията ω да е слабо решение, може да се замени със следното: за всички функции $v \in \dot{W}_*^2$, които се анулират в околност на S_3 е изпълнено равенството

$$(u, K^* v) = (f, v).$$

§. 1.6. Положително-симетрични системи

Тук ще формулираме някои резултати от работата [2]. Разглеждаме системата /1.1/. Да въведем матрицата

$$\varkappa = B - \frac{1}{2} \frac{\partial A^j}{\partial x_j},$$

която не е дефинирана в $\mathcal{D}$ само върху краен брой частично гладки повърхнини. Ако матриците A^j са симетрични и матрицата $\varkappa + \varkappa'$ е положително определена * в $\bar{\mathcal{D}}$, системата /1.1/ се нарича положително-симетрична.

Нека характеристичната матрица β може да се представи във вида $\beta = \beta_+ + \beta_-$, така че са изпълнени

/1.23/ $$\mu + \mu' \geq 0,$$

/1.24/ $$Ker\,\beta_+ + Ker\,\beta_- = R^n,$$

където $\mu = \beta_+ - \beta_-$ и $Ker\,\beta_\pm$ е ядрото на $\beta_\pm$. Граничното условие $\beta_- u = 0$ се нарича допустимо. Спрегнатото усло-

---

* Матрицата $\varkappa + \varkappa'$ ще наричаме положително определена в $\bar{\mathcal{D}}$ и ще пишем $\varkappa + \varkappa' \geq c$, ако

$$u.(\varkappa + \varkappa')u \geq c\,u.u \quad (c = const. > 0),\ \forall x \in \bar{\mathcal{D}},\ \forall u \in R^n.$$

вие е $\beta_+' v = 0$. Ще отбележим също, че в този случай $Ker\,\beta \subset N(x) = Ker\,\beta_-(x)$, което е едно от условията за съвпадане на слабото и силно решение.

Л е м а 1.7 /К.Фридрихс[2]/. За всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$ съществува слабо решение на задача /1.1/, /1.2/. За всички частично гладки в $\mathcal{D}$ функции u , удовлетворяващи $\beta_- u = 0$ и имащи ограничен носител

$$\|u\|^2 \le c\,(u, Lu)\ , \quad \|u\| \le c\,\|Lu\|\ , \quad c = const.$$

При изследването на тези въпроси, в някои случаи е удобно да се използуват следните две забележки.

З а б е л е ж к а 1.6. Нека A е симетрична $n \times n$ матрица, с ограничени в $\mathcal{D}$ елементи. Нека тя е положително определена във всички точки на $\mathcal{D}$ и е изпълнено $\det A(x) \ge c_1$, за $x \in \mathcal{D}$ $(c_1 = const. > 0)$. Тогава има константа $c > 0$ за която

/1.25/ $$u.Au \ge c\,u.u,$$

т.е. $A \ge c$ в $\mathcal{D}$.

Наистина, A е положително определена в точка $x \in \mathcal{D}$ тогава и само тогава, когато главните ѝ минори са положителни в тази точка /вж.[15], стр.92/. За характеристичния полином на $A(x)$

$$\Delta(\lambda, x) = (-\lambda)^n + \Delta_1(x)(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \Delta_{n-1}(x)(-\lambda) + \Delta_n(x),$$

имаме $\Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x) > 0, \Delta_n(x) = \det A(x) \ge c_1$, за $x \in \mathcal{D}$
Ясно е, че за $\lambda \le 0$ имаме $\Delta(\lambda, x) > 0$. Освен това има константа $c > 0$, така че $\Delta(\lambda, x) > 0$ за $0 \le \lambda \le c$. Да разгледаме n -те реални корена $\lambda_i(x)$ на $\Delta(\lambda, x)$. От горните разсъждения следва, че $\lambda_i(x) \ge c\ (i = 1, .., n)$ за $x \in \mathcal{D}$.

Понеже /[15] ,стр.161/ $u.A(x)u \geq \min_i \lambda_i(x)\, u.u$,
с това /1.25/ е доказано.

З а б е л е ж к а 1.7. В много случаи матриците β_+ и β_- са симетрични и квадратичните форми $u.\beta_\pm u$ са знакопостоянни. Тогава е удобно да се използува, че

$$Ker\,\beta_\pm = \{u : u.\beta_\pm u = 0\}.$$

Наистина, да разгледаме за определеност $\beta_+(x)$. Тя е симетрична, така че съществува неособена матрица Q , за която

$$Q'.\beta_+(x)Q = diag(q_1,\dots,q_n).$$

Тогава за $u = Qv$ имаме

$$u.\beta_+ u = v.Q'\beta_+ Qv = \sum q_i v_i^2 ,$$

т.е. или всички q_i са неотрицателни, или всички са неположителни. Тогава

$$u.\beta_+ u = 0 \iff q_i v = 0 \quad , \forall i = 1,\dots,n.$$

Обаче Q е неособена и

$$Q'\beta_+ u = diag[q_1 v,\dots,q_n v],$$

така че

$$\beta_+ u = 0 \iff q_i v_i = 0,\ \forall i = 1,\dots,n,$$

с което твърдението е доказано.

ГЛАВА II

ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА УРАВНЕНИЯ ОТ СМЕСЕН ТИП С ДВЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИ ЛИНИИ НА ИЗРАЖДАНЕ

В тази глава се изследват гранични задачи за уравнението

$$/2.1/ \quad Lu \equiv K(y)u_{xx} + M(x)u_{yy} + \alpha_1(x,y)u_x + \alpha_2(x,y)u_y + \alpha_0(x,y)u = f(x),$$

където $K, M \in C^1(-\infty,\infty)$ и $yK(y)>0$ за $y\neq 0$, $xM(x)>0$, за $x\neq 0$. Нека $0<k_0 \leq K'(y) \leq K_1$, $0<k_0 \leq M'(x) \leq K_1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(R^2)$, $\alpha_0 \in C(R^2)$.

Уравнието /2.1/ е елиптично в $\{(x,y): xy>0\}$, хиперболично в $\{(x,y): xy<0\}$ и параболично при $x=0$ или $y=0$, с изключение на точка $(0,0)$, където то е от първи ред. В §§ 2.1-2.3 ще предполагаме, че $\alpha_0 \equiv 0$. Случаят $\alpha_0 \not\equiv 0$ ще разгледаме в § 2.4.

§ 2.1. Изследване на свързаната с уравнението система

Нека $u \in C^2$ и $Lu=f$. Тогава функциите $u_1=u_x$ и $u_2=u_y$ удовлетворяват системата

$$/2.2/ \quad \begin{aligned} &\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0, \\ &K\partial_1 u_1 + M\partial_2 u_2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = f, \end{aligned}$$

където $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$. Записваме системата в матричен вид и я умножаваме отляво с матрицата

$$E = \begin{pmatrix} K & a \\ -Ma & 1 \end{pmatrix},$$

където функцията a ще изберем по-късно. Получаваме симетричната система

/2.3/ $$\hat{L}\hat{u} = \hat{f} ,$$

където $\hat{L} \equiv A^1\partial_1 + A^2\partial_2 + B$, $\hat{u} = (u_1, u_2)$, $\hat{f} = (af, f)$,

$$A^1 = \begin{pmatrix} Ka & K \\ K & -Ma \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -K & Ma \\ Ma & M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a\alpha_1 & a\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Искаме системата /2.3/ да е положително-симетрична в $R^2 \setminus \{x<0, y<0\}$. За целта определяме

$$a(x,y) = \begin{cases} \ell_1 & , \quad x \geq 0,\ y \leq 0, \\ \ell_2 & , \quad x \leq 0,\ y > 0, \\ \ell_2 + (\ell_1 - \ell_2)\dfrac{x}{x+y} & , \quad x > 0,\ y > 0, \end{cases}$$

където ℓ_1 и ℓ_2 са неопределени още константи, за които

$$\frac{1}{2}\left[\frac{K'(0)}{M'(0)}\right]^{\frac{1}{3}} \leq \ell_2 < \ell_1 \leq 2\left[\frac{K'(0)}{M'(0)}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Очевидно $\ell_2 \leq a \leq \ell_1$ и функцията $a(x,y)$ е частично гладка, с изключение на точката $(0,0)$; където тя има безбройно много гранични стойности. Обаче в матриците A^1 и A^2 тя участвува само в изразите Ma и Ka, които са непрекъснати. Разглеждаме

$$\varkappa + \varkappa' = \begin{pmatrix} K' - Ka_x + 2a\alpha_1 & \alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y \\ \alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y & M' + Ma_x + 2\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

За да докажем, че $\varkappa + \varkappa'$ е положително определена ще използуваме Забел.1.6 в края на § 1.6 /елементите на $\varkappa + \varkappa'$ не са непрекъснати/. Според нея е достатъчно да докажем, че с някаква константа $c > 0$ имаме:

$$K' - Ka_x + 2a\alpha_1 \geq c,$$

/2.4/ $$(K' - Ka_x + 2a\alpha_1)\left[(Ma)_x + 2\alpha_2\right] - (\alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y)^2 \geq c.$$

Но $a_x = a_y = 0$ в $\{x < 0, y > 0\}$ и $\{x > 0, y < 0\}$.

Понеже $K' \geq k_0 > 0$, $M' \geq k_0 > 0$, ако $|\alpha_1|$ и $|\alpha_2|$ са достатъчно малки, /2.4/ ще бъде изпълнено в $\{(x,y) : xy < 0\}$.

В $\{x > 0, y > 0\}$ имаме

$$|Ka_x| = (\ell_1 - \ell_2)\frac{y K(y)}{(x+y)^2} \leq K_1(\ell_1 - \ell_2),$$

$$|Ma_x| \leq K_1(\ell_1 - \ell_2), \quad |Ma_y| \leq K_1(\ell_1 - \ell_2).$$

Така че, ако $\ell_1 - \ell_2 < \varepsilon$, $|\alpha_1| \leq \lambda_1$, $|\alpha_2| \leq \lambda_2$ и положителните числа ε, α_1 и α_2 са достатъчно малки, $\varkappa + \varkappa'$ ще е положително определена в $R^2 \setminus \{x < 0, y < 0\}$. Тоест системата /2.3/ ще бъде положително симетрична в $R^2 \setminus \{x < 0, y < 0\}$.

След изследването на системата /2.3/ ние ще се върнем към уравнението /2.1/. Обаче, $\det E = Ma^2 + K$ е нула в точка $(0,0)$. От друга страна за нас е най-важно да изследваме уравнението /2.1/ и системата /2.3/ в области, за които точка $(0,0)$ е върху границата. Въпреки, че $\det E(0,0) = 0$, за нашите цели се оказва достатъчно неравенството

/2.5/ $$Ma^2 + K \geq c\tau,$$

където $r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $c = const. > 0$. Именно за да осигурим /2.5/ ние не избрахме функцията $a(x,y)$ непрекъсната в точка $(0,0)$. Наистина, според /2.5/ в израза $Ma^2 + K$ за $\{x>0, y<0\}$ трябва да доминира Ma^2, а за $\{x<0, y>0\}$ трябва да доминира K . Така че, ако $a(x,y)$ беше непрекъсната, тя трябваше да се мени много бързо около точка $(0,0)$. Но тогава нейните първи производни щяха да бъдат големи и щеше да се наруши положителната определеност на $\varkappa + \varkappa'$.

Разглеждаме израза $Ma^2 + K$. Да означим

$$C(M,h) = \max_{|x|\le h} |M'(x) - M'(0)| \ , \quad C(K,H) = \max_{|y|\le H} |K'(y) - K'(0)| ,$$

където положителните числа h и H са така малки че

$$C(M,h) < M'(0), \quad C(K,H) < K'(0) .$$

Ние ще искаме характеристиката през $(0,0)$ да се съдържа в разглежданата от нас област. Нека $(x(s), y(s))$ е точка от нея, лежаща в $\{x>0, y<0\} \cap \Pi$ $\left(\Pi = \{|x|\le h, |y|\le H\}\right)$. Тогава

$$0 = \int_0^{x(s)} \sqrt{M(t)}\,dt + \int_0^{y(s)} \sqrt{-K(t)}\,dt \le$$

$$\le \frac{2}{3}\sqrt{M'(0)+C(M,h)}\,\left[x(s)\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{K'(0)-C(K,H)}\,\left[-y(s)\right]^{\frac{3}{2}} ,$$

т.е. тя се намира в полуравнината

$$\left[\frac{M'(0)+C(M,h)}{K'(0)-C(K,H)}\right]^{\frac{1}{3}} x + y \ge 0 .$$

В $\{x<0, y>0\} \cap \Pi$ по аналогичен начин се получава, че характеристиката е в полуравнината

$$\left[\frac{M'(0)-C(M,h)}{K'(0)+C(K,H)}\right]^{\frac{1}{3}} x + y \geq 0 .$$

Във връзка с това разглеждаме областта $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$,
където $R_3 = \{x > 0, y > 0\}$,

$$R_1 = \Pi\cap\{y \leq 0, p_1 x + y \geq 0\} , \quad R_2 = \Pi\cap\{x \leq 0, p_2 x + y \geq 0\} ,$$

$$p_1 = \left[\frac{M'(0)+C(M,h)}{K'(0)-C(K,H)}\right]^{\frac{1}{3}} + \delta_1 , \quad \delta_1 \geq 0 ,$$

$$p_2 = \left[\frac{M'(0)-C(M,h)}{K'(0)+C(K,H)}\right]^{\frac{1}{3}} - \delta_2 , \quad \delta_2 \geq 0 , \; p_2 > 0 .$$

Сега така ще подберем ℓ_1 и ℓ_2 , че /2.5/ да е изпълнено в R и естествено $\ell_1 - \ell_2 < \varepsilon$. Без ограничение на общността, можем да предполагаме, че $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\left[\frac{K'(0)}{M'(0)}\right]^{\frac{1}{3}}$.

За точките от R е изпълнено съответно:

1. За $(x, y) \in R_3$ имаме
$$M\alpha^2 + K \geq M\ell_2^2 + K \geq K_0(\ell_2^2 |x| + |y|) \geq c_1 r .$$
2. За $(x, y) \in R_1$ имаме $|y| \geq p_1 x$ и
$$M\alpha^2 + K \geq \left\{\ell_1^2[M'(0)-C(M,h)] - p_1[K'(0)+C(K,H)]\right\}|x| .$$
3. За $(x, y) \in R_2$ имаме $|x| \geq y/p_2$ и
$$M\alpha^2 + K \geq \left\{p_2[K'(0)-C(K,H)] - \ell_2^2[M'(0)+C(M,h)]\right\}|y|/p_2 .$$

Следователно /2.5/ ще е изпълнено в R , ако

$$/2.6/ \qquad \ell_1^2 > p_1 \frac{K'(0)+C(K,H)}{M'(0)-C(M,h)} \quad , \quad \ell_2^2 < p_2 \frac{K'(0)-C(K,H)}{M'(0)+C(M,h)} \, .$$

В дясната страна на неравенствата /2.6/ при $\delta_1 = \delta_2 = 0$ стоят числата

$$\frac{K'(0)+C(K,H)}{M'(0)-C(M,h)} \left[\frac{M'(0)+C(M,h)}{K'(0)-C(K,H)} \right]^{\frac{1}{3}} ,$$

$$/2.7/ \qquad \frac{K'(0)-C(K,H)}{M'(0)+C(M,h)} \left[\frac{M'(0)-C(M,h)}{K'(0)+C(K,H)} \right]^{\frac{1}{3}} ,$$

които при $h \to 0$ и $H \to 0$ клонят към $\left[\frac{K'(0)}{M'(0)} \right]^{\frac{2}{3}}$.

Тогава, ако h и H са достатъчно малки, разликата на двете числа /2.7/ ще е по-малка от ε^2. Избираме ℓ_1 и ℓ_2 така, че $0 < \ell_1 - \ell_2 < \varepsilon$ и неравенствата /2.6/ да са изпълнени при $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Очевидно тези неравенства са изпълнени и при дос-тъчно малки $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Да означим с c' константата, с която е изпълнено /2.5/ в R. Нека (x_1, y_1) е точката, в която лъчът $\{ p_1 x + y = 0, y \le 0 \}$ пресича ∂R. Да разгледаме точките $\{ (x,y) : x \ge x_1, y \le 0 \}$. За тях имаме

$$/2.8/ \qquad \begin{aligned} Ma^2 + K &= M(x)\ell_1^2 + K(y) = M(x_1)\ell_1^2 + K(y_1) + \\ &+ [M(x) - M(x_1)]\ell_1^2 + [K(y) - K(y_1)] \ge c' \tau(x_1, y_1) + \\ &+ k_0 \ell_1^2 (x - x_1) + K(y) - K(y_1) \, . \end{aligned}$$

Разделяме тези точки на два вида:

а. Ако $y_1 \le y \le 0$, то $K(y) - K(y_1) \ge k_0 |y - y_1|$ и от /2.8/ следва, че неравенство /2.5/ е изпълнено.

б. Ако $y \le y_1$ и $y_1 - y \le p_3 (x - x_1)$, $p_3 > 0$, то

$$K(y) - K(y_1) \geq -K_1 |y - y_1| \geq -K_1 p_3 |x - x_1|,$$

$$M\alpha^2 + K \geq c' \tau(x_1, y_1) + (K_0 \ell_1^2 - K_1 p_3) |x - x_1| \geq c_1 \tau(x, y),$$

ако $p_3 < K_0 \ell_1^2 / K_1$. Тоест, с такова p_3 за всички точки от

$$R_1' = \{ (x, y) : x \geq x_1, y \leq 0, y_1 - y \leq p_3 (x - x_1) \}$$

е изпълнено /2.5/. Аналогично, ако с (x_2, y_2) означим пресечната точка на лъча $\{ x \leq 0, p_2 x + y = 0 \}$ с ∂R, ще намерим $p_4 > 0$, така че /2.5/ е изпълнено и за всички точки от

$$R_2' = \{ (x, y) : x \leq 0, y \geq y_2, y - y_2 \geq p_4 (x_2 - x) \}.$$

И така: неравенство /2.5/ е изпълнено в областта $R' = R \cup R_1' \cup R_2'$ /вж.Рис. 2.1/. При това в R' се съдържа характеристиката на уравнението /2.1/ през точка $(0,0)$, в някаква околност на $(0,0)$.

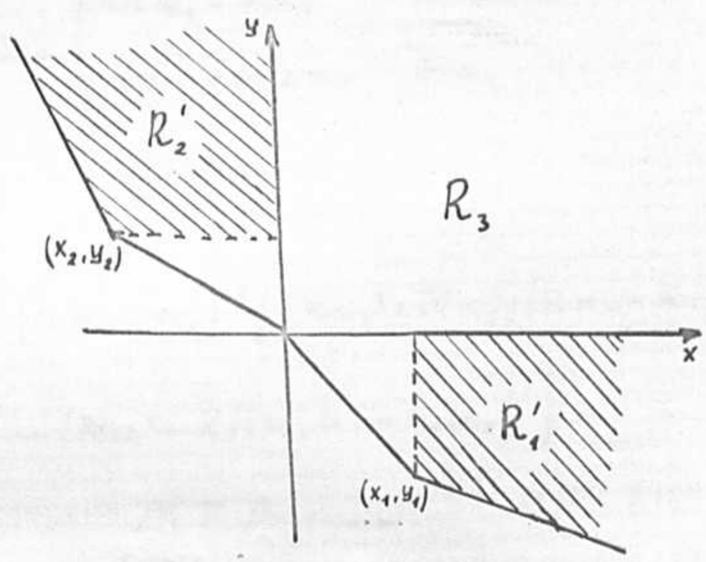

Рис. 2.1.

Да разгледаме важния случай, когато правата $x + y = 0$ е характеристика на уравнението /2.1/. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $K(t) = -M(-t)$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$. /В частност така е при $K(y) \equiv y$, $M(x) \equiv x$./ В този случай за област R' можем да вземем областта $x+y \geq 0$, т.е. можем да разгледаме характеристичната задача. Наистина:

а. За $y \leq 0$, $x+y \geq 0$ имаме

$$Ma^2 + K \geq M(x)\ell_1^2 - M(x) = (\ell_1^2 - 1)M(x) .$$

б. За $x \leq 0$, $x+y \geq 0$ имаме

$$Ma^2 + K \geq K(y) - K(y)\ell_2^2 = (1-\ell_2^2)K(y) ,$$

т.е. за $\ell_2 < 1 < \ell_1$, $\ell_1 - \ell_2 < \varepsilon$ всичко е изпълнено.

И така, нека R' е област от горния вид, в която система /2.3/ е положително-симетрична и /2.5/ е изпълнено. Нека ограничената или неограничена област $\mathcal{D} \subset R'$ и границата й S е частично гладка. Да въведем върху S граничната матрица

$$\beta = \begin{pmatrix} Kan_1 - Kn_2 & Kn_1 + Man_2 \\ Kn_1 + Man_2 & Mn_2 - Man_1 \end{pmatrix} .$$

Да разгледаме отначало тези точки от S , където $an_1 + n_2 \neq 0$. Имаме

$$u.\beta u = (an_1 + n_2)^{-1}\Big[(Kn_1^2 + Mn_2^2)(au_1 + u_2)^2 -$$
$$- (Ma^2 + K)(n_2u_1 - n_1u_2)^2\Big] .$$

Търсим две матрици β_+ и β_- , така че да са изпълнени /1.23/ и /1.24/. Условието /1.23/ ще бъде очевидно, ако

$$u.(\beta_+ - \beta_-)u = |an_1 + n_2|^{-1}\Big[|Kn_1^2 + Mn_2^2|(au_1 + u_2)^2 +$$
$$+ (Ma^2 + K)(n_2u_1 - n_1u_2)^2\Big] .$$

Да поискаме β_+ и β_- да бъдат симетрични. Тогава от това равенство и от условието $\beta_+ + \beta_- = \beta$, те са еднозначно определени. Ще покажем, че /1.24/ е изпълнено при този избор на

β_+ и β_-. Понеже $u.\beta_+ u \geq 0$ и $u.\beta_- u \leq 0$ за всички $u \in R^2$, според забележка 1.7 имаме $Ker\beta_\pm = \{u : u.\beta_\pm u = 0\}$.
Така че, ако означим $\varepsilon_1 = sgn(Kn_1^2 + Mn_2^2)$ и $\varepsilon_2 = sgn(an_1 + n_2)$ получаваме, че

$$Ker\beta_\pm = \{u : \varepsilon_1(1 \pm \varepsilon_1\varepsilon_2)(au_1 + u_2) = 0,\ (1 \mp \varepsilon_2)(n_2u_1 - n_1u_2) = 0\}.$$

Нека за $u = (u_1, u_2) \in R^2$ разгледаме системата

$$/2.9/ \qquad \varepsilon_1(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)(av_1 + v_2) = 0,\ \varepsilon_1(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)[a(u_1 - v_1) + u_2 - v_2] = 0,$$

$$/2.10/ \qquad (1 - \varepsilon_2)(n_2v_1 - n_1v_2) = 0,\ (1 + \varepsilon_2)[n_2(u_1 - v_1) - n_1(u_2 - v_2)] = 0$$

Понеже $\varepsilon_2 \neq 0$, уравненията /2.9/ и едно от /2.10/ са тъждества, ако $\varepsilon_1 = 0$. Останалото уравнение очевидно има решение. Ако пък $\varepsilon_1 \neq 0$, едно от уравненията /2.9/ и едно от /2.10/ са тъждества. Останалите две имат решение (v_1, v_2), понеже $an_1 + n_2 \neq 0$. Следователно системата /2.9/, /2.10/ е разрешима. Да означим с $u_+ = (v_1, v_2)$ едно нейно решение. Тогава $u_+ \in Ker\beta_+$, а $u_- = u - u_+ \in Ker\beta_-$, т.е. /1.24/ е изпълнено.

Да разгледаме тези точки от S, където $an_1 + n_2 = 0$. Ако определим

$$\beta_- = n_2\begin{pmatrix} -K & -Ka^{-1} \\ Ma & M \end{pmatrix}, \quad \beta_+ = n_2\begin{pmatrix} -K & Ma \\ -Ka^{-1} & M \end{pmatrix},$$

лесно се доказва, че условия /1.23/ и /1.24/ са изпълнени.

Следователно условието $\beta_- u = 0$ е допустимо. То е

$$/2.11/ \quad \begin{cases} n_2u_1 - n_1u_2 = 0 & \text{върху } S_0, \\ u_1 = 0,\ u_2 = 0 & \text{върху } S_{00}, \\ au_1 + u_2 = 0 & \text{върху } S', \\ u \sim & \text{върху } S_\sim . \end{cases}$$

Тук сме означили

$$S_0 = S \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 \geq 0,\ an_1 + n_2 \geq 0\},$$

$$S_{00} = S \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 < 0,\ an_1 + n_2 > 0\},$$

$$S' = S \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 > 0,\ an_1 + n_2 < 0\},$$

$$S_\sim = S \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 \leq 0,\ an_1 + n_2 < 0\}.$$

Тъй като условията $Kn_1^2 + Mn_2^2 < 0$ и $an_1 + n_2 = 0$ са несъвместими, то $S = S_0 \cup S_{00} \cup S' \cup S_\sim$. Разглеждаме

Задача /2.3/, /2.11/. Да се намери решение на системата /2.3/, удовлетворяващо /2.11/.

От лема /1.7/ следва, че за всяка функция $(f_1, f_2) \in L_2(\mathcal{D})$ съществува слабо решение на задача /2.3/, /2.11/. Освен това е изпълнена оценката

$$/2.12/ \qquad \|u\| \leq C \|\hat{L} u\|,$$

за всички частично гладки в $\mathcal{D}$ функции u, с ограничен носител, които удовлетворяват /2.11/.

При някои предположения относно границата ще докажем, че всяко слабо решение на задача /2.3/, /2.11/ е силно. Да означим с $S_\sim^*$ тези части от S, върху които

$$Kn_1^2 + Mn_2^2 \leq 0,\ an_1 + n_2 > 0.$$

Нека $S_\sim$ /ако $S_\sim \neq \emptyset$/ и $S_\sim^*$ /ако $S_\sim^* \neq \emptyset$/ се състоят от еднократно гладки парчета, пресичащи се /ако имат общи точки/ под ненулеви ъгли. По-нататък ще предполагаме, че ако точка $(0,0) \in S$, тя лежи само върху $S_\sim$. Ще отбележим, че за $S_\sim$ можем да вземем част от характеристиката на уравнението

/2.1/ през $(0,0)$, за която доказахме, че лежи в R' . Можем да вземем и нехарактеристична крива, минаваща "под характеристиката". Върху $S_\sim$ няма гранични условия, а върху $S_\sim^*$ - спрегнати гранични условия. Затова в околност на която и да е тяхна вътрешна точка е приложима теорема 1.2.

Върху $S \setminus (S_\sim \cup S_\sim^*)$ останаха само точки, в които $Kn_1^2+Mn_2^2>0$. Нека $S\setminus(S_\sim \cup S_\sim^*)$ се състои от двукратно гладки парчета без общи точки. При това предполагаме, че върху което и да е затворено в S парче изразът an_1+n_2 може да сменя знака си /т.е. да се анулира, преминавайки от "- " към "+ " или от "+" към "-"/ само в краен брой точки. В този случай в околност на всяка вътрешна точка на такова парче е приложима теорема 1.1. Наистина, тук матрицата β е неособена, така че $Ker\,\beta \subset N(x)$. Граничното пространство е

$$N(x)=\Big\{u(x): n_2u_1-n_1u_2=0, \text{ където } an_1+n_2\geq 0,$$
$$au_1+u_2=0, \text{ където } an_1+n_2<0\Big\}.$$

Поотделно всяко от двете условия е частично гладко /вж. пример 1.1/. Обаче те се сменят едно с друго само в краен брой точки и при това непрекъснато. Така че $N(x)$ е частично гладко върху $S\setminus(S_\sim \cup S_\sim^*)$. Освен това очевидно размерността на $N(x)$ тук е постоянно единица.

Останаха ъглите върху S . Нека ъглите на пресичане на парчетата от $S_\sim \cup S_\sim^*$ с тези от $S\setminus(S_\sim \cup S_\sim^*)$ и от $S_\sim$ с $S_\sim^*$ са ненулеви и по-малки от π , откъм вътрешността на областта. Предполагаме още, че ако се пресичат парче от $S_\sim$ с парче от $S_\sim^*$, едното от двете е двукратно гладка крива. От критерий 1.1 и 1.2 следва, че в околност на всеки ъгъл е приложима теорема 1.3.

Областта $\mathcal{D}$ може да е ограничена или неограничена. Така че ще прилагаме теорема 1.6. Всички нейни условия са налице. Наистина, остава да се провери, че елементите на A^1 и A^2 растат не по-бързо от $\tau(x,y)$. Това е така, понеже функцията $a(x,y)$ е ограничена и

По този начин доказахме $|M(x)| \le K_1|x|$, $|K(y)| \le K_1|y|$.

Т е о р е м а 2.1. За всяка функция $\hat{f}=(f_1,f_2)\in L_2(\mathcal{D})$ съществува едно и само едно силно решение на задача /2.3/, /2.11/.

Тук ще отбележим, че елементите на матриците A^1 и A^2 не са частично гладки в околност на точка $(0,0)$, понеже производните им имат безбройно много гранични стойности в точка $(0,0)$. Въпреки това лема 1.7 за съществуване на слабо решение е приложима. Теорема 1.2 за съвпадане на слабото и силно решение също е приложима. Наистина, точка $(0,0)$ може да лежи само върху $S_\sim$. Но тогава апроксимиращата редица в околност на $(0,0)$ ще е от $C^\infty(\bar{\mathcal{D}})$, понеже тук тя не зависи от гладкостта на A^1 и A^2 /вж. теорема 1.2/. Функциите $K\alpha$ и $M\alpha$ имат ограничени първи производни и сходимостта $\hat{L}u_k \to \hat{f}$ е също налице.

Естествено, най-интересните случаи за приложимост на теорема 2.1 са тези, в които точка $(0,0)\in S$. Да разгледаме няколко такива примера.

П р и м е р 2.1. Нека $S=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$. Тук е парче от характеристиката на уравнение /2.1/ през точка $(0,0)$, а Γ_1 и Γ_2 са характеристики от вида $|K|^{\frac{1}{2}}n_1+|M|^{\frac{1}{2}}n_2=0$. Те започват от крайните точки на Γ_0 и продължават до пресічането си с правите $y=0$ и $x=0$ съответно. Двукратно гладката крива Γ_3 е в областта $\{x\geq 0, y\geq 0\}$ и върху нея $\alpha n_1+n_2\geq 0$. Нека $n_2>0$ в точка $\Gamma_1\cap\Gamma_3$ и $n_1>0$ в точка $\Gamma_2\cap\Gamma_3$ /вж. Рис. 2.2/. Всички предположения на теорема 2.1 са изпълнени.

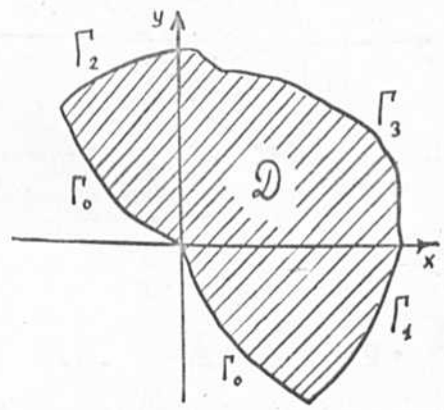

Рис. 2.2

Граничните условия /2.11/ в този случай са:

$n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0$ върху $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, $u\sim$ върху Γ_0.

Наистина, върху Γ_0 имаме $\alpha n_1+n_2<0$. Върху Γ_1 имаме $n_1>0$ и $n_2<0$, освен при $y=0$, където $n_2=0$. Тогава

$$|M|^{\frac{1}{2}}(\alpha n_1+n_2)=n_1\left(\alpha|M|^{\frac{1}{2}}-|K|^{\frac{1}{2}}\right)>0,$$

понеже тук $M\alpha^2+K>0$. Върху Γ_2 имаме $\alpha n_1+n_2>0$, а върху Γ_3 имаме $Kn_1^2+Mn_2^2>0$, $\alpha n_1+n_2\geq 0$.

Спрегнати условия върху $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ не се задават. Ще отбележим, че характеристиките Γ_1 и Γ_2 не са двукратно гладки, а са само от клас $C^{1+\frac{1}{2}}$. Така че тук съществено прилагаме теорема 1.3.

П р и м е р 2.2. Нека $S=\Gamma_0\cup\Gamma_1'\cup\Gamma_2'\cup\Gamma_3$, където Γ_1' и Γ_2' са съответно вертикалната и хоризонтална отсечка от крайните точки на Γ_0 до пресичането с правите $y=0$ и $x=0$ /вж.Рис.2.3/. Върху $\Gamma_1'\cup\Gamma_2'$ имаме $Kn_1^2+Mn_2^2\leq 0$, $\alpha n_1+n_2>0$ и условия /2.11/ сега имат вида

$u_1 = 0, u_2 = 0$ в/у $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$; $n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0$ в/у Γ_3, $u \sim$ в/у Γ_0.
Спрегнати условия върху $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$ не се задават.

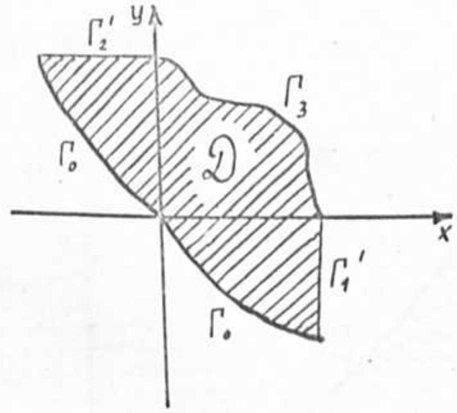

Рис. 2.3

Пример 2.3. Нека $S = \{ y = F(x), -\infty < x < +\infty \}$, където функцията $F(x)$ е частично гладка за $x \le x_0$ и двукратно гладка за $x \ge x_0$ /$x_0 > 0$ /. Да означим

$$\Gamma_4 = S \cap \{ x \le x_0 \} \quad , \Gamma_5 = S \cap \{ x \ge x_0 \} .$$

Предполагаме, че е изпълнено

$$K(F')^2 + M \le 0 \ , \quad F' < 0 \qquad \text{върху } \Gamma_4 \ ,$$

$$K(F')^2 + M > 0 \ , \quad F' \ge a^{-1} \qquad \text{върху } \Gamma_5 \ .$$

Областта $\mathcal{D} = \{ y \ge F(x) \}$ е неограничена /вж.Рис. 2.4/. Условия /2.11/ приемат вида

$$n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0 \text{ върху } \Gamma_5 \quad , u \sim \text{ върху } \Gamma_4 .$$

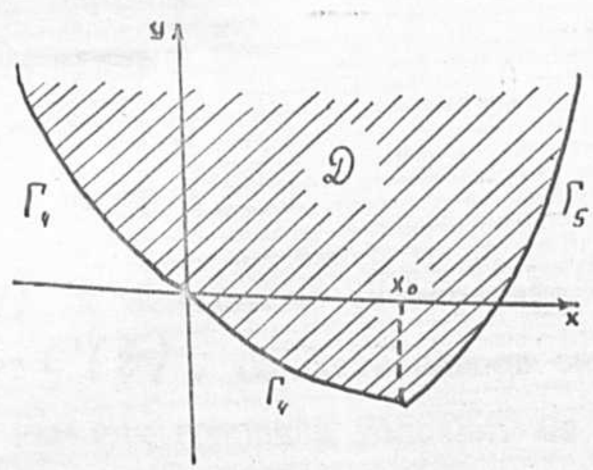

Рис. 2.4.

П р и м е р 2.4. Нека $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ /вж.Рис.2.5/, където Γ_6 е част от Γ_0, а $\Gamma_7 = \{ y = F_1(x) \}$, като

$$F_1 \in C^2 , \quad 0 \le F_1' \le a^{-1} .$$

Условия /2.11/ тук имат вида:

$$n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0 \text{ върху } \Gamma_7 , \quad u \sim \text{ върху } \Gamma_1 \cup \Gamma_6 .$$

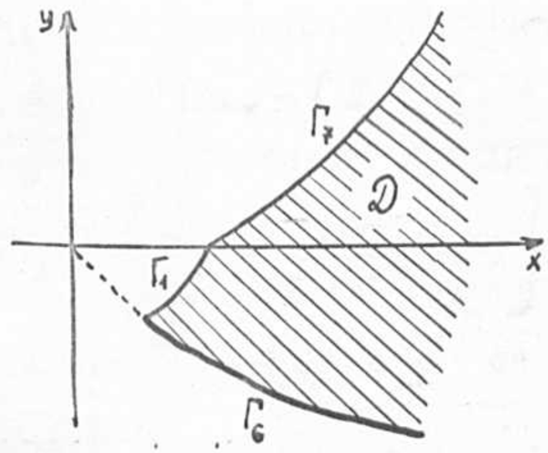

Рис. 2.5

§ 2.2. Извод на основната априорна оценка. Теорема за единственост

Разглеждаме следната

З а д а ч а А. Да се намери в $\mathcal{D}$ решение на уравнението /2.1/, удовлетворяващо условията

$$/2.13/ \quad \left| \begin{array}{ll} u = 0 & \text{върху } S_0 , \\ u = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{върху } S_{00} , \\ a u_x + u_y = 0 & \text{върху } S' , \\ u \sim & \text{върху } S_\sim . \end{array} \right.$$

С $\dot{W}^2$ и $\dot{W}^2_*$ ще означаваме затворените обвивки в $\dot{W}^1_2(\mathcal{D})$ на функциите от $C^2(\bar{\mathcal{D}})$, удовлетворяващи съответно /2.13/ и спрегнатите към тях гранични условия. От оценка /2.12/ следва

/2.14/ $\|u_x\|_0 + \|u_y\|_0 \le c\,\|Lu\|_0 \quad , \forall u \in \dot{W}^2$

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u \in L_2^{loc}(\mathcal{D})$ се нарича слабо решение на задача А, ако

$$(u, L^* v) = (f, v) \quad , \quad \forall v \in \dot{W}^2_* .$$

Д е ф и н и ц и я. Функцията $u(x,y)$ се нарича силно решение на задача А, ако съществува редица $\{u_k\} \subset \dot{W}^2$, така че

$$\|u_k - u\|_W \to 0, \ \|Lu_k - f\|_0 \to 0, \ k \to \infty .$$

Тук с W бележим хилбертовото пространство с норма

$$\|u\|_W = \left\{ \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{u^2(x,y)}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Необходимостта от замяна на $L_2(\mathcal{D})$ с W се изяснява в лема 2.3 /в края на § 2.3/.

По-нататък ще предполагаме, че са изпълнени следните условия *

II.1. $S^\circ = S_0 \cup S_{00} \neq \emptyset, \ S' = \emptyset$.

II.2. $S_\sim$ е свързана част от S .

II.3. $\bar{\mathcal{D}} = \{ x_1 \le x \le x_2 ,\ y(x) \le y \le Y(x) \}$,

където $-\infty \le x_1 < x_2 \le +\infty$, а непрекъснатата функция $Y(x)$ може да приема и стойност $+\infty$. Предполагаме също, че множеството $\{ x : Y(x) < \infty , Y'(x) = \infty \}$ няма крайна точка на сгъстяване.

Ще отбележим, че върху границата може да има и вертикални части, т.е. в някои точки функцията $y(x)$ може да не е непрекъсната, а може и $y(x_1) < Y(x_1)$, $y(x_2) < Y(x_2)$. При условията на теорема 2.1 и условия II.1 - II.3 в § 2.2 ще изведем съответната априорна оценка и ще докажем теорема за единственост на силното решение на задача А, а в § 2.3 ще докажем теорема за съществуване на силно решение.

---

* Относно условието $S' = \emptyset$ вж. Забел.2.1 .

Т е о р е м а 2.2. Нека са изпълнени II.1 - II.3 и условията, при които доказахме теорема 2.1. Тогава задача А има не повече от едно силно решение. Изпълнена е оценката

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|_0 + \|u_x\|_0 + \|u_y\|_0 \le C\|Lu\|_0, \ \forall u \in \dot{W}^2. \tag{2.15}$$

Забележка. Относно точността на оценка /2.15/ вж. Заб. 2.3.

Доказателство. Теорема 2.2. следва веднага от оценка /2.14/ и от оценка

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|_0 \le C_0\left(\|u_x\|_0 + \|u_y\|_0\right), \ \forall u \in \dot{C}^1(\bar{\mathcal{D}}), u=0 \text{ в/у } S^0, \tag{2.16}$$

където $c_0 = const.$. С оглед на нуждите в § 2.3 ще докажем следното по-точно твърдение, от което оценка /2.16/ следва незабавно: ако $G \subset \mathcal{D}$ е ограничена област, съществуват ограничена област G' и константа C', така че за всички функции $u \in \dot{C}^1(\bar{\mathcal{D}})$ е изпълнено

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right\|_{L_2(G)} \le C_0\left(\|u_x\|_{L_2(G')} + \|u_y\|_{L_2(G')} \right) + C' \max_{S^0 \cap \bar{G}'} |u| . \tag{2.17}$$

Пристъпваме към доказателството на /2.17/. Ако областта $\mathcal{D}$ е ограничена, понеже $S^0 \neq \emptyset$, оценка /2.17/ се получава от неравенството на Фридрихс /вж. [19], стр.374/

$$\|u\|^2_{L_2(\mathcal{D})} \le C\left[\|u_x\|^2_{L_2(\mathcal{D})} + \|u_y\|^2_{L_2(\mathcal{D})} + \int_{S^0} u^2 ds \right].$$

По-нататък ще предполагаме, че областта $\mathcal{D}$ е неограничена. Понеже навсякъде в $\mathcal{D}$ е изпълнено $Ma^2 + K > 0$, лесно се доказва, че съществуват такива константи q_1 и q_2, че

/2.18/ $$\mathcal{D} \subset \{x \geq 0,\ y \leq 0,\ |y| \leq q_1 x\} \cup \{x \leq 0,\ y \geq 0,\ |x| \leq q_2 y\} \cup \cup \{x > 0,\ y > 0\}.$$

Върху $S_\sim$ имаме $Kn_1^2 + Mn_2^2 \leq 0$, така че

$$S_\sim \subset \{x \geq 0,\ y \leq 0\} \cup \{x \leq 0,\ y \geq 0\}.$$

Освен това

1. за $\{x \geq 0,\ y \leq 0\}$ имаме $S_\sim \subset \{|y| \leq q_1 x\}$
2. за $\{x \leq 0,\ y \geq 0\}$ имаме

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \leq -\frac{M}{K} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{\ell_2^2}$$

Понеже $S_\sim$ е свързано множество, оттук следва че

/2.19/ $$S_\sim \subset \{|y| \leq q_3 x + q_4\} \ ; \ q_3, q_4 = const. > 0$$

За всяко естествено число k с Π_k ще означим рамката $\Pi_k = \{|x| \leq 2^{k+1},\ m2^k \leq |y| \leq m2^{k+1}\} \cup \{|y| \leq m2^k,\ 2^k \leq |x| \leq 2^{k+1}\}$. Нека константата m удовлетворява неравенствата $m \geq 2,\ m \geq 2q_1$, $m \geq 2(q_3 + q_4)$. Тогава от /2.18/ и /2.19/ следва, че за всяко k

/2.20/ $$S_\sim \cap \Pi_k \subset \{|y| \leq m2^k\},$$

/2.21/ $$\mathcal{D} \cap \Pi_k \subset \{y \geq -m2^k\}.$$

Имаме два случая: или $Y(x) \equiv +\infty$, или $Y(x) \not\equiv +\infty$. Да разгледаме първия от тях. Понеже $S^\circ \neq \emptyset$ и $S_\sim$ е свързана част от S, има число x_0, така че или за всяко $x \geq x_0$, или за всяко $x \leq x_0$ е изпълнено $(x, y(x)) \in S^\circ$. Да означим с k_0 толкова голямо естествено число, че $|x_0| < 2^{k_0}$.

Да разгледаме втория случай: $Y(x) \not\equiv +\infty$. Лесно се вижда, че

/2.22/ $$S_\sim \cap \{n_2 > 0\} \subset \{y < 0\}.$$

Наистина, върху $S_\sim \cap \{n_2 > 0\}$ имаме

/2.23/ $$\frac{dY}{dx} = -\frac{n_1}{n_2} > \frac{1}{a},$$

така че от /2.5/ при $y \geq 0$ $\quad K n_1^2 + M n_2^2 \geq K + M a^2 > 0$,

т.е. точки от $S_\sim$ при $y \geq 0$ не може да има. Понеже $S_\sim$ е свързана част от S, от /2.22/ и /2.23/ следва, че $S_\sim \cap \{n_2 > 0\}$ е ограничена крива, т.е. има число K_1, така че за $K \geq K_1$ е изпълнено $S_\sim \cap \{n_2 > 0\} \cap \Pi_K = \emptyset$; за такива K

/2.24/ $$\{y = Y(x)\} \cap \Pi_K \subset S^\circ .$$

Нека числото K_2 е така голямо, че има точка $(x, Y(x)) \in \Pi_{K_2}$.

И тъй, ако $Y(x) \not\equiv +\infty$, ще означаваме $K_0 = max(K_1, K_2+1)$. Продължаваме общо и за двата случая, като разглеждаме само числа $K \geq K_0$. Нека отначало числото K е такова, че

/2.25/ $$\{ |x| \leq 2^{K+1} , 3m 2^{K-1} \leq y \leq m 2^{K+1} \} \subset \overline{\mathcal{D}} .$$

Според начина на построение на рамката Π_K това е възможно само ако $Y(x) \equiv +\infty$. При това от /2.21/ е ясно, че или за $-2^{K+1} \leq x \leq -2^K$, или за $2^K \leq x \leq 2^{K+1}$ /или и за двете/ всички точки $(x, y(x)) \in S^\circ$. За определеност предполагаме, че за $x \in [2^K, 2^{K+1}]$ е изпълнено $(x, y(x)) \in S^\circ$. Нека функцията $\varphi(y)$ е линейна и $\varphi(-m 2^{K+1}) = 3m 2^{K+1}$, $\varphi(m 2^{K+1}) = m 2^{K+1}$, т.е. $\varphi(y) = \frac{1}{8} y + b_1$, $b_1 = const$. За $(x, y) \in \mathcal{D} \cap \Pi_K$ имаме

$$u(x,y) = \int_{\varphi(y)}^{y} u_y(x,t)\,dt + u(x, \varphi(y)) .$$

Нека $\varkappa(x)$ е линейна функция, за която

$$\varkappa(-2^{K+1}) = 2^K , \quad \varkappa(2^{K+1}) = 2^{K+1} ,$$

т.е. $\varkappa(x) = \frac{1}{4} x + b_2$, $b_2 = const$. Тогава

$$u(x, \varphi(y)) = u(\varkappa(x), \varphi(y)) + \int_{\varkappa(x)}^{x} u_x(\alpha, \varphi(y))\,d\alpha ,$$

така че

/2.26/ $$u(x,y) = \int_{\varphi(y)}^{y} u_y(x,t)\,dt + \int_{\varkappa(x)}^{x} u_x(\alpha, \varphi(y))\,d\alpha + \int_{y(\varkappa(x))}^{\varphi(y)} u_y(\varkappa(x), t)\,dt + u(\varkappa(x), y(\varkappa(x))) ,$$

където $(\varkappa(x),\ y(\varkappa(x)))\in S^{0}$ /вж.Рис.2.6/. Ще оценим последователно събираемите в /2.26/. Ясно е, че

$$\mathcal{D}_k=\mathcal{D}\cap\Pi_k=\left\{\,|x|\le 2^{k+1},\ y_1(x)\le y\le m2^{k+1}\right\}.$$

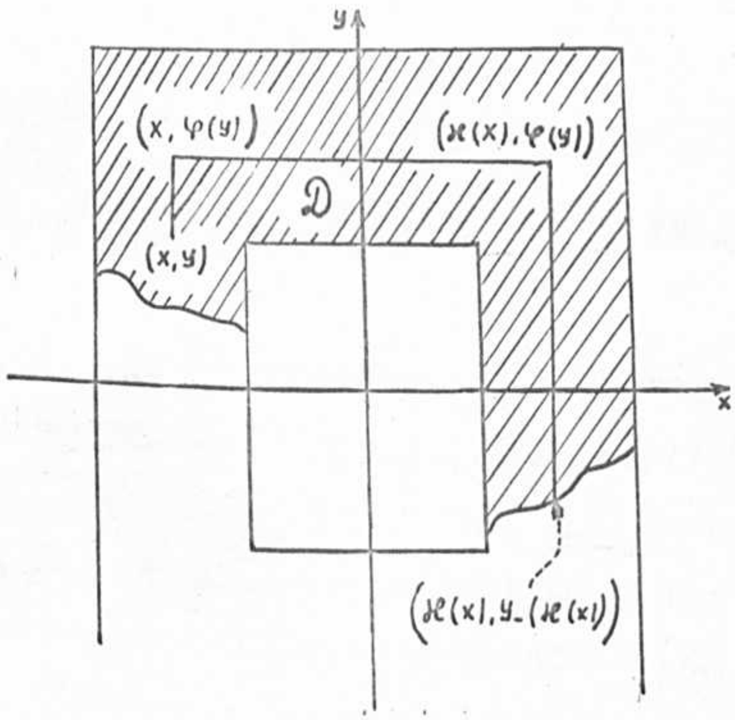

Рис. 2.6.

Тогава

$$\left\|\int_{\varphi(y)}^{y}u_y(x,t)\,dt\right\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)}=\int_{-2^{k+1}}^{2^{k+1}}\int_{y_1(x)}^{m2^{k+1}}\left(\int_{\varphi(y)}^{y}u_y(x,t)\,dt\right)^2dy\,dx\le$$

$$\le\left(m2^{k+2}\right)^2\|u_y\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)},$$

$$\left\|\int_{\varkappa(x)}^{x}u_x(\alpha,\varphi(y))\,d\alpha\right\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)}=8\int_{-2^{k+1}}^{2^{k+1}}\int_{\varphi(y_1(x))}^{m2^{k+1}}\left(\int_{\varkappa(x)}^{x}u_x(\alpha,t)\,d\alpha\right)^2dt\,dx\le$$

$$\le 8\cdot 2^{2(k+2)}\int_{-2^{k+1}}^{2^{k+1}}\int_{3m2^{k-1}}^{m2^{k+1}}u_x^2(\alpha,t)\,dt\,d\alpha\le 8\cdot 2^{2(k+2)}\|u_x\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)},$$

$$\Big\| \int\limits_{y_-(\varkappa(x))}^{\varphi(y)} u_y(\varkappa(x),t)\,dt \Big\|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} = 4\int\limits_{2^K}^{2^{K+1}} \int\limits_{y(x)}^{m2^{K+1}}$$

$$\Big(\int\limits_{y_-(\alpha)}^{\varphi(y)} u_y(\alpha,t)\,dt\Big)^2 dy\,d\alpha \le 4\,(m\,2^{K+2})^2\,\|u_y\|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} \;,$$

$$\| u(\varkappa(x), y(\varkappa(x)) \|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} \le m.\,2^{2(K+2)} \max_{S^0\cap\Pi_K} |u|^2 \,.$$

Окончателно, ако е изпълнено /2.25/ получаваме

$$/2.27/\quad \|u\|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} \le (3m\,2^{K+2})^2\Big[\|u_y\|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} + \|u_x\|^2_{L_2(\mathcal{D}_K)} + \max_{S^0\cap\Pi_K}|u|^2\Big].$$

Нека сега K е такова, че /2.25/ не е изпълнено. Да запишем $\mathcal{D}_K$ във вида $\mathcal{D}_K = \{ y_1(x) \le y \le y_2(x) \}$.
Да разгледаме множеството от тези x, за които има точка $(x,y) \in \mathcal{D}_K$. Това множество може да се представи като крайно или изброимо обединение на интервали $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i < x_{i+1}$, от два вида:

1. Такива, за които е изпълнено

а. $y_2(x) \equiv Y(x)$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, или

б. $y_1(x) \equiv y(x)$, $(x, y(x)) \in S^0$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$.

2. Останалите, за които от /2.24/ е ясно, че

$$y_1(x) \le m\,2^K,\quad y_2(x) \equiv m\,2^{K+1}.$$

Да означим $V_i = \{ x_i \le x \le x_{i+1},\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \}$.
Тогава в първия случай за $(x,y) \in V_i$ имаме

$$u(x,y) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y} u_y(x,t)\,dt + u(x,\varphi_1(x)),$$

където $\varphi_1(x) = y_2(x)$ за подслучай а и $\varphi_1(x) = y_1(x)$ за подслучай б. Имайки пред вид /2.24/ получаваме

$$/2.28/\quad \|u\|^2_{L_2(V_i)} \le 2\,(m\,2^{K+2})^2\,\|u_y\|^2_{L_2(V_i)} + m\,(x_{i+1}-x_i)\,2^{K+2} \max_{S^0\cap\Pi_K} |u|^2 .$$

Нека сега V_i е множество от втория вид, така че

$$\{x_i \le x \le x_{i+1},\ m2^k \le y \le m2^{k+1}\} \subset V_i .$$

За $(x,y)\in V_i$ имаме

$$/2.29/\qquad u(x,y)=\int_{\varphi_2(y)}^{y} u_y(x,t)\,dt + u(x,\varphi_2(y)),$$

където $\varphi_2(y)=\varphi(y)-m2^{k-1}$. Обаче за $m2^k\le y\le 3m2^{k-1}$ има такава функция $\varkappa_1(y)$, за която $(\varkappa_1(y),y)\in S^\circ$ и или

$$\{m2^k \le y \le 3m2^{k-1},\ x_i \le x \le \varkappa_1(y)\}\subset \mathcal{D},$$

или

$$\{m2^k \le y \le 3m2^{k-1},\ \varkappa_1(y) \le x \le x_{i+1}\}\subset \mathcal{D}.$$

Че това е така е ясно от следните съображения. Ако $Y(x)\equiv+\infty$, от /2.20/ следва /понеже /2.25/ не е изпълнено/, че кривата $S^\circ\cap\Pi_k$ ще пресече правата $y=3m2^{k-1}$. Ако пък $Y(x)\not\equiv+\infty$, от начина на построение на Π_k следва, че кривата $\Pi_k\cap\{y=Y(x)\}$ ще пресече правите $y=m2^k$ и $y=m2^{k+1}$. Така че имаме

$$/2.30/\quad u(x,\varphi_2(y))=\int_{\varkappa_1(\varphi_2(y))}^{x} u_x(\alpha,\varphi_2(y))\,d\alpha + u(\varkappa_1(\varphi_2(y)),\varphi_2(y)).$$

От /2.29/ и /2.30/ получаваме представяне за $u(x,y)$ /вж. Рис. 2.7/, слагаемите в което се оценяват по следния начин

$$\Big\|\int_{\varphi_2(y)}^{y} u_y(x,t)\,dt\Big\|^2_{L_2(V_i)} \le (m2^{k+2})^2\,\|u_y\|^2_{L_2(V_i)},$$

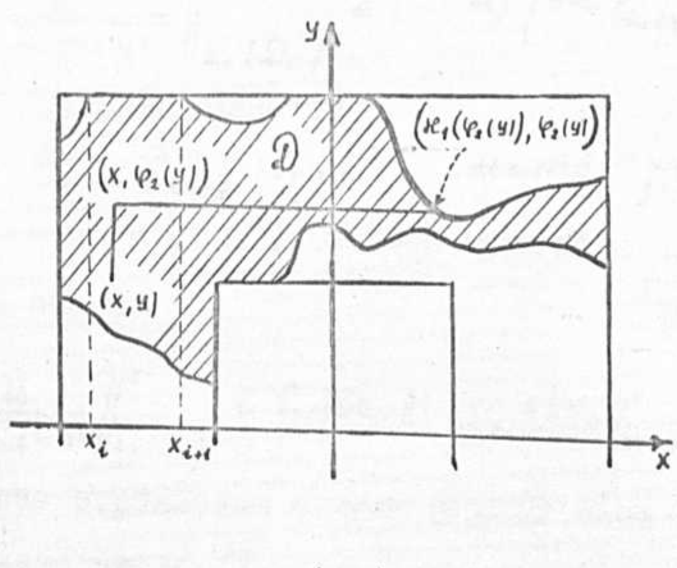

Рис. 2.7.

$$\Big\| \int\limits_{\varkappa_1(\varphi_2(y))}^{x} u_x(\alpha, \varphi_2(y))\,d\alpha \Big\|^2_{L_2(V_i)} \le 8 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{m2^k}^{3m2^{k-1}} \Big(\int\limits_{\varkappa_1(y)}^{x} u_x(\alpha, t)\,dt \Big)^2 dt\,dx \le$$

$$\le 8\,(x_{i+1} - x_i)\,2^{k+2}\, \|u_x\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} ,$$

$$\| u(\varkappa_1(\varphi_2(y)), \varphi_2(y)) \|^2_{L_2(V_i)} \le m\,(x_{i+1} - x_i)\,2^{k+2} \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2 .$$

Окончателно, от тези оценки и /2.28/ получаваме

$$\| u \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} = \sum_i \| u \|^2_{L_2(V_i)} \le 4\,(m\,2^{k+2})^2 \sum_i \| u_y \|^2_{L_2(V_i)} +$$

$$+ 4.8.2^{k+2}\, \| u_x \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} \sum_i (x_{i+1} - x_i) +$$

$$+ 4m\,2^{k+2} \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2 \sum_i (x_{i+1} - x_i) \le$$

$$\le (3m\,2^{k+2})^2 \Big[\| u_y \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} + \| u_x \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} + \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2 \Big] ,$$

т.е. и в този случай е изпълнена оценка /2.27/. Но понеже $1 + x^2 + y^2 \ge 2^{2k}$ в Π_k, то за $k \ge k_0$ от /2.27/ получаваме

/2.31/ $$\Big\| \frac{u}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \Big\|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} \le (24m)^2 \Big[\| u_x \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} + \| u_y \|^2_{L_2(\mathcal{D}_k)} + \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2 \Big].$$

Да разгледаме областта

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cap \{ |x| \le 2^{k_0} , |y| \le m2^{k_0} \} .$$

Върху $\partial \mathcal{D}_0$ има част от S^0. От неравенството на Фридрихс за областта $\mathcal{D}_0$ имаме

/2.32/ $$\Big\| \frac{u}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \Big\|^2_{L_2(\mathcal{D}_0)} \le C_1 \Big[\| u_x \|^2_{L_2(\mathcal{D}_0)} + \| u_y \|^2_{L_2(\mathcal{D}_0)} + \max_{S^0 \cap \Pi_k} |u|^2 \Big] .$$

За произволна ограничена област $G \subset \mathcal{D}$ може да се намери толкова голямо число N , че

$$G \subset G' = \mathcal{D}_0 \cup \Big[\bigcup_{k=k_0}^{N} \mathcal{D}_k \Big].$$

Тогава от оценки /2.31/ и /2.32/ получаваме

$$/2.17/ \quad \Big\| \frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big\|_{L_2(G)} \le C_0 \Big[\|u_x\|^2_{L_2(G')} + \|u_y\|_{L_2(G')} \Big] + C' \max_{S^0 \cap \overline{G'}} |u|.$$

където $C_0 = \max(\sqrt{C_1}, 24m)$.

Теорема 2.2 е доказана.

З а б е л е ж к а 2.1. Оценка /2.16/ и следващата от нея /2.15/ можем да докажем и в много случаи, когато $S' \neq \emptyset$. Това може да се извърши аналогично на приложеното доказателство. Обаче теорема за съществуване ние доказваме само при $S' = \emptyset$. Затова се ограничихме с извод на оценката само в този случай.

§. 2.3. Съществуване на силно решение

Т е о р е м а 2.3. Нека областта $\mathcal{D}$ удовлетворява II.1-II.3 и условията на теорема 2.1. Тогава за всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$ съществува силно решение $u \in W$ на задача А, при което $u_x \in L_2(\mathcal{D})$, $u_y \in L_2(\mathcal{D})$.

Доказателство. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $S_\sim \cap \{n_2 > 0\} = \emptyset$.

Случай 2, т.е. когато $S_\sim \cap \{n_2 > 0\} \neq \emptyset$, ще разгледаме по-късно, като го сведем към случай 1. Ще отбележим, че такъв случай имаме в пример 2.4 /в края на § 2.1/.

И така, засега предполагаме, че $S_\sim \cap \{n_2 > 0\} = \emptyset$ т.е.

$$/2.33/ \qquad \{ y = Y(x),\ Y(x) < \infty \} \subset S_0 \cup S_{00}.$$

От оценка /2.15/ е ясно, че е достатъчно да докажем съществуване на силно решение на задача А за множество от функции, които са навсякъде гъсто в $L_2(\mathcal{D})$. Ние ще направим това за множеството от функциите от $L_2(\mathcal{D})$, с ограничен носител.

Нека функцията $f \in L_2(\mathcal{D})$ и е с ограничен носител. Тогава $\hat{f} = (\alpha f, f) \in L_2(\mathcal{D})$ също е с ограничен носител. Според теорема 2.1 и лема 1.6 съществуват функции $u_1, u_2 \in L_2(\mathcal{D})$ и частично гладки функции u_{1k}, u_{2k}, такива че

$$\operatorname{supp} u_{ik} \subset \{ r \le 2^{k+1} \}, \quad \| u_{ik} - u_i \|_0 \to 0,$$

/2.34/ $$\left\| \begin{pmatrix} K & \alpha \\ -M\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k} \\ K \partial_1 u_{1k} + M \partial_2 u_{2k} + d_1 u_{1k} + d_2 u_{2k} - f \end{pmatrix} \right\| \le \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} .$$

Освен това

/2.35/ $n_2 u_{1k} - n_1 u_{2k} = 0$ в/у S_0 ; $u_{1k} = 0$, $u_{2k} = 0$ в/у S_{00}.

Ако означим

$$v_{1k} = \partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}, \quad v_{2k} = K \partial_1 u_{1k} + M \partial_2 u_{2k} + d_1 u_{1k} + d_2 u_{2k} - f,$$

$$\omega_{1k} = K v_{1k} + \alpha v_{2k}, \quad \omega_{2k} = -M\alpha v_{1k} + v_{2k},$$

от /2.34/ следва

$$\| \omega_{1k} \|_0 \le (k \ln k)^{-\frac{1}{2}}, \quad \| \omega_{2k} \|_0 \le (k \ln k)^{-\frac{1}{2}} .$$

Тъй като

$$v_{1k} = \frac{\omega_{1k} - \alpha \omega_{2k}}{M\alpha^2 + K}, \quad v_{2k} = \frac{K \omega_{2k} + M\alpha \omega_{1k}}{M\alpha^2 + K},$$

използувайки неравенство /2.5/ получаваме

/2.36/ $$\| r (\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}) \|_0 \le C (k \ln k)^{-\frac{1}{2}},$$

/2.37/ $$\| K \partial_1 u_{1k} + M \partial_2 u_{2k} + d_1 u_{1k} + d_2 u_{2k} - f \|_0 \to 0, \quad k \to \infty .$$

За $(x,y) \in \overline{\mathcal{D}}$ дефинираме

/2.38/ $$\Psi_k(x,y) = \int_{Y(x)}^{y} u_{2k}(x,t)\, dt .$$

Понеже функциите u_{2k} са с ограничени носители, интегралът в същност е в крайни граници и функциите ψ_k също са с ограничени носители.

Л е м а 2.1. Нека функциите $v_k \in L_2(\mathcal{D})$ са с ограничени носители и $\|\tau v_k\|_0 \to 0$ при $k \to \infty$. Тогава при $k \to \infty$

$$\Big\| \int_{Y(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt \Big\|_0 \to 0 .$$

Доказателство. Нека $0 \neq x \in (x_1, x_2)$. Тогава

$$J_k = \int_{y(x)}^{Y(x)} \Big[\int_{Y(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt \Big]^2 dy = -y(x)\Big[\int_{Y(x)}^{y(x)} v_k(x,t)\,dt \Big]^2 -$$

$$-2 \int_{y(x)}^{Y(x)} y\, v_k(x,y) \Big[\int_{Y(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt \Big] dy = J_{1k} + J_{2k} ,$$

$$J_{2k} \le 2 \Big\{ \int_{y(x)}^{Y(x)} (\tau v_k)^2 dy \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \int_{y(x)}^{Y(x)} \Big[\int_{Y(x)}^{y} v_k(x,t)\,dt \Big]^2 dy \Big\}^{\frac{1}{2}} .$$

Там, където $y(x) \ge 0$ имаме $J_{1k} \le 0$. Обаче, ако $y(x) < 0$, то $|y(x)| \le q_1 x$, така че в този случай

$$J_{1k} \le |y(x)| \int_{y(x)}^{Y(x)} \frac{dt}{x^2+t^2} \int_{y(x)}^{Y(x)} (\tau v_k)^2\, dt \le$$

$$\le \Big| \frac{y(x)}{x} \Big| \Big(\operatorname{arctg} \frac{Y(x)}{|x|} - \operatorname{arctg} \frac{y(x)}{|x|} \Big) \times \int_{y(x)}^{Y(x)} (\tau v_k)^2 dt .$$

По този начин показахме, че

$$\Big\| \int_{Y(x)}^{y} v_k\, dt \Big\|_0^2 = \int_{x_1}^{x_2} J_k\, dx \le 2\pi q_1 \|\tau v_k\|^2 + 2\|\tau v_k\|_0 \Big\| \int_{Y(x)}^{y} v_k\, dt \Big\|_0 ,$$

т.е. лема 2.1 е доказана.

Понеже разглеждаме случай 1, при който е изпълнено /2.33/, от /2.35/ получаваме

$$\partial_1 \psi_k - u_{1k} = \int_{Y(x)}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]\, dt . \tag{2.39}$$

Използувайки лема 2.1, оттук следва $\| \partial_1 \psi_k - u_1 \|_0 \to 0$, $k \to \infty$. Ясно е също, че $\| \partial_2 \psi_k - u_2 \|_0 \to 0$, $k \to \infty$.

Да разгледаме граничните условия. Очевидно $\psi_k = 0$ върху $S^0 \cap \{n_2 > 0\}$. Понеже $S_\sim$ е свързана част от границата, $S^0 \cap \{n_2 \le 0\}$ е обединение от не повече от две свързани части. Нека $(x(s), y(s))$ е точка от една от тях. Тогава от /2.35/ и /2.39/ получаваме

$$\frac{d\psi_k}{ds}(x(s), y(s)) = \frac{dx}{ds} \int_{Y(x(s))}^{y(s)} [\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k}]\, dt , \tag{2.40}$$

така че

$$\psi_k(x(s), y(s)) - \psi_k(x(s_1), y(s_1)) = -\int_{x(s_1)}^{x(s)} \int_{y(x)}^{Y(x)} [\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k}]\, dt\, dx .$$

Ако тази част на $S^0 \cap \{n_2 \le 0\}$, която разглеждаме, е ограничена, тя има обща точка с $S^0 \cap \{n_2 > 0\}$, в която $\psi_k = 0$. Ако пък тази част е неограничена, от ограничеността на носителя на ψ_k следва, че върху нея има точка, в която $\psi_k = 0$. Тоест и в двата случая можем да изберем s_1 така, че $(x(s_1), y(s_1))$ да е точка от същата свързана част и $\psi_k(x(s_1), y(s_1)) = 0$. Понеже по предположение $(0,0) \bar{\in} S_0 \cup S_{00}$, има такова $\delta > 0$, че

$$|\psi_k| \le \int_{D \cap \{r \ge \delta\}} |\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k}|\, dx\, dy .$$

Оттук и от /2.36/ следва

$$|\psi_k| \le \left[2\pi \int_{\delta}^{2^{k+1}} \frac{r\, dr}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{D} r^2 (\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k})^2 dx\, dy \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{C\,(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k \ln k)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{2C}{\sqrt{\ln k}} ,$$

където константата C не зависи от k . Така получихме, че

/2.41/ $\psi_k \rightrightarrows 0$ върху $S_0 \cup S_{00}$, при $k \to \infty$.

Нека G е ограничена подобласт на $\mathcal{D}$ и G' е съответната й област от оценка /2.17/. Функциите ψ_k са частично гладки в G' и редиците $\partial_1 \psi_k$ и $\partial_2 \psi_k$ са сходящи в $L_2(G)$. Тогава от оценка /2.17/, използувайки /2.41/, следва, че съществува функция $\psi \in L_2(G')$, за която $\|\psi_k - \psi\|_{L_2(G)} \to 0$

Ясно е, че $\partial_1 \psi = u_1$ и $\partial_2 \psi = u_2$ в G. Лесно се получава, че $\psi \in W$ и $\psi = 0$ върху S^0, в смисъл на L_2 върху всяка ограничена част на S^0.

Нека функцията $v \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2_*$ е нула в околност на $S_\sim$. Тогава

$$(\psi_k, L^*v) - (f,v) = \Big(\psi_k, K v_{xx} + M v_{yy} - \partial_1(\alpha_1 v) - \partial_2(\alpha_2 v)\Big) -$$

$$-(f,v) = (K\partial_1 u_{1k} + M\partial_2 u_{2k} + \alpha_1 u_{1k} + \alpha_2 u_{2k} - f, v) +$$

$$+ \Big(K[u_{1k} - \partial_1 \psi_k], \partial_1 v\Big) + \Big(\alpha_1[\partial_1 \psi_k - u_{1k}], v\Big) +$$

$$+ \int\limits_S \psi_k \Big[K n_1 \partial_1 v + M n_2 \partial_2 v - \alpha_1 n_1 v - \alpha_2 n_2 v\Big] ds -$$

$$- \int\limits_S [K n_1 u_{1k} + M n_2 u_{2k}]\, v\, ds.$$

Да разгледаме последния интеграл. Върху S_{00} имаме $u_{1k} = 0$, $u_{2k} = 0$. Върху $S_\sim$ и върху нехарактеристическите части на S_0 имаме $v = 0$. Върху характеристическите части на S_0 е изпълнено $n_2 u_{1k} - n_1 u_{2k} = 0$, така че и тук $K n_1 u_{1k} + M n_2 u_{2k} = 0$. Следователно, този интеграл е равен на нула. Върху компактното множество $\operatorname{supp} v$ останалите изрази в дясно от равенството клонят към нула, а $\psi_k \to \psi$ в L_2. Така че за всички функции $v \in \dot{W}^2_*$, които са нула в околност на $S_\sim$ е изпълнено

$$(\psi, L^* v) = (f, v).$$

Сега ще докажем, че ψ е силно решение на задача А. Да означим $w_k = \phi_k \psi$, където функциите ϕ_k са дефинирани в § 1.4. Лесно се показва, че за всички $v \in \dot{W}^2_*$, които са нула в околност на $S_\sim$ е изпълнено $(w_k, L^* v) = (f_k, v)$, където

$$f_k = \phi_k f + 2K(\phi_k)_x u_1 + 2M(\phi_k)_y u_2 +$$
$$+ \left[K(\phi_k)_{xx} + M(\phi_k)_{yy} + \alpha_1 (\phi_k)_x + \alpha_2 (\phi_k)_y\right] \psi .$$

Ще докажем, че функцията w_k , която е с ограничен носител, е силно решение. Да разгледаме ограничена подобласт на $\mathcal{D}$, съдържаща $supp\ \phi_k$. В околност на нейната вътрешна спрямо $\mathcal{D}$ граница имаме $w_k \equiv 0$. Да разгледаме останалата част от границата й. Върху $S_\sim$ няма гранични условия. Върху $S^*_\sim$ няма спрегнати гранични условия. При това, $w_k = 0$ върху $S \setminus S_\sim$, така че в тази област са изпълнени условията на теорема 1.6 и забележката към нея. Следователно функцията w_k е силно решение в тази област. Тъй като можем да продължим апроксимиращите функции като нула в останалата част на $\mathcal{D}$ и те да останат от $\dot{W}^2$, получаваме: w_k е силно решение на задача А за $f = f_k$. Понеже при $k \to \infty$

$$\left\| \frac{w_k - \psi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right\| \le 2 \left\| \frac{\psi}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right\|_{L_2(\mathcal{D} \cap \{r \ge 2^k\})} \to 0 ,$$

остава да се докаже, че $\| f_k - f \| \to 0$. Обаче

$$|\partial_i \phi_k| \le 2^{-k} |\phi'(r 2^{-k})|,$$

$$|\partial^2_{ij} \phi_k| \le 2^{-2k} \left[|\phi''(r . 2^{-k})| + 2 |\phi'(r 2^{-k})| \right] .$$

Понеже f е с ограничен носител, има такова K_0, че $\phi_K f \equiv f$ за $K \geq K_0$. Означавайки $\mathcal{D}^K = \mathcal{D} \cap \{2^K \leq r \leq 2^{K+1}\}$ получаваме

$$\|f_K - f\| \leq C\left[2^{-K}\|\psi\|_{L_2(\mathcal{D}^K)} + \|u_1\|_{L_2(\mathcal{D}^K)} + \|u_2\|_{L_2(\mathcal{D}^K)}\right] \leq$$

$$\leq C\left[4\left\|\frac{\psi}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\|_{L_2(\mathcal{D}^K)} + \|u_1\|_{L_2(\mathcal{D}^K)} + \|u_2\|_{L_2(\mathcal{D}^K)}\right] \to 0,$$

при $K \to \infty$. С това доказахме, че ψ е силно решение на задача А. Случай 1 е разгледан напълно.

Разглеждаме случай 2: $S_1 = S \cap \{n_2 > 0\} \neq \emptyset$. Ясно е, че S_1 е ограничено и свързано множество и $S_1 \subset \{x > 0, y < 0\}$. При това в ляво от S_1 няма други части от $S \cap \{n_2 > 0\}$. Наистина, ако има такива, върху тях $\frac{dy}{dx} = -\frac{n_1}{n_2} \leq \frac{1}{a}$. Обаче

/2.34/ $\frac{dy}{dx} > \frac{1}{a}$ върху S_1,

така че ъгълът на тяхното пресичане, разглеждан откъм областта, е по-голям от π, а това противоречи на предположенията за ъглите в теорема 2.1. И така: $S_1 = \{0 < x_1 \leq x \leq x', y = Y(x)\}$, където $x_1 < x' \leq x_2$. За $x_1 \leq x \leq x'$ ще изменим дефиницията на функциите ψ_K.

Най-напред ще покажем, че в областта

$$\{x_1 \leq x \leq x', y(x) \leq y \leq Y(x)\}$$

функциите u_{1K} и u_{2K} са от C^1. Наистина, тъй като върху S_1 няма гранични условия, то очевидно е така, ако в точка $(x', Y(x'))$ завършва крива от $S_\sim^*$ /вж.доказателствата на теореми 1.2 и 1.3/. Ако пък в тази точка завършва крива от $S_0 \setminus S_\sim^*$, тя е двукратно гладка и понеже $S' = \emptyset$, то $\mathcal{N}(x) = \{u : n_2(x)u_1 - n_1(x)u_2 = 0\} \in C^1$. Освен това за $x_1 \le x \le x'$ имаме $Y(x) \le Y(x') \le 0$ и следователно матриците A^1 и A^2 са от C^1. Така че и в този случай u_{1k} и u_{2k} са от C^1 /вж.доказателствата на теореми 1.1 и 1.3/.

Сега ще продължим функциите u_{1k} и u_{2k} в областта

$$\mathcal{D}' = \{x_1 \le x \le x',\ Y(x) \le y \le A = Y(x')\}.$$

Отначало ще отбележим, че функцията $Y'(x)$ е непрекъсната с изключение на краен брой точки и е изпълнено/2.34/. Така че обратната функция $X(y)$ е непрекъсната. Освен това производната й $X'(y)$ е непрекъсната с изключение на краен брой точки, при което $0 < X'(y) \le a$. Предимството на функцията $X(y)$ пред $Y(x)$ е в това, че $Y'(x)$ може да расте неограничено в някои точки.

За $(x,y) \in \mathcal{D}'$ дефинираме

$$u_{1k}(x,y) = u_{1k}(X(y), y),$$

$$u_{2k}(x,y) = u_{2k}(X(y), y) + [x - X(y)]\,V_k(y),$$

като сме означили

$$V_k(y) = \frac{d}{dy}\left[u_{1k}(X(y), y)\right].$$

Целта на тази дефиниция е функциите u_{1k} и u_{2k} да са непрекъснати в $\overline{\mathcal{D}'} \cup \overline{\mathcal{D}}$ и в $\mathcal{D}'$ да бъде изпълнено $\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k} = 0$.

За $(x,y) \in \mathcal{D} \cap \{x < x'\}$ дефинираме

$$\psi_k(x,y) = \int_A^y u_{2k}(x,t)\,dt + \varphi_k(x),$$

където функциите $\varphi_k \in C^1$ ще определим допълнително. За

$(x,y)\in\mathcal{D}\cap\{x\geq x'\}$ функциите ψ_k определяме съгласно /2.38/. Ако $x'<x_2$, за да бъдат така дефинираните функции непрекъснати при $x=x'$ лесно се показва, че е необходимо и достатъчно $\varphi_k(x')=0$. В случай, че $x'=x_2$ ние полагаме $\varphi_k(x')=0$. Очевидно $\partial_2\psi_k=u_{2k}$. Освен това за $x\neq x_i=X(y_i)$ / y_i са точките на прекъсване на $X'(y)$ /имаме

$$\partial_1\psi_k-u_{1k}=\int_{Y(x)}^{y}[\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k}]dt+\varphi_k'(x)-u_{1k}(X(A),A).$$

Нека $\varphi_k(x')=0$ и $\varphi_k'(x)=u_{1k}(X(A),A)=u_{1k}(x',Y(x'))$.

т.е. $\varphi_k(x)=(x-x')u_{1k}(x',Y(x'))$. Тогава така определената функция ψ_k е непрекъсната в $\overline{\mathcal{D}}$ и има частично непрекъснати първи производни в $\mathcal{D}$

$$\partial_1\psi_k=u_{1k}+\int_{Y(x)}^{y}[\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k}]dt\,,\quad \partial_2\psi_k=u_{2k}. \tag{2.42}$$

По-нататък доказателството продължава както при случай 1. Ще отбележим само, че представянето /2.40/ е налице, понеже е в сила /2.42/. Освен това от $\varphi_k(x')=0$ следва, че $\psi_k(x',Y(x'))=0$. Така че ако $x'=x_2$, то за точка $(x(s_1),y(s_1))$ /вж. случай 1/ ще вземем точка $(x',Y(x'))$. Ако пък $x'<x_2$ разсъжденията продължават както по-рано.

Теорема 2.3 е доказана.

Теореми 2.2 и 2.3 могат да се обединят в

Т е о р е м а 2.4. Нека границата на областта $\mathcal{D}$ удовлетворява II.1-II.3 и условията на теорема 2.1. Тогава за всяка функция $f\in L_2(\mathcal{D})$ задача A има едно и само едно силно решение $u\in W$, при което $u_x\in L_2(\mathcal{D})$, $u_y\in L_2(\mathcal{D})$. Изпълнена е оценката

$$\left\|\frac{u}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\|+\|u_x\|+\|u_y\|\leq C\|Lu\|\,,\ \forall u\in\dot{W}^2. \tag{2.15}$$

З а б е л е ж к а 2.2. Лесно се вижда, че в разгледаните в края на § 2.1 примери всички условия на теорема 2.4 са налице.

Във връзка с дадената от нас дефиниция на силно решение на задача A, ще докажем следната важна

Л е м а 2.2. Нека функцията $u \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ удовлетворява граничните условия /2.13/. Тогава ако $u \in \check{W}$, $\partial_1 u \in L_2(\mathcal{D})$, $\partial_2 u \in L_2(\mathcal{D})$, $Lu \in L_2(\mathcal{D})$ функцията u е силно решение на задача A.

Доказателство. Разглеждаме функциите $u_k = \phi_k u$. Те са от $\overset{\circ}{W}{}^2$. Обаче в края на доказателството на теорема 2.3 показахме, че ако $Lu \in L_2$, $u \in \check{W}$, $\partial_i u \in L_2$, то

$$\| L(\phi_k u) - Lu \| \to 0, \quad k \to \infty .$$

Така че u е силно решение на задача A с апроксимираща редица $\{u_k\}$.

Сега ще отговорим на въпроса: защо е естествено да търсим силното решение на задача A в $\check{W}$, а не в $L_2(\mathcal{D})$. Ще започнем със забележката, че ако областта $\mathcal{D}$ е такава, че

$$Y(x) - y(x) \leq C, \quad \forall x \in (x_1, x_2),$$

навсякъде пространството $\check{W}$ може да го заменим с $L_2(\mathcal{D})$, т.е. теорема 2.4 може да се уточни. Обаче в редица случаи това не може да се направи. Наистина, да означим за $\beta \geq 0$

$$W_\beta = \left\{ u : \frac{[\ln(2+x^2+y^2)]^\beta}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot u \in L_2(\mathcal{D}) \right\} .$$

Очевидно $L_2(\mathcal{D}) \subset W_\beta \subseteq W_0 = W$.

Л е м а 2.3. Нека областта $\mathcal{D}$ е такава, че има ъгъл с ненулев раствор, който се съдържа в нея. Тогава измежду класовете W_β, класът W е единственият, в който за всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$ съществува силно решение на задача Λ.

Доказателство. За всяко $\beta > 0$ ще построим силно решение на задача Λ с $f = f_\beta \in L_2(\mathcal{D})$, което не принадлежи на W_β . Нека ъгълът е с връх в точка (x_0, y_0) и с големина θ_1 $(0 < \theta_1 < 2\pi)$. Нека $\chi(\theta) \in C^2[0, 2\pi]$, като

$$\chi \equiv 0 \text{ в } \left[0, \frac{\theta_1}{5}\right] \cup \left[\frac{4\theta_1}{5}, 2\pi\right], \quad \chi \equiv 1 \text{ в } \left[\frac{2\theta_1}{5}, \frac{3\theta_1}{5}\right].$$

Нека функцията $\varphi(x, y) \in C^2(R^2)$ е нула за $\rho \le 2$ и единица за $\rho \ge 3$, където $\rho = \left[1 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Нека

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{(y - y_0)\cos\theta_0 + (x - x_0)\sin\theta_0}{(x - x_0)\cos\theta_0 - (y - y_0)\sin\theta_0} ,$$

където θ_0 е ъгълът на въртене на оста Ox в положителна посока, до съвпадане с първото рамо на ъгъла. Разглеждаме функциите

$$u_\gamma(x, y) = \varphi(x, y)\,\chi(\theta)\left[\ln(1 + \rho^2)\right]^{-\gamma}, \ \gamma > 0,$$

които са от $C^2(\overline{\mathcal{D}})$ и удовлетворяват граничните условия /2.13/.
Лесно се показва, че

$$|\partial_i \rho| \le 1, \ |\partial_i \theta| \le 2\rho^{-1}, \ |\partial^2_{ij} \rho| \le 2\rho^{-1}, \ |\partial^2_{ij} \theta| \le 8\rho^{-2}.$$

Окончателно имаме

$$|\partial_i u_\gamma| \le C\rho^{-1}\left[\ln(1 + \rho^2)\right]^{-\gamma},$$

$$|\partial^2_{ij} u_\gamma| \le C\rho^{-2}\left[\ln(1 + \rho^2)\right]^{-\gamma}.$$

Ние искаме така да определим параметъра γ , че да са изпълнени

1. $u_\gamma \in W$,
2. $\partial_i u_\gamma \in L_2(\mathcal{D})$,
3. $L u_\gamma \in L_2(\mathcal{D})$,
4. $u_\gamma \notin W_\beta$.

Условието 1 ще бъде изпълнено, ако

$$\|u_\gamma\|^2_W = \int_{\mathcal{D}} \frac{u_\gamma^2}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy \le 2\pi C_1 \int_2^\infty \left[\ln(1 + \rho^2)\right]^{-\gamma} \frac{\rho\,d\rho}{1 + \rho^2} < \infty,$$

Последното неравенство е изпълнено, ако $2\gamma > 1$. Лесно се проверява, че ако $2\gamma > 1$ са изпълнени и условия 2 и 3. След прости пресмятания се вижда, че условие 4 е изпълнено, ако $2\gamma \le 1 + 2\beta$. И така, нека β е произволно положително число. Избираме $2\gamma = 1 + 2\beta > 1$. Тогава условията 1–4 са изпълнени. От първите три от тях и лема 2.2 следва, че u_γ е единственото /според теорема 2.2/ силно решение в W на задача А с $f = Lu_\gamma \in L_2(\mathcal{D})$. Обаче $u_\gamma \bar{\in} W_\beta$, $W_\beta \subset W$, така че задача А няма силно решение в W_β за $f = Lu_\gamma \in L_2(\mathcal{D})$.
Лема 2.3 е доказана.

З а б е л е ж к а 2.3. В същност построените в лема 2.3 функции u_γ показват, че оценка /2.15/ в общия случай не може да бъде подобрена в класовете W_β .

§ 2.4. Случай $\alpha_0 \neq 0$

С оглед да не се повтаряме, в този случай ще набележим само някои детайли. По-подробно изложение може да се види в[73].

Да разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{l} u_2 - \partial_2 u_0 = 0, \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0, \\ K\partial_1 u_1 + M\partial_2 u_2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_0 u_0 = f. \end{array} \right.$$

Записвайки я в матричен вид и умножавайки я отляво с матрицата

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & K & a \\ 0 & -Ma & 1 \end{pmatrix},$$

получаваме симетричната система

/2.43/ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ka & K \\ 0 & K & -Ma \end{pmatrix} \partial_1 \hat{u} + \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 \\ 0 & -K & Ma \\ 0 & Ma & M \end{pmatrix} \partial_2 \hat{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a\ell_0 & a\ell_1 & a\ell_2 \\ \ell_0 & \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} \hat{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ af \\ f \end{pmatrix}$$

Функцията $d(x,y)$ ще определим така:

$$d(x,y) = \begin{cases} \eta(qx+y) & , x \geq 0, \\ \eta y, & x < 0, \end{cases} \qquad q > \frac{4K_1}{K_0}\left[\frac{K'(0)}{M'(0)}\right]^{\frac{2}{3}},$$

а константата $\eta > 0$ ще фиксираме допълнително. За така определената функция d е изпълнено

/2.44/ $$d(x,y) \geq c\,z\,, \quad c > 0\,,$$

навсякъде, където $Ma^2 + K > 0$. Да разгледаме

$$\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}' = \begin{pmatrix} d_y & a\ell_0 & d+\ell_0 \\ a\ell_0 & K' - Ka_x + 2a\ell_1 & \ell_1 + a\ell_2 - Ma_y \\ d+\ell_0 & \ell_1 + a\ell_2 - Ma_y & (Ma)_x + 2\ell_2 \end{pmatrix}.$$

Имайки пред вид неравенства /2.4/, забелязваме че $\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}'$ ще бъде положително определена, ако $\det(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}') \geq c > 0$.
Да вземем произволен правоъгълник $\Pi = \{|x| \leq h,\ |y| \leq H\}$.
Тогава в $\Pi \cap [R^2 \setminus \{x<0, y<0\}]$ имаме

$$\det(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}') \geq 3b_0 d_y + b_1 d^2 + b_2 d + b_3,$$

където константите $b_0 > 0$ и b_1 можем да изберем независимо от ℓ_ν , ℓ_1 и ℓ_2 , а b_2 и b_3 можем да вземем достатъчно малки по модул, ако $|\ell_\nu|$, $\nu = 0,1,2$ и $\ell_1 - \ell_2$ са достатъчно малки. Да изберем $\eta > 0$ така малка, че $|b_1| d^2 \leq b_0 d_y$ и да я фиксираме. Тогава ако $|\ell_\nu| \leq \lambda_\nu$, $\nu = 0,1,2$; $\ell_1 - \ell_2 < \varepsilon'$ и положителните числа λ_ν и ε' са достатъчно малки, то

$\det(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}') \geq b_0 \eta$, т.е. матрицата $\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}'$ е положително определена. Така получаваме, че системата /2.43/ е положително симетрична в $R' \cap \Pi$. Нека областта $\mathcal{D}$ се съдържа в $R' \cap \Pi$.

Аналогично на § 2.1 за система /2.43/ се изследва граничната матрица и се определят допустими гранични условия. Техният вид върху съответната част на S зависи от знаците на изразите $Kn_1^2 + Mn_2^2$, $an_1 + n_2$, n_2.
Съответната гранична задача за система /2.43/ има слабо решение за всяка дясна част от $L_2(\mathcal{D})$ и силното й решение е единствено. При доказателството за съвпадане на слабото и силно решение се появява една особеност в сравнение с § 2.1. А именно: рангът на граничната матрица не се запазва в околност на характеристиките на уравнение /2.1/. Така че, ако върху тях се задават гранични и спрегнати гранични условия /както е при $n_2 < 0$, $an_1 + n_2 > 0$/, резултатите на Пейзер [6] не могат да бъдат използувани. Обаче в този случай може да се докаже, че граничната матрица зависи само от нормалната на границата променлива, така че е приложима нашата теорема 1.1. Наистина, да разгледаме напр. парче от характеристика в $\{x>0, y<0\}$. Понеже $M(x) \neq 0$, то ще се зададе с уравнение $x = \varphi(y)$ като

$$\varphi'(y) = -\left[\frac{-K(y)}{M(\varphi(y))}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Да "изправим" парчето до отсечка от $y_1 = 0$ със смяната $y_1 = x - \varphi(y)$, $x_1 = y$. Тогава нормалната матрица A^{y_1} ще приеме вида

$$A^{y_1} = \begin{pmatrix} \varphi' d & 0 & 0 \\ 0 & Ka + \varphi' K & K - \varphi' M \\ 0 & K - \varphi' M & -Ma - \varphi' M \end{pmatrix}$$

и могат да се намерят такива неособени матрици H_1 и H_2 , че

/2.45/ $$H_1 A^{y_1} H_2 = diag[1,1,y_1].$$

За да бъдат елементите на H_1 и H_2 частично гладки е достатъчно да поискаме $M \in C^2$. От /2.45/ е ясно, че рангът на граничната матрица не се запазва в околност на $y_1 = 0$. В другите случаи доказателството за съвпадане на слабото и силното решение е аналогично на това в § 2.1. Пренасянето на получените за системата резултати за уравнението /2.1/ е аналогично на това в §§ 2.2 и 2.3. Естествено, използува се и неравенство /2.4/.

§ 2.5 Други гранични задачи

Ще се спрем накратко върху въпроса за единствеността на слабото решение на задача А. Той е еквивалентен с въпроса за съществуване на силно решение за всяка функция $g \in L_2(\mathcal{D})$ на следната

З а д а ч а A^*. Да се намери решение в $\mathcal{D}$ на уравнението $L^* v = g$, удовлетворяващо спрегнатите на /2.13/ гранични условия.

За конкретност да разгледаме пример 2.3. Граничните условия /2.13/ в този случай са:

$$u = 0 \text{ върху } \Gamma_5 \quad , u \sim \text{ върху } \Gamma_4 ,$$

а спрегнатите са

$$v = 0 \text{ върху } \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \quad , \quad (K n_1^2 + M n_2^2)\,\partial v/\partial \nu = 0 \quad \text{ върху } \Gamma_4 ,$$

така че в този случай $\dot{W}_*^2 \subset \dot{W}^2$, като включването е строго. Обаче от това леко се доказва /напр.,при $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$ /, че задача A^* има силно решение не за всяка функция $g \in L_2(\mathcal{D})$. Тоест, задачата разгледана в пример 2.3 има повече от едно слабо решение, въпреки че според теорема 2.4 тя има едно и само едно силно.

Сега ще изследваме друга гранична задача. За простота предполагаме, че $\mathcal{L}_0 \equiv 0$. Да извършим смяна на независимите променливи $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ и да означим

$$K_1(y_1) = -K(-y_1), \quad M_1(x_1) = -M(-x_1).$$

Тогава спрямо променливите (x_1, y_1) функциите K_1 и M_1 имат всички свойства, които имаха K и M спрямо (x, y). Ако умножим отляво системата /2.2/ с матрицата

$$E_1 = \begin{pmatrix} K & a_1 \\ -Ma_1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаваме

$$/2.46/ \quad \hat{L}_1 u \equiv \begin{pmatrix} K_1 a_1 & K_1 \\ K_1 & -M_1 a_1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} -K_1 & M_1 a_1 \\ M_1 a_1 & M_1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \begin{pmatrix} a_1 \mathcal{L}_1 & a_1 \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix},$$

т.е. точно системата /2.3/ при новите означения и с новата помощна функция a_1. Тогава определяйки

$$a_1(x_1, y_1) = \begin{cases} m_1 & x_1 \geq 0,\ y_1 \leq 0, \\ m_2 & x_1 \leq 0,\ y_1 > 0, \\ m_2 + (m_1 - m_2)\dfrac{x_1}{x_1 + y_1}, & x_1 > 0,\ y_1 > 0, \end{cases}$$

от резултатите в § 2.1 следва, че има област $R_1' \subset R^2 \setminus \{x_1 < 0, y_1 < 0\}$ от вида на R', в която система /2.46/ е положително симетрична, $M_1 a_1^2 + K_1 \geq c\tau(x_1, y_1)$ $(c > 0)$ и в която се съдържа част от характеристиката на уравнението /2.1/ през точка $(0,0)$. Нека $\mathcal{D}_1 \subset R_1'$ е произволна област с частично гладка граница $\partial\mathcal{D}_1$. Тогава допустими гранични условия за система /2.46/ ще бъдат условията /2.11/, като в определенията на съответните криви $S_{10}, \ldots, S_{1\sim}$, участвуват K_1, M_1 и a_1. Като се върнем към старите променливи (x,y), получаваме че за всички функции $u \in \dot{W}_2^2(\mathcal{D}_1)$, удовлетворяващи условията

$$
/2.47/ \quad \left|\begin{array}{ll}
u = 0 & \text{върху } S_{10}, \\
u = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{върху } S_{100}, \\
a_1 u_x + u_y = 0 & \text{върху } S_1', \\
u \sim & \text{върху } S_{1\sim},
\end{array}\right.
$$

е в сила оценката

$$
/2.48/ \qquad \|u_x\|_{L_2(\mathcal{D}_1)} + \|u_y\|_{L_2(\mathcal{D}_1)} \le C \|Lu\|_{L_2(\mathcal{D}_1)} .
$$

Тук сме означили

$$S_{10} = \partial\mathcal{D}_1 \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 \le 0,\ a_1 n_1 + n_2 \le 0\},$$

$$S_{100} = \partial\mathcal{D}_1 \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 > 0,\ a_1 n_1 + n_2 < 0\},$$

$$S_1' = \partial\mathcal{D}_1 \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 < 0,\ a_1 n_1 + n_2 > 0\},$$

$$S_{1\sim} = \partial\mathcal{D}_1 \cap \{Kn_1^2 + Mn_2^2 \ge 0,\ a_1 n_1 + n_2 > 0\}.$$

Нека Γ е парче от характеристика на уравнението /2.1/ и $(0,0) \in \Gamma$. Нека $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ са ограничени области, за които:

$$\mathcal{D} \subset R',\ \mathcal{D}_1 \subset R_1',\ \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset,\ \Gamma = \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 .$$

Да означим $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \Gamma \cup \mathcal{D}_1$ /вж.Рис. 2.8/. Разглеждаме

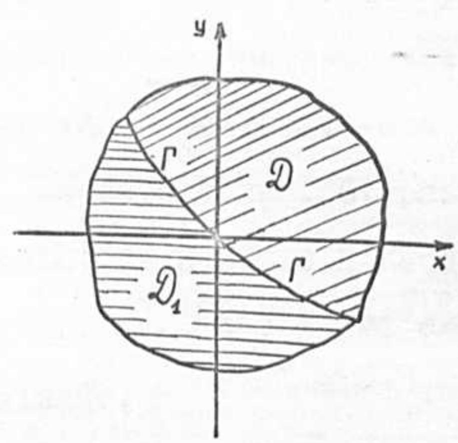

Рис. 2.8.

З а д а ч а В. Да се намери в областта $\mathcal{D}'$ решение на уравнението /2.1/, удовлетворяващо условието

$$
/2.49/ \qquad \left| \begin{array}{ll}
u = 0 & \text{върху } S_0 \cup S_{10}, \\
u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{върху } S_{00} \cup S_{100}, \\
a u_x + u_y = 0 & \text{върху } S', \\
a_1 u_x + u_y = 0 & \text{върху } S_1', \\
u \sim & \text{върху } S_\sim \cup S_{1\sim}.
\end{array} \right.
$$

Ясно е, че $S_0 \cup S_{00} \neq \emptyset$ и $S_{10} \cup S_{100} \neq \emptyset$. Така че от оценки /2.14/ и /2.48/ получаваме

$$
/2.50/ \qquad \|u\|_{W_2^1(\mathcal{D}')} \leq C \|Lu\|_{L_2(\mathcal{D}')}
$$

за всяка функция $u \in W_2^2(\mathcal{D})$, удовлетворяваща /2.49/.

Така че силното решение на задача В е единствено и ако съществува, то е от $W_2^1(\mathcal{D}')$. Обаче оттук може да се докаже, че не за всички $f \in L_2(\mathcal{D}')$ задача В има силно решение. Да допуснем противното и да разгледаме функцията $u_0 \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap W^2$. Да определим $f_0 = Lu_0$ в $\mathcal{D}$ и $f_0 = 0$ в $\mathcal{D}_1$. По предположение съществува силно решение на задача В и за $f = f_0$. Неговите рестрикции върху $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ ще бъдат силни решения на съответните задачи. Но за тях ние имаме теореми за единственост. Следователно $u = u_0$ в $\mathcal{D}$, и $u = 0$ в $\mathcal{D}_1$. Избирайки u_0 така, че $u \bar{\in} W_2^1(\mathcal{D}')$ достигаме до противоречие с допускането. Ясно е защо се получи такъв резултат: ние можем да решим двете задачи в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ самостоятелно. От разгледанinfият пример и от оценка /2.50/ следва, че в която и да е навсякъде гъста в $L_2(\mathcal{D}')$ съвкупност /напр. $C_0^\infty(\mathcal{D}')$ / има елемент, за който задача В няма силно решение.

В някои случаи задача В има слабо решение за всички $f \in W_2^{-1}(\mathcal{D}')$. Например, ако $\partial\mathcal{D}' = S_0 \cup S_{10}$ и върху $\partial\mathcal{D}'$ няма характеристики, лесно се извежда априорна оценка от вида на /2.50/ за спрегнатата задача, от която такъв резултат следва веднага.

ГЛАВА III

ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА ИЗРАЖДАЩИ СЕ МНОГОМЕРНИ ХИПЕРБОЛИЧНИ УРАВНЕНИЯ

В тази глава се изследват гранични задачи в полупространството $x_m \geq 0,\ m \geq 3$, за класа уравнения

/3.1/
$$Lu \equiv K(x_m)u_{x_m x_m} - M(x_m)a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \alpha_i(x)u_{x_i} + \alpha_m(x)u_{x_m} + \alpha_0(x)u = f(x),$$

където $K(x_m)>0$ и $M(x_m)>0$ за $x_m>0$, а матрицата (a_{ij}) е симетрична и положително определена. Навсякъде в Гл.III по повтарящите се индекси се предполага сумиране от 1 до $m-1$.

Нека $\mathcal{D} \subset \{x_m \geq 0\}$ е произволна област, за която $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} x_m < \infty$. Условията за гладкост и ограниченост на коефициентите на /3.1/ са:

$$K \in C^1(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\bar{\mathcal{D}} \setminus \{x_m=0\}),\ M \in C^1(\bar{\mathcal{D}}),\ a_{ij} \in C^2(\bar{\mathcal{D}}),$$

$$\alpha_0 \in C(\bar{\mathcal{D}}),\ \alpha_i \in C^1(\bar{\mathcal{D}}),\ |\alpha_i| < \infty,\ i=0,\dots,m,$$

$$|\partial_m a_{ij}| < \infty,\ |\partial_i a_{ij}| < \infty,\ i=1,\dots,m-1.$$

Ако $\rho(\bar{\mathcal{D}}, \{x_m=0\})>0$, т.е. уравнение /3.1/ е строго хиперболично в , други условия върху коефициентите не налагаме.

Ако $\rho(\bar{\mathcal{D}}, \{x_m=0\})=0$ нека са изпълнени следните три условия:

III.1. Ако $M(0)=0$, то $M'(0)>0$.

III.2. Ако $K(0)=0$, съществува $\varepsilon>0$, за което

$$K' - 2\alpha_m > \varepsilon \quad \text{в} \quad \bar{\mathcal{D}} \cap \{x_m \leq \varepsilon\}.$$

III.3. Ако $K(0)=0$ и $M(0)=0$, съществува $\varepsilon_1>0$, за което

$$(1+\varepsilon_1)\left[\alpha_i\xi_i\right]^2\le M'\left(K'-2\alpha_m\right)a_{ij}\xi_i\xi_j,\ x\in\bar{\mathcal{D}}\cap\{x_m\le\varepsilon_1\},\ \xi\in R^{m-1}.$$

Ще отбележим, че ако областта $\mathcal{D}$ е ограничена, или ако коефициентите в уравнението /3.1/ зависят само от x_m, условията III.2 и III.3 добиват вида

III.2'. $K'-2\alpha_m>0$ при $x_m=0$.

III.3'. $\left[\alpha_i(x',0)\xi_i\right]^2<M'(0)\left[K'(0)-2\alpha_m(x',0)\right]a_{ij}(x',0)\xi_i\xi_j,\ \forall\xi\in R^{m-1}.$

§ 3.1. Постановка на задачата, априорни оценки и следствия от тях

Нека функцията $u\in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ удовлетворява уравнението /3.1/. Тогава функциите $u_0=u$, $u_i=\partial_i u$, $i=1,\dots,m-1$ удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} &u_m-\partial_m u_0=0,\\ /3.2/\qquad &\partial_i u_m-\partial_m u_i=0,\ i=1,\dots,m-1,\\ &K\partial_m u_m-Ma_{ij}\partial_i u_j+\alpha_i u_i+\alpha_m u_m+\alpha_0 u_0=f. \end{aligned}$$

Тя може да бъде записана в матричен вид

$$/3.3/\qquad \hat{A}_i\partial_i\hat{u}+\hat{A}_m\partial_m\hat{u}+\hat{B}\hat{u}=\hat{f},$$

където $\hat{u}=(u_0,\dots,u_m)$, $\hat{f}=(0,\dots,0,f)$, $\hat{A}_m=diag[-1,\dots,-1,K]$,

$$\hat{A}_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{i1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{i\,m-1}\\ 0 & -Ma_{i1} & \dots & -Ma_{i\,m-1} & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \alpha_0 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Да умножим системата /3.3/ отляво с матрицата

$$E = b\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Ma_{11} & \dots & Ma_{m-11} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Ma_{1m-1} & \dots & Ma_{m-1m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

където $b = b(x_m) \in C^1(\overline{\mathcal{D}})$ е за сега произволна функция[*].

Получаваме симетричната система

/3.4/ $\hat{L}\hat{u} \equiv A_i \partial_i \hat{u} + A_m \partial_m \hat{u} + B\hat{u} = \hat{h}$,

където $\hat{h} = (0,\dots,0,bf)$, $B = E\hat{B}$,

$$A_i = Mb\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{im-1} \\ 0 & a_{i1} & \dots & a_{im-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_m = -b\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Ma_{11} & \dots & Ma_{m-11} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Ma_{1m-1} & \dots & Ma_{m-1m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K \end{pmatrix}$$

Да въведем матрицата $\mathcal{H}$ и да разгледаме квадратичната форма

$$\hat{u}(\mathcal{H}+\mathcal{H}')\hat{u} = b_{x_m}u_0^2 + (Mba_{ij})_{x_m}u_iu_j + [(Kb)_{x_m} - 2b\alpha_m]u_m^2 +$$
$$+ 2b(1-\alpha_0)u_0u_m - 2b\sum_{j=1}^{m-1}\Big[\alpha_j + M\sum_{i=1}^{m-1}\partial_i a_{ij}\Big]u_ju_m .$$

Да изберем $b(x_m) = exp(px_m)$, където $p \geq 1$ е за сега произволна константа. Разглеждаме израза

$$(Kb)_{x_m} - 2b\alpha_m = [Kp + (K' - 2\alpha_m)]b .$$

Нека $K(0) > 0$. Тъй като функциите K' и α_m са ограничени в $\overline{\mathcal{D}}$,

---

[*] Ако $M(0) = 0$, матрицата E е особена при $x_m = 0$.

за всички достатъчно големи p в $\bar{\mathcal{D}}$ е изпълнено

$$(Kb)_{x_m} - 2b\mathcal{L}_m \geq \varepsilon' p b \ , \quad \varepsilon' = const. > 0.$$

Нека сега $K(0) = 0$. Тогава е изпълнено III.2. В $\bar{\mathcal{D}} \cap \{x_m \geq \varepsilon\}$ имаме $K > 0$ и $\mathcal{L}_m$ е ограничена. Така че за всички достатъчно големи p в $\bar{\mathcal{D}}$ е изпълнено

$$(Kb)_{x_m} - 2b\mathcal{L}_m \geq \varepsilon b.$$

Използувайки III.1 аналогично получаваме: за $p \geq p_1$ в $\bar{\mathcal{D}}$

$$(Mb)_{x_m} \geq \frac{1}{2}(|M'| + Mp)b \geq c_0 b \ , \quad c_0 > 0 .$$

Ако $K(0) = 0$ и $M(0) = 0$ от III.1 - III.3 имаме: за $p \geq p_2$ в $\bar{\mathcal{D}}$

$$(1+\varepsilon_1)(\mathcal{L}_i u_i)^2 \leq [(Kb)_{x_m} - 2b\mathcal{L}_m](Mb)_{x_m} a_{ij} u_i u_j .$$

Това неравенство е изпълнено за всички достатъчно големи p и в останалите случаи. Наистина за $p \geq p_3$

ако $K(0) > 0$, то $(Kb)_{x_m} - 2b\mathcal{L}_m \geq \varepsilon' p b, \ \varepsilon' > 0,$

ако $M(0) > 0$, то $(Mb)_{x_m} \geq \varepsilon'' p b, \ \varepsilon'' > 0.$

И така за $p \geq p'$ имаме

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}\left\{[(Kb)_{x_m} - 2b\mathcal{L}_m]u_m^2 + (Mb)_{x_m} a_{ij} u_i u_j\right\} - 2b u_m \mathcal{L}_i u_i \geq 0.$$

Използувайки положителната определеност на матрицата (a_{ij}), за произволно $\delta > 0$ при $p \geq p(\delta)$ е изпълнено

$$|Mb(\partial_m a_{ij})u_i u_j| \leq \delta M b_{x_m} a_{ij} u_i u_j ,$$

$$|2bM \partial_i a_{ij} u_j u_m| \leq \delta b u_m^2 + \delta M b_{x_m} a_{ij} u_i u_j .$$

Освен това $|2b(1-\mathcal{L}_0)u_0 u_m| \leq \delta u_m^2 + \delta b_{x_m} u_0^2$

Избирайки достатъчно малко δ и достатъчно голяма константа p, от всички тези неравенства следва, че матрицата $\mathcal{H} + \mathcal{H}'$ е положително определена в $\overline{\mathcal{D}}$. Следователно система /3.4/ е положително симетрична в $\overline{\mathcal{D}}$.

Разглеждаме характеристичната матрица

$$\beta = \begin{pmatrix} n_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Ma_{11}n_m & \dots & Ma_{1m-1}n_m & -Ma_{i1}n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Ma_{m-11}n_m & \dots & Ma_{m-1m-1}n_m & -Ma_{im-1}n_i \\ 0 & -Ma_{i1}n_i & \dots & -Ma_{im-1}n_i & Kn_m \end{pmatrix}$$

и характеристичната форма $H = Kn_m^2 - Ma_{ij}n_in_j$.
В зависимост от знака на H повърхнините се разделят на три типа /вж. [57], стр.198/: пространственоориентирани /$H>0$/, времевоориентирани /$H<0$/ и характеристични /$H=0$/.

При $n_m \neq 0$ квадратичната форма $\hat{u}.\beta\hat{u}$ може да се запише във вида

$$\hat{u}.\beta\hat{u} = -\frac{b}{n_m}\left[n_m^2u_0^2 + Ma_{ij}(n_ju_m - n_mu_j)(n_iu_m - n_mu_i) + Hu_m^2\right].$$

Оттук е ясно какви гранични условия ще бъдат допустими. Да разгледаме тези части на $\partial\mathcal{D}$, върху които $H \geq 0$. Тогава изразът в квадратните скоби в $\hat{u}.\beta\hat{u}$ е неотрицателен. Затова при $n_m > 0$ е изпълнено $\hat{u}.\beta\hat{u} \leq 0$ и можем да положим $\beta_- = \beta$, $\beta_+ = 0$, а при $n_m < 0$ е изпълнено $\hat{u}.\beta\hat{u} \geq 0$ и можем да положим $\beta_- = 0$, $\beta_+ = \beta$. Очевидно условия /1.23/ и /1.24/ са изпълнени. Върху тези части на $\partial\mathcal{D} \cap \{n_m \neq 0\}$, където $H<0$ ще определим симетричните матрици β_+ и β_- чрез равенствата

$$\hat{u}.\beta_-\hat{u} = -\frac{bH}{n_m}u_m^2 , \quad \beta_+ = \beta - \beta_- , \qquad \text{ако } n_m < 0,$$

$$\hat{u}.\beta_+\hat{u} = -\frac{bH}{n_m}u_m^2 \ , \ \beta_- = \beta - \beta_+ \ , \qquad \text{ако } n_m > 0.$$

Ясно е, че $\hat{u}.\beta_+\hat{u} \geq 0$, $\hat{u}.\beta_-\hat{u} \leq 0$. Тогава /1.23/ е изпълнено и понеже матриците $\beta_\pm$ са симетрични, имаме

$$Ker\,\beta_\pm = \{\hat{u} : \hat{u}.\beta_\pm\hat{u} = 0\}.$$

Затова за произволен вектор $\hat{u} = (u_0,\dots,u_m) \in R^{m+1}$, условие /1.24/ е изпълнено при

$$\hat{u}_1 = \left(0, \frac{n_1}{n_m}u_m, \dots, \frac{n_{m-1}}{n_m}u_m, u_m\right), \ \hat{u}_2 = \hat{u} - \hat{u}_1.$$

Върху $\partial\mathcal{D} \cap \{n_m = 0\}$ ще изберем

$$\beta_- = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{i1}n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{im-1}n_i \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{i1}n_i & \dots & a_{im-1}n_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава $\hat{u}.(\mu + \mu')\hat{u} \equiv 0$, т.е. /1.23/ е изпълнено. Забелязвайки, че $Ker\,\beta_- = \{u_m = 0\}$, лесно се доказва, че и /1.24/ е в сила.

Следователно условието $\beta_-\hat{u} = 0$ е допустимо. То е

/3.5/
$$\left| \begin{array}{ll} u_0 = 0,\ n_m u_i - n_i u_m = 0,\ i = 1,\dots,m-1, & \text{където } n_m > 0,\ H \leq 0, \\ u_0 = 0, \dots, u_m = 0 & \text{където } n_m > 0,\ H > 0, \\ u_m = 0 & \text{където } n_m = 0, \\ u_m = 0 & \text{където } n_m < 0,\ H < 0, \\ \hat{u} \sim & \text{където } n_m < 0,\ H \geq 0. \end{array} \right.$$

От теорията на положително-симетричните системи следва, че за всички функции $\hat{u} \in \dot{C}^1(\overline{\mathcal{D}})$, удовлетворяващи /3.5/ са изпълнени неравенствата

/3.6/ $$\|\hat{u}\|^2 \leq c(\hat{L}\hat{u}, \hat{u}), \quad \|\hat{u}\| \leq c\|\hat{L}\hat{u}\|.$$

Да разгледаме съответните на /3.5/ гранични условия за уравнението /3.1/:

$$
/3.7/ \quad \left|\begin{array}{ll}
u = 0 & \text{където } n_m > 0, H \le 0, \\
u = 0, \partial_m u = 0 & \text{където } n_m > 0, H > 0, \\
\partial_m u = 0 & \text{където } n_m = 0, \\
\partial_m u = 0 & \text{където } n_m < 0, H < 0, \\
u \sim & \text{където } n_m < 0, H \ge 0.
\end{array}\right.
$$

Ще отбележим, че върху времевооринтираните повърхнини винаги се задават гранични условия.

З а д а ч а Р. Да се намери в $\mathcal{D}$ решение на уравнението /3.1/, удовлетворяващо /3.7/.

От неравенства /3.6/ получаваме

$$/3.8/ \qquad \|u\|_1^2 \le c_1 |(b\partial_m u, Lu)| , \quad \forall u \in \dot{W}^2,$$

$$/3.9/ \qquad \|u\|_1 \le c_1 \|Lu\|_0 , \quad \forall u \in W^2.$$

От /3.9/ следва, че силното решение на задача Р е единствено. От /3.8/ в някои случаи ще докажем, че задача Р има слабо решение $u \in W_2^1$ за всяка функция $f \in L_2(\mathcal{D})$. За целта ще използуваме една идея от [68]. Ще отбележим обаче, че тук общият вид на границата усложнява значително доказателството.

Нека $\bar{\mathcal{D}}$ се задава с неравенствата

$$\varphi_-(x') \le x_m \le \varphi_+(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{m-1}),$$

където функциите φ_- и φ_+ са непрекъснати. Нека функцията φ_+ има частично непрекъснати производни до втори ред, освен може би в точките*, където $\varphi_+ = 0$. Означаваме с $\Gamma_\pm$ повърхнините

---

* Това ни дава възможност да разгледаме и характеристични повърхнини на уравнението /3.1/, върху които дори първите производни на φ_+ в някои случаи са неограничени при $x_m = 0$ /напр. ако $K(0) \ne 0, M(0) = 0$ /.

$x_m = \varphi_\pm(x')$ и нека $H<0$ върху Γ_+, $H \geq 0$ върху Γ_-. Понеже върху Γ_+ условията /3.7/ изискват $u=0$, върху $\partial\mathcal{D} \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, където $n_m = 0$, граничното условие приема вида $u=0$, така че в този случай условията /3.7/ са

/3.10/ $$u = 0 \quad \text{върху} \quad \partial\mathcal{D} \setminus \Gamma_- .$$

Да означим с Γ_x^+ / Γ_x^- / затворената обвивка в $\partial\mathcal{D}$ на обединението от $(m-1)$ -мерни парчета на Γ_+ / $\Gamma_- \setminus \{x_m = 0\}$ /, върху които $H=0$. Нека сечението $\Gamma_x^+ \cap \Gamma_x^-$ се съдържа в $x_m > 0$ и във всички точки от проекцията му върху $x_m = 0$ функцията φ_+ е двукратно гладка. Предполагаме още, че в никоя точка от $\Gamma_x^+ \cap \{x_m > 0\}$ границата няма нулев ъгъл.

Да означим с W^1 затворената обвивка на $\dot{W}^2$ в $W_2^1(\mathcal{D})$. С W^{-1} означаваме неговото спрегнато спрямо $W_2^0(\mathcal{D})$ пространство. Нека K'' е непрекъсната в $\overline{\mathcal{D}}$.

Т е о р е м а 3.1. За всяка функция $f \in W_2^0(\mathcal{D})$ задача P има слабо решение от W^1. Силното й решение е единствено.

Доказателство. Ще докажем, че е изпълнена оценката

/3.11/ $$\|v\|_0 \leq c_2 \|L^* v\|_{W^{-1}}, \quad \forall v \in \dot{W}_*^2 .$$

От тази оценка и от /3.9/ теорема 3.1 следва по обичайния път.

Изводът на оценка /3.11/ се основава на следното. Нека функцията $v \in \dot{W}_*^2$ е такава, че решението u_v на уравнението $b\,\partial_m u_v = v$, удовлетворяващо /3.10/, е от $\dot{W}^2$. Тогава от неравенство /3.8/ следва

$$\|L^* v\|_{W^{-1}} = \sup_{u \in W^1} \frac{|(L^* v, u)|}{\|u\|_1} \geq \frac{|(L^* v, u_v)|}{\|u_v\|_1} = \frac{|(v, L u_v)|}{\|u_v\|_1} =$$

$$= \frac{|(b\,\partial_m u_v, L u_v)|}{\|u_v\|_1} \geq \frac{1}{c_1} \|u_v\|_1 \geq c_2 \|v\|_0 ,$$

където положителната константа C_2 не зависи от V. Във веригата от неравенства използувахме, че за всички функции $u \in \dot{W}^2$ и $v \in \dot{W}^2_*$ е изпълнено $(u, L^* v) = (Lu, v)$. Доказателството на това твърдение и съответния вид на W^2_* могат да се видят в [18]/стр.90-93/, при следното ограничение: ако $K(0)=0$, Γ^-_x да се намира на положително разстояние от $x_m = 0$. Обаче ние можем да снемем това ограничение, понеже при $K(0)=0$ върху отворените части на $\partial\mathcal{D} \cap \{x_m = 0\}$ спрегнатото гранично условие е

$[K'(0) - \alpha_m(x', 0)]\, v(x', 0) = 0$ и тъй като

$$2[K'(0) - \alpha_m(x',0)] \geq K'(0) - 2\alpha_m(x',0) > 0 ,$$

то в същност се оказва $v = 0$. След всичко това остава да докажем, че всяка функция от $C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2_*$ се апроксимира в $W^1_2(\mathcal{D})$ с такива, за които вече сме доказали /3.11/. Ще започнем със

Л е м а 3.1. За всяка ограничена област $G \subset \mathcal{D}$ съществува константа $C(G)$, така че за всички функции $v \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap W^2_*$, $\operatorname{supp} v \subset \bar{G}$ е изпълнено

/3.12/ $$\|v\|_{L_2(\Gamma^+_x)} + \|\alpha v\|_{L_2(\Gamma^-_x)} \leq C(G)\, \|v\|_1 ,$$

където $\alpha = \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} (\partial_i \varphi_-)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$.

Доказателство. Спрегнатото на /3.7/ гранично условие е следното: $V = 0$ върху $\partial\mathcal{D} \setminus (\Gamma^+_x \cup \Gamma^-_x)$, $V \sim$ върху Γ^+_x, а върху Γ^-_x V удовлетворява диференциално уравнение от първи ред. Всички по-нататъшни разсъждения ще извършваме в $\bar{G}$. От условието $\Gamma^+_x \cap \Gamma^-_x \subset \{x_m > 0\}$ лесно се показва, че съществува такава константа $\varepsilon > 0$, че

$$\Pi\left(\Gamma^+_x \cap \{x_m \leq \varepsilon\}\right) \subset \Pi(\Gamma^- \setminus \Gamma^-_x)$$

/с Π бележим проекцията върху $x_m = 0$ /. Понеже $v=0$ върху $\Gamma_- \setminus \Gamma_x^-$, върху $\Gamma_x^+ \cap \{x_m \le \varepsilon\}$ имаме

$$v = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \partial_m v(x',t)\,dt .$$

Тогава

$$\|v\|^2_{L_2(\Gamma_x^+ \cap \{x_m \le \varepsilon\})} = \int_{\Pi(\Gamma_x^+ \cap \{x_m \le \varepsilon\})} \left[\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \partial_m v(x',t)\,dt\right]^2 \left[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx' \le$$

$$\le \int_{\Pi}\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} (\partial_m v)^2\,dt\,(\varphi_+ - \varphi_-)\left[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx' \le C\,\|v\|_1^2,$$

понеже върху Γ_x^+ имаме

$$C_1\varphi_+ \sum(\partial_i\varphi_+)^2 \le M(\varphi_+)\,a_{ij}(\partial_i\varphi_+)(\partial_j\varphi_+) = K(\varphi_+),$$

с $C_1 > 0$. Обаче върху $\Gamma_x^+ \cap \{x_m > 0\}$ няма нулеви ъгли, така че от обичайните теореми за влагане, приложени в малко по-широка област от G, следва

$$\|v\|_{L_2(\Gamma_x^+ \cap \{x_m \ge \varepsilon\})} \le C_2\,\|v\|_1 .$$

Обединявайки тази оценка с горната получаваме

/3.12'/ $$\|v\|_{L_2(\Gamma_x^+)} \le C\,\|v\|_1 .$$

Върху Γ_x^- имаме

$$v = \int_{\varphi_+}^{\varphi_-} \partial_m v(x',t)\,dt + v(x',\varphi_+(x')),$$

така че използувайки /3.12'/ получаваме

$$\|dv\|^2_{L_2(\Gamma_x^-)} = \int_{\Pi(\Gamma_x^-)} v^2(x',\varphi_-(x'))\,dx' \le 2\int_{\Pi(\Gamma_x^-)} \left[\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \partial_m v\,dt\right]^2 dx' +$$

$$+ 2\int_{\Pi(\Gamma_x^-)} v^2(x',\varphi_+(x'))\,dx' \le 2R\,\|\partial_m v\|_0^2 + 2\,\|v\|^2_{L_2(\Gamma_x^+)} \le C\,\|v\|_1^2,$$

където $R = \sup_{x\in\mathcal{D}} x_m$. С това лема 3.1 е доказана.

Нека $v \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2_*$. Тогава функцията

$$u_v(x) = \int_{\varphi_+(x')}^{x_m} v(x',t)\, b^{-1}(t)\, dt$$

е решение на уравнението $b\,\partial_m u = v$ и удовлетворява условие /3.10/. С помощта на лема 3.1 лесно се доказва, че $u_v \in W^1$.

Да означим с $\mathcal{U} \subset C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2_*$ функциите, анулиращи се в околност на всички точки $(x', \varphi_+(x')) \in \Gamma_+ \setminus \Gamma^-_x$, за които $\varphi_+(x')$ не е двукратно гладка. Твърдим, че за $v \in \mathcal{U}$ имаме $u_v \in \dot{W}^1$. Понеже $\partial_m u_v = v.b^{-1} \in W^1_2(\mathcal{D})$, ще разгледаме за $i = 1,..,m-1$

$$/3.13/ \quad \partial_i u_v(x) = \int_{\varphi_+}^{x_m} \partial_i v . b^{-1}\, dt - (\partial_i \varphi_+)\, v(x', \varphi_+(x'))\, b^{-1}(\varphi_+(x')) .$$

За интегралния член в равенство /3.13/ с помощта на лема 3.1 лесно се показва, че той е функция от $W^1_2(\mathcal{D})$. Да разгледаме извънинтегралния член. Ясно е, че за произволна функция $v \in \dot{W}^2_*$ в общия случай той не принадлежи на $W^1_2(\mathcal{D})$. Обаче за $v \in \mathcal{U}$ той е от $W^1_2(\mathcal{D})$. Наистина, "лоши точки" за функцията $\partial_i u_v$ са само тези, в които φ_+ не е двукратно гладка. Но от дефиницията на $\mathcal{U}$ следва, че от тях можем да изключим точките от $\Gamma_+ \setminus \Gamma^-_x$. Така че остават само точки от $\Gamma_+ \cap \Gamma^-_x$. Обаче по предположение такива няма върху $\Gamma^+_x \cap \Gamma^-_x$, т.е. остават само точки от $(\Gamma_+ \setminus \Gamma^+_x) \cap \Gamma^-_x$. Но $v = 0$ върху $\Gamma_+ \setminus \Gamma^+_x$. Следователно извънинтегралният член в /3.13/ е дори еднократно гладка функция за $v \in \mathcal{U}$.

За $v \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2_*$ имаме

$$\|L^* v\|_{W^{-1}} \geq \frac{|(L^* v, u_v)|}{\|u_v\|_1} , \quad \|u_v\|_1 \geq c\, \|v\|_0 .$$

Ние ще докажем, че

$$|(L^*v, u_v)| \geq \frac{1}{c_1}\|u_v\|^2, \tag{3.14}$$

а от това следва, че оценка /3.11/ е изпълнена. Функцията v може да се апроксимира в $W_2^1(\mathcal{D})$ с функции $v_k \in \mathcal{U}$, чиито носители се съдържат в една и съща ограничена околност $\bar{G}$ на $supp\, v$. Това е така, понеже множеството от точките от Γ_+, в които трябва да изменим v, може да се представи като обединение от краен брой гладки повърхнини, с размерност по-малка или равна[*] на $m-2$. Обаче за функциите v_k неравенството /3.14/ е изпълнено. Така че /3.14/ е доказано ако покажем, че при $k \to \infty$

$$\|u_{v_k} - u_v\|_1 \to 0, \qquad (L^* v_k, u_{v_k}) \to (L^* v, u_v).$$

С помощта на лема 3.1 може да се докаже, че за всички функции $w \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}_*^2$, за които $supp\, w \subset G$, е изпълнено

$$\|u_w\|_1 \leq C\|w\|_1 .$$

Прилагайки това неравенство за $w_k = v_k - v$ забелязваме, че ни остава да докажем $(L^* w_k, u_k) \to 0$, където с u_k сме означили $u_{v_k} \in \dot{W}^2$. От формулата на Гаус-Остроградски имаме

$$(L^* w_k, u_k) = (w_k, L u_k) = \int_{\mathcal{D}} \Big[-\partial_m (K w_k)\partial_m u_k + \partial_j (M a_{ij} w_k)\partial_i u_k +$$

$$+ \alpha_i w_k \partial_i u_k + \alpha_m w_k \partial_m u_k + \alpha_0 w_k u_k \Big] dx +$$

$$+ \int_{\partial\mathcal{D}} \big[K n_m \partial_m u_k - M a_{ij} n_j \partial_i u_k \big] w_k \, ds = J_{1k} + J_{2k} .$$

---

[*] Поради това не можем да апроксимираме v в $W_2^1(\mathcal{D})$.

Очевидно $|\mathcal{J}_{1k}| \le C\|w_k\|_1\|v_k\|_1$. Разглеждаме $\mathcal{J}_{2k}$. Върху Γ_+ имаме $u_k = 0$ и следователно $\partial_i u_k = n_i \frac{\partial u_k}{\partial \nu}$, $i = 1,\dots,m$.

Така че подинтегралният израз в $\mathcal{J}_{2k}$ върху Γ_+ приема вида $Hw_k\,\partial u_k/\partial\nu$ и понеже $H=0$ върху Γ_x^+, а $w_k = 0$ върху $\Gamma_+\setminus\Gamma_x^+$, интегралът остава само върху $\partial\mathcal{D}\setminus\Gamma_+$. Обаче $w_k = 0$ върху $\partial\mathcal{D}\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-)$ и върху $\Gamma_-\setminus\Gamma_x^-$, т.е. окончателно имаме

$$\mathcal{J}_{2k} = \int\limits_{\Gamma_x^-}\Big[K n_m v_k \ell^{-1} - M a_{ij} n_i \int\limits_{\varphi_+}^{x_m} \partial_j v_k . \ell^{-1}\, dt +$$

$$+ M a_{ij} n_i (\partial_j\varphi_+) v_k(x', \varphi_+(x'))\Big] w_k\, ds = \mathcal{J}_{2k}' + \mathcal{J}_{2k}'' + \mathcal{J}_{2k}'''.$$

Понеже $n_m = d^2$, от /3.12/ получаваме

$$|\mathcal{J}_{2k}'| \le \int\limits_{\Gamma_x^-} Kd|v_k| . d|w_k|\, ds \le C\|d v_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\|d w_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)} \le$$

$$\le C_1\|v_k\|_1\|w_k\|_1 .$$

Ще отбележим, че тук използувахме съвсем точно /3.12/. Понеже

$$M(\varphi_-)|n_i| = M(\varphi_-)|\partial_i\varphi_-|d^2 \le Cd,$$

то

$$|\mathcal{J}_{2k}''| \le C\sum\|\partial_i v_k\|\|d w_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)} \le C_1\|v_k\|_1\|w_k\|_1 .$$

Тъй като $v_k = 0$ върху $\Gamma_+\setminus\Gamma_x^+$, то

$$|\mathcal{J}_{2k}'''| \le C\|d w_k\|_{L_2(\Gamma_x^-)}\Big\{\int\limits_{\Pi(\Gamma_x^-)\cap\Pi(\Gamma_x^+)} T^2(\varphi) . v_k^2(x', \varphi_+(x'))\sqrt{1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2}\, dx'\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

където $T(\varphi) = M(\varphi_-)\big[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\big]^{\frac{1}{2}}\big[1+\sum(\partial_i\varphi_-)^2\big]^{\frac{1}{2}}$.

Ясно е, че $M(\varphi_-)\big[1+\sum(\partial_i\varphi_-)^2\big] \le C$. Ако $M(0)>0$, то $M \ge m_0 > 0$ и тогава

$$\sqrt{M(\varphi_-)}\big[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\big]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{M(\varphi_-)}{m_0}}\sqrt{M(\varphi_+)}\big[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\big]^{\frac{1}{2}} \le C.$$

Ако пък $M(0)=0$, то $M'(0)\geq 0$ и следователно $M'(\eta)\geq 0$ за $0\leq\eta\leq\delta$, $\delta>0$. Тогава за $0\leq\varphi_+\leq\delta$ имаме

$$M(\varphi_+)-M(\varphi_-)=(\varphi_+-\varphi_-)M'(\eta)\geq 0.$$

За $\varphi_+\geq\delta$ имаме $M(\varphi_+)\geq m_0>0$ и

$$\sqrt{M(\varphi_-)}\left[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{\frac{M(\varphi_-)}{m_0}}\cdot\sqrt{M(\varphi_+)}\left[1+\sum(\partial_i\varphi_+)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leq C.$$

Така че във всички случаи $T(\varphi)\leq C$ и $|J_2'''|\leq C\|w_k\|_1\|v_k\|_1$.
От тези оценки получаваме: при $k\to\infty$

$$|(L^*w_k,u_k)|\leq C\|w_k\|_1\|v_k\|_1\to 0.$$

Така че оценката /3.11/ е доказана за всички функции от $C^2(\bar{\mathcal{D}})\cap\dot{W}_*^2$ и следователно тя е изпълнена за всички функции от $\dot{W}_*^2$. Теорема 3.1 е доказана.

С л е д с т в и е 3.1. Нека са в сила предположенията на теорема 3.1 освен това за непрекъснатостта на $K''(x_m)$ при $x_m=0$. Тогава за всяка $f\in W_2^0(\mathcal{D})$ съществува такава функция $u\in W^1$, че равенството $(u,L^*v)=(f,v)$ е в сила за функциите $v\in\dot{W}_*^2$, анулиращи се в околност на $\partial\mathcal{D}\cap\{x_m=0\}$.

Сега ще изследваме въпроса за необходимостта на условието, което наложихме ако $K(0)=0$. Нека $\alpha_m=\alpha_m(x_m)$. Тогава условието III.2 е във вида

III.2.' $$K'(0)-2\alpha_m(0)>0.$$

Нека всеки от коефициентите a_{ij} не зависи от променливата x_i или x_j , $\alpha_i/i=1,..,m-1/$ не зависи от x_i , $\alpha_0\equiv 0$. Нека областта $\mathcal{D}$ е такава, че $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} x_m=R<\infty$ и спрегнати гранични условия се задават само върху $\bar{\mathcal{D}}\cap\{x_m=0\}$ [ж]. При тези пред-

---

[ж] Такива области са напр. характеристичните коноиди с връх в произволна точка от $x_m>0$. Такива са и всички области, разгледани в § 3.3.

положения е в сила.

Л е м а 3.2. Нека функцията

$$W(x_m) = \int_{x_m}^{R} \frac{K'(t) - \alpha_m(t)}{K(t)}\, dt$$

е ограничена отгоре за $0 < x_m < R$. Тогава съществува функция $V_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2(\mathcal{D})$, за която задача P при $f = V_0$ няма силно решение.

Доказателство. За $x_m > 0$ ще дефинираме V_0 така

$$V_0(x) = \exp(W(x_m)) \in \overset{\circ}{W}{}_2(\mathcal{D}).$$

Тя е решение на уравнението $\partial_m(KV_0) - \alpha_m V_0 = 0$.

За $0 < \eta < R$ да означим $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{D} \cap \{x_m \geq \eta\}$. За всяка функция $u \in C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap \dot{W}^2$ имаме

$$\int_{\mathcal{D}_\eta} V_0 Lu\, dx = \int_{\mathcal{D}_\eta} \left(Ku_{x_m x_m} - Ma_{ij} u_{x_i x_j} + \alpha_i u_{x_i} + \alpha_m u_{x_m}\right) V_0\, dx =$$

$$= -\int_{\mathcal{D}_\eta} \left[\partial_m(KV_0) - \alpha_m V_0\right] dx + \int_{\partial\mathcal{D}_\eta} \Big(Kn_m \partial_m u + \alpha_i n_i u -$$

$$- {\sum}' Ma_{ij} n_j \partial_i u - {\sum}'' Ma_{ij} n_i \partial_j u\Big) V_0\, ds,$$

където сумирането в $\sum'$ е по тези двойки (i,j), за които a_{ij} не зависи от x_j, а в $\sum''$ – по останалите. Обемният интеграл в дясната страна на равенството е нула. Да разгледаме повърхнния. Върху $\partial\mathcal{D} \setminus \{x_m = 0\}$ е изпълнено $u = 0$ и следователно

$$Kn_m \partial_m u - {\sum}' Ma_{ij} n_j \partial_i u - {\sum}'' Ma_{ij} n_i \partial_j u = H \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Обаче $H = 0$ върху характеристичните части на $\partial\mathcal{D}_\eta \setminus \{x_m = \eta\}$, а върху нехарактеристичните $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Така че при $\eta \to 0$ имаме

$$/3.15/ \qquad \int_{\mathcal{D}_\eta} V_0 Lu\, dx = -\int_{\mathcal{D} \cap \{x_m = \eta\}} KV_0 \partial_m u\, ds \to 0,$$

тоест $\quad (v_0, Lu) = 0, \ \forall u \in \dot{W}^2,$

с което лема 3.1 е доказана.

Ще разгледаме един случай, когато функцията $W(x_m)$ е ограничена отгоре. Нека съществува число $\varepsilon > 0$, така че

$$K'(t) - \alpha_m(t) \le 0 \quad \text{за } 0 \le t \le \varepsilon.$$

Тогава очевидно имаме $W(x_m) \le W(\varepsilon)$ за $0 < x_m < \varepsilon$.

С л е д с т в и е 3.2. Условието $K'(0) - \alpha_m(0) \ge 0$ е необходимо за да съществува силно решение на задача P за всички функции $f \in W_2^0(\mathcal{D})$.

В такъв случай ако $K'(0) = 0$, то $\alpha_m(0) \ge 0$ е необходимо условие за това. В §§ 3.3-3.4 ще докажем, че в някои случаи $\alpha_m(0) > 0$ е достатъчно условие.

С л е д с т в и е 3.3. Едно по-силно необходимо условие е: да съществува редица от точки, клонящи към $x_m = 0$, във всяка от които $K' - \alpha_m > 0$. В частност, ако $K(x_m) \equiv x_m$, $\alpha_m \equiv const.$, то условието $K'(0) - \alpha_m(0) > 0$ е необходимо.

Ще отбележим обаче, че работейки по този начин не можем да докажем необходимостта на условието $K'(0) - \alpha_m(0) > 0$. Наистина, ако $K'(0) = 0$ и $\alpha_m \equiv 0$ ще имаме $K'(0) - \alpha_m(0) = 0$, обаче

$$W(x_m) = \ln \frac{K(R)}{K(x_m)}$$

и /3.15/ не е изпълнено.

§ 3.2. Постановка на друга гранична задача и извод на априорна оценка

Развитите в § 3.1 методи ни позволяват да поставим и изследваме и друга задача, която в някои случаи се явява точно спрегнатата на задача P. И напр., задачата на Коши и смесената гранична задача с начални данни върху $x_m = 0$ са частни случаи от тази задача.

Да разгледаме уравнението

/3.16/ $L_1 v \equiv K v_{x_m x_m} - a_{ij} v_{x_i x_j} + \gamma_i v_{x_i} + \gamma_m v_{x_m} + \gamma_0 v = g$,

където

$\gamma_i \in C^1(\bar{\mathcal{D}}),\ i=1,\dots,m;\ \gamma_0 \in C(\bar{\mathcal{D}})\ ;\ |\gamma_i| < \infty \quad, i=0,\dots,m.$

Условия III.1-III.3 ще заменим със следното

III.4. Ако $K(0)=0$, съществува $\varepsilon_2 > 0$, за което

$$K' - 2\gamma_m \le -\varepsilon_2 \quad \text{в} \quad \bar{\mathcal{D}} \cap \{x_m \le \varepsilon_2\}.$$

П р и м е р 3.1. Ако

$$M(0) > 0\ ;\ |K''| < \infty\ ;\ |\partial^2_{ij} a_{ij}| < \infty;\ |(\alpha_i)_{x_i}| < \infty,\ i=1,\dots,m,$$

за L_1 можем да вземем формално спрегнатия на L оператор L^* . Наистина, L^* има същата старша част като L и коефициентът γ_m в него е $2K' - \alpha_m$. Така че условие III.4 приема вида

$$-(K' - 2\alpha_m) - K' \le -\varepsilon_2 \qquad \text{в} \quad \bar{\mathcal{D}} \cap \{x_m \le \varepsilon_2\},$$

което е изпълнено с достатъчно малко ε_2 , понеже $K'(0) \ge 0$ и е в сила III.2.

Да сведем уравнението /3.16/ до система, точно както направихме за уравнението /3.1/. Да умножим тази система отляво с матрица от вида на E , само че с помощна функция c вместо b . Получаваме системата

/3.17/ $\hat{L}_1 \hat{v} = \hat{g}$.

Ще изберем $c(x) = -\exp(-q x_m)$, където константата $q \ge 1$ ще фиксираме по-късно. Съответната матрица $\varkappa_1 + \varkappa_1'$ ще има същия вид като $\varkappa + \varkappa'$, само че с новите коефициенти и с функцията $c(x_m)$. Ще докажем, че при подходящ избор на q , матрицата $\varkappa + \varkappa'$ ще бъде положително определена в $\bar{\mathcal{D}}$. Имаме

$$\hat{V}\cdot(\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_1')\hat{V} = c_{x_m} V_0^2 + (c\,a_{ij})_{x_m} v_i v_j + \left[(Kc)_{x_m} - 2\gamma_m c\right] V_m^2 +$$
$$+ 2c(1-\gamma_0)V_0 V_m - 2c\sum_{j=1}^{m-1}\left(\gamma_j + \sum_{i=1}^{m-1}\partial_i a_{ij}\right) v_j v_m \,.$$

Да разгледаме израза

$$(Kc)_{x_m} - 2\gamma_m c = \left[Kq + (2\gamma_m - K')\right]|c|.$$

От условие III.4, аналогично на § 3.1 получаваме

$$(Kc)_{x_m} - 2\gamma_m c \geq \varepsilon_2 |c| \qquad \text{в} \quad \bar{\mathcal{D}}.$$

Понеже $c_{x_m} = q|c|$ оттук, аналогично на § 3.1 в случая $M(0)>0$ лесно следва, че матрицата $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1'$ е положително определена в $\bar{\mathcal{D}}$. Да разгледаме граничната матрица β_1 на системата /3.17/. Ще си припомним, че за матрицата β съществен се явяваше знакът на произведението $b n_m$. Естествено, тук е съществен знакът на $c n_m$ и понеже $c<0$, то аналогичните на /3.7/ условия за ще се получат като в /3.7/ сменим знака на n_m. И така: за системата /3.17/ допустими се явяват условията:

$$/3.18/\quad \left|\begin{array}{ll} V_0 = 0,\ n_m V_i - n_i V_m = 0,\ i=1,\dots,m-1 & \text{където } n_m<0,\ H\leq 0, \\ V_0 = 0,\dots,V_m = 0 & \text{където } n_m<0,\ H>0, \\ V_m = 0 & \text{където } n_m=0, \\ V_m = 0 & \text{където } n_m>0,\ H<0 \\ V \sim & \text{където } n_m>0,\ H\geq 0 \end{array}\right.$$

Поради това задача /3.17/-/3.18/ има слабо решение за всяка функция $\hat{g}\in L_2(\mathcal{D})$ и силното й решение е единствено.

З а д а ч а Q'. Да се намери в $\mathcal{D}$ решение на уравнението /3.16/, удовлетворяващо условията

$$
\begin{cases}
v = 0 & \text{където } n_m < 0,\ H \le 0, \\
v = 0,\ v_{x_m} = 0 & \text{където } n_m < 0,\ H > 0, \\
v_{x_m} = 0 & \text{където } n_m = 0, \\
v_{x_m} = 0 & \text{където } n_m > 0,\ H < 0 \\
v \sim & \text{където } n_m > 0,\ H \ge 0.
\end{cases}
\tag{3.19}
$$

За функциите $v \in \dot{W}_2^2(\mathcal{D})$, удовлетворяващи /3.19/, са изпълнени оценките

$$\|v\|_1^2 \le c_1(cv_{x_m}, Lu) \quad , \quad \|v\|_1 \le c_1 \|Lu\| .$$

От тези оценки може да се докаже аналог на теорема 3.1.

Необходимостта от условието $K'(0) - \gamma_m(0) \le 0$, ако $K(0) = 0$, тук е ясна. Примерът в § 3.1 показва, че ако $K'(0) - \gamma_m(0) > 0$, хомогенната задача на Коши има нетривиално слабо решение от $C(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$.

Използувайки получените в §§ 3.1 и 3.2 слаби решения от W_2^1 , в много случаи можем да докажем съществуване на силни решения. В §§ 3.3. и 3.4 ние ще направим това само за някои по-характерни области.

§ 3.3. Съществуване на силно решение на някои гранични задачи

Тук и по-нататък ще изследваме уравнението /3.1/ в случай, че матрицата (α_{ij}) е единичната. Ще отбележим изрично, че по-нататък няма да предполагаме функцията $K''(x_m)$ ограничена. Нека е изпълнено следното

$$\left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \in L(0,1) .$$

Това условие показва, че характеристическият коноид

$$\left[\sum_{i=1}^{m-1}(x_i - x_i^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \int_{x_m}^{x_m^0}\left[\frac{M(t)}{K(t)}\right]dt ,$$

с връх в произволна точка $x^0 \in \{x_m > 0\}$, пресича равнината $x_m = 0$ в ограничена "крива". Ако $(M/K)^{\frac{1}{2}} \in L(0,1)$, той не пресича равнината, т.е. областта на зависимост за задачата на Коши с данни върху $x_m = 0$ е неограничена.

Да разгледаме някои примери.

Пример 3.2. Функциите $K(x_m)$, за които $K'(0) > 0$.

Пример 3.3. Функциите $K(x_m) = (x_m)^\gamma$ за $1 \le \gamma < 2$, а ако $M(0) = 0$ и за $2 \le \gamma < 3$.

За $x_m \ge 0$ дефинираме функцията

$$\Psi(x_m) = \int_0^{x_m}\left[\frac{M(t)}{K(t)}\right]^{\frac{1}{2}} dt .$$

Пример 3.4. Нека $K \in C^2(0,\infty)$, $K(x_m) > 0$ за $x_m > 0$ и

$$\frac{K(x_m)}{M(x_m)} = x_m^2 \ln^4 x_m \qquad \text{за} \quad 0 < x_m < \frac{1}{2} .$$

За $0 < x_m \le \frac{1}{2}$ съответната функция Ψ ще е

$$\Psi(x_m) = -(\ln x_m)^{-1} .$$

За простота в означенията ще разгледаме случая $m = 3$. Нека $R_0 = \lim\limits_{x_3 \to \infty} \Psi(x_3)$. Ясно е, че е възможно както $R_0 = \infty$, така и $R_0 < \infty$. Нека числата ε и R са свързани с неравенствата $0 \le \varepsilon < R < 2R_0$. Да разгледаме повърхнините

$$S_{0\varepsilon} : x_3 = 0, \ \varepsilon \le \rho \le R ;$$

$$S_{1\varepsilon} : 0 \le x_3 \le d , \ \rho = \varepsilon + \Psi(x_3) ;$$

$$S_{2\varepsilon} : 0 \le x_3 \le d , \ \rho = R - \Psi(x_3) .$$

Тук $\rho = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, а d е решението на уравнението $2\psi(d) = R-\varepsilon$, което съществува, понеже $R < 2R_0$. Да означим с $\mathcal{D}_\varepsilon$ ограничената област, за която $\partial\mathcal{D}_\varepsilon = S_{0\varepsilon} \cup S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ /вж.Рис.3.1/

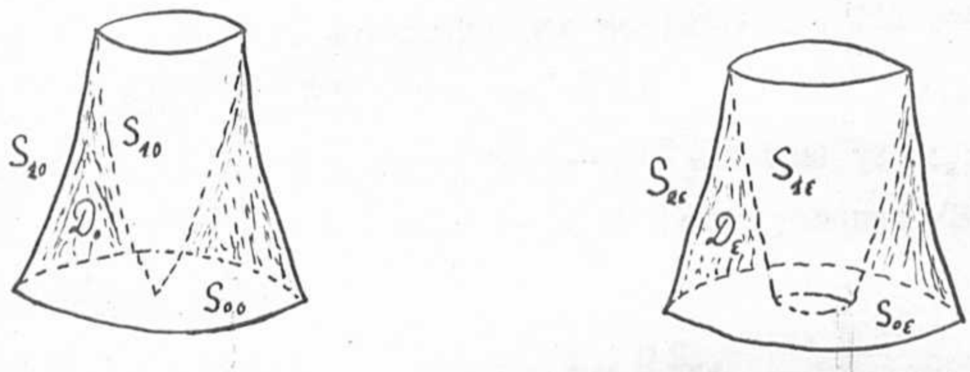

Рис. 3.1.

Ще отбележим, че повърхнините $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$ са характеристики за разглежданото уравнение. Тъй като $\psi' = M/K$, функцията ψ има обратна функция φ . При това, ако $M(0) = 0$ и $K(0) \neq 0$, то $\psi \in C^1[0,\infty)$ и $\psi'(0) = 0$, а ако $M(0) = 0$ и $K(0) = 0$, то $\varphi, \psi \in C^1$. Във всички останали случаи $\varphi \in C^1$ и $\varphi'(0) = 0$ *.

Да се спрем по-подробно на последния случай, при който повърхнините $S_{1\varepsilon}$ и $S_{2\varepsilon}$ се допират до равнината $x_3 = 0$ и затова обичайните теореми за влагане на Соболев не винаги са в сила. Да разгледаме $S_{2\varepsilon} : x_3 = \varphi(R-\rho)$. Нека имаме оценка от вида

$$\frac{K(x_3)}{M(x_3)} \leq C(x_3)^{\gamma}, \qquad \text{където } \gamma \in (1,2).$$

Нека вземем една функция $V(x) = V(\rho)$ със следните свойства: $V \in C^\infty(0,R)$, тъждествено се анулира в някаква околност на $\rho = 0$, а в околност на $\rho = R$ има вида $V = (R-\rho)^{-\frac{1}{2}}$. Тогава

---

* Границата $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$ е частично гладка във всички случаи.

$v \bar{\in} W_2^0(S_{0\varepsilon})$. Обаче $v \in W_2^1(\mathcal{D}_\varepsilon)$, по-точно $v \in W_2^\ell(\mathcal{D}_\varepsilon)$ за $\ell = 1, \ldots, [(2-\gamma)^{-1}]$. Ако пък разглеждаме функциите K и M от пример 3.4 по-горе, то върху $S_{2\varepsilon} \cap \{0 < x_3 \leq 2^{-1}\}$ имаме $\rho = R + (\ln x_3)^{-1}$, т.е. $x_3 = exp(\rho - R)^{-1}$ и имаме допиране от безкраен ред. Функцията $v \in W_2^\ell(\mathcal{D}_\varepsilon)$ за всички $\ell = 1, 2, \ldots$

Върху $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ имаме $H = 0$, а върху $S_{0\varepsilon}$ имаме $H \geq 0$. Върху $S_{1\varepsilon} \cap \{x_3 > 0\}$ и върху $S_{2\varepsilon} \cap \{x_3 > 0\}$ имаме че $n_3 > 0$, а върху $S_{0\varepsilon}$ – че $n_3 < 0$. Така че граничните условия /3.7/ сега изглеждат така

/3.20/ $\quad u = 0 \quad$ върху $\quad S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$

Спрегнати гранични условия върху $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ няма. Да разгледаме следния частен случай от задача P.

З а д а ч а P_1. Да се намери в областта $\mathcal{D}_\varepsilon$ решение на уравнението

/3.21/
$$Lu \equiv K(x_3)u_{x_3x_3} - M(x_3)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x)u_{x_i} + \alpha_0(x)u = f(x),$$

което удовлетворява /3.20/.

Нека $f \in W_2^0(\mathcal{D}_\varepsilon)$. Според следствие 3.1* от теорема 3.1, съществува функция $u_\varepsilon \in W^1$, така че за всички функции $v \in C^2(\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon)$, които се анулират в околност на повърхнината $S_{0\varepsilon}$ е изпълнено $(u, L^* v) = (f, v)$.

Нека $\varepsilon > 0$. Ще докажем, че u_ε е силно решение на задача P_1. Ще използуваме теорема 1.6. Да разгледаме сеченията на всеки две от съставящите $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$ повърхнини. За произволна

---

* Ще напомним, че в § 3.3 функцията $K''(x_3)$ може да е неограничена при $x_3 = 0$, така че не може да приложим теорема 3.1.

точка от $S_{0\varepsilon} \cap S_{1\varepsilon}$, в достатъчно малка нейна околност в $\overline{\mathcal{D}}_\varepsilon$ да преминем към цилиндрични координати (ρ, θ, x_3) . След тази неособена* смяна на променливите от клас C^∞, околността отива в част от $\{x_3 \geq 0,\ \rho \geq \varepsilon + \psi(x_3) = F(x_3)\}$.
Върху $x_3 = 0$ няма гранични условия и затова е достатъчно, че равенството $(u, L^* v) = (f, v)$ е изпълнено за анулиращите се в околност на $S_{0\varepsilon}$ функции v . Върху $\rho = F(x_3)$ няма спрегнати гранични условия. Функцията F е непрекъсната и следователно е приложима забележка 1.5. След смяната на променливите коефициентите пред производните удовлетворяват условието на Липшиц. Коефициентът $K(x_3)$ пред $u_{x_3 x_3}$ може и да се анулира при $x_3 = 0$, обаче зависи само от x_3 . Аналогично се разглежда $S_{0\varepsilon} \cap S_{2\varepsilon}$.

За всяка точка от $S_{1\varepsilon} \cap S_{2\varepsilon}$ може да се намери околност в $\overline{\mathcal{D}}_\varepsilon$, която с неособена трансформация от клас C^∞ да се изобрази в част от $\{(y_1, y_2, y_3) : y_1 \geq F_1(y_2, y_3)\}$,
при което /както и по-горе/ сечението на околността и $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$ отива в част от границата на образа. Функцията $F_1(y_2, y_3)$ е дефинирана за всички точки $(y_2, y_3) \in R^2$ и е липшицова. Върху $y_1 = F_1$ няма спрегнати гранични условия. Останалата част на $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$ може да се раздели на краен брой части, всяка от които е двукратно гладка и върху нея няма гранични или спрегнати гранични условия. Този случай се разглежда както предния.

След тия разглеждания на границата ще отбележим, че ако продължим функцията u_ε като нула в $\{x_3 \geq 0\} \setminus \overline{\mathcal{D}}_\varepsilon$, продължението ще е от W_2^1 , понеже $u_\varepsilon \in W^1$. Според теорема 1.6 и забележката към нея, u_ε е силно решение на задача P_1 и всяка

---

* Навсякъде в $\overline{\mathcal{D}}_\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ имаме $\rho > 0$.

функция от апроксимиращата го редица е нула в околност на $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$.

Да разгледаме случая $\varepsilon = 0$. Нека $f \in W_2^0(\mathcal{D}_0)$. Тогава $f \in W_2^0(\mathcal{D}_\varepsilon)$ за $0 < \varepsilon < R$ и от доказаното следва: съществуват функции $u_\varepsilon^k \in C^2(\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon)$ /$k = 1, 2, \dots$ /, всяка от които е нула в околност на $S_{1\varepsilon} \cup S_{2\varepsilon}$ и $\| L u_\varepsilon^k - f \|_{0\varepsilon} \to 0$ при $k \to \infty$. С $\| \quad \|_{0\varepsilon}$ означаваме нормата в $W_2^0(\mathcal{D}_\varepsilon)$. Да продължим функциите u_ε^k като нула в $\bar{\mathcal{D}}_0 \setminus \bar{\mathcal{D}}_\varepsilon$. Получаваме функции $v_\varepsilon^k \in C^2(\bar{\mathcal{D}}_0)$, $v_\varepsilon^k = 0$ върху $S_{10} \cup S_{20}$. Нека числата $\varepsilon_n \to +0$ са такива, че

$$\| f \|_{W_2^0(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_{\varepsilon_n})} \le \frac{1}{n}.$$

Тогава

$$\| L v_{\varepsilon_n}^k - f \|_{00}^2 = \| L u_{\varepsilon_n}^k - f \|_{0\varepsilon}^2 + \| f \|_{W_2^0(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_{\varepsilon_n})}^2 \le \frac{2}{n^2},$$

за $k \ge k_n$. Да разгледаме редицата $\{ v_{\varepsilon_n}^{k_n} \} \subset C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap W^2$. От неравенство /3.9/ следва, че тя е сходяща в $W_2^1(\mathcal{D}_0)$, т.е. съществува силно решение на задача P_1 и за областта $\mathcal{D}_0$. По такъв начин доказахме

Т е о р е м а 3.3. Нека $0 \le \varepsilon < R$. Тогава за всяка функция $f \in W_2^0(\mathcal{D}_\varepsilon)$ задача P_1 има едно и само едно силно решение $u_\varepsilon \in W_2^1(\mathcal{D}_\varepsilon)$. За всички функции $u \in C^2(\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon)$, удовлетворяващи /3.20/ е изпълнено

$$\| u \|_{W_2^1(\mathcal{D}_\varepsilon)} \le c \| L u \|_{W_2^0(\mathcal{D}_\varepsilon)}.$$

З а б е л е ж к а. Функциите от апроксимиращата силното решение редица е ясно, че могат да се вземат от $C^\infty(\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon)$.

Задача P_1 може да се обобщи и в случай, че върхът на коноида S_{10} се намира не обезателно в началото на координатната система. Нека $0 < R < R_0$ и $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < R$. За $0 \le \varepsilon < R - \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ да разгледаме ограничената област G_ε, чиято граница се състои от части на повърхнините

$$\Gamma_0 : x_3 = 0 \quad ; \; \Gamma_2 : \sqrt{x_1^2+x_2^2} = R - \psi(x_3) \; ;$$

$$\Gamma_{1\varepsilon} : \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2} = \varepsilon + \psi(x_3) .$$

Точно както горе изследвахме задача P_1, може да се изследва и такова нейно обобщение.

З а д а ч а P_1'. Да се намери решение в G_ε на уравнението /3.21/, удовлетворяващо условията

$$u = 0 \quad \text{върху} \quad (\Gamma_{1\varepsilon} \cup \Gamma_2) \cap \partial G_\varepsilon .$$

Т е о р е м а 3.3.' За всяка функция $f \in W_2^0(G_\varepsilon)$ съществува едно и само едно силно решение $u \in W_2^1(G_\varepsilon)$ на задача P_1'.

Във всички описани в § 3.3 задачи равнината $x_3 = 0$ може да се замени с произволна частично гладка повърхнина, върху която $H \ge 0$ и $n_3 < 0$. В получената по този начин област съответната задача също има силно решение и то е единствено.

Ще завършим със следната бележка. В същност, при $M(0) > 0$ от изследванията в § 3.2 и в Гл.I, може да се докаже, че всяка една от разгледаните задачи има не повече от едно слабо решение.

§ 3.4 Задача на Бицадзе

Да означим с Σ_1 и Σ_2 частите от повърхнините

$$\{x_3 = \rho ,\; 2x_3 < R\} \quad \text{и} \quad \{x_3 = R - \rho ,\; 2x_3 \ge R\} ,$$

намиращи се в полупространството $x_2 \ge 0$. Да разгледаме ограничената и едносвързана област $\mathcal{D}$, с граница Σ_1, Σ_2 и

$\Sigma_3 \subset \{x_2 = 0\}$. Ще изследваме в $\mathcal{D}$ уравнението /3.21/ при $K \equiv 1$, $M \equiv 1$. Ясно е, че $H = 0$ върху Σ_1 и Σ_2, т.е. те са характеристики. Върху Σ_3 имаме $H < 0$, т.е. Σ_3 е времевоориентирана повърхнина. Граничните условия /3.7/ сега са

/3.22/ $$u = 0 \quad \text{върху } \Sigma_2 \cup \Sigma_3,$$

а спрегнатите са

$$v = 0 \quad \text{върху } \Sigma_1 \cup \Sigma_3.$$

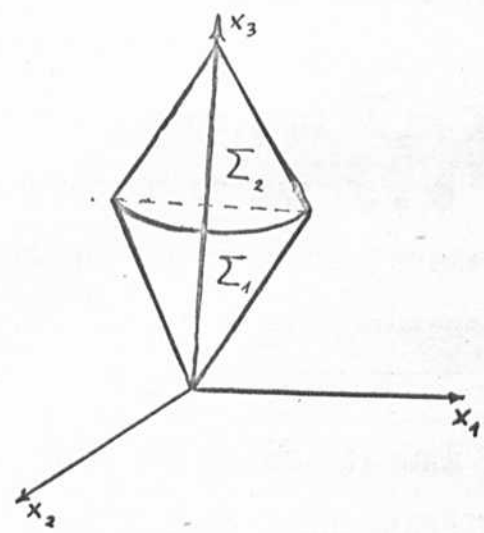

Рис. 3.2.

Задача /3.21/, /3.22/ се нарича задача на Бицадзе. Ще докажем, че тя има силно решение.

Лесно се вижда, че условията на теорема 3.1 са налице, т.е. за всяка функция $f \in W_2^0(\mathcal{D})$ съществува слабо решение $u \in W^1$. Обаче условията на теорема 1.6 за съвпадане на слабото и силно решение са изпълнени. Наистина, границата около върха $(0,0,0)$ след подходяща смяна на променливите може да се разгледа като двустенен ъгъл, на който едната стена е двукратно гладка, а другата липшицова и на нея не се задават гранични условия. В околност на върха $(0,0,R)$ границата също може да се разгледа като двустенен ъгъл, с една двукратно гладка стена и друга липшицова, с незадаване върху нея на спрегнати гранични условия. Границата около всяка от точките от $\{2\rho = R,\ x_2 > 0\}$ може да се доведе до двустенен ъгъл, на който върху едната страна няма гранични условия, а върху другата спрегнати гранични условия. В околност на коя да е от двете точки $(\frac{R}{2}, 0, \frac{R}{2})$ и $(-\frac{R}{2}, 0, \frac{R}{2})$ границата може да се изобрази в прав тристенен ъгъл, на който върху една от стените няма гранични, а върху другата - спрегнати гранични условия. Останаха точките от вътрешността на Σ_1, Σ_2 и Σ_3. Но тези три повърхнини са съответно от вид S_3, S'' и S' според означенията в § 1.5. Така че наистина са удовлетворени условията на теорема 1.6. Понеже така е и при спрегнатата задача, получаваме

Т е о р е м а 3.4. За всяка функция $f \in W_2^0(\mathcal{D})$ задачата на Бицадзе има едно и само едно силно решение $u \in W_2^1(\mathcal{D})$. Слабото решение на тази задача е единствено.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.O.Friedrichs.- The Identity of Weak and Strong Extensions of Differential Operators, Trans.Amer.Math.Soc., 55 (1944), p. 132-151.
2. K.O.Friedrichs.- Symmetric Positive Linear Differential Equations, Comm.Pure Appl.Math., 11, N 3, 6(1958).
3. K.O.Friedrichs.- Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations, Comm.Pure Appl.Math., 7 (1954).
4. P.D.Lax, R.S.Phillips,-Local Boundary Comditions for Dissipative Symmetric Linear Differential Operators, Comm.Pure Appl.Math., 13, N 3, (1960).
5. L.Sarason.- On Weak and Strong Solutions of Boundary Value Problems, Comm.Pure Appl.Math., 15, N 3, (1962).
6. G.Peyser. - On the Identity of Weak and Strong Solutions of Differential Equations with Local Boundary Conditions, Amer.J.Math., 87, N 2, (1965).
7. R.S.Phillips, L.Sarason, Singular Symmetric Positive First Order Differential Operators, J.Math.Mech., 15, N 2 (1965).
8. М.Нагумо, Лекции по современной теории уравнений в частных производных, Москва, 1966.
9. А.А.Дезин. - Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка. "Матем.сб." 49, № 4 /1959/.
10. L.Hörmander.-Definitions of Maximal Differential Operators, Ark.Mat., 3, (1958).
11. L.Hörmander. - Differential Operators of Principal Type, Math.Ann., 140, (1960).
12. L.Hörmander. - Weak and Strong Extensions of Differential Operators, Comm.Pure Appl.Math., 14, (1961), p.371-379.
13. М.С.Агранович. - Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов 1-го порядка, "Успехи матем.наук", 1969, 24, № 1.

14. Н.Г.Сорокина.- О сильной разрешимости задачи Трикоми, "Укр,матем.ж.", 18, № 6 /1966/.

15. Н.Обрешков. - Висша алгебра, София, 1966.

16. А.В.Бицадзе. - Уравнения смешанного типа, Изд.АН СССР, 1959.

17. М.М.Смирнов. - Уравнения смешанного типа, "Наука", 1970.

18. Ю.М.Березанский. - Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.

19. В.И.Смирнов. - Курс высшей математики, т.V, Москва, 1959.

20. А.М.Нахушев. - Об одной задаче смешанного типа для уравнения $y(y-1)u_{xx}+u_{yy}=0$, ДАН, 166, 3 /1966/.

21. А.М.Нахушев.- Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, ДАН, № 1 /1966/.

22. А.М.Нахушев.- О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сиб.матем.ж., 8, № 1 /1967/.

23. L.M.Sibner. - A Boundary Value Problem for an Equation of Mixed Type Having two Transitions, J.Different.Equat., 4, N 4 (1968).

24. А.Б.Базарбеков. - Об одной задаче для уравнения смешанного типа с двумя паралельными линиями вырождения. Дифференц.уравн., 10, № 1 /1974/.

25. М.М.Зайнулабидов.- О некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линияме вырождения, Дифференц.уравн., 5,№ 1 /1969/.

26. М.М.Зайнулабивод. - Краевая задача для уравнений смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения, Дифференц.уравн., 6, № 1 /1970/.

27. О.И.Маричев.- Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Изв. АН БССР, Сер.физ. мат.н., № 5 /1970/.

28. В.В.Азовский. - О существовании решении задачи Трикоми для одного уравнения с двумя перпендикулярными линиями вырождения типа, "Волжский мат.сб.", вып.8 /1971/.

29. А.В. Коирлин. - Задача М для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, "Волжский мат.сб.", вып.8,1971.

30. И.А.Макаров. - Решение краевых задач для смешанных эллиптико-гиперболических уравнений с двумя и тремя линиями вырождения, Автореферат канд.диссерт., Куйбишев, 1970.

31. М.С.Салахитдинов, А.Толипов. - О некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения, Дифференц.уравн., 8, № 1 /1972/.

32. А.Толипов. - Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Изв.АН УзССР, Сер. физ.-мат.н", № 3, 1973.

33. М.Б.Капилевич. - К теории линейных дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболичности, ДАН, 125, № 2 /1959/.

34. R.Conti.- Sur problema Cauchy per le equationi di typo misto $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$, II, Annali Scuola norm. Sup. Pisa, Sci.fis.mat., ser.3, vol.4 (1950).

35. Л.Д.Кудрявцев. - Теоремы вложения для функций, определенных на неограниченных областях, ДАН, 153, № 3 /1963/.

36. Л.Д.Кудрявцев. - Теоремы вложения для классов функций, определенных ца всем пространстве или полупространстве, Матем,сб., 70, № 1 /1966/.

37. Ю.В.Рыбалов. - Теоремы вложения для функций, определенных в неограниченных областях и их применение к спектральной теории элиптических самосопряженных операторов, ДАН, 184, № 5 /1969/.

38. Т.С.Пиголкина. - К теории весовых классов, Труды МИАИ, 105 /1969/.

39. Т.С.Пиголкина. - О плотности финитных функций в весовых классах, Мат.заметки, т.2, № 1 /1967/.

40. В.Н.Седов.- Весовые пространства. Теорема вложения, Дифференц.уравн., VIII, № 8 /1972/.

41. О.А.Олейник, Е.В.Радкевич.- Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Матемал. анализ, 1969.

42. В.Н.Врагов. - О задаче Коши для некоторых параболо-гиперболических уравнений, ДАН, 212, № 3 /1973/.

43. В.А.Брюханов. - О смешанной задаче для одного уравнения гиберболического типа, вырождающеюся на части границы области, Дифференц.уравн., VIII, № 1 /1972/.

44. Ф.Т.Барановский. - Задача Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на началной плоскости. Уч.зап. Л.Пед.института им. А.И.Герцена, 166 /1958/.

45. Ф.Т.Барановский. - О задаче Коши для сильно вырождающегося гиперболического уравнения, Сиб.матем.Ж., IV, № 5 /1963/.

46. Ф.Т.Барановский. -Смешанная задача для гиперболического вырождающегося уравнения, Изв. ВУЗ, Математика, №3, 1960.

47. А.С.Калашников. - Задача без начальных условий для линейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка с бесконечной областью зависимости, Матем.сб., 88, № 4 /1972/.

48. М.Л.Краснов. - Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка, Матем.сб., 49, 1959.

39. Ф.Т.Барановский. - Задача Коши для уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу и вырождающегося гиперболического уравнения, Известия ВУЗ, Матем., № 6, 1960.

50. С.А.Терсенов. - Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, 1973.

51. М.С.Бауенди, С.Голуик. - Задача Коши с кратными характеристиками в пространствах регулярных обобщеных функций, "Успехи матем.наук", 4, 29, № 2, 1974.

52. M.S.Baouendi, C.Goulauic. - Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurface, Comm.Pure Appl. Math., 26, N 4, 1973.

53. M.S.Baouendi, C.Goulauic. - Problemes de Cuachy relative a une surface initial caracteristique-applications, "Collog. int.CNRS", 213, 1973.

54. J.B. Diaz, E.C.Young. - On the Characteristiv Initial Value Problem for the Wave Equation in odd Spatial Dimensions with Radial Initial Data, Ann.mat.pura ed appl. 94,(1972).

55. С.Л.Соболев. - Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных гиперболического типа, Матем.сб., 11, № 3 /1942/.

56. Р.Курант, Д.Гильберт. - Методы математический физики, II, "Мир", 1964.

57. О.А.Ладыженская. - Краевые задачи математической физики, "Наука", Москва, 1973.

58. D.Colton. - Improperly Posed Initial Value Problems for Self-Adjoint Hyperbolic and Elliptic Equations, SIAM J. Math.Anal., 4, N 1 (1973).

59. Г.Д.Каратопраклиев. - Об уравнениях смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях, Дифферен.уравн., 8, № 1 /1972/.

60. Г.Д.Каратопраклиев. - К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений, Докт.диссерт. /Библ.Матем.Института АН СССР, 1972/.

61. В.П. Диденко. - О краевых задач для многомерных гиперболических уравнений с вырождением, ДАН, 205, № 4, /1972/.

62. M.H.Proter. - New Boundary Value Problems for the Wave Equation and Equations of Mixed Type, J.of Math.and Mech., 3, N 4 (1954).

63. Tong Kwang-chang. - On a Boundary Value Problem for the Wave Equation, Sci.Rec.Acad.Sinica, 1, N 5 (1957).

64. Wang Guang-Ying. - The Goursat Problems in Space, Sci.Rec. Acad.Sinica, 1, N 5 (1957).

65. Ли В. - О пространственных задачах Коши-Гурса, Тр.III Казахст.межвуз.науч.конф.по мат. и мех., Алма Ата, 1970.

66. А.В.Бицадзе. - Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях, ДАН СССР, 143, № 5 /1962/.

67. А.М.Нахушев, В.И.Пашковский. - О задаче А.В.Бицадзе для уравнения смешанного типа в многомерных областях, Диффер. уравн., 7, № 1 /1971/.

68. В.Н.Врагов. - О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений, Дифференц.урувн., 8, № 1 /1972/.

69. Н.И.Попиванов. - Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями параболического вырождения, Докл.БАН, 25, № 4 /1972/.

70. Н.И.Попиванов. - О совпадении слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка, Докл. БАН, 26, № 9 /1973/.

71. Н.И.Попиванов. - Върху теорията на линейните системи частни диференциални уравнения от първи ред и уравненията от смесен тип с две перпендикулярни линии на параболично израждане, Докл.на Втора пролетна конференция на БМД 1973, София /1974/.

72. Н.И.Попиванов. - О совпадение слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка, "Сердика , Бълг.матем.известия"/под печат/.

73. Н.И.Попиванов. - Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, "Сердика, Бълг.матем.изв." /под печат/.

74. Н.И.Попиванов. - О краевых задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, Дифференц.уравн., 11, № 1 /1975/.

75. Н.И.Попиванов. - Об одном классе вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, Годишник на СУ, 1972/73.

76. Н.И.Попиванов. - Върху изследването на гранични задачи за израждащи се многомерни хиперболични уравнения, Докл. на Третата пролетна конференция на БМД, 1974, София.