Софийски университет „Климент Охридски“
Факултет по математика и механика

Владимир Х. Христов

ДИСЕРТАЦИЯ

София 1977 г.

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „КЛ. ОХРИДСКИ"

ЕДИНЕН ЦЕНТЪР ЗА НАУКА И ПОДГОТОВКА НА КАДРИ ПО

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Сектор „Математическо моделиране"

ВЛАДИМИР ХРИСТОВ ХРИСТОВ

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на научната степен

„Кандидат на математическите науки"

Научен ръководител: ...

/ст.н.с. В.А. По

София, март 1977

ВЪРХУ КРИТЕРИИТЕ ЗА СХОДИМОСТ НА РЕДА НА ФУРИЕ

ВЪВЕДЕНИЕ

Проблемът за сходимостта на реда на Фурие на дадена функция е един от основните в теорията на тригонометричните редове. Изследванията в настоящата дисертация са свързани с въпроса за условията, които осигуряват реда на Фурие на една функция да е сходящ относно дадена метрика. Чудесни изложения на огромен материал от факти, свързани с този въпрос, са направени в монографиите на Бари Н.К. [1] , Зигмунд А. [6] и Харди Г.Х. и Рогозинский В.В. [17] .

Навсякъде в дисертацията, както вече е общоприето, с $S[f]$ ще означаваме реда на Фурие на една функция f , която ще смятаме, че е 2π -периодична. Както обикновено, n -тата частична сума на реда $S[f]$ в точката x ще означаваме с $S_n(f;x)$. С $C_{2\pi}$ ще означаваме пространството от всички непрекъснати 2π-периодични функции f , като нормата им определяме чрез $\|f\|_C = \sup_{0\le x\le 2\pi} |f(x)|$, а с $D_{2\pi}$ ще означаваме съвкупността от всички 2π-периодични функции, които нямат прекъсвания от II-ри род и такива, че за всяко $x \in [0,2\pi]$ имаме

$$(f(x-0)-f(x))(f(x+0)-f(x)) \le 0.$$

През 1876г. Дю Буа Раймон построява пример на непрекъсната функция, чийто ред на Фурие е разходящ в дадена точка, а през 1905г. Лебег показва, че съществува непрекъсната функция, чийто ред на Фурие във всяка точка е сходящ, но не равномерно /вж. [1] стр 128-137/. Следователно, за да осигурим равномерна сходимост на реда на Фурие на една непрекъсната функция е необходимо на нея да се поставят допълнителни ограничения. От разни автори /вж. [1] , стр. 275-306, [4] , [9], [10], [12] , [18] и [19] / чрез ограничения върху различни характеристики на функцията $f \in C_{2\pi}$ са получени достатъчни условия за равномерна сходимост на реда на Фурие $S[f]$. За един критерий за сходимост на реда на Фурие е важно характеристиката, чрез която се задава условието върху функцията, да е сравнително проста и класът от функциите, за които критерият осигурява равномерна сходимост на реда на Фурие, да е възможно по-голям. Важно е и критерият за равномерна сходимост на реда на Фурие да е точен, което се разбира в следния смисъл: ако някое от условията на критерия не е изпълнено, то съществува функция f с ред $S[f]$ - разходящ или неравномерно сходящ и такава, че съответната нейна характеристика има зададен порядък.

Важно място при изследванията в дисертацията заемат следните критерии за равномерна сходимост на реда на Фурие

Критерий на ДИНИ-ЛИПШИЦ: Ако $f \in C_{2\pi}$ и

$$/0.1/ \qquad \lim_{n\to\infty} \omega(f;1/n)\ln n = 0,$$

където $\omega(f;\delta) = \sup\limits_{|h|\leq\delta} \| f(x+h) - f(x)\|_C$ е модулът на непрекъснатост на функцията f, то $S_n(f;x)$ клони равномерно към f /вж. [1], стр. 280/.

Критерий на ДИРИХЛЕ-ЖОРДАН: Ако $f \in C_{2\pi}$ и има ограничена вариация в интервала $[0,2\pi]$, то $S[f]$ е равномерно сходящ/вж. [6], стр.98/.

Критерий на ЧАНТУРИЯ: Ако $f \in C_{2\pi}$ и

$$/0.2/ \qquad \lim_{n\to\infty} \min_{1\leq m\leq n} \left\{ \omega(f;1/n)\ln m + \sum_{k=m}^{n} \nu(f;k)/k^2 \right\} = 0,$$

където $\nu(f;k) = \sup\limits_{0\leq x_0 < x_1 \leq x_2 < \ldots \leq x_{2k-2} < x_{2k-1} \leq 2\pi} \sum\limits_{i=0}^{k-1} |f(x_{2i}) - f(x_{2i+1})|$

е модулът на изменение на функцията f, то $S[f]$ е равномерно сходящ/вж. [18] и [19]/.

Ще отбележим, че тези критерии са точни в гореуказания смисъл.

След тези предварителни бележки ще дадем кратко описание на резултатите в дисертацията.

В глава I е доказано едно ново достатъчно условие за равномерна сходимост на реда на Фурие $S[f]$ и е изяснена връзката му с някои други известни достатъчни условия. За да може да формулираме точно резултатите, ще припомним определението на модула на немонотонност $\mu(f;\delta)$ на 2π-периодичната функция f, въведен от Бл. Сендов [16]:

$$\mu(f;\delta)=\frac{1}{2}\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\left\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}\left[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\right]-|f(x_1)-f(x_2)|\right\}.$$

В § 1.1 е доказана следната

ЛЕМА 1.*) Нека $f\in C_{2\pi}$ и $M=\sup_x f(x)$, $m=\min_x f(x)$.

Тогава за всяка редица от реални числа $0=\delta_0\leq\delta_1\leq\ldots\leq\delta_s$ съществуват функции $f_k\in C_{2\pi}$, $k=1,2,\ldots,s$ и $\tau_s\in C_{2\pi}$, такива че

а/ $f(x)=\sum_{k=1}^{s} f_k(x)+\tau_s(x)$, $-\infty<x<\infty$,

б/ $\|f_k\|_C\leq\mu(f;\delta_k)-\mu(f;\delta_{k-1})$, $\mu(f_k;\delta_{k-1})=0$,

$\omega(f_k;\delta)\leq\omega(f;\delta)$, $\delta\geq 0$, $k=1,2,\ldots,s$,

в/ $\mu(\tau_s;\delta_s)=0$ и $\omega(\tau_s;\delta)\leq\omega(f;\delta)$, $\delta\geq0$,

г/ ако $M-m\leq 2\mu(f;\delta_s)$, то $\tau_s(x)\equiv(M+m)/2$,

а ако $M-m>2\mu(f;\delta_s)$, то $m+\mu(f;\delta_s)\leq\tau_s(x)\leq M-\mu(f;\delta_s)$, $-\infty<x<\infty$.

Тази лема е полезна за получаване на оценки на величини, зависещи от някаква функция f, чрез модула на немонотонност $\mu(f;\delta)$ в случаи когато големината на оценяваната величина се влияе от монотонността на f в даден интервал.

В § 1.2 на базата на лема 1 е доказана следната

---

*) Номерацията на лемите и теоремите във въведението е независима от номерацията им в главите.

ТЕОРЕМА 1. За всяка функция $f \in C_{2\pi}$ е изпълнено

$$\| S_n(f;x)-f(x)\|_C \leq C \ln(n+1) \sum_{k=1}^{[\ln n]} \mu(f; k\pi/n)/k^2 + \varepsilon_n(f), \quad n=1,2,\ldots,$$

където C е абсолютна константа и $\varepsilon_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Като следствие от тази теорема се получава следното достатъчно условие за равномерна сходимост на реда на Фурие

ТЕОРЕМА 2. Ако $f \in C_{2\pi}$ и

/0.3/ $$\lim_{n\to\infty} \mu(f; 1/n) \ln n = 0,$$

то редът $S[f]$ е равномерно сходящ.

Ще отбележим, че условието /0.3/ за равномерна сходимост на реда на Фурие за непрекъснати функции е точно, което ще рече, че съществуват непрекъснати функции f и g с модул на немонотонност от порядъка на $O\{(\ln(1/\delta))^{-1}\}$ и такива, че редът $S[f]$ е разходящ в някоя точка, а $S[g]$ е сходящ навсякъде, но неравномерно.

Ако означим с $\mu(f;[a,b],\delta)$ модула на немонотонност на функцията f за интервала $[a,b]$, то теорема 2 може да се усили незначително по следния начин:

ТЕОРЕМА 3. Нека $f \in C_{2\pi}$. Ако за някое реално a интервалът $[a, a+2\pi]$ може да се раздели на краен брой подинтервали с точките $a=a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a+2\pi$, така, че

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f; [a_i, a_{i+1}], 1/n) \ln n = 0, \quad i=0,1,2,\ldots,m-1,$$

то $S[f]$ е равномерно сходящ.

В § 1.3 са изследвани връзките между някои известни достатъчни условия за равномерна сходимост на реда на Фурие и достатъчното условие дадено в теорема 2. Доказано е, че условието /0.3/ е по-слабо изискване към функцията $f \in C_{2\pi}$ от условието на Дини-Липшиц /0.1/ , от условието на Дирихле-Жордан за ограниченост на вариацията на f и от едностранното условие на Дини-Липшиц/вж. [4] и [9]/ и следователно теорема 2 е по-обща от съответните критерии за равномерна сходимост на реда на Фурие. Освен това, показано е, че съществува функция $f_1 \in C_{2\pi}$, такава че за нея е изпълнено условието /0.3/, а не е изпълнено условието /0.2/ от критерия на Чантурия и обратно - че съществува функция $f_2 \in C_{2\pi}$, такава че за нея е изпълнено условието /0.2/, а не е изпълнено условието /0.3/. Следователно, критерият на Чантурия [18] и този от теорема 2 са несравними.

В § 1.4 са получени резултати, аналогични на тези от § 1.2, но за тригонометричните интерполационни полиноми $I_n(f;x)$ на функцията f, построени по нечетен брой равноотстоящи интерполационни възли.

По- точно, нека

$$x_k^{(n)} = x_0^{(n)} + \frac{2k\pi}{2n+1}, \; k=0,1,\dots,2n \quad \text{и} \quad I_n(f;x) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)})\, D_n(x - x_k^{(n)}),$$

където $D_n(u)$ е n -тото ядро на Дирихле. Доказани са:

ТЕОРЕМА 4. За всяка функция $f \in C_{2\pi}$ е изпълнено

$$\|I_n(f;x) - f(x)\|_C \leq C \ln(n+1) \sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} \frac{1}{k^2}\, \mu\Big(f; \frac{2k\pi}{2n+1}\Big) + \varepsilon_n(f), \quad n=1,2,\dots,$$

където C е абсолютна константа, а $\varepsilon_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

ТЕОРЕМА 5. Ако $f \in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f; 1/n) \ln n = 0,$$

то $I_n(f;x)$ равномерно в $[0, 2\pi]$ клони към $f(x)$.

Теорема 5 е едно усилване на критерия на Дини-Липшиц / [6], т. II, стр. 31/ за равномерна сходимост на интерполационните полиноми $I_n(f;x)$. Ще отбележим, че критерият за равномерна сходимост на $I_n(f;x)$ от теорема 5 е точен, в смисъл, че съществува функция $f \in C_{2\pi}$, такава че $\mu(f;\delta) = O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$, а редицата $I_n(f;x)$, $n=1,2,\dots$ е разходяща почти навсякъде в интервала $[0, 2\pi]$.

В глава II е разгледана абстрактната задача за сходимост на операторите на Фурие в банахово пространство.

Известно е [7], че едно естествено обобщение на резултатите от теорията на приближение на функциите чрез тригонометрични полиноми в случай на произволно банахово пространство може да се получи, ако в банаховото пространство действува силно непрекъсната полугрупа от линейни оператори, а апарат на приближение са собствените функции на инфинитезималния оператор на полугрупата /или на негови степени/. Купцов [7] получава прави и обратни теореми в случай на банахово пространство, които обобщават известните теореми на Джексон и Бернщейн. Той дава и оценки на отклонението между произволен елемент от банаховото пространство и образа му след въздействието върху него на n -тия оператор на Фурие. Попов в [11] получава оценка за локалното приближение в случай на произволно банахово пространство, от която следва правата теорема на Купцов. При това Попов се отказва от ограничителното условие за съществуване на ограничен линеен десен обратен оператор на инфинитезималния оператор на полугрупата, което се изисква в теоремите на Купцов.

В нашите разглеждания предполагаме, че в банаховото пространство X действува силно непрекъсната група от оператори $T(t)$, $/-\infty<t<\infty/$ и с A означаваме нейния инфинитезимален оператор /вж. [5], стр. 654/. На оператора A, както Купцов, поставяме изискване за s-регулярност, т.е. за натуралното число s да съществува такова реално число θ, че

$$\|R(\lambda; e^{i\theta}A^s)\| \leq C/|\operatorname{Im}\lambda|,$$

където с $R(\lambda; e^{i\theta}A^s)$ сме означили резолвентата на оператора $e^{i\theta}A^s = Q$, а C е константа, независеща от λ. Предполагаме още /вж. [7] /, че операторът $A^s e^{i\theta}$ има дискретен и неограничен спектър. Тогава всички точки от спектъра на Q са собствени стойности за Q и нека модулите им са номерирани с числата

$$m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$$

Следвайки Купцов, операторът

$$S_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\varrho_n} R(\lambda; e^{i\vartheta}A^s)\,d\lambda\,, \quad \varrho_n \in (m_n, m_{n+1}),\ (n=1,2,\dots)$$

ще наричаме n -ти оператор на Фурие.

В § 2.1 чрез групата $T(t)$ в банаховото пространство X за всеки елемент са въведени абстрактни аналози на някои конструктивни характеристики на функциите. По-точно, ако с X^* означим спрегнатото пространство на пространството X, то определени са

К-ти модул на непрекъснатост /вж. [7]/ на елемента f

$$\omega_k(f;\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \| (T(h)-I)^k f \|, \quad \delta \geq 0,$$

к-ти локален модул на изменение на елемента f

$$\nu_k(f;x^*,l,n) = \sup_{-l\leq h_0\leq h_1\leq\dots\leq h_{2n-1}\leq l} \sum_{j=0}^{n-1} \left| x^* T(h_{2j})\left(T\left(\frac{h_{2j+1}-h_{2j}}{k}\right)-I\right)^k f \right|, \quad x^*\in X^*$$

к-ти глобален модул на изменение на f

$$\nu_k(f;l,n) = \sup_{x^*\in S^*} \nu_k(f;x^*,l,n),$$

където k е натурално, $l>0$, I е тъждественият оператор и S^* е единичната сфера на X^*.

В § 2.2 са получени оценки на $|x^*(I-S_n)f|$ и $\|(I-S_n)f\|$ чрез характеристиките $\omega_k(f;\delta)$, $\nu_k(f;x^*,l,n)$ и $\nu_k(f;l,n)$. Доказана е

ТЕОРЕМА 6. Нека в банаховото пространство X действува силно непрекъсната група от оператори $T(t)$ с S-регулярен инфинитезимален оператор A и нека $e^{i\vartheta}A^s$ има дискретен и неограничен спектър. Ако k е натурално число, $l>0$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица от натурални числа, то съществува $N=N(s,A)$, такова че за всички $n\geq N$, $f\in X$ и $x^*\in S^*$ е в сила

$$|x^*(I-S_n)f| \leq C_1\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln(\ell+1/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}))$$

$$+C_2\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln p_n + C_3\sum_{j=p_n}^{q_n} \nu_k(f;x^*,\ell,j)/j^2 ,$$

където C_1, C_2 и C_3 са константи зависещи евентуално от k, ℓ и A, $q_n=\min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})],[\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}]\}$ а ако $p_n>q_n$, ще смятаме, че последната сума е празна.

От тази теорема в § 2.3 са получени достатъчни условия за силна и слаба сходимост на редицата S_nf. Ще формулираме само някои от резултатите за силна сходимост на S_nf към f.

ТЕОРЕМА 7. При предположенията на теорема 6 за X, $T(t)$, A и q_n, ако за елемента $f\in X$ съществуват k и $\ell>0$ такива че

а/ $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln(\ell+1/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}))=0$,

б/ $\lim\limits_{n\to\infty}\min\limits_{1\leq m\leq q_n}\{\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln m+\sum\limits_{j=m}^{q_n}\nu_k(f;\ell,j)/j^2\}=0$,

то $\lim\limits_{n\to\infty}\|(I-S_n)f\|=0$.

ТЕОРЕМА 8. При предположенията на теорема 6 за X, $T(t)$ и A, ако $\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}\geq a>0$ за достатъчно големи n и ако за елемента $f\in X$ за някои k и $\ell>0$ е изпълнено

$$\sum_{j=1}^{\infty}\nu_k(f;\ell,j)/j^2<\infty ,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\|(I-S_n)f\|=0$.

Така формулираните достатъчни условия за силна сходимост на S_nf са обобщение за случая на произволно банахово пространство на известния критерий на Чантурия за равномерна сходимост на реда на Фурие / вж. /0.2//.

Други достатъчни условия за сходимост на S_nf чрез въведеното понятие ограничена k-та Φ-вариация на елемента $f\in X$

са получени в края на § 2.3. Те са обобщение за случай на произволно банахово пространство на известната теорема на Салем /[1], стр. 287/ за равномерна сходимост на реда на Фурие.

Примери на силно непрекъснати групи от оператори дава групата на транслациите в пространствата и подпространствата на почти-периодическите функции в различни норми /вж. [8] /. От получените в § 2.3 резултати следват достатъчни условия за сходимост на реда на Фурие за някои класи от почти-периодически функции.

В глава III са получени достатъчни условия за сходимост на редицата $S_n(f;x)$ относно хаусдорфовото разстояние за функции от класа $D_{2\pi}$.

Отчитайки, че хаусдорфовото разстояние $\tau(f,g;\alpha)$ между функциите f и g /вж. [15] и [25] / характеризира близост на допълнените графики на тези функции и тъй като за реда на Фурие от прекъсната функция се наблюдава ефект на Гибс /вж. [1], стр. 123/, то естествено е да се търси хаусдорфова близост на n -тата частична сума $S_n(f)$ с множеството Φ_f получено чрез допълване на графиката на функцията $f\in D_{2\pi}$ с отсечки, отчитащи ефекта на Гибс. По- точно

$$\Phi_f=\left\{(x,y):-\infty<x<\infty,\ \frac{f(x-)+f(x+)}{2}-\Gamma\frac{|f(x-)-f(x+)|}{2}\leq y\leq\right.$$
$$\left.\leq\frac{f(x-)+f(x+)}{2}+\Gamma\frac{|f(x-)-f(x+)|}{2}\right\}$$

където $\Gamma=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,dt$ е константата на Гибс / [1], стр. 123/.

В § 3.1 са въведени някои характеристики на функциите от $D_{2\pi}$ които са необходими за получаване на оценка на $\tau(\Phi_f,S_n(f);\alpha)$.

За функцията $f\in D_{2\pi}$, имаща p /$0\leq p\leq\infty$ / точки на прекъсване в интервала $[0,2\pi)$ и за натуралното число m /$m\leq p$ /, означаваме с $0\leq a_{1,m}<a_{2,m}<\ldots<a_{m,m}<2\pi$ точките, в които f достига своите m най-големи прекъсвания в интервала $[0,2\pi)$. Полагаме $a_{0,m}=a_{m,m}-2\pi$ и $a_{m+1,m}=a_{1,m}+2\pi$ и за $\delta>0$ означаваме

$$\omega_i(f;\delta,m)=\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in(a_{i,m},a_{i+1,m}),|x-y|\leq\delta\},\ i=0,1,\ldots,m.$$

За $\delta>0$ и цяло $m\geqslant 0$ определяме следната характеристика на функцията $f\in D_{2\pi}$, приличаща по свойства на модула на непрекъснатост:

$$\omega(f;\delta,m)=\begin{cases}\omega(f;\delta) & \text{при } p=0 \text{ и } m \text{ произволно},\\ \omega(f;\delta) & \text{при } m=0,\\ \max\limits_{0\leq i\leq m}\omega_i(f;\delta,m) & \text{при } 1\leqq m\leqq p,\\ \max\limits_{0\leq i\leq p}\omega_i(f;\delta,p) & \text{при } m>p\geqslant 1.\end{cases}$$

Ще отбележим, че за да имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(f;\delta_n,m_n)=0$ при всеки избор на редицата $\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, необходимо и достатъчно е $\varliminf\limits_{n\to\infty} m_n\geqslant p$.

За $f\in D_{2\pi}$ и цяло $m\geqslant 0$ определяме

$$l(f;m)=\begin{cases}2\pi & \text{при } p=0 \text{ и } m \text{ произволно},\\ 2\pi & \text{при } m=0,\\ \min\limits_{0\leq i\leq m}\{a_{i+1,m}-a_{i,m}\} & \text{при } 1\leqq m\leqq p,\\ \min\limits_{0\leq i\leq p}\{a_{i+1,p}-a_{i,p}\} & \text{при } m>p\geqslant 1.\end{cases}$$

За произволни натурални k и n / $k\leqq n$ / определяме /вж. [1], стр. 283/

$$T_{n,k}(f;x)={\sum_{i=k}^{n}}'(f(x+(i-1)\pi/n)-f(x+i\pi/n))/i \quad \text{за } n \text{ и } k \text{ нечетни},$$

$$T_{n,k}(f;x)={\sum_{i=k}^{n-1}}'(f(x+(i-1)\pi/n)-f(x+i\pi/n))/i \quad \text{за } n \text{ четно и } k \text{ нечетно},$$

$$T_{n,k}(f;x)=T_{n,k+1}(f;x) \quad \text{за четни } k \text{ и } n \text{ произволно},$$

където $\sum'$ означава, че i пробягва само нечетните числа. Изразите за $Q_{n,k}(f;x)$ се получават като навсякъде в $T_{n,k}(f;x)$ заменим π с $-\pi$.

В § 3.2 чрез въведените горе характеристики на функцията $f \in D_{2\pi}$ е получена оценка на $\tau(\Phi_f, S_n(f); \alpha)$. От нея се получават следните достатъчни условия за хаусдорфова сходимост на $S_n(f)$ към Φ_f.

ТЕОРЕМА 9. Нека $f \in D_{2\pi}$ и $\alpha > 0$. Ако съществуват редица от цели числа $m_n \geq 0$ и редица $\varphi_n > 0$, $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, такива че

/0.4/ $\lim\limits_{n\to\infty} l(f; m_n) n = \infty,$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_{n,k(n)}(f) \|_C = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \| Q_{n,k(n)}(f) \|_C = 0,$$

където $k(n) = \min\{[n l(f; m_n)/2\pi], [\exp(\varphi_n / \omega(f; 1/n, m_n))]\}$,

то $\lim \tau(\Phi_f, S_n(f); \alpha) = 0$.

ТЕОРЕМА 10. Ако $f \in D_{2\pi}$ и съществува редица от цели числа m_n, такава че са изпълнени /0.4/ и

/0.5/ $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f; 1/n, m_n) \ln n = 0,$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\Phi_f, S_n(f); \alpha) = 0$.

Ще отбележим, че тъй като за всеки две непрекъснати функции f и g /вж. [15]/

$$\| f - g \|_C \leq \tau(f, g; \alpha) + \omega(f; \alpha \tau(f, g; \alpha)),$$

то за непрекъснати функции от хаусдорфовата сходимост на реда на Фурие следва и равномерната му сходимост. Освен това, тъй като за $f \in C_{2\pi}$ имаме $l(f; m) = 2\pi$ и $\omega(f; \delta, m) = \omega(f; \delta)$ за всяко m, то очевидно условието /0.4/ за непрекъснати функции е винаги изпълнено, а условието /0.5/ съвпада с условието на Дини-Липшиц /0.1/. Критериите при $f \in C_{2\pi}$, за равномерна сходимост на $S[f]$, които се получават от теоремите 9 и 10 са известните критерии на Салем/[1], стр. 283/ и Дини-Липшиц. Достатъчните условия за хаусдорфова сходимост на $S_n(f)$ които са получени в глава III са обобщение на равномерните критерии за сходимост на $S[f]$, но вече за класа от функции $D_{2\pi}$.

В § 3.3 са получени достатъчни условия за клонене на $S_n(f)$ към Φ_f / $f \in D_{2\pi}$ / относно хаусдорфовото растояние и чрез някои други характеристики на функцията f. Тези характеристики са: модулът на изменение $\nu(f;n)$ на функцията f, ϕ -вариацията на f / [1], стр. 286/, най-доброто равномерно приближение с частично-монотонни функции $M_n[f]$ /вж.[13],[14]/, модулът на немонотонност $\mu(f;\delta)$, най-доброто равномерно приближение на f със стъпаловидни функции $E_n^0(f)$ и модулът $\nu_1(f;\delta)$ въведен от Попов [24]. Ще споменем само следните резултати

ТЕОРЕМА 11. Нека $f \in D_{2\pi}$ и $\alpha > 0$. Ако съществуват редица от цели числа $m_n \geq 0$ и редица $\varphi_n > 0$, $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, такива че

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k(n)}^{n} \nu(f;j)/j^2 = 0,$$

където $k(n)$ е както в теорема 9, то $\lim\limits_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f); \alpha) = 0.$

ТЕОРЕМА 12. Ако $f \in D_{2\pi}$, $\alpha > 0$ и е изпълнено едно от условията

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(f;n)/n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} E_n^0(f)/n < \infty,$$

където $E_n^0(f)$ е най-доброто равномерно приближение на функцията f със стъпаловидни функции имащи $n-1$ прекъсвания на интервала $[0,2\pi)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r(\Phi_f, S_n(f), \alpha) = 0.$

Както вече отбелязахме, теоремите 11 и 12, ако $f \in C_{2\pi}$, дават достатъчни условия и за равномерна сходимост на реда на Фурие. Критериите, които се изразяват чрез модула на изменение $\nu(f;n)$, са известни и са получени от Чантурия [18], [19].

Накрая ще отбележим, че резултатите от глава I са докладвани на Международната конференция по Фурие анализ и теория на апроксимациите, август 1976г., а тези от глава II и глава III - на Международната конференция по теория на приближението на функциите в гр. Калуга, юли 1975г. и на семестъра по теория на приближенията в Международния математически център "Ст. Банах" във Варшава, декември 1975. Всички резултати от дисертацията са докладвани и обсъждани на семинара по теория на приближенията с ръководител чл. кор. Бл. Сендов.

Резултатите от дисертацията са отразени в статиите [26] - [33]

В заключение изразявам моята голяма благодарност към научния ми ръководител ст. н. с. д-р В.А. Попов за изключителните грижи и ценната помощ при изпълнението на тази дисертация. Приятно ми е да изразя и моето чувство на признателност към акад. Л. Илиев и чл. кор. Бл. Сендов за постоянното внимание към настоящата работа.

ГЛАВА I. ЕДНО ПОДОБРЕНИЕ НА КРИТЕРИЯ НА ДИНИ-ЛИПШИЦ

§ 1.1. Помощни твърдения

В [16] Бл. Сендов въведе следната характеристика за функцията f:

$$\mu(f;\delta)=\frac{1}{2}\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\left\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}\left[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\right]-|f(x_1)-f(x_2)|\right\},$$

която беше наречена от него модул на немонотонност. За свойствата и приложенията на модула на немонотонност може да се види в [15] и [16]. Ще отбележим само, че функциите от класа $D_{2\pi}$ и само те са такива, че $\lim\limits_{\delta\to 0}\mu(f;\delta)=0$. Ако $f\in C_{2\pi}$, то очевидно

$$/1.1/\quad \mu(f;\delta)=\sup_{\substack{0\leq x_2-x_1\leq\delta\\ f(x_1)=f(x_2)}}\ \sup_{x_1\leq x\leq x_2}|f(x_1)-f(x)|.$$

За облекчаване на по-нататъчното изложение въвеждаме

ДЕФИНИЦИЯ 1.1./интервал на локален максимум /и.л.макс// Ще казваме,че $[c,d]$ е интервал на локален максимум/и.л.макс/ за ограничената функция f, ако $f(x)\equiv const$, $x\in[c,d]$ и ако съществуват точки c' и d' ,такива че и

$$/1.2/\qquad f(x)<f(c)\quad \text{за}\quad x\in[c',c)\cup(d,d'].$$

Дефиницията за интервал на локален минимум /и.л.мин/ се получава обръщайки знака на неравенството в /1.2/ в горната дефиниция.

Ще казваме, че $[c,d]$ е интервал на локален екстремум /и.л.екстр/ за функцията f , ако той е или и.л.макс или и.л.мин. за функцията f .

Целта на този параграф е да докажем едно твърдение/лема 1.2 което позволява произволна непрекъсната функция f да представяме като крайна сума от непрекъснати функции с фиксирани свойства. Първо ще докажем

ЛЕМА 1.1. Нека $f \in C_{2\pi}$ и нека $M = \max_x f(x)$, $m = \min_x f(x)$. Тогава за всяко $\mu \geqq 0$ съществуват функции g и τ, принадлежащи на $C_{2\pi}$, такива че

1° $f(x) = g(x) + \tau(x)$, $-\infty < x < \infty$,

2° $\|g\|_C \leqq \mu$, $\mu(g;\delta) \leqq \mu(f;\delta)$, $\omega(g;\delta) \leqq \omega(f;\delta)$, $\delta \geqq 0$,

3° $\omega(\tau;\delta) \leqq \omega(f;\delta)$

и ако $M - m \leqq 2\mu$, то $\tau(x) \equiv (M+m)/2 = \mathrm{const}$,

а ако $M - m > 2\mu$, то $m + \mu \leqq \tau(x) \leqq M - \mu$, $-\infty < x < \infty$,

4° Ако $\mu > 0$ и $M - m > 2\mu$, то всички локални екстремуми на функцията τ се достигат на интервали с положителна дължина, като за всеки и.л.макс/мин/ Δ_1, на функцията τ съществува и.л.макс/мин/ Δ на функцията f $/\Delta \subset \Delta_1/$, такъв че за всяко $x \in \Delta_1$ е изпълнено

$\max_{t\in\Delta} f(t) - \tau(x) = \mu$ $\left(\min_{t\in\Delta} f(t) - \tau(x) = -\mu\right)$.

Д о к а з а т е л с т в о. При доказателството на тази лема важна роля играят геометрически съображения /както и при някои от другите доказателства/ и затова същността на идеята става прозрачна, ако се направи съответен чертеж. Важна роля играе и определението /1.1/.

В зависимост от големините на μ и $M - m$ определяме функциите g и τ по следния начин:

I. Ако $\mu = 0$, то полагаме $g(x) \equiv 0$ и $\tau(x) = f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. Очевидно, така определените функции g и τ удовлетворяват свойствата 1°-4°.

II. Ако $\mu > 0$ и $M - m \leqq 2\mu$, то полагаме

$g(x) = f(x) - (M+m)/2$ и $\tau(x) \equiv (M+m)/2$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Свойсвата 1°-4° на лемата очевидно са изпълнени.

III. Нека $\mu > 0$ и $M - m > 2\mu$. Тогава, очевидно, съществуват три такива точки $x_1 < x_2 < x_3$, че $f(x_1) = f(x_3)$ и $|f(x_1) - f(x_2)| > \mu$. Означаваме с y_2 точката, за която

/1.3/ $$\max_{t \in [x_1, x_3]} |f(t) - f(x_1)| = |f(y_2) - f(x_1)|, \quad y_2 \in [x_1, x_3]$$

и полагаме

$$y_1 = \inf\{ y \in [x_1, y_2] : |f(t) - f(y_2)| \leq \mu \text{ за всички } t \in [y, y_2] \},$$

/1.4/

$$y_3 = \sup\{ y \in [y_2, x_3] : |f(t) - f(y_2)| \leq \mu \text{ за всички } t \in [y_2, y] \}.$$

Вижда се, че $f(y_1) = f(y_3)$, $|f(y_1) - f(y_2)| = \mu$ и $|f(t) - f(y_2)| \leq \mu$ за всички $t \in [y_1, y_3]$.

Ще определим функциите g и τ на интервала $[y_1, y_1 + 2\pi] = [a, a + 2\pi]$. За $x \in [y_1, y_3] = [a, b]$ полагаме

/1.5/ $$g(x) = f(x) - f(y_1) \quad \text{и} \quad \tau(x) = f(y_1).$$

Сега ще покажем как се определят функциите g и τ на интервала $[b, a + 2\pi]$. Поставяме въпроса: Съществуват ли три точки $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in [b, a + 2\pi]$, такива че $f(x_1) = f(x_3)$ и $|f(x_2) - f(x_1)| > \mu$? Ако съществуват, то също както горе намираме точки $y_1, y_2, y_3 \in [b, a + 2\pi]$ /вж. /1.3/ и /1.4/ / и аналогично определяме функциите g и τ на интервала $[y_1, y_3] \subset [b, a + 2\pi]$ /вж. /1.5//. На всеки от останалите не повече от два интервала, на които още не са определени функциите g и τ, поставяме същия въпрос както и за $[b, a + 2\pi]$, т.е. съществуват ли три точки $x_1 < x_2 < x_3$, такива че $f(x_1) = f(x_3)$ и $|f(x_1) - f(x_2)| > \mu$? Ако съществуват, то също както по-горе определяме g и τ на още някои интервали. На всеки от останалите интервали, където g и τ още не са определени, пак поставяме въпроса за съществуване на три точки с горе-указаните свойства и пак, ако съществуват на някой от тях, то както горе определяме g и τ на още някой интервал. Понеже функцията f е непрекъсната, то след краен брой стъпки ще получим следната ситуация: функциите g и τ ще са определени на краен брой непресичащи се интервали $\{\Delta_i\}_{i=1}^{k} \subset [a, a+2\pi]$, а допълнителните към тях не повече от k интервала $\{d_i\}_{i=1}^{k} \subset [a, a+2\pi]$ са такива, че на всеки от тях, например на d_i, каквито и три точки $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in d_i$ да вземем, такива че $f(x_1) = f(x_2)$ винаги

$$/1.6/ \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \mu.$$

Ще покажем сега, как се определят функциите g и τ на интервалите d_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Разглеждаме произволен от тях, например d_i, като смятаме, че $d_i = (a_i, b_i)$. Тогава, ако $f(a_i) \leq f(b_i)$, то определяме

$$/1.7/ \qquad \tau(x) = \max\{f(a_i), \inf_{x \leq t \leq b_i} f(t)\}, \; g(x) = f(x) - \tau(x), \quad x \in (a_i, b_i) = d_i$$

а ако $f(a_i) \gneqq f(b_i)$, то определяме

$$/1.8/ \qquad \tau(x) = \max\{f(b_i), \inf_{a_i \leq t \leq x} f(t)\}, \; g(x) = f(x) - \tau(x), \quad x \in (a_i, b_i) = d_i.$$

Извършвайки това построение за $i = 1, 2, \dots, k$, завършваме определянето на функциите g и τ в интервала $[a, a+2\pi]$.

Ще отбележим някои свойства на g и τ, които лесно следват от начина, по който ги определихме:

– Функцията τ е монотонна и непрекъсната на всеки интервал d_i, $i = 1, 2, \dots, k$ /вж. /1.7/ и /1.8//

– $0 \leq g(x) \leq \mu$ за $x \in d_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ /вж. /1.6/ /1.7/ и /1.8//

– Функцията $\tau(x) \equiv c_i = const$ за $x \in \Delta_i$ /вж. /1.5// и всеки интервал Δ_i е или и.л.екстр за τ, или се съдържа в и.л.екстр на τ. По-точно, ако Δ е и.л.макс/мин/ за τ, то за всички $x \in \Delta$ е в сила

$\tau(x) = \max_{t\in\Delta} f(t) - \mu$ $\quad$ / $\tau(x) = \min_{t\in\Delta} f(t) + \mu$ $\wedge$

– $\quad g(a+2\pi) = g(a)$ $\quad$ и $\quad \tau(a+2\pi) = \tau(a)$.

За определянето на функциите g и τ на $(-\infty, \infty)$ полагаме $g(x+2k\pi) = g(x)$ и $\tau(x+2k\pi) = \tau(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $x \in [a, a+2\pi]$.

Твърденията $1^\circ - 4^\circ$ на лемата се получават веднага от горепосочените свойства на функциите g и τ.

Лемата е доказана.

ЛЕМА 1.2 /основна/. Нека $f \in C_{2\pi}$, $M = \max_x f(x)$ и $m = \min_x f(x)$. За всяка редица от реални числа $0 = \delta_0 \leq \delta_1 \leq \dots \leq \delta_s$ съществуват функции $f_k \in C_{2\pi}$, $k = 1, 2, \dots, s$ и $\tau_s \in C_{2\pi}$, такива че

1° $\quad f(x) = \sum_{k=1}^{s} f_k(x) + \tau_s(x)$, $\quad x \in (-\infty, \infty)$,

2° $\quad \|f_k\|_C \leq \mu(f; \delta_k) - \mu(f; \delta_{k-1})$, $\quad \mu(f_k; \delta_{k-1}) = 0$

и $\quad \omega(f_k; \delta) \leq \omega(f; \delta)$, $\quad \delta \geq 0$, $\quad k = 1, 2, \dots, s$,

3° $\quad \mu(\tau_s; \delta_s) = 0$, $\quad \omega(\tau_s; \delta) \leq \omega(f; \delta)$, $\delta \geq 0$,

4° Ако $M - m \leq 2\mu(f; \delta_s)$, то $\tau_s(x) \equiv (M+m)/2 = \mathrm{const}$,

а ако $M - m > 2\mu(f; \delta_s)$, то $m + \mu(f; \delta_s) \leq \tau_s(x) \leq M - \mu(f; \delta_s)$, $-\infty < x < \infty$.

Доказателство. Към функцията f прилагаме лема 1.1 с $\mu = \mu(f; \delta_1) = \mu(f; \delta_1) - \mu(f; \delta_0)$ и полагаме $g(x) = f_1(x)$, $\tau(x) = \tau_1(x)$. Получаваме

$$f(x) = f_1(x) + \tau_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \|f_1\|_C \leq \mu(f; \delta_1) - \mu(f; \delta_0),$$

$$\mu(f_1; \delta_0) = \mu(f_1; 0) = 0, \quad \omega(f_1; \delta) \leq \omega(f; \delta),$$

$$\omega(\tau_1; \delta) \leq \omega(f; \delta), \quad \delta \geq 0$$

като ако $\tau_1(x) \equiv \mathrm{const}$, то очевидно $\mu(\tau_1, \delta_1) = 0$, а ако $\tau_1(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то от 4° на лема 1.1, за всеки и.л.макс

/мин/ Δ_1 за функцията τ_1 съществува съответен и.л.макс/ Δ за функцията f / $\Delta \subset \Delta_1$ /, такъв че за $x \in \Delta_1$

/1.9/ $\max\limits_{t\in\Delta} f(t) - \tau_1(x) = \mu(f;\delta_1)$ / $\min\limits_{t\in\Delta} f(t) - \tau_1(x) = -\mu(f;\delta_1)$/.

От тук следва, че всички локални екстремуми на функцията τ_1 имат дължина не по-малка от δ_1 и следователно

/1.10/ $\mu(\tau_1;\delta_1) = 0.$

Отново прилагаме лема 1.1 с $\mu = \mu(f;\delta_2) - \mu(f;\delta_1)$, но вече към функцията τ_1. Полагайки $g(x) = f_2(x)$ и $\tau(x) = \tau_2(x)$, получаваме $f_2 \in C_{2\pi}$, $\tau_2 \in C_{2\pi}$ и $\tau_1(x) = f_2(x) + \tau_2(x)$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \tau_2(x)$, $-\infty < x < \infty$.

Имаме

$\|f_2\|_C \leq \mu(f;\delta_2) - \mu(f;\delta_1)$ /вж. 2° на лема1.1/,

$\mu(f_2;\delta_1) \leq \mu(\tau_1;\delta_1) = 0$ /вж. 2° на лема 1.1 и /1.10/

$\omega(\tau_2;\delta) \leq \omega(\tau_1;\delta) \leq \omega(f;\delta), \delta \geq 0$ /вж. 3° на лема 1.1/.

Ако $\tau_2(x) \equiv const$, то очевидно $\mu(\tau_2;\delta_2) = 0$, а ако $\tau(x) \not\equiv const$, то от 4° на лема1.1, получаваме, че за всеки и.л.макс/мин/ Δ_2 за функцията τ_2 съществува и.л.макс /мин/ Δ_1 за функцията τ_1 / $\Delta_1 \subset \Delta_2$ /, такъв че

/1.11/ $\max\limits_{t\in\Delta_1} \tau_1(t) - \max\limits_{t\in\Delta_2} \tau_2(t) = \mu(f;\delta_2) - \mu(f;\delta_1)$

/ $\min\limits_{t\in\Delta_1} \tau_1(t) - \min\limits_{t\in\Delta_2} \tau_2(t) = -(\mu(f;\delta_2) - \mu(f;\delta_1))$ /.

Но за интервала Δ_1, който е и.л.макс/мин/ за функцията τ_1, съществува интервал Δ / $\Delta \subset \Delta_1$ / /вж. /1.9//, такъв че

/1.12/ $\max\limits_{t\in\Delta} f(t) - \max\limits_{t\in\Delta_1} \tau_1(t) = \mu(f;\delta_1)$

/ $\min\limits_{t\in\Delta} f(t) - \min\limits_{t\in\Delta_1} \tau_1(t) = -\mu(f;\delta_1)$ /.

Събирайки /1.11/ и /1.12/ получаваме, че за всеки и.л.макс

/мин/ Δ_2 на функцията τ_2 съществува и.л.макс/мин/ Δ на функцията f / $\Delta \subset \Delta_2$ /, такъв че

$$\max_{t\in\Delta} f(t) - \max_{t\in\Delta_2} \tau_2(t) = \mu(f;\delta_2) \quad / \min_{t\in\Delta} f(t) - \min_{t\in\Delta_2} \tau_2(t) = -\mu(f;\delta_2) /$$

или $\max\limits_{t\in\Delta} f(t) - \tau_2(x) = \mu(f;\delta_2)$ / $\min\limits_{t\in\Delta} f(t) - \tau_2(x) = -\mu(f;\delta_2)$ /

за всяко $x\in\Delta_2$. От последните равенства следва, че интервалите на локален екстремум на функцията τ_2 имат дължина не по-малка от δ_2. Следователно

$$\mu(\tau_2;\delta_2) = 0.$$

Отново прилагаме лема 1.1 с $\mu = \mu(f;\delta_3) - \mu(f;\delta_2)$ към функцията τ_2 и т.н. След s -кратно прилагане на лема 1.1 получаваме твърдението на лема 1.2.

ЗАБЕЛЕЖКА 1.1. В лема 1.1 и лема 1.2 може да не искаме $f\in C_{2\pi}$, а само $f\in D_{2\pi}$ /т.е. да няма прекъсвания от II-ри род/. За $f\in D_{2\pi}$, без съществени изменения на доказателствата, може да се покаже, че за всяка редица $0=\delta_0\leq\delta_1\leq\delta_2\leq \ldots \leq \delta_s$ съществуват $f_k\in D_{2\pi}$, $k=1,2,\ldots,s$ и $\tau_s\in D_{2\pi}$, такива че за тях са изпълнени 1°–4° от формулировката на лема 1.2.

§ 1.2. Извеждане на достатъчното условие за равномерна сходимост на реда на Фурие

Както вече споменахме във въведението, условието на Дини-Липшиц / [1], стр. 280/

/1.13/ $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f;1/n)\ln n = 0$

е едно най-често използвано достатъчно условие за функцията $f\in C_{2\pi}$, което осигурява равномерна сходимост на нейния ред на Фурие $S[f]$. Условието /1.13/, като условие осигуряващо равномерна сходимост на $S[f]$, е точно, в смисъл, че съществуват функции $f\in C_{2\pi}$ и $g\in C_{2\pi}$, имащи модули на непрекъснатост с порядък $O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$ и такива че $S[f]$ е разходящ в някоя точка, а $S[g]$ е сходящ навсякъде, но не равномерно по x / [6], т.I, стр. 477/.

В настоящия параграф ще покажем, че може условието на Дини-Липшиц /1.13/ за равномерна сходимост на $S[f]$ за функции $f\in C_{2\pi}$ да се замени с условието

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f;1/n)\ln n = 0,$$

което ще покажем, че е по-слабо изискване към функцията $f\in C_{2\pi}$, отколкото /1.13/.

Първо ще докажем

ТЕОРЕМА 1.1. За всяка функция $f\in C_{2\pi}$ е изпълнено

$$\|S_n(f)-f\|_C \leqq C\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\mu(f;k\pi/n)/k^2 + \varepsilon_n(f),\quad n=1,2,\dots, \tag{1.14}$$

където C е абсолютна константа, $\varepsilon_n(f)$ е числова редица, $\varepsilon_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $[\ln n]$ е цялата част на числото $\ln n$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека n и x са произволни и фиксирани. От принципа на локализация на Риман /[21] и [1], стр. 110/ имаме, че за произволно $\delta>0$

$$|S_n(f;x)-f(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| + \frac{K}{\delta}(1+\|f\|_C)\,\omega(f;1/n), \tag{1.15}$$

където K е абсолютна константа. Полагаме $\delta=(\omega(f;1/n))^{1/2}=$ $=\alpha_n$. Тогава

$$\frac{K}{\alpha_n}(1+\|f\|_C)\,\omega(f;1/n) = K(1+\|f\|_C)(\omega(f;1/n))^{1/2} = \varepsilon_n^{(1)}(f) \tag{1.16}$$

като, очевидно, $\varepsilon_n^{(1)}(f)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ще оценим

$$\Big|\int_0^{\alpha_n}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\Big| \leq \Big|\int_0^{\pi/n}\Big|+\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\Big|$$

$$\leq \frac{\pi}{n}\cdot n\cdot \omega(f;\pi/n)+\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\Big| = \varepsilon_n^{(2)}(f)+\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\Big|.$$

За да оценим последния итнеграл ще се възползваме от разложението на функцията f, което дава лема 1.2 с $s=[\ln n]$ и $\delta_k = k\pi/n$, $k=0,1,2,\dots,s$. Тогава

$$\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\Big|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{s}\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\{f_k(x+t)-f_k(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\Big| + \Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\{\tau_s(x+t)-\tau_s(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\Big|$$

$$=\sum_{k=1}^{s} I_k + R_s.$$

Първо ще оценим

$$I_1 \leq 2\|f_1\|_c \int_{\pi/n}^{\alpha_n}\Big|\frac{\sin nt}{t}\Big|\,dt \leq 2\mu(f;\pi/n)\ln n.$$

За I_{k+1} при $k\geqslant 1$ имаме

$$I_{k+1}=\Big|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\{f_{k+1}(x+t)-f_{k+1}(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\Big|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p_k-1}\Big|\int_{\frac{\pi}{n}+\frac{k\pi}{n}j}^{\frac{\pi}{n}+\frac{k\pi}{n}(j+1)}\Big| + \Big|\int_{\frac{\pi}{n}+\frac{k\pi}{n}p_k}^{\alpha_n}\Big| = \sum_{j=0}^{p_k-1} I_{k+1}^{(j)} + I_{k+1}^{1},$$

където $p_k=[(\alpha_n-\pi/n)/(k\pi/n)]$.

Ще отбележим, че тъй като $\mu(f_{k+1}, k\pi/n)=0$, то $f_{k+1}(x+t)-f_k(x)$ като функция на t е монотонна на всеки интервал с дължина $k\pi/n$ и следователно, може да приложим към всеки от интегралите $I_{k+1}^{(j)}$ втората теорема за средните стойности /вж. [1], стр. 19/. Означавайки $a_j = \pi/n + k\pi j/n$ $/ j = 0, 1, \dots, p_k$ /, получаваме

$$I_{k+1}^{(j)} = \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} \{ f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x) \} \frac{\sin nt}{t} dt \right|$$

$$\leq |f_{k+1}(x+a_j) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{a_j}^{\xi_j} \frac{\sin nt}{t} dt \right| + |f_{k+1}(x+a_{j+1}) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{\xi_j}^{a_{j+1}} \frac{\sin nt}{t} dt \right|$$

$$\leq 4 \| f_{k+1} \|_C \cdot 2 \left| \int_{a_j}^{a_j + \frac{\pi}{n}} \frac{\sin nt}{t} dt \right|$$

$$\leq 8 \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right) / (kj+1) , \quad \xi_j \in [a_j, a_{j+1}] .$$

Аналогично и за I'_{k+1} получаваме

$$I'_{k+1} \leq 8 \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right) / (k p_k + 1) .$$

Следователно

$$I_{k+1} \leq \sum_{j=0}^{p_k - 1} I_{k+1}^{(j)} + I'_{k+1}$$

$$\leq 8 \left\{ \mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right\} \sum_{j=0}^{p_k} 1/(1+jk)$$

$$\leq 8 \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right) + 8 \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right) \frac{\ln(n+1)}{k} .$$

Помнейки, че $s = [\ln n]$, получаваме

$$\sum_{k=1}^{s} I_k \leq 2 \mu(f; \pi/n) \ln n + 8 \sum_{k=1}^{s-1} \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right)$$

$$+ 8 \ln(n+1) \sum_{k=1}^{s-1} \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right) / k$$

$$\leq 2 \mu(f; \tfrac{\pi}{n}) \ln n + \varepsilon_n^{(3)}(f) + 8 \ln(n+1) \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{k} \left(\mu(f; \tfrac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f; \tfrac{k\pi}{n}) \right),$$

където $\varepsilon_n^{(3)}(f) = 8\sum_{k=1}^{s-1}\left(\mu(f;\frac{(k+1)\pi}{n}) - \mu(f;\frac{k\pi}{n})\right) \leq 8\mu(f;\frac{\ln n}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Остана да оценим още и R_s. Аналогично на I_{k+1} имаме

$$R_s \leq \sum_{j=0}^{p_s-1}\left|\int_{\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}j}^{\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}(j+1)}\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}p_s}^{\alpha_n}\right| = \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R_s',$$

където $p_s = [(\alpha_n - \pi/n)/(s\pi/n)]$.

Тъй като τ_s е монотонна на всеки интервал с дължина $s\pi/n$ /$\mu(\tau_s;\ s\pi/n) = 0$ /, то прилагайки втората теорема за средните стойности, както при оценката на $I_{k+1}^{(j)}$ получаваме

$$R_s^{(j)} = \left|\int_{\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}j}^{\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}(j+1)}\{\tau_s(x+t)-\tau_s(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right.$$

$$\leq 4 \max_{t\in[x,x+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi s}{n}(j+1)]}|\tau_s(x+t)-\tau_s(x)|\cdot\frac{1}{js+1}$$

$$\leq 4\,\omega(\tau_s;\alpha_n)/(1+sj) \leq 4\,\omega(f;\alpha_n)/(1+sj).$$

Аналогично за R_s' имаме

$$R_s' \leq 4\,\omega(f;\alpha_n)/(1+sp_s).$$

Окончателно, за R_s получаваме

$$R_s \leq \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R_s' \leq 4\,\omega(f;\alpha_n) + 4\,\omega(f;\alpha_n)\sum_{j=1}^{p_s} 1/(sj)$$

$$\leq 4\,\omega(f;\alpha_n)\left(1+\frac{\ln(n+1)}{s}\right) = \varepsilon_n^{(4)}(f),$$

където $\varepsilon_n^{(4)}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тъй като $\alpha_n = (\omega(f;\pi/n))^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

От всички получени по-горе оценки получаваме

$$\left|\int_0^{\alpha_n}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt \leq \varepsilon_n^{(2)}(f) + I_1 + \sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} + R_s\right.$$

$$\leq \varepsilon_n^{(2)}(f)+2\mu(f;\tfrac{\pi}{n})\ln n+8\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]-1}\frac{1}{k}\left(\mu(f;\tfrac{(k+1)\pi}{n})-\mu(f;\tfrac{k\pi}{n})\right)+\varepsilon_n^{(3)}+\varepsilon_n^{(4)}.$$

Полагайки $\varepsilon_n^{(2)}(f)+\varepsilon_n^{(3)}(f)+\varepsilon_n^{(4)}(f)=\varepsilon_n^{(5)}(f)$, след преобразование на Абел в последната сума, получаваме

$$\left|\int_0^{\alpha_n}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|\leq\varepsilon_n^{(5)}(f)+2\mu(f;\tfrac{\pi}{n})\ln n$$

/1.17/ $$+8\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]-1}\frac{1}{k^2}\left(\mu(f;\tfrac{(k+1)\pi}{n})\right)+8\,\frac{\ln(n+1)}{[\ln n]}\,\mu(f;\tfrac{\ln n}{n}\pi)$$

$$\leq 32\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\mu(f,k\pi/n)/k^2+\varepsilon_n^{(5)}(f)+\varepsilon_n^{(6)}(f),$$

където $\varepsilon_n^{(6)}(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Интегралът $\left|\int_{-\alpha_n}^{0}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|$ се оценява аналогично и за него се получава същата оценка, т.е.

/1.18/ $$\left|\int_{-\alpha_n}^{0}\{f(x+t)-f(x)\}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|\leq 32\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\frac{1}{k^2}\mu(f;\tfrac{k\pi}{n})+\varepsilon_n^{(5)}(f)+\varepsilon_n^{(6)}(f).$$

Тъй като x беше произволно, а десните части на получените оценки не зависят от x, то от /1.15/, /1.16/, /1.17/ и /1.18/ се получава твърдението на теоремата.

От теорема 1.1 се получава следния критерий за равномерна сходимост на реда на Фурие

ТЕОРЕМА 1.2. Ако $f\in C_{2\pi}$ и

/1.19/ $$\lim_{n\to\infty}\mu(f;1/n)\ln n=0,$$

то редът $S[f]$ е равномерно сходящ.

Д о к а з а т е л с т в о. От /1.14/ имаме

$$\|S_n(f)-f\|_C \leq C\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\frac{1}{k^2}\mu(f;\frac{k\pi}{n})+\varepsilon_n(f),$$

където $\varepsilon_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Следователно, ако покажем, че

$\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\mu(f;k\pi/n)/k^2\to 0$ при $n\to\infty$, то

теоремата ще бъде доказана. За $n\geq 2$ имаме

$$\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln n]}\frac{1}{k^2}\mu(f;\frac{k\pi}{n})\leq \ln(n+1)\,\mu(f;\frac{\pi\ln n}{n})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\leq C\ln n.\,\mu(f;1/\sqrt{n})=2C\mu(f;1/\sqrt{n})\ln\sqrt{n},$$

където C е абсолютна константа. Но от /1.19/ следва, че $\mu(f;1/\sqrt{n})\ln\sqrt{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, с което теоремата е доказана.

ТЕОРЕМА 1.3. Условието /1.19/ като достатъчно условие за равномерна сходимост на реда на Фурие за непрекъснати функции, е точно, т.е. съществуват две непрекъснати функции f и g, имащи модули на немонотонност с порядък $O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$ и такива, че $S[f]$ е разходящ в някоя точка, а $S[g]$ е сходящ навсякъде, но неравномерно.

Д о к а з а т е л с т в о. Съществуват /[6] , т.I, стр. 477/ две непрекъснати функции f и g , такива че $\omega(f;\delta)=O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$ и $\omega(g;\delta)=O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$ и редът $S[f]$ е разходящ в някоя точка, а редът $S[g]$ е сходящ навсякъде, но неравномерно. Тъй като за всяка функция h е в сила $\mu(h;\delta)\leq\omega(h;\delta),\ \delta\geq 0$ /вж. [16] /, то функциите f и g са такива, че модулите им на немонотонност имат порядък $O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$.

Теоремата е доказана.

ТЕОРЕМА 1.4. Ако функцията $f\in C_{2\pi}$ и $f=\sum_{k=1}^{m}f_k$ където $f_k\in C_{2\pi}$ / $k=1,2,\ldots,m$ / и

/1.20/ $\lim_{n\to\infty}\mu(f_k;1/n)\ln n=0$, $k=1,2,\ldots,m,$

то $S[f]$ е равномерно сходящ.

Д о к а з а т е л с т в о. Условията /1.20/ осигуряват равномерна сходимост на реда на Фурие $S[f_k]$ на функцията f_k / $k=1,2,\dots,m$ / /вж. теорема 1.2/. Но тъй като

$$S[f]=S[f_1]+S[f_2]+\dots+S[f_m],$$

то $S[f]$ е равномерно сходящ.

Теоремата е доказана.

Ако означим с $\mu(f;[a,b],\delta)$ модула на немонотонност на функцията f в интервала $[a,b]$, то теорема 1.2 може да се усили по следния начин:

ТЕОРЕМА 1.5. Нека $f\in C_{2\pi}$. Ако за някое реално число a, интервалът $[a,a+2\pi]$ може да се раздели на краен брой подинтервали с точките $a=a_1<a_2<\dots<a_m=a+2\pi$, така че

/1.21/ $$\lim_{n\to\infty}\mu(f;[a_i,a_{i+1}],1/n)\ln n=0\quad,\ i=1,2,\dots,m-1,$$

то $S[f]$ е равномерно сходящ.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $f\in C_{2\pi}$ и a и $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ са такива, че за тях са изпълнени условията на теоремата. Ще покажем, че f може да се представи като сума на две непрекъснати функции f_1 и f_2, такива че за тях е приложима теорема 1.4. Означавайки $\delta_0=\frac{1}{3}\min\limits_{1\le i\le m-1}\{a_{i+1}-a_i\}>0$, определяме

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{за } a_i\le x\le a_i+\delta_0,\\ f(a_i+\delta_0) & \text{за } a_i+\delta_0\le x\le a_i+2\delta_0, \quad (i=1,2,\dots,m-1),\\ \text{линейна} & \text{за } a_i+2\delta_0\le x\le a_{i+1}\end{cases}$$

$$f_2(x)=f(x)-f_1(x)\quad,\ x\in[a,a+2\pi].$$

Функциите f_1 и f_2 продължаваме периодически на цялата права.

Очевидно $f=f_1+f_2$ и $f_1,f_2\in C_{2\pi}$.

Ще оценим $\mu(f_1;\delta)$ за $\delta \leq \delta_0$. Тъй като $f_1(x) \equiv f(a_i+\delta_0) = const$ за $x \in [a_i+\delta_0, a_i+2\delta_0]$, то достатъчно е да оценим модула на немонотонност $\mu(f_1;\delta)$ на функцията f_1 на интервалите $[a_i+2\delta_0, a_{i+1}+\delta_0]$, $i=1,2,\dots,m-1$.

Да разгледаме /вж. /1.1// $|f_1(x_1)-f_1(x)|$ при $\delta \leq \delta_0$, $x_1,x_2 \in [a_i+2\delta_0, a_{i+1}+\delta_0]$, $f_1(x_1)=f_1(x_2)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ и $0 \leq x_2-x_1 \leq \delta$.

Имаме

$$|f_1(x_1)-f_1(x)| \leq \begin{cases} 0, & \text{ако } x_1,x_2 \in [a_i+2\delta_0, a_{i+1}], \\ \mu(f;[a_{i+1},a_{i+2}],\delta), & \text{ако } x_1,x_2 \in [a_{i+1}, a_{i+1}+\delta_0], \\ \delta_0^{-1}|f(a_i+\delta_0)-f(a_{i+1})|\delta, & \text{ако } x_1 \in [a_i+2\delta_0, a_{i+1}],\ x_2 \in [a_{i+1}, a_{i+1}+\delta_0]. \end{cases}$$

Тогава /вж. /1.1// за $\delta \leq \delta_0$

$$\mu(f_1;\delta) \leq \max_{1\leq i\leq m-1}\{\mu(f;[a_i,a_{i+1}],\delta)\} + \delta_0^{-1}\max_{1\leq i\leq m-1}\{|f(a_i+\delta_0)-f(a_{i+1})|\}\delta$$

и следователно от /1.21/ получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_1;1/n)\ln n = 0.$$

Ще оценим и $\mu(f_2;\delta)$ за $\delta \leq \delta_0$. Тъй като $f_2(x) \equiv 0 = const$ за $x \in [a_i, a_i+\delta_0]$, $i=1,2,\dots,m-1$, то достатъчно е да оценим $\mu(f_2;\delta)$ на интервалите $[a_i+\delta_0, a_{i+1}]$, $i=1,2,\dots,m-1$.

При $x_1,x_2 \in [a_i+\delta_0, a_{i+1}]$, $f_2(x_1)=f_2(x_2)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_2-x_1 \leq \delta$ и $\delta \leq \delta_0$ имаме

$$|f_2(x_1)-f_2(x)| \leq \begin{cases} \mu(f;[a_i,a_{i+1}],\delta), & \text{ако } x_1,x_2 \in [a_i+\delta_0, a_i+2\delta_0], \\ \mu(f;[a_i;a_{i+1}],\delta)+\delta_0^{-1}|f(a_i+\delta_0)-f(a_{i+1})|\delta, & \text{ако } x_1,x_2 \in [a_i+2\delta_0, a_{i+1}], \\ \mu(f;[a_i;a_{i+1}],\delta) & \text{ако } x_1 \in [a_i+\delta_0, a_i+2\delta_0],\ x_2 \in [a_i+2\delta_0, a_{i+1}]. \end{cases}$$

От /1.1/ за $\delta \leq \delta_0$ получаваме

$$\mu(f_2;\delta) \leq \max_{1\leq i\leq m-1}\{\mu(f;[a_i,a_{i+1}],\delta)\} + \delta_0^{-1}\max_{1\leq i\leq m-1}\{|f(a_i+\delta_0)-f(a_{i+1})|\}\delta$$

и тогава от /1.21/ следва, че

$\lim_{n\to\infty} \mu(f_2; 1/n) \ln n = 0.$

Получихме, че $f = f_1 + f_2$, $f_1, f_2 \in C_{2\pi}$ и $\mu(f_i; 1/n) \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $i = 1, 2$, т.е. условията на теорема 1.4 са изпълнени. Следователно $S[f]$ е равномерно сходящ.

Теоремата е доказана.

§ 1.3. Сравняване на полученото условие с някои други условия за равномерна сходимост на $S[f]$

В този параграф ще сравним полученото достатъчно условие /1.19/ за равномерна сходимост на реда на Фурие $S[f]$, $f \in C_{2\pi}$, с някои други известни достатъчни условия за равномерна сходимост на $S[f]$. Ще се ползваме от терминологията за сравняване на критериите A и B използвана в [1], стр. 246.

ДЕФИНИЦИЯ 1.2. Ще казваме, че критерият A е по-силен от критерия B, ако

1/ Всеки път когато може да се изведе сходимост на реда $S[f]$ от B, тя може да се заключи и от A, но

2/ Съществуват случаи, когато условието A позволява да се докаже сходимост, докато условието B е неприменимо.

ДЕФИНИЦИЯ 1.3. Ще казваме, че критериите A и B са несравними, ако могат да се покажат случаи, когато A е приложим, а B не е, също както и обратното.

Ще докажем

ТЕОРЕМА 1.6. Условието /1.19/ е по-слабо изискване за функцията $f \in C_{2\pi}$, отколкото условието на Дини-Липшиц /1.13/ и, следователно, критерия от теорема 1.2 е по-силен от критерия на Дини-Липшиц.

Доказателство. Нека за 2π -периодичната функция f е изпълнено условието на Дини-Липшиц /1.13/. Тогава, очевидно $f\in C_{2\pi}$ и, тъй като за всяка функция g $\mu(g;\delta)\leq\omega(g;\delta)$, $\delta\geq 0$ /вж. [16] /, то е изпълнено и /1.19/.

От друга страна, нека $\omega(\delta)$ е функция от тип на модул на непрекъснатост $/0=\omega(0)=\omega(0+)\leq\omega(\delta)\leq\omega(\delta+\eta)\leq\omega(\delta)+\omega(\eta)$, $\delta,\eta\geq 0$ /, такава че $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\omega(1/n)\ln n>0$. Тогава функцията

$$h(x)=\begin{cases}\omega(x) & , 0\leq x\leq\pi/4,\\ \omega(\pi/4) & , \pi/4\leq x\leq 3\pi/4,\\ \omega(\pi-x) & , 3\pi/4\leq x\leq\pi,\\ 0 & , \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$$

$h(x+2k\pi)=h(x)$, $x\in[0,2\pi]$, $k=\pm1,\pm2,\dots$

е такава, че $\omega(h;\delta)=\omega(\delta)$, $0\leq\delta\leq\pi/4$ и $\mu(h;\pi/4)=0$. Очевидно за нея /1.19/ е изпълнено, докато /1.13/ не е.

От дефиниция 1.2 следва – критерият за равномерна сходимост на реда на Фурие от теорема 1.2 е по-силен от критерия на Дини-Липшиц.

Теоремата е доказана.

Известно е, че и чрез ограничения върху вариацията на функцията $f\in C_{2\pi}$ също може да се осигури равномерна сходимост на реда $S[f]$. Всички критерии за равномерна сходимост на реда на Фурие , които се задават чрез условия върху характеристики на функцията, отчитащи вариацията ѝ /например критериите на Дирихле-Жордан, на Салем и др./ се съдържат в следния критерий на Чантурия [19] : Ако $f\in C_{2\pi}$ и

$$/1.22/\quad \lim_{n\to\infty}\ \min_{1\leq m\leq[n/2]}\left\{\omega(f;1/n)\ln m+\sum_{k=m}^{[n/2]}\frac{\nu(f;k)}{k^2}\right\}=0,$$

където $\nu(f;k)=\sup\limits_{\Pi_k}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f(x_{2i+1})-f(x_{2i})|$ е модулът на изменение на f . Π_k е произволно разделяне на интервала $[0, 2\pi)$ с $2k$ точки от вида $0 \leqq x_0 < x_1 \leqq x_2 < x_3 \leqq \ldots$ $\ldots \leqq x_{2k-2} < x_{2k-1}$, то редът $S[f]$ е равномерно сходящ.

Ще отбележим, че ако

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(f;k)/k^2 < \infty,$$

то условието /1.22/ е изпълнено.

Справедлива е следната

ТЕОРЕМА 1.7. Критерия на Чантурия за равномерна сходимост на реда на Фурие и критерия от теорема 1.2 са несравними.

Д о к а з а т е л с т в о. Първо ще покажем, че съществува функция $f_1 \in C_{2\pi}$, за която критерия на Чантурия е неприменим, докато /1.19/ осигурява равномерна сходимост на реда $S[f_1]$. Определяме

$$/1.23/ \quad f_1(x) = \begin{cases} (\ln x^{-1} \ln\ln x^{-1})^{-1} \sin(\pi/x) & \text{за } 0 < x \leqq 1/4, \\ 0 & \text{за } 1/4 < x \leqq \pi/2, \\ \omega(x-\pi/2) & \text{за } \pi/2 < x \leqq \pi, \\ \omega(\pi/2) & \text{за } \pi < x \leqq 3\pi/2 - 1/4, \\ \omega(2\pi - 1/4 - x) & \text{за } 3\pi/2 - 1/4 < x \leqq 2\pi - 1/4, \\ 0 & \text{за } 2\pi - 1/4 < x \leqq 2\pi \end{cases}$$

и $f_1(x+2k\pi) = f_1(x)$ за $x \in (0, 2\pi]$ и $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, където $\omega(\delta) = (\ln\ln \delta^{-1})^{-1}$ за $0 < \delta \leqq 1/4$, $\omega(\delta) = (\ln\ln 4)^{-1}$ за $1/4 \leqq \delta \leqq \pi/2$ и $\omega(0) = 0$.

Очевидно $\omega(f_1;\delta) \geqq \omega(\delta) = (\ln\ln \delta^{-1})^{-1}$ за $\delta \in (0, 1/4]$ и

$$\nu(f;k) \geqq \frac{1}{\ln 5 \ln\ln 5} + \frac{1}{\ln 6 . \ln\ln 6} + \ldots + \frac{1}{\ln(k+4) \ln\ln(k+4)}$$

$$\geqq \frac{k}{20 \ln k \ln\ln k}, \quad k > 2.$$

Следователно за $n \geqq 10$ и $m \geqq 5$ имаме

$$\omega(f;1/n)\ln m+\sum_{k=m}^{[n/2]}V(f;k)/k^2$$

$$\geqq(\ln m)/(\ln\ln n)+20^{-1}\sum_{k=m}^{[n/2]}1/(k\ln k\ln\ln k)$$

$$\geqq(\ln m)/(\ln\ln m)+20^{-1}\ln\left(\frac{\ln\ln[n/2]}{\ln\ln(m+1)}\right),$$

като, очевидно, изразът, стоящ в дясната част на последното неравенство, при никакъв избор на $m=m(n)$ не може да клони към нула при $n\to\infty$.

От друга страна $\mu(f_1;\delta)\leqq 16/(\ln\delta^{-1}\ln\ln\delta^{-1})$ и следователно функцията f_1 удовлетворява условието /1.19/.

Сега ще покажем обратното – съществува функция $f_2\in C_{2\pi}$, такава че за нея е изпълнено /1.22/, а не е изпълнено /1.19/. Определяме

$$f_2(x)=\begin{cases}\omega(x) & \text{за } 0\leqq x\leqq\pi,\\ \omega(2\pi-x) & \text{за } \pi\leqq x\leqq 2\pi\end{cases}$$

и $f_2(x+2k\pi)=f_2(x)$ за $x\in[0,2\pi]$ и $k=\pm1,\pm2,\dots$, където $\omega(\delta)=1/\ln\delta^{-1}$ за $0<\delta\leqq 1/4$, $\omega(\delta)=(\ln 4)^{-1}$ за $1/4\leqq x\leqq\pi$ и $\omega(0)=0$.

Очевидно $f_2\in C_{2\pi}$, $\omega(f_2;\delta)=\mu(f_2;\delta)=\omega(\delta)$, $0\leqq\delta\leqq 1/4$ и f_2 има ограничена вариация на интервала $[0,2\pi]$. Следователно функцията f_2 удовлетворява условието на Чантурия /1.22/ и не удовлетворява условията /1.13/ и /1.19/.

Теоремата е доказана.

ЛЕМА 1.3. Нека функцията $f\in C_{2\pi}$ и има ограничена вариация на интервала $[0,2\pi]$. Тогава съществуват $\delta_0>0$ и функции $f_1,f_2,f_3,f_4\in C_{2\pi}$, такива че
$f=f_1+f_2+f_3+f_4$ и $\mu(f_i;\delta_0)=0$, $i=1,2,3,4$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека вариацията $\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f)$ на функцията f на интервала $[0, 2\pi)$ е равна на $V > 0$. Означаваме с $x_0 \in (0, 2\pi)$ точката, за която $\overset{x_0}{\underset{0}{V}}(f) = V/2$. На интервала $[0, 2\pi]$ определяме функциите

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \overset{x}{\underset{0}{V}}(f) & \text{за } 0 \leqq x \leqq x_0, \\ V - \overset{x}{\underset{0}{V}}(f) & \text{за } x_0 \leqq x \leqq 2\pi, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = f(x) - \varphi_1(x)$$

и ги продължаваме с период 2π на цялата права. Очевидно $f = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{2\pi}$ и функцията φ_1 е растяща на интервала $[0, x_0]$ и намаляваща на $[x_0, 2\pi]$, а функцията φ_2 е намаляваща на $[0, x_0]$ и растяща на $[x_0, 2\pi]$.

Означаваме $\delta_0 = \frac{1}{3} \min\{x_0, 2\pi - x_0\}$. Всяка от функциите φ_1 и φ_2 ще представим като сума от по две непрекъснати функции, на които локалните екстремуми се достигат на интервали с дължина не по-малка от $\delta_0 > 0$.

Ще разложим φ_1. Определяме

$$\psi_1(x) = \begin{cases} -\varphi_1(x) & \text{за } 0 \leqq x \leqq \delta_0, \\ -\varphi_1(\delta_0) & \text{за } \delta_0 \leqq x \leqq 2\delta_0, \\ \varphi_1(x_0) - \varphi_1(x) & \text{за } x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta_0, \\ \varphi_1(x_0) - \varphi_1(x_0 + \delta_0) & \text{за } x_0 + \delta_0 \leqq x \leqq x_0 + 2\delta_0, \\ \text{линейна на интервалите } [2\delta_0, x_0] & \text{и } [x_0 + 2\delta_0, 2\pi] \end{cases}$$

и $\psi_1(x + 2k\pi) = \psi_1(x)$ за $x \in [0, 2\pi]$ и $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Очевидно $\psi_1 \in C_{2\pi}$, ψ_1 е растяща на интервала $[2\delta_0, x_0 + \delta_0]$ и намаляваща на интервала $[x_0 + 2\delta_0, 2\pi + \delta_0]$, $\psi_1(x) \equiv -\varphi_1(\delta_0) = const$ за $x \in [\delta_0, 2\delta_0]$ и $\psi_1(x) \equiv \varphi_1(x_0) - \varphi_1(x_0 + \delta_0) = const$ за $x \in [x_0 + \delta_0, x_0 + 2\delta_0]$.

Следователно $\mu(\psi_1; \delta_0) = 0$.

Определяме $\psi_2(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x)$. Очевидно $\psi_2\in C_{2\pi}$, $\psi_2(x)\equiv 0$ за $x\in[0,\delta_0]$, $\psi_2(x)\equiv\varphi_1(x_0)$ за $[x_0, x_0+\delta]$, ψ_2 е растяща на интервала $[\delta_0, x_0]$, като сума от растящите функции φ_1 и ψ_1 и ψ_2 е намаляваща на интервала $[x_0+\delta_0, 2\pi]$, като сума от намаляващите функции φ_1 и ψ_1. Следователно $\mu(\psi_2;\delta_0)=0$.

По същия начин и φ_2 се представя като сума на две функции $-\psi_3$ и ψ_4, такива че $\psi_3\in C_{2\pi}$, $\psi_4\in C_{2\pi}$, $\mu(\psi_3;\delta_0)=0$ и $\mu(\psi_4;\delta_0)=0$.

Тъй като $f=\varphi_1+\varphi_2$, то

$$f=(-\psi_1)+(\psi_2)+(-\psi_3)+(\psi_4)=f_1+f_2+f_3+f_4 .$$

Лемата е доказана.

Използвайки тази лема, ще докажем

ТЕОРЕМА 1.8. Критерият за равномерна сходимост на реда на Фурие от теорема 1.2 е по-силен от критерия на Дирихле-Жордан.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека f е функция, за която са изпълнени условията на критерия на Дирихле-Жордан, т.е. $f\in C_{2\pi}$ и $\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f)<\infty$. Тогава, по лема 1.3, съществуват δ_0 и функции $f_1, f_2, f_3, f_4\in C_{2\pi}$, такива че $f=f_1+f_2+f_3+f_4$ и

$$\mu(f_i;\delta_0)=0\,,\quad i=1,2,3,4. \tag{1.24}$$

Условията /1.24/ осигуряват изпълнението за функциите f_i $i=1,2,3,4$ на условието /1.19/, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_i, 1/n)\ln n=0.$$

Условията на теорема 1.4 са изпълнени и следователно редът $S[f]$ е равномерно сходящ.

От друга страна, функцията f_1 /вж. /1.23// от теорема 1.7 дава пример на функция, за която критерия на Дирихле-Жордан е неприменим, а са изпълнени условията на теорема 1.2.

Теоремата е доказана.

Във връзка с доказаната теорема ще отбележим, че както е добре известно, критериите на Дини–Липшиц и Дирихле–Жордан са несравними.

Сега ще припомним, че Неваи [9] и Жижиашвили [4] показаха, че в критерия на Дини–Липшиц условието /1.13/ може да се замени с по-слабото условие

$$/1.25/ \qquad \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \geqslant -\varepsilon(h)/(\ln 1/h), \; h>0,$$

което се иска да е изпълнено равномерно по x и където $\varepsilon(h) \geqslant 0$ и $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0+]{} 0$. Условието /1.25/ ще наричаме едностранно условие на Дини–Липшиц.

Неваи в [9], ослабвайки незначително /1.25/, получава следния критерий за равномерна сходимост на реда на Фурие: Ако $f \in C_{2\pi}$ и $-2\pi = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = 2\pi$ е такова крайно разделяне на интервала $[-2\pi, 2\pi]$ на подинтервали, че

$$\operatorname{sign}\left(\Delta_h f(x) + \varepsilon(h)/(\ln 1/h)\right) = \delta_k$$

равномерно по x на всеки интервал $[a_k, a_{k+1}]$, където $\delta_k = \pm 1$ и $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, то $S[f]$ е равномерно сходящ.

Връзката между модула на немонотонност $\mu(f;\delta)$ на функцията $f \in C_{2\pi}$ и едностранното условие на Дини–Липшиц /1.25/ ще изясним със следната

ЛЕМА 1.4. Ако за функцията $f \in C_{2\pi}$ е изпълнено едностранното условие на Дини–Липшиц /1.25/, то

$$\mu(f;h) \leqq \varepsilon_1(h)/(\ln 1/h),$$

където $\varepsilon_1(h) = \sup\limits_{0 \leqq t \leqq h} \varepsilon(t)$.

Д о к а з а т е л с т в о. От /1.1/ имаме

$$/1.26/ \qquad \mu(f;h) = \sup_{0 \leqq x_2 - x_1 \leqq h} \; \sup_{x_1 \leqq x \leqq x_2} |f(x) - f(x_1)|$$

$$= \sup_{\substack{0\leqq x_2-x_1\leqq h \\ f(x_1)=f(x_2)}} \sup_{x_1\leqq x\leqq x_2} |f(x_2)-f(x)|.$$

Нека точките x_1 , x_2 и x са такива, че $f(x_1)=f(x_2)$, $0\leqq x_2-x_1\leqq h$ и $x_1\leqq x\leqq x_2$. Тъй като $0\leqq x-x_1\leqq h$ и $0\leqq x_2-x\leqq h$, то от /1.25/ получаваме

$$f(x)-f(x_1)\geqq -\varepsilon(x-x_1)/(\ln 1/(x-x_1))\geqq -\varepsilon_1(h)/(\ln 1/h),$$

$$f(x_2)-f(x)\geqq -\varepsilon_1(h)/(\ln 1/h).$$

Но понеже $f(x_1)=f(x_2)$, то $f(x)-f(x_1)=-(f(x_2)-f(x))$ и следователно $|f(x)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(x)|\leqq \varepsilon_1(h)/(\ln 1/h)$. Отчитайки произволността на точките x_1 , x_2 и x , от /1.26/ получаваме твърдението на лемата.

ТЕОРЕМА 1.9. Критерият от теорема 1.2 е по-силен от критерия за равномерна сходимост на реда на Фурие чрез едностранното условие на Дини-Липшиц /1.25/.

Д о к а з а т е л с т в о. От лема 1.4 получаваме, че ако за функцията $f\in C_{2\pi}$ е изпълнено /1.25/, то $\mu(f;h)\leqq \varepsilon_1(h)/(\ln 1/h)$, $h>0$. Тъй като $\varepsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$, а следователно и $\varepsilon_1(h)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$, то за функцията f е изпълнено /1.19/. С това показахме, че ако една функция удовлетворява едностранното условие на Дини-Липшиц, то тя удовлетворява и условието /1.19/.

От друга, за функцията $h(x)$ от теорема 1.6 очевидно /1.25/ не е изпълнено, докато $\mu(h;\pi/4)=0$.

Теоремата е доказана.

Без съществени трудности може да се покаже, че критерият от теорема 1.5 за равномерна сходимост на реда на Фурие е по-силен от цитиратия горе критерий на Неваи [9] .

§ 1.4. Едно подобрение на критерия на Дини–Липшиц за равномерна сходимост на интерполационните полиноми

Ще припомним някои основни постановки в теорията на тригонометрическата интерполация на функциите /[6], т. II, стр. 5-91/.

Нека за всяко натурално n са дадени $2n+1$ различни по модул 2π точки на оста x:

/1.27/ $\quad x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{2n}^{(n)}.$

Известно е /[6], т. II, стр. 8/, че тригонометрическия полином от ред n, съвпадащ с 2π -периодическата функция f в точките $\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{2n}$, може да се запише като

/1.28/ $$\sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)})\, t_k(x),$$

където фундаменталните полиноми t_k се задават с израза

$$t_k(x) = \Big(\prod_{j\neq k} 2\sin\frac{x-x_j^{(n)}}{2}\Big)\Big/\Big(\prod_{j\neq k} 2\sin\frac{x_k^{(n)}-x_j^{(n)}}{2}\Big).$$

Естествен е въпросът за намиране на условия, при които сумите /1.28/ ще се стремят към $f(x)$ при $n\to\infty$. Известно е, че на сходимостта на интерполационните полиноми /1.28/ влияят както конструктивните свойства на функцията f, така и геометрическата структура на интерполационните възли /1.27/. За сходимостта на полиномите /1.28/ при произволна система от интерполационни възли е малко известно и затова почти при всички изследвания се разглежда случая на равноотстоящи възли на интерполация. Последното означава, че възлите на интерполация за n -тия интерполационен полином са произволни $2n+1$ поредни точки от множеството

/1.29/ $\quad x_j^{(n)} = x_0^{(n)} + 2\pi j/(2n+1), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

За простота на записването, често горният индекс n ще изпускаме.

Както е добре известно, n -тото ядро на Дирихле

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(u/2)}$$

е тригонометрически полином от ред n, такъв че

$$D_n(2\pi j/(2n+1)) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, 2n \quad \text{и} \quad D_n(0) = n + \frac{1}{2}.$$

Тогава полиномите $\frac{2}{2n+1} D_n(x - x_j)$; $j = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ са фундаменталните полиноми за системата от възли $\{x_j^{(n)}\}_{j=0}^{2n}$ /вж. /1.29//, т.е.

$$\frac{2}{2n+1} D_n(x - x_j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = x_j \\ 0 & \text{при} \quad x = x_k, \ k \neq j, \ k = 0, 1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Следователно, ако f е 2π -периодична функция, то интерполационният полином от ред n на функцията f по системата $\{x_j = x_0 + \frac{2\pi j}{2n+1}\}_{j=0}^{2n}$, по силата на /1.28/, е

$$I_n(f; x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) D_n(x - x_j).$$

Отчитайки вида на $D_n(u)$ и тъй като f е периодична, то /вж. [6], т.II, стр.86/

$$I_n(f; x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=p-n}^{p+n} f(x_j) D_n(x - x_j)$$

/1.30/

$$= \frac{2}{2n+1} \sin(n+\tfrac{1}{2})(x - x_p) \sum_{j=p-n}^{p+n} \frac{(-1)^j f(x_j)}{2\sin((x - x_j)/2)},$$

където p е произволно цяло число, а $\{x_j\}_{j=p-n}^{p+n}$ са точки от /1.29/.

Добре известен е следният критерий за равномерна сходимост на редицата от интерполационните полиноми $I_n(f;x)$ /[6], т.II, стр.31/: Ако функцията $f\in C_{2\pi}$ удовлетворява условието на Дини-Липшиц /1.13/

$$\lim_{n\to\infty} \omega(f; 1/n)\ln n = 0,$$

то редицата от полиноми $I_n(f;x)$ равномерно по x клони към $f(x)$.

Този критерий е точен, в смисъл, че съществува непрекъсната функция f , имаща модул на непрекъснатост $\omega(f;\delta) = O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$, такава че редицата $I_n(f;x)$ е разходяща почти навсякъде на интервала $[0,2\pi]$, [12] .

В този параграф ще покажем, че в условието на Дини-Липшиц /1.13/модулът на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ може да се замени с модула на немонотонност $\mu(f;\delta)$ и така полученото условие /1.19/ е пак достатъчно условие за равномерна сходимост на $I_n(f;x)$. Ще докажем

ТЕОРЕМА 1.10. Ако функцията $f\in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f;1/n)\ln n = 0,$$

то редицата $I_n(f;x)$ равномерно по x клони към $f(x)$.

Твърдението на тази теорема се получава лесно /вж. как от теорема 1.1 се получава теорема 1.2/ от следната

ТЕОРЕМА 1.11. За всяка функция $f\in C_{2\pi}$ е в сила

$$/1.31/\quad \| I_n(f;x)-f(x)\|_C \leqq 16\ln(n+1)\sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} \mu(f;kh)/k^2 + \varepsilon_n(f),\ n=1,2,\ldots$$

където $h=2\pi/(2n+1)$ и $\varepsilon_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Доказателството на теорема 1.11 се получава чрез модификация на доказателството на теорема 1.1, която модификация се налага от факта, че работим с дискретни суми, а не с интеграли. Особеностите в доказателството се получават още и от това, че за интерполационните полиноми $I_n(f;x)$ нямаме локализационна теорема в такъв вид, в какъвто я използвахме при доказателството на теорема 1.1 /вж. /1.15//, поради което броят на членовете в сумата отдясно в /1.31/ е $[\ln^2 n]$, а не е $[\ln n]$, както беше в /1.14/. Освен това, вместо втората теорема за средните стойности се налага да се използва преобразованието на Абел, което пък отежнява оценките.

За облекчаване на доказателството на теорема 1.11 ще докажем

ЛЕМА 1.5. Нека n е фиксирано натурално число и 2π-периодичната ограничена функция g е такава, че за някое натурално k, $0<k\leq n$ е изпълнено

/1.32/ $$\mu(g;kh)=0\ ,\quad h=2\pi/(2n+1).$$

Нека x е произволна фиксирана точка и нека цялото число p е такова, че $x_{p-1}<x\leq x_p$, $x_p=x_0+ph$ /вж. /1.29//. Тогава

/1.33/ $$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j\,(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leq 2\sup_{x_{p-1}\leq x\leq x_{p+1}}|g(x_{p+k})-g(x)|+\frac{4}{k}\|g\|_C\ \ln(n+1),$$

/1.34/ $$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p-n}^{p-2}\frac{(-1)^j\,(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leq 2\sup_{x_{p-1}\leq x\leq x_{p+1}}|g(x_{p-k-1})-g(x)|+\frac{4}{k}\|g\|_C\ \ln(n+1).$$

Грубо казано, лема 1.5. изразява факта, че ако за ограничената функция g е изпълнено /1.32/, то

$$\|I_n(f;x)\|_C \leq C\|g\|_C \frac{\ln(n+1)}{k},$$

а без условието /1.32/, както е известно / [6], т.II, стр.33/

$$\|I_n(f;x)\| \leq C\|g\|_C \ln(n+1).$$

Д о к а з а т е л с т в о на лема 1.5. От условието /1.32/ следва, че функцията g е монотонна на всеки интервал с дължина не по-голяма от kh. Ето защо, за да оценим сумата в лявата страна на /1.33/, ще я разделим на няколко суми, броя на членовете на всяка от които не превъзхожда k, т.е.

$$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leq \sum_{s=0}^{[n/k]-1}\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2))}\right| + \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+[n/k]k+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|.$$

След преобразование на Абел във вътрешната сума получаваме

$$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leq \frac{h}{\pi}\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1}|g(x_j)-g(x_{j+1})|\left|\sum_{i=p+ks+1}^{j}\frac{(-1)^i}{2\sin(x_i-x)/2}\right| + \frac{h}{\pi}|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)}\frac{(-1)^j}{2\sin(x_j-x)/2}\right|$$

$$\leq \frac{h}{|x-x_{p+ks+1}|}\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1} g(x_j)-g(x_{j+1})\right| + \frac{h}{|x-x_{p+ks+1}|}|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|$$

$$\leq \frac{1}{ks+1}\left(|g(x_{p+ks+1})-g(x_{p+k(s+1)})| + |g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\right).$$

При горните оценки използвахме, че

$$\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1} |g(x_j)+g(x_{j+1})| = \Big|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1} g(x_j)-g(x_{j+1})\Big|,$$

което следва от монотонността на функцията g на интервала $[(p+ks+1)h,(p+ks+k)h]$.

Аналогично на горе, след преобразование на Абел се получава

$$\frac{h}{\pi}\Big|\sum_{j=p+k[n/k]+1}^{p+n} \frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin(x-x_j)/2}\Big|$$

$$\leq \frac{1}{k[n/k]+1}\Big(|g(x_{p+k[n/k]+1})-g(x_{p+n})|\Big)+|g(x_{p+n})-g(x)|\Big)$$

Тогава, окончателно получаваме

$$\frac{h}{\pi}\Big|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin(x_j-x)/2}\Big|$$

$$\leq \sum_{s=0}^{[n/k]-1}\frac{1}{ks+1}\Big(|g(x_{p+ks+1})-g(x_{p+k(s+1)})|+|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\Big)$$

$$+\frac{1}{k[n/k]+1}\Big(|g(x_{p+k[n/k]+1})-g(x_{p+n})|+|g(x_{p+n})-g(x)|$$

$$\leq |g(x_{p+1})-g(x_{p+k})|+|g(x_{p+k})-g(x)|+\sum_{s=1}^{[n/k]}\frac{1}{ks}4\|g\|_C$$

$$\leq 2\sup_{x_{p-1}\leq x\leq x_{p+1}}|g(x_{p+k})-g(x)|+\frac{4}{k}\|g\|_C\ln(n+1).$$

Неравенството /1.33/ е доказано. Неравенството /1.34/ се доказва аналогично.

Лема 1.5 е доказана.

Д о к а з а т е л с т в о на теорема 1.11. Нека n и x са фиксирани и цялото число p е такова, че $x_{p-1} < x \leq x_p$, $x_p = x_0 + ph$. Тогава /вж. /1.30//

$$|I_n(f;x) - f(x)| = \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=0}^{2n}\{f(x_j) - f(x)\} D_n(x - x_j)\right|$$

$$= \frac{h}{\pi}\left|\sin((n+1/2)(x-x_p))\sum_{j=p-n}^{p+n}\frac{(-1)^j(f(x_j)-f(x))}{2\sin(x-x_j)/2}\right|$$

$$\leq \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p-n}^{p-2}\right| + \frac{h}{\pi}\left|\sin(n+1/2)(x-x_p)\sum_{j=p-1}^{p}\right| + \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\right|$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 .$$

Лесно се вижда, че $B_2 \leq 2\omega(f;h) = \mathcal{E}_n^{(1)}(f)$.

За да оценим B_1 и B_3, функцията f разлагаме на сума от функции, използвайки лема 1.2 със $s = [\ln^2 n]$ и $\delta_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, s$. За B_3 получаваме

$$B_3 = \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(f(x_j)-f(x))}{2\sin(x-x_j)/2}\right|$$

$$\leq \frac{h}{\pi}\sum_{k=1}^{s}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(f_k(x_j)-f_k(x))}{2\sin(x-x_j)/2}\right| + \frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(\tau_s(x_j)-\tau_s(x))}{2\sin(x-x_j)/2}\right|.$$

За оценката на вътрешните суми при $k = 2, 3, \dots, s$ и за оценката на последната сума ще се възползваме от лема 1.5, помнейки, че функциите f_k са такива, че

$$\|f_k\|_C \leq \mu(f; kh) - \mu(f;(k-1)h) \quad , \quad \mu(f_k;(k-1)h) = 0$$

Получаваме / $s = [\ln^2 n]$ /

$$B_3 \leq \frac{h}{\pi} \left| \sum_{j=p+1}^{p+n} \frac{(-1)^j (f_1(x_j) - f_1(x))}{2\sin(x-x_j)/2} \right|$$

$$+ 2\sum_{k=2}^{s} \sup_{x_{p-1} \leq x \leq x_p} |f_k(x_{p+k}) - f_k(x)| + 4\ln(n+1) \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k-1} \|f_k\|_C$$

$$+ 2 \sup_{x_{p-1} \leq x \leq x_{p+1}} |\tau_s(x_{p+s}) - \tau_s(x)| + \frac{4\ln(n+1)}{s} \|\tau_s\|_C$$

$$\leq \frac{h}{\pi} 2\|f_1\| \sum_{j=p+1}^{p+n} 1/(2|\sin(x-x_j)/2|) + 2\cdot 4 \sum_{k=2}^{s} \|f_k\|$$

$$+ 4\ln(n+1) \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k-1} (\mu(f; kh) - \mu(f;(k-1)h))$$

$$+ 2\omega(\tau_s, 2sh) + \frac{4\ln(n+1)}{s} \|f\|_C$$

$$\leq 2\ln(n+1)\mu(f;h) + 4\mu(f; sh)$$

$$+ 4\ln(n+1) \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k-1} (\mu(f;kh) - \mu(f;(k-1)h)) + 2\omega(f; 2sh) + 4\ln(n+1)\|f\|_C/s$$

$$\leq 2\mu(f;h)\ln(n+1) + 4\ln(n+1) \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k-1} (\mu(f;kh) - \mu(f;(k-1)h)) + \varepsilon_n^{(2)}(f),$$

където $\varepsilon_n^{(2)}(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

След преобразование на Абел на последната сума получаваме

$$B_3 \leq 16 \ln(n+1) \sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} \mu(f; kh)/k^2 + 4 \frac{\ln(n+1)}{[\ln^2 n]} \mu(f; h\ln^2 n) + \varepsilon_n^{(2)}(f).$$

Оценявайки по аналогичен начин члена B_1 за него се получава същата оценка.

От оценките на B_1, B_2 и B_3 следва /1.31/.

Теорема 1.11 е доказана.

ТЕОРЕМА 1.12. Условието /1.13/ като достатъчно условие за равномерна сходимост на полиномите $I_n(f;x)$ е точно, в смисъл, че съществува функция $f \in C_{2\pi}$, имаща модул на непрекъснатост $\mu(f;\delta) = O\{(\ln 1/\delta)^{-1}\}$ и такава, че редицата $I_n(f;x)$ е разходяща почти навсякъде в интервала $[0, 2\pi]$.

Доказателството на теорема 1.12 се базира на точността на критерия на Дини-Липшиц за равномерна сходимост на интерполационните полиноми $I_n(f;x)$ /вж. [12] / и се получава аналогично на доказателството на теорема 1.3.

ГЛАВА II. ВЪРХУ СХОДИМОСТТА НА ОПЕРАТОРИТЕ НА ФУРИЕ В БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 2.1. Някои определения и помощни леми

Нека X е банахово пространство, а X^* е неговото спрегнато. Нека $T(t)$, $-\infty < t < \infty$ е силно непрекъсната група от оператори в X, т.е. $X \xrightarrow{T(t)} X$ и $T(t)$ удовлетворява условията

а/ $T(t+u) = T(t)\,T(u)$,

б/ $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0} T(t) = T(0) = I$,

където I е тъждественият оператор в X /вж.[5], стр. 654/. С A означаваме инфинитезималния оператор на групата $T(t)$: Af съществува за тези $f \in X$, за които $\lim\limits_{t\to 0} (T(t)f - If)/t$ съществува / $= Af$ /. Операторът A е затворен и областта му на определение е плътна в X /[20], стр. 10/.

Ще припомним някои резултати, които ще са необходими при по-нататъчното изложение.

ЛЕМА 2.1. Нека $T(t)$, $-\infty < t < \infty$ е силно непрекъсната група от оператори в пространството X с инфинитезимален оператор A. Тогава

1° /[20], стр. 18/ Съществува $\omega > 0$, такова че резолвентата $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ на оператора A е регулярна за $|Re\,\lambda| \geq \omega$ и

$$R(\lambda; A) = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)\,dt \quad \text{за} \quad Re\,\lambda \geqq \omega,$$

/2.1/

$$R(\lambda; A) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} T(t)\,dt \quad \text{за} \quad Re\,\lambda \leqq -\omega.$$

2° /[20], стр. 8/ Съществува константа M_ω, такава че

/2.2/ $$\|T(t)\| \leqq M_\omega e^{\omega|t|}, \ -\infty < t < \infty.$$

3° / [20], стр. 34/ За всяко λ, такова че $|Re\,\lambda| > \omega$ е изпълнено

/2.3/ $$\|R(\lambda; A)\| \leqq C/(|Re\,\lambda| - \omega),$$

където C е абсолютна константа.

ЛЕМА 2.2. Нека A е затворен оператор и s е натурално число. Тогава

1°/[7], лема 2.1/ Ако резолвентата на оператора A^s – $R(\lambda; A^s)$ е регулярна в пръстена $0 < \varrho_1^s < |\lambda| < \varrho_2^s$, то резолвентата $R(\lambda; A)$ на оператора A е регулярна в пръстена $0 < \varrho_1 < |\lambda| < \varrho_2$ и обратното.

2°/[7], лема 2.7/ Нека $\{\omega_j\}_{j=0}^{s-1}$ са корените от единицата от степен s, т.е. $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{s}i}$, $\omega_2 = e^{2\frac{2\pi}{s}i}$, $\omega_3 = e^{3\frac{2\pi}{s}i}$, $\ldots, \omega_{s-1} = e^{(s-1)\frac{2\pi}{s}i}$ и $\mu \neq 0$ е произволно комплексно число. Тогава, ако $\mu\omega_j \in \tau(A)$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$ / с $\tau(A)$ сме означили резолвентното множество на оператора A /, то $\mu^k \in \tau(A^k)$ и

/2.4/ $$R(\mu^s; A^s) = \frac{1}{s\mu^{s-1}} \sum_{j=0}^{s-1} \omega_j\, R(\omega_j \mu; A).$$

3°/[7], лема 2.7/ Ако $\{\lambda : |\lambda| = \varrho\} \subset \tau(A)$, то

/2.5/ $$\int_{|\lambda| = \varrho^s} R(\lambda; A^s)\,d\lambda = \int_{|\mu| = \varrho} R(\mu, A)\,d\mu,$$

$$/2.6/ \quad \int\limits_{|\lambda|=\rho^s} \frac{1}{\lambda} R(\lambda; A^s)\, d\lambda = \int\limits_{|\mu|=\rho} \frac{1}{\mu^s} R(\mu; A)\, d\mu.$$

4°/ [7], лема 2.5/ Нека $R(\lambda, A)$ е регулярна в пръстена $0<\beta<|\lambda|<\gamma$ и за тези λ е изпълнено $\| R(\lambda; A)\| \leq C/|\mathrm{Re}\,\lambda|$. Тогава

$$/2.7/ \quad \| R(\frac{\beta+\gamma}{2} e^{i\varphi}; A)\| \leq C/(\gamma-\beta) \quad , \quad 0\leq \varphi \leq 2\pi.$$

Както Купцов [7], ще казваме, че операторът A е s -регулярен, ако за натуралното число s съществува реално θ, такова че

$$/2.8/ \quad \| R(\lambda; e^{i\theta} A^s)\| \leq C/|\mathrm{Im}\,\lambda|,$$

където C не зависи от λ. Ще казваме, че групата $T(t)$ е s -регулярна, ако нейният инфинитезимален оператор е s -регулярен.

Ще отбележим, че ако операторът A е s-регулярен, то спектърът на оператора $e^{i\theta} A^s$, очевидно лежи на реалната ос. От друга страна, ако групата $T(t)$ е s-регулярна, то отчитайки, че резолвентата $R(\lambda; A)$ е регулярна за $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geq \omega$ /вж. лема 2.1, свойство 1°/ и имайки предвид теоремата за изобразяване на спектрите /вж. [5], стр. 664/, лесно е да се види, че всички λ, такива че $\lambda \in \sigma(A)$ / с $\sigma(A)$ сме означили спектъра на оператора A / и $|\lambda| \geq \omega/\sin \pi/s$ лежат на имагинерната ос. Затова естествена е следната

ЛЕМА 2.3. Нека $T(t)$ е s -регулярна група от оператори с инфинитезимален оператор A. Тогава за всички λ, такива че $|\lambda| \geq (\omega+1)/\sin(\pi/4s)$, е изпълнено

/2.9/ $\|R(\lambda; A)\| \leqq C/(|\mathrm{Re}\,\lambda|)$ за s нечетно и

/2.10/ $\|R(\lambda; A) - R(-\lambda; A)\| \leqq C/(|\mathrm{Re}\,\lambda|)$ за всяко s,

където C може да зависи само от ω и s.

Д о к а з а т е л с т в о. Ще докажем /2.9/. Оценката /2.10/ се показва аналогично.

Нека s е нечетно. Тогава, тъй като A е инфинитезимален оператор на s-регулярна група от оператори, то числото θ е нечетно кратно на $\pi/2$.

Нека $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, е фиксирано комплексно число, такова че $|\lambda| = \rho \geqq (\omega+1)/\sin(\pi/4s)$. Възможни са следните случаи за φ

а/ $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2 - \alpha_\rho$, $\alpha_\rho = \arcsin((\omega+1)/\rho)$. Тогава, отчитайки, че $\mathrm{Re}\,\lambda = \rho\cos\varphi$ и $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \omega+1$, то от /2.3/ получаваме

$$\|R(\lambda; A)\| \leqq \frac{C}{\rho\cos\varphi - \omega} \leqq \frac{C(\omega+1)}{\rho\cos\varphi} = \frac{C_1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}$$

б/ $\pi/2 + \alpha_\rho \leqq \varphi \leqq 3\pi/2 - \alpha_\rho$ или $3\pi/2 + \alpha_\rho \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Оценката /2.9/ се получава както в случая а/.

в/ $\pi/2 - \alpha_\rho \leqq \varphi \leqq \pi/2 + \alpha_\rho$. Тъй като $\rho \geqq$ $\geqq (\omega+1)/\sin(\pi/4s)$, то $\alpha_\rho = \arcsin\frac{\omega+1}{\rho} \leqq \arcsin\sin(\pi/4s) = \pi/4s$.

Следователно $\pi/2 - \pi/4s \leqq \varphi \leqq \pi/2 + \pi/4s$. За да покажем /2.9/ ще се възползваме от /2.4/ с $\mu = \lambda = \rho e^{i\varphi}$. Получаваме

$$\|R(\lambda; A)\| = \| s\lambda^{s-1} R(\lambda^s; A^s) - \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j R(\omega_j \lambda; A)\|$$

$$\leqq s\rho^{s-1} \|R(\lambda^s; A^s)\| + \sum_{j=1}^{s-1} \|R(\omega_j \lambda; A)\|.$$

Ще оценим отделно двата члена в дясната част на последното неравенство. За първия член, използвайки /2.8/ и помнейки, че s е нечетно / и следователно θ е нечетно-кратно на $\pi/2$ /, получаваме

$$s\rho^{s-1}\|R(\lambda^s;A^s)\| = s\rho^{s-1}\|R(\rho^s e^{is\varphi}e^{i\theta};\, e^{i\theta}A^s)\|$$

/2.11/

$$\leq s\rho^{s-1}\frac{C}{\rho^s|\sin(s\varphi+\theta)|} = \frac{sC}{\rho|\cos s\varphi|} \leq \frac{C_1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}.$$

За втория член, използвайки /2.3/, получаваме

$$\sum_{j=1}^{s-1}\|R(\omega_j\lambda;A)\| \leq (s-1)\|R(\rho e^{i(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{4s})};\, A)\|$$

/2.12/

$$\leq \frac{(s-1)\,C}{\rho|\cos(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{4s})|-\omega}$$

$$\leq \frac{(s-1)\,C(\omega+1)}{\rho\,\sin(3\pi/4s)} = \frac{C_2}{\rho} \leq \frac{C_2}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}.$$

От /2.11/ и /2.12/ следва оценката /2.9/ за $\lambda=\rho e^{i\varphi}$, $\pi/2-\alpha_\rho \leq \varphi \leq \pi/2+\alpha_\rho$ и $\rho \geq (\omega+1)/\sin(\pi/4s)$.

г/ $3\pi/2-\alpha_\rho \leq \varphi \leq 3\pi/2+\alpha_\rho$. Оценката /2.9/ се получава както в случая в/.

Лемата е доказана.

По-нататък, освен че инфинитезималният оператор на групата $T(t)$ е s-регулярен, ще предполагаме още, че спектърът $\sigma(e^{i\theta}A^s)$ на оператора $e^{i\theta}A^s = Q$ е дискретен и безкраен с единствена точка на сгъстяване точката безкрайност. Тогава всички точки от $\sigma(Q)$ са собствени стойности на оператора $Q=e^{i\theta}A^s$. Нека модулите им ... са номерирани в растящ ред с числата

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

За всяко $\nu = 1, 2, \dots$ определяме проекторите

$$P_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_\nu} R(\lambda; Q)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_{\nu-1}} R(\lambda; Q)\,d\lambda,$$

където $\rho_\nu \in (m_\nu, m_{\nu+1})$, $\rho_0 = 0$ /вж. [7], [11]/. Тъй като резолвентата $R(\lambda; Q)$ е регулярна в пръстена $m_\nu < |\lambda| < m_{\nu+1}$, то P_ν не зависи от избора на ρ_ν /стига, разбира се, $\rho_\nu \in (m_\nu, m_{\nu+1})$ /. От /2.5/ следва, че P_ν не зависи и от s.

Следвайки Купцов, операторът

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho_n} R(\lambda; Q)\,d\lambda \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ще наричаме n -ти оператор на Фурие.

Тъй като $R(\lambda; e^{i\theta}A^s)$ е регулярна в пръстена $m_n < |\lambda| < m_{n+1}$, то $R(\lambda; A)$ ще е регулярна в пръстена $\sqrt[s]{m_n} < |\lambda| < \sqrt[s]{m_{n+1}}$ и следователно, отчитайки /2.9/ и /2.10/ от /2.7/ получаваме

$$\left\| R\left(\frac{\sqrt[s]{m_n} + \sqrt[s]{m_{n+1}}}{2} e^{i\varphi}, A\right)\right\| \leqq C/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}),$$

/2.13/

$$\left\| R\left(\frac{\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n}}{2} e^{i\varphi}, A\right) - R\left(-\frac{\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n}}{2} e^{i\varphi}, A\right)\right\| \leqq \frac{C}{\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}}$$

където $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ и n е такова, че $\sqrt[s]{m_n} \geqq (\omega + 1)/\sin(\pi/4s)$

Чрез групата $T(t)$ в пространството X за всеки елемент ще въведем някои характеристики, които са абстрактен аналог на известни конструктивни характеристики на функциите.

ДЕФИНИЦИЯ 2.1. [7] За произволни натурално k и $\delta \geq 0$, k –тия модул на непрекъснатост на елемента $f \in X$ определяме с израза

$$\omega_k(f;\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|(T(h)-I)^k f\|.$$

От дефиницията на $\omega_k(f;\delta)$ следват лесно следните свойства [11]:

$$\omega_k(f;\delta) \leq C_{\tau,k}\, \omega_\tau(f;\delta), \quad \tau \leq k,$$

/2.14/

$$\omega_k(f;\delta\alpha) \leq C_{\alpha,k}\, \omega_k(f;\delta), \quad \alpha > 0.$$

ДЕФИНИЦИЯ 2.2. Нека $l>0$, k и n са натурални и $x^* \in X^*$. k –тия модул на изменение на елемента $f \in X$ определяме като

$$\nu_k(f;x^*,l,n) = \sup_{-l \leq h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{2n-1} \leq l} \sum_{j=0}^{n-1} \left| x^* T(h_{2j}) \left(T\left(\frac{h_{2j+1}-h_{2j}}{k}\right) - I \right)^k f \right|$$

/ локален /,

$$\nu_k(f;l,n) = \sup_{x^* \in S^*} \nu_k(f;x^*,l,n) \qquad \text{/глобален/},$$

където S^* е единичната сфера на пространството X^*.

Ако X е пространството $C_{2\pi}$ и силно непрекъснатата група от оператори в него е групата на транслациите на правата, то определеният глобален k-ти модул на изменение

$\nu_k(f; l, n)$ при $k=1$ е еквивалентен с характеристиките въведени от Чантурия [19] и Попов [23].

От определението на $\nu_k(f; x^*, l, n)$ лесно следват свойствата:

$$\nu_k(f; x^*, l, n) \leq \nu_k(f; x^*, l, n+1),$$

$$\nu_k(f; x^*, l, pn) \leq p\,\nu_k(f; x^*, l, n) \quad / \text{ p натурално } /,$$

/2.15/
$$\nu_k(f; x^*, l, n) \leq C_e\, n\, \omega_k(f; 1/n) \quad / \; x^* \in S^* \; /,$$

$$\nu_k(f; x^*, l, n) \leq C_{k,\tau}\, \nu_\tau(f; x^*, l, n) \quad / \; \tau \leq k \; /.$$

За глобалния модул на изменение $\nu_k(f; l, n)$ свойствата /2.15/ също са в сила.

Ще припомним определението на модифицираната функция на Стеклов /вж. [11] / за случай на банахово пространство

$$f_{h,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{h^k} \underbrace{\int_0^h \int_0^h \dots \int_0^h}_{k} \Big\{ T(k(t_1+t_2+\dots+t_k)) - \binom{k}{1} T((k-1)(t_1+t_2+\dots+t_k)) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} T(t_1+t_2+\dots+t_k) \Big\} f \, dt_1\, dt_2 \dots dt_k.$$

Някои свойства на елемента $f_{h,k}$ ще формулираме в следната

ЛЕМА 2.4. [11] За всеки елемент $f \in X$ и числа $h>0$ и k натурално е в сила

1° Елементът $f_{h,k}$ принадлежи на областта на определение $D(A^k)$ на оператора A^k.

2° $$A^k f_{h,k} = \frac{(-1)^k}{h^k} \Big\{ \frac{1}{k^k} (T(kh)-I)^k - \frac{1}{(k-1)^k} (T((k-1)h)-I)^k \binom{k}{1} +$$
$$+ \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} (T(h)-I)^k \Big\} f = \frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^{k} a_j (T(jh)-I)^k f,$$

/2.16/ $\| A^k f_{h,k} \| \leq \frac{1}{h^k} 2^k \omega_k(f; kh).$

$$3^\circ \quad f_{h,k} - f = \frac{(-1)^{k-1}}{h^k} \int_0^h \int_0^h \ldots \int_0^h \{ T(t_1 + t_2 + \ldots + t_k) - I \}^k f \, dt_1 dt_2 \ldots dt_k$$

/2.17/ $\| f_{h,k} - f \| \leq \omega_k(f; kh).$

§ 2.2. Оценки за отклонението между елемента f и $S_n f$

В този параграф ще докажем следната основна

ТЕОРЕМА 2.1. Нека в банаховото пространство X действува силно непрекъсната група от оператори $T(t)$ с S-регулярен инфинитезимален оператор A и нека операторът $e^{i\theta}A^s$ има дискретен и неограничен спектър. Ако k е натурално число, $l>0$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица от натурални числа, то съществува $N = N(s, A)$, такова че за всички $n \geqslant N$, $f \in X$ и $x^* \in S^*$ е в сила

$$|x^*(I - S_n) f| \leq C_1 \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln(e + 1/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}))$$

/2.18/
$$+ C_2 \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln p_n + C_3 \sum_{j=p_n}^{q_n} \nu_k(f; x^*, l, j)/j^2,$$

където C_1, C_2 и C_3 са константи, зависещи евентуално от k, l и A, $q_n = \min\{[(\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n})], [\sqrt[s]{m_{n+1}} + \sqrt[s]{m_n}]\}$ а ако $p_n > q_n$ смятаме, че последната сума е празна.

Д о к а з а т е л с т в о. За облекчаване на означенията навсякъде в доказателството с C и D ще означаваме константите, които евентуално зависят от k, ℓ и ω, но не от n, f и x^*.

Избираме N, така че $m_n \geqq (\omega+1)/\sin(\pi/4s)$ за всяко $n > N$. Нека натуралното число n е фиксирано и такова, че $n > N$.

Полагаме $\varrho_n = (\sqrt[s]{m_n} + \sqrt[s]{m_{n+1}})/2$ и $h_n = \ell/2\varrho_n = h$. Очевидно $\varrho_n^s \in (m_n, m_{n+1})$ и следователно, имайки предвид /2.5/ и определението на оператора S_n, за произволен елемент $f \in X$ получаваме

$$S_n f = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varrho_n^s} R(\lambda; e^{i\theta}A^s) f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varrho_n^s} R(\lambda; A^s)\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varrho_n} R(\lambda; A)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varrho_n^k} R(\lambda; A^k)\, d\lambda .$$

Добавяйки и изваждайки елемента $f_{h_n,k}$ към разликата $f - S_n f$, получаваме / $x^* \in S^*$ /

$$|x^*(I - S_n)f|$$

$$\leqq |x^*(I - S_n) f_{h,k}| + |x^* S_n(f_{h,k} - f)| + |x^*(f - f_{h,k})| .$$

От /2.17/ имаме

$$/2.19/ \quad |x^*(f - f_{h,k})| \leqq \|f - f_{h,k}\| \leqq C\,\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) .$$

Ще оценим $|x^*(I - S_n) f_{h,k}|$. Отчитайки /2.6/ и пункт 2° на лема 2.4 получаваме

$$(I-S_n)f_{h,k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\rho_n^k}\frac{1}{\lambda}R(\lambda;e^{i\theta}A^k)A^k f_{h,k}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\rho_n^k}\frac{1}{\lambda}R(\lambda;A^k)\frac{1}{h^k}f_k\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi h^k i}\int\limits_{|\lambda|=\rho_n}\frac{1}{\lambda^k}R(\lambda;A)f_k\,d\lambda,$$

където /вж. /2.16//

/2.20/ $$f_k=\sum_{j=1}^{k}a_j(T(jh)-I)^k f\quad,\quad \|f_k\|\leq 2^k\omega_k(f;kh).$$

Означавайки $\Delta_n=(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})$ и $\alpha_n=max\{1,2\pi\omega/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})\}$, извършваме следните преобразования

$$|x^*(I-S_n)f_{h,k}|=|x^*\frac{\rho_n}{2\pi\rho^k}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i(k-1)\varphi}}R(\rho_n e^{i\varphi};A)f_k\,d\varphi|$$

$$\leq|x^*\frac{\rho_n}{2\pi\rho^k}\int\limits_{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}|+|x^*\frac{\rho_n}{2\pi\rho^k}\int\limits_{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{3\pi/2-\alpha_n\Delta_n}|$$

$$+|x^*\frac{\rho_n}{2\pi\rho^k}\left\{\int\limits_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}+\int\limits_{-\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}\right\}|$$

$$=G_1+G_2+G_3.$$

Интервалът $[0,2\pi]$, по който се интегрира, разделихме така, че в членовете G_1 и G_2 да може да се възползваме от представянето /2.1/ на резолвентата $R(\lambda;A)$ чрез групата $T(t)$. Представянето /2.1/ е справедливо за $|\mathrm{Re}\,\lambda|\geqq\omega$ и действително, от определенията на Δ_n и α_n следва, че

$$|\mathrm{Re}\,\lambda| = \rho_n|\cos\varphi| \geqq \rho_n \sin\alpha_n\Delta_n \geqq \rho_n \frac{2}{\pi}\alpha_n\Delta_n \geqq 2\omega.$$

При оценката на G_3 ще се възползваме от /2.10/ , /2.13/ и /2.20/. Получаваме

$$G_3 = \left| x^* \frac{\rho_n}{2\pi\ell^k} \int\limits_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n} e^{-i(k-1)\varphi}\left\{R(\rho_n e^{i\varphi};A) - R(-\rho_n e^{i\varphi};A)\right\} f_k \, d\varphi\right.$$

$$\leqq \frac{\rho_n}{2\pi\ell^k} \int\limits_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n} \| R(\rho_n e^{i\varphi};A) - R(-\rho_n e^{i\varphi};A)\| . \|f_k\| \, d\varphi$$

$$= \frac{\rho_n}{2\pi\ell^k}\left\{ \int\limits_{\pi/2-\Delta_n}^{\pi/2+\Delta_n} + \int\limits_{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\Delta_n} + \int\limits_{\pi/2+\Delta_n}^{\pi/2+\alpha_n\Delta_n} \right\}$$

$$\leqq \frac{\rho_n}{2\pi\ell^k}\, 2\Delta_n \frac{C}{\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n}}\, 2^k \omega_k(f;kh)$$

$$+ \frac{\rho_n}{\pi\ell^k}\, 2^k \omega_k(f;kh) \frac{1}{\rho_n} \int\limits_{\Delta_n}^{\alpha_n\Delta_n} 1/\sin\psi \, d\psi$$

$$\leqq D\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n}) + D\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n}) \ln \alpha_n$$

$$\leqq D\omega_k(f;1/\sqrt[5]{m_n})\ln(e+1/(\sqrt[5]{m_{n+1}}-\sqrt[5]{m_n})).$$

Използвайки представянето /2.1/ на резолвентата $R(\lambda;A)$, ще оценим члена

$$G_1=|x^*\frac{\rho_n}{2\pi e^k}\int_{\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}\exp(-i(k-1)\varphi)\left\{\int_0^\infty\exp(-\rho_n te^{i\varphi})T(t)\,dt\right\}f_k\,d\varphi|$$

$$\leqq\frac{\rho_n}{2\pi e^k}\int_0^\infty|x^*T(t)f_k|\left\{\int_{-\pi/2+\alpha_n\Delta_n}^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}|\exp(-i(k-1)\varphi)\exp(-\rho_n te^{i\varphi})|\,d\varphi\right\}dt$$

$$\leqq\frac{\rho_n}{\pi e^k}\int_0^\infty|x^*T(t)f_k|\left\{\int_0^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}\exp(-\rho_n t\cos\varphi)\,d\varphi\right\}dt.$$

За вътрешния интеграл имаме следната оценка

$$\int_0^{\pi/2-\alpha_n\Delta_n}\exp(-\rho_n t\cos\varphi)\,d\varphi\leqq\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{за } t\geqq 0,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2\rho_n t}\exp\left(-\dfrac{2}{\pi}\alpha_n\Delta_n\rho_n t\right) & \text{за } t>0.\end{cases}\qquad /2.21/$$

Интервалът, по който се интегрира по t, разделяме по следния начин

$$G_1 \leq \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} \int_0^{h_n} + \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} \int_{h_n}^{p_n h_n} + \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} \int_{p_n h_n}^{q_n h_n} + \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} \int_{q_n h_n}^{\infty}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 .$$

Ще оценим последователно J_1 , J_2 , J_4 и J_3 . Използвайки /2.2/, /2.20/ и /2.21/ получаваме

$$J_1 \leq \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} h_n \frac{\pi}{2} M_\omega e^{\omega h_n} 2^k \omega_k (f; k h_n)$$

$$\leq D\, \omega_k (f; 1/\sqrt[5]{m_n}).$$

Отчитайки, че $\frac{2}{\pi} \alpha_n \Delta_n \rho_n \geq 2\omega$, то

$$J_2 \leq \frac{\rho_n}{\pi \ell^k} \int_{h_n}^{p_n h_n} \frac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi} \alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) \| T(t) \| . \| f_k \| \, dt$$

$$\leq \frac{1}{2 \ell^k} \int_{h_n}^{p_n h_n} \frac{1}{t} \exp(-2\omega t) M_\omega e^{\omega t} 2^k \omega_k (f; k h_n) \, dt$$

$$\leq \frac{M_\omega}{2 \ell^k} 2^k \omega (f; k h_n) \int_{h_n}^{p_n h_n} 1/t \, dt$$

$$\leq D\, \omega_k (f; 1/\sqrt[5]{m_n}) \ln p_n .$$

Аналогично, тъй като $\frac{1}{\pi} \alpha_n \Delta_n \rho_n \geq \omega$, то

$$J_4 \leq \frac{\rho_n}{\pi_0 \ell^k} \int_{q_n h_n}^{\infty} \frac{\pi}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi_0} \Delta_n \alpha_n \rho_n t\right) M_\omega e^{\omega t} 2^k \omega_k(f; kh_n)\, dt$$

$$\leq \frac{M_\omega 2^k \omega_k(f; kh_n)}{2\ell^k} \int_{\ell q_n/2\rho_n}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{\pi_0}\alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) \exp\left(\left(-\tfrac{1}{\pi_0}\alpha_n \Delta_n \rho_n + \omega\right)t\right) dt$$

$$\leq \frac{M_\omega 2^k \omega_k(f; kh_n)}{2\ell^k} \int_{\ell q_n \alpha_n \Delta_n \rho_n/(2\pi_0 \rho_n)}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t}\, dt$$

$$\leq D\, \omega_k(f, 1/\sqrt[s]{m_n}).$$

Ще отбележим, че последният интеграл е краен и не зависи от n, тъй като от определенията на α_n, q_n и Δ_n следва, че $\ell q_n \alpha_n \Delta_n / 2\pi_0 \geq \ell/(2\pi_0) = \text{const} > 0$.

За члена J_3 получаваме

$$J_3 \leq \frac{\rho_n}{\pi_0 \ell^k} \int_{p_n h_n}^{q_n h_n} \frac{\pi_0}{2\rho_n t} \exp\left(-\frac{2}{\pi_0} \alpha_n \Delta_n \rho_n t\right) |x^* T(t) f_k|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\ell^k} \int_{p_n h_n}^{q_n h_n} \frac{1}{t} |x^* T(t) f_k|\, dt$$

$$= \frac{1}{2\ell^k} \sum_{j=p_n}^{q_n - 1} \int_{j h_n}^{(j+1)h_n} \frac{1}{t} |x^* T(t) f_k|\, dt.$$

Във всеки от последните интеграли прилагаме теоремата за средните стойности. Получаваме

$$J_3 \leq \frac{1}{2\ell^k} \sum_{j=p_n}^{q_n-1} \frac{1}{\frac{\ell}{2\varrho_n}} |x^* T(t_j) f_k| \frac{\ell}{2\varrho_n}$$

$$= \frac{1}{2\ell^k} \sum_{j=p_n}^{q_n-1} \frac{1}{j} |x^* T(t_j) f_k| ,$$

където $t_j \in [\ell j/2\varrho_n, \ell(j+1)/2\varrho_n]$, $t_j \in [0, \ell]$,

$j = p_n, p_n+1, \dots, q_n - 1$.

В последната сума след преобразование на Абел / [1], стр.16/ получаваме

$$J_3 \leq \frac{1}{2\ell^k} \left\{ \frac{1}{q_n - p_n - 1} \sum_{j=p_n}^{q_n-1} |x^* T(t_j) f_k| + \sum_{j=p_n}^{q_n-2} \frac{1}{j^2} \sum_{\nu=p_n}^{j} |x^* T(t_\nu) f_k| \right.$$

$$\leq D\, \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) + \frac{1}{2\ell^k} \sum_{j=p_n}^{q_n-2} \frac{1}{j^2} \sum_{\nu=p_n}^{j} |x^* T(t_\nu) f_k| .$$

Ще разгледаме $\sigma_j = \sum_{\nu=p_n}^{j} |x^* T(t_\nu) f_k|$, където $f_k = A^k f_{h,k} \cdot h^k = \sum_{j=1}^{k} a_j (T(jh) - I)^k f$, $h = h_n = \ell/2\varrho_n$ /вж. 2° на лема 2.4 и /2.20//. Ще покажем, че за $j = p_n, p_n+1, \dots, q_n - 1$ е в сила

/2.22/ $\quad \sigma_j \leq A_1(k)\, \nu_k(f; x^*, \ell, j) + A_2(k)\, \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n})$,

където $A_1(k)$ и $A_2(k)$ са константи не зависещи от j .

Действително, от една страна f_k е сума от k на брой k -ти разлики и следователно всяко t_ν е ляв край за точно k на брой k -ти разлики. От друга страна $h_n \leq t_{\nu+2}-t_\nu \leq 3h_n$. Следователно, обединявайки по подходящ начин непресичащите се k -ти разлики, които не излизат извън интервала $[0,l]$, ще получим една сума за $\nu_k(f;x^*,l,q)$ с $q \leq j-p_n$. Числото на сумите за $\nu_k(f;x^*,l,q)$, които ще получим, зависи само от k. Останалите k -ти разлики, които излизат извън интервала $[0,l]$, оценяваме с $M_\omega e^{\omega l}\,\omega(f;kh_n)$. Техният брой също зависи само от k.

Отчитайки гореказаното, /2.22/ е очевидно.

Използвайки неравенството /2.22/, получаваме

$$\sum_{j=p_n}^{q_n-2}\frac{1}{j^2}\sum_{\nu=p_n}^{j}|x^*T(t_\nu)f_k|$$

$$\leq C\sum_{j=p_n}^{q_n}\frac{1}{j^2}\nu_k(f;x^*,l,j) + D\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}.$$

Окончателно

$$J_3 \leq C\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n}) + C\sum_{j=p_n}^{q_n}\frac{1}{j^2}\nu_k(f;x^*,l,j).$$

Обединявайки оценките на J_1, J_2, J_3 и J_4, получаваме

$$G_1 \leq C\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n}) + C\,\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln p_n$$

$$+\,C\sum_{j=p_n}^{q_n}\nu_k(f;x^*,l,j)/j^2.$$

Същата оценка се получава и за симетричния на G_1 член G_2.

От оценките на G_1, G_2 и G_3 получаваме

$$|x^*(I-S_n)f_{h,k}| \leq C\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln(e+1/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}))$$

/2.23/

$$+C\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln p_n + C\sum_{j=p_n}^{q_n}\nu_k(f;x^*,e,j)/j^2.$$

Остана да оценим израза

$$|x^* S_n(f-f_{h,k})|$$

$$=|x^*\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\rho_n} R(\lambda;A)\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{h^k}\int_0^h\int_0^h\ldots\int_0^h (T(t_1+t_2+\ldots+t_k)-I)^k f\,dt_1 dt_2\ldots dt_k\right\}d\lambda|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi h^k}\int_0^h\int_0^h\ldots\int_0^h\left|\int\limits_{|\lambda|=\rho_n} x^*R(\lambda;A)(T(t_1+t_2+\ldots+t_k)-I)^k f\,d\lambda\right|dt_1 dt_2\ldots dt_k.$$

Най-вътрешният интеграл в израза, стоящ отдясно на последното неравенство, се оценява по същия начин както и интеграла $\int\limits_{|\lambda|=\rho_n} x^*\frac{1}{\lambda^k}R(\lambda;A)f_k\,d\lambda$ и тъй като $0\leq t_i\leq h_n$, $i=1,2,\ldots,k$ то за $|x^* S_n(f_{h,k}-f)|$ се получава оценка аналогична на /2.23/. От /2.19/ и /2.23/, отчитайки казаното горе, се получава оценката /2.18/.

Теоремата е доказана.

От теорема 2.1, отчитайки определението на глобалния модул на изменение, получаваме

ТЕОРЕМА 2.2. При предложенията на теорема 2.1 за X, $T(t)$, A, k, ℓ, p_n и q_n съществува $N=N(s,A)$, такова че за всяко $n>N$ и $f\in X$ е изпълнено

$$\|(I-S_n)f\| \leqq C_1\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln(\ell+1/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}))$$

/2.24/

$$+C_2\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln p_n + C_3\sum_{j=p_n}^{q_n}\nu_k(f;\ell,j)/j^2,$$

където C_1, C_2 и C_3 не зависят от n и f.

Оценката /2.24/ е усилване на един резултат на Купцов. Действително, полагайки в /2.24/ $p_n=[(\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n})/(\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n})]$ получаваме

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Нека X, $T(t)$, k и A са както в теорема 2.1. Тогава за всеки елемент $f\in X$ и n достатъчно голямо е в сила неравенството

$$\|(I-S_n)f\| \leqq C\omega_k(f;1/\sqrt[s]{m_n})\ln\left(\ell+\frac{\sqrt[s]{m_{n+1}}+\sqrt[s]{m_n}}{\sqrt[s]{m_{n+1}}-\sqrt[s]{m_n}}\right), \quad /2.25/$$

където C не зависи от n и f.

Оценката получена от Купцов /вж. [7], стр. 157/ е подобна на /2.25/ и справедливостта ѝ е доказана при предположение, че $T(t)$ е силно непрекъсната полугрупа от оператори, такава че инфинитезималният оператор A на полугрупата има линеен ограничен десен обратен $\tilde{A}^{-1}$.

За боровските почти периодически функции [8] оценката /2.25/ е получена от Бредихина [2], [3].

§ 2.3. Достатъчни условия за сходимост на $S_n f$

В този параграф от получените оценки на $(I-S_n)f$ ще изведем условия осигуряващи сходимостта на $S_n f$ по норма в пространството X.

ТЕОРЕМА 2.3. Нека са изпълнени предположенията на теорема 2.1 за X, $T(t)$ и A. Ако за елемента $f\in X$ съществуват натурално k и реално $l>0$, такива че

а/ $$\lim_{n\to\infty} \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln(l + 1/(\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n})) = 0,$$

б/ $$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le m\le q_n} \left\{\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln m + \sum_{j=m}^{q_n} \nu_k(f; l, j)/j^2\right\} = 0,$$

където q_n е както в теорема 2.1., то $\lim_{n\to\infty}\|(I-S_n)f\| = 0$

Тази теорема се получава очевидно от оценката /2.24/.

ТЕОРЕМА 2.4. Нека са изпълнени предположенията на теорема 2.1 за X, $T(t)$ и A. Ако

/2.26/ $\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n} \geqq a > 0$ за достатъчно големи n

и ако елементът $f\in X$ е такъв, че за някое натурално k и реално $l>0$ е изпълнено

/2.27/ $$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_k(f; l, j)/j^2 < \infty,$$

то $\lim_{n\to\infty}\|(I-S_n)f\| = 0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Очевидно, условието /2.26/ осигурява изпълнението на а/ от теорема 2.3.

От друга страна, тъй като $\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \to 0$ при $n \to \infty$ то съществува редица от натурални числа p_n, $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ такава че $\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Освен това, от /2.27/ и от това, че $p_n \to \infty$ следва, че
$\sum_{j=p_n}^{\infty} v_k(f; l, j)/j^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но очевидно

$$\min_{1 \le m \le q_n} \left\{ \omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln m + \sum_{j=m}^{q_n} v_k(f; l, j)/j^2 \right\}$$

$$\le \left(\omega_k(f; 1/\sqrt[s]{m_n}) \ln p_n + \sum_{j=p_n}^{\infty} v_k(f; l, j)/j^2 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и следователно и условието б/ на теорема 2.3 е изпълнено.

Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че последните две теореми са обобщение на критериите на Чантурия [18],[19] за равномерна сходимост на реда на Фурие за случая на произволно банахово пространство с действуваща в него група от оператори.

Сега за произволен елемент $f \in X$ ще въведем понятието " k -та Φ -вариация на интервала $[-l, l]$ ".

ДЕФИНИЦИЯ 2.3. Нека $\Phi(u)$ е строго растяща функция за $u \ge 0$ и $\Phi(0)=0$. Тогава k -та Φ -вариация на интервала $[-l, l]$ на елемента $f \in X$ ще наричаме следната величина

$$V_{\Phi, l, k}(f) = \sup_{x^* \in S^*} \sup_{-l \le h_0 \le h_1 \le \dots \le h_{2m-1} \le l} \sum_{j=0}^{m-1} \Phi\left(\left| x^* T(h_{2j}) \left(T\left(\frac{h_{2j+1} - h_{2j}}{k} \right) - I \right)^k f \right| \right).$$

Ще казваме, че елементът f има ограничена k -та Φ -вариация на интервала $[-l, l]$, ако $V_{\Phi, l, k}(f) < \infty$.

Ще казваме, че елементът $f \in X$ има ограничена Φ-вариация на интервала $[-\ell, \ell]$, ако $V_{\Phi,\ell,1}(f) < \infty$.

Понятието ограничена Φ-вариация за произволен елемент от банаховото пространство X се явява абстрактен аналог на добре известното понятие ограничена Φ-вариация на функция на една реална променлива /[1], стр. 286/.

Ще свържем факта, че един елемент $f \in X$ има ограничена k-та Φ-вариация на интервала $[-\ell, \ell]$ с порядъка на растене по n на неговия k-ти модул на изменение $V_k(f; \ell, n)$. Справедлива е

ЛЕМА 2.5. Нека функцията $\Phi(u)$ е изпъкнала. Ако $f \in X$ има ограничена k-та Φ-вариация на интервала $[-\ell, \ell]$, то

$$V_k(f; \ell, n) = O\{n\, \Phi^{-1}(1/n)\},$$

където с $\Phi^{-1}(u)$ сме означили обратната функция на функцията $\Phi(u)$.

Доказателството е елементарно и с повторение на това на Чантурия в [18] за случая на реални функции и затова няма да го провеждаме.

От теорема 2.4, използвайки лема 2.5, се получава следният критерий за сходимост на $S_m f$ относно нормата на пространството X:

ТЕОРЕМА 2.5. Нека X, $T(t)$ и A са както в теорема 2.1. и $\sqrt[s]{m_{n+1}} - \sqrt[s]{m_n} \geq a > 0$ за достатъчно големи n. Ако за някои натурално k и реално $\ell > 0$, елементът $f \in X$ има ограничена k-та Φ-вариация на интервала $[-\ell, \ell]$, където функцията $\Phi(u)$ е изпъкнала и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} \|(I - S_n)f\| = 0$.

Ще отбележим, че от оценката /2.18/ на теорема 2.1 могат да се получат и условия, осигуряващи сходимост към нулата на $|x^*(I-S_n)f|$, $x^* \in X^*$, аналогични на тези от теоремите 2.3, 2.4 и 2.5, но чрез локалния k -ти модул на изменение и чрез понятието ограничена локална k -та ϕ -вариация/ определя се аналогично на локалния k -ти модул на изменение / на елемента $f \in X$. За илюстрация ще формулираме един резултат:

ТЕОРЕМА 2.6. Нека X , $T(t)$ и A са както в теорема 2.1 и $\sqrt[3]{m_{n+1}} - \sqrt[3]{m_n} \geq a > 0$ за достатъчно големи n . Ако за някои натурално k , реално $l > 0$ и функционал $x^* \in X^*$, елементът $f \in X$ е такъв, че

$$\sum_{j=1}^{\infty}{}' \nu_k(f, x^*, l, j)/j^2 < \infty,$$

то $\lim\limits_{n \to \infty} |x^*(I-S_n)f| = 0$.

Накрая ще отбележим, че ако X е пространството от непрекъснатите 2π -периодични функции $C_{2\pi}$ и $T(t)f = f(x+t)$ е групата на транслациите на правата, то инфинитезималният оператор на тази група е операторът на диференцирането d/dx . От равномерната ограниченост на групата $T(t)f = f(x+t)$ следва 1 -регулярността на оператора d/dx , а следователно и s -регулярността му за всяко натурално s . Спектърът на оператора A^2 е дискретен и се състои от точките $\{-n^2\}_1^{\infty}$, а съответен набор от собствени функции са функциите $\{\sin nx, \cos nx\}$. Тогава за произволна функция f $S_n f$, където S_n е построен по оператора $A^2 e^{i\pi/2}$, съвпада с n -тата частична сума на реда на Фурие $S[f]$ на f / по-подробно вж. [20] стр. 56–62 /. Условието /2.26/ очевидно е изпълнено и резултатите, получаващи се в този случай от теоремите 2.3, 2.4 и 2.5 са известните критерии на Чантурия [18] и Салем / [1], стр.286/. Ще отбележим, че тъй като те са точни в указания горе смисъл, то и достатъчните условия от теоремите 2.3, 2.4 и 2.5 са точни в същия смисъл.

ГЛАВА III. СХОДИМОСТ НА РЕДА НА ФУРИЕ ОТНОСНО ХАУСДОРФОВОТО РАЗСТОЯНИЕ

§ 3.1. Някои определения и помощни леми

Ще разглеждаме функции от класа $D_{2\pi}$, състоящ се от всички функции, които могат да имат прекъсвания само от I-ви род и такива, че за всяко x е в сила $(f(x)-f(x-0))(f(x)-f(x+0))\leqq 0$. За да получим достатъчни условия за хаусдорфова сходимост на реда на Фурие за функции от $D_{2\pi}$ ще въведем някои характеристики на функцията $f\in D_{2\pi}$.

Нека p /$0\leqq p\leqq\infty$/ е числото на прекъсванията на интервала $[0,2\pi)$ на функцията $f\in D_{2\pi}$. Големините на прекъсванията на интервала $[0,2\pi)$ на функцията f ще номерираме в намаляващ ред с числата

/3.1/ $\quad H_1\geqq H_2\geqq\ldots\geqq H_n\geqq\ldots$

Ако $p=\infty$, то редицата /3.1/ клони към нула, тъй като $f\in D_{2\pi}$. За натуралното число $m\leqq p$ означаваме с $0\leqq a_{1,m}\leqq a_{2,m}\leqq\ldots\leqq a_{m,m}<2\pi$ точките, в които функцията f достига своите първи m по големина прекъсвания, а с $\{H_{i,m}\}_{i=1}^{m}$ техните големини. Полагаме $a_{0,m}=a_{m,m}-2\pi$ и $a_{m+1,m}=a_{1,m}+2\pi$ и за $\delta\geqq 0$ означаваме

$$\omega_i(f;\delta,m)=\sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in(a_{i,m},a_{i+1,m}),\ |x-y|\leqq\delta\},\quad i=0,1,\ldots,m.$$

За произволни $\delta>0$ и цяло $m\geqq 0$ определяме следната характеристика на функцията $f\in D_{2\pi}$, приличаща по свойства на модула на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$:

$$\omega(f;\delta,m)=\begin{cases}\omega(f;\delta) & \text{при} \quad p=0 \quad \text{и} \quad m \quad \text{произволно},\\ \omega(f;\delta) & \text{при} \quad m=0,\\ \max\limits_{0\le i\le m} \omega_i(f;\delta,m) & \text{при} \quad 1\le m\le p,\\ \max\limits_{0\le i\le p} \omega_i(f;\delta,p) & \text{при} \quad m>p\ge 1.\end{cases}$$

Ще казваме, че редицата от натурални числа $\{m_n\}_1^\infty$ изчерпва числото на прекъсванията p $/ 0\le p\le\infty /$ на функцията $f\in D_{2\pi}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} m_n \ge p$. Справедлива е

ЛЕМА 3.1. Нека $f\in D_{2\pi}$ и $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ е произволна редица от цели неотрицателни числа. За да е изпълнено, че

$$\lim_{n\to\infty} \omega(f;\delta_n,m_n)=0$$

при всеки избор на редицата $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, необходимо и достатъчно е редицата $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ да изчерпва числото на прекъсванията на функцията f.

Д о к а з а т е л с т в о. Необходимостта е очевидна.

Достатъчност. Ще разгледаме случая $p=\infty$. Ако p е крайно, то твърдението е очевидно.

Нека $p=\infty$. Да допуснем противното, т.е. че съществуват редици $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$, $\delta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, $m_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и реално число $\alpha>0$, такива че

$$\omega(f;\delta_k,m_k)>\alpha, \quad k=1,2,\dots$$

Тогава от определението на $\omega(f;\delta,m)$ следва, че за всяко k съществува i_k $/ 0\le i_k\le m_k /$, такова че

$$\omega_{i_k}(f, \delta_k, m_k) \geqq d\,, \quad k=1,2,\dots$$

Следователно съществуват точки $x_k, y_k \in (a_{i_k, m_k}, a_{i_k+1, m_k})$, $x_k < y_k$, $y_k - x_k \leqq \delta_k$, такива че

$$/3.2/ \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \geqq d, \; k=1,2,\dots$$

От ограничената редица $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ избираме сходяща подредица $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $x_{k_j} \to x_0$ при $j \to \infty$. Тъй като $|x_k - y_k| \leqq \delta_k$ и $\delta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ то и $y_{k_j} \to x_0$ при $j \to \infty$. При това може да смятаме, че подредицата $\{x_{k_j}\}_1^{\infty}$ е избрана така, че и двете редици $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ да са монотонни.

Имаме следните възможности за разположение на точката x_0 спрямо точките x_{k_j} и y_{k_j}

а/ $x_{k_j} < y_{k_j} \leqq x_0$ или $x_0 \leqq x_{k_j} < y_{k_j}$ за $j=1,2,\dots$ Тогава от /3.2/ следва, че в точката x_0 функцията f има прекъсване от II-ри род, което противоречи на това че $f \in D_{2\pi}$.

б/ $x_{k_j} \leqq x_0 \leqq y_{k_j}$, $j=1,2,\dots$ Тогава от /3.1/ следва, че съществува N, такова че за всяко $j \geqq N$ е изпълнено $H_{k_j} \leqq d/2$. Следователно, за всяко фиксирано $s \geqq N$ в интервала $(a_{k_s, m_{k_s}}, a_{k_s+1, m_{k_s}})$ функцията f не може да има прекъсвания с големина по-голяма от $d/2$. Тъй като за $j > s$ точките x_{k_j}, y_{k_j} и x_0 се съдържат в интервала $(a_{k_s, m_{k_s}}, a_{k_s+1, m_{k_s}})$, то в точката x_0 функцията f не може да има прекъсване с големина по-голяма от $d/2$. Но след граничен преход в /3.2/ при $k_j \to \infty$ получаваме

$$|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)| \geqq d.$$

Получихме противоречие.

Лемата е доказана.

ДЕФИНИЦИЯ 3.1. За функцията $f \in D_{2\pi}$, имаща p /$0 \le p \le \infty$ прекъсвания на интервала $[0, 2\pi)$ и за цялото число $m \geqq 0$ определяме

$$l(f;m) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } p=0 \text{ и } m \text{ произволно,} \\ 2\pi & \text{при } m=0, \\ \min\limits_{0 \le i \le m} a_{i+1,m} - a_{i,m} & \text{при } 1 \leqq m \leqq p, \\ \min\limits_{0 \le i \le p} a_{i+1,p} - a_{i,p} & \text{при } 1 \leqq p < m. \end{cases}$$

Очевидно, ако $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ са такива, че $\alpha\delta < l(f;m)$, то е в сила

/3.3/ $$\omega(f;\alpha\delta, m) \leqq (1+\alpha)\, \omega(f;\delta, m).$$

Отчитайки спецификата на хаусдорфовото разстояние и факта, че за редовете на Фурие от прекъснати функции се наблюдава ефект на Гибс / [1] , стр. 123/, то естествено е следното допълване на графиката $\{x, f(x)\}$ на функцията $f \in D_{2\pi}$:

ДЕФИНИЦИЯ 3.2. За функцията $f \in D_{2\pi}$ под допълнена по Гибс графика Φ_f ще разбираме множеството

$$\Phi_f = \{(x,y): -\infty < x < \infty ,\ J(f;x) \leqq y \leqq S(f;x)\},$$

където

$$J(f;x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} - \Gamma \frac{|f(x-0)-f(x+0)|}{2},$$

/3.4/ $$S(f;x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} + \Gamma \frac{|f(x-0)-f(x+0)|}{2},$$

а с $\Gamma = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ сме означили константата на Гибс.

Ще определим още изразите $T_{m,k}(f;x)$ и $Q_{m,k}(f;x)$ които са обобщение на изразите $T_m(x)$ и $Q_m(x)$ въведени от Салем /[1], стр. 283/.

ДЕФИНИЦИЯ 3.3. За функцията $f \in D_{2\pi}$ и за натуралните числа k и n, $k \leqq n$ определяме

$$T_{n,k}(f;x) = \sum_{i=k}^{n}{}' (f(x+(i-1)\pi/n) - f(x+i\pi/n))/i \quad \text{за } k \text{ и } n \text{ нечетни,}$$

$$T_{n,k}(f;x) = \sum_{i=k}^{n-1}{}' (f(x+(i-1)\pi/n) - f(x+i\pi/n))/i \quad \text{за } n \text{ четно и } k \text{ нечетно,}$$

$$T_{n,k}(f;x) = T_{n,k+1}(f;x) \quad \text{за четно } k \text{ и } n \text{ произволно,}$$

където $\sum{}'$ означава, че суматорният индекс i пробягва само нечетните числа. Изразите $Q_{n,k}(f;x)$ се получават като навсякъде в изразите $T_{n,k}(f;x)$ заменим π с $-\pi$.

За функцията $f \in D_{2\pi}$, имаща p $/1 \leqq p \leqq \infty$ / прекъсвания на интервала $[0, 2\pi)$ и за натуралното число $m \leqq p$ означаваме за $x \in [0, 2\pi)$ и $i = 1, 2, \ldots, m$

$$f_i(a_{i,m}, x) = \begin{cases} f(x) & \text{за } x < a_{i,m} \\ f(a_{i,m}-0) & \text{за } x = a_{i,m} \\ f(x) \pm H_{i,m} & \text{за } x > a_{i,m}, \end{cases} \tag{3.5}$$

където знакът пред $H_{i,m}$ съвпада със знака на разликата $f(a_{i,m}-0) - f(a_{i,m}+0)$. Функциите $f_i(a_{i,m}, x)$ продължаваме периодически на цялата права.

За облекчаване на доказателството на основното твърдение ще докажем следната

ЛЕМА 3.2. Нека $f \in D_{2\pi}$, $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $m(n) \geqq 0$ и $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $k(n) \geqq 1$ са редици от цели числа, такива че $\pi k(n)/n \leqq l(f; m(n))/2$ и редицата $\{\varepsilon(n)\}_{n=1}^{\infty}$ е такава, че $\pi/n \leqq \varepsilon(n) \leqq l(f; m(n))/2$. Тогава

1° Ако $x \in [0, 2\pi)$ и $|x - a_{i,m(n)}| \geqq \varepsilon(n)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, m(n)+1$, то за всяко y, такова че $(x,y) \in \Phi_f$, е изпълнено неравенството

$$|y - S_n(f;x)|$$

/3.6/
$$\leqq \frac{1}{\pi} \| T_{n,k(n)}(f,x) \|_C + \frac{1}{\pi} \| Q_{n,k(n)}(f,x) \|_C + C_1 \omega(f; \tfrac{1}{n}, m(n)) \ln k(n)$$

$$+ C_2 M / k(n) + C_3 H_1 / (\varepsilon(n) n) + C_4 M \omega_L(f, 1/n)$$

$$= W(f; n, k(n), m(n), \varepsilon(n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

където $M = \|f\|_C$, $\omega_L(f;\delta)$ е интегралния модул на непрекъснатост /вж. [1], стр. 51/ и C_1, C_2, C_3 и C_4 са абсолютни константи.

2° Ако $x \in [0, 2\pi)$ и $|x - a_{i,m(n)}| \leqq \varepsilon(n)$ за някое i $/0 \leqq i \leqq m(n)+1$ /, то за всяко x, такова че $(x,y) \in \Phi_{f_i}$, е изпълнено неравенството

/3.7/ $$|y - S_n(f_i; x)| \leqq W(f; n, k(n), m(n), \varepsilon(n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Д о к а з а т е л с т в о. За облекчаване на записването, навсякъде в доказателството абсолютните константи ще означаваме с C.

Ще докажем твърдението 1°.

Нека $x \in [0, 2\pi)$ и $n \geqq 1$ са фиксирани. Ще отбележим, че за модула на непрекъснатост на функцията f на интервала $(x-\varepsilon(n),\ x+\varepsilon(n)) = \Delta_1$ е справедлива оценката

/3.8/ $$\omega(f;\Delta_1,\delta) \leqq 2\omega(f;\delta, m(n)),$$

тъй като $\varepsilon(n) \leqq l(f; m(n))/2$, а за модула на непрекъснатост на f на интервала $[x-l(f,m(n))/2,\ x+l(f;m(n))/2] = \Delta_2$ – оценката

/3.9/ $$\omega(f;\Delta_2,\delta) \leqq 2\omega(f;\delta, m(n)) + 2H_1,$$

тъй като в интервала Δ_2 може да се съдържа най-много един от първите $m(n)$ по големина прекъсвания на функцията f.

Нека y е такова, че $(x,y) \in \Phi_f$. Тогава

$$|y - S_n(f;x)| \leqq |y - f(x)| + |f(x) - S_n(f;x)|$$

/3.10/

$$\leqq 2(1+\Gamma)\omega(f;1/n, m(n)) + |f(x) - S_n(f;x)|.$$

От локализационната теорема на Риман /вж. [1], стр. 110 и [21] / имаме

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+t) - f(x)\}\frac{\sin nt}{t}dt\right| + CM\omega_L(f;1/n)$$

/3.11/

$$\leqq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{0}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right| + CM\omega_L(f;1/n),$$

където $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x)$. Ще преработим първия интеграл, стоящ в дясната страна на /3.11/, по начин подобен на този на Салем от [1] стр. 283. Имаме

$$\left|\int_0^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|$$

/3.12/ $$\leq\left|\int_0^{\pi/n}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|+\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|$$

$$\leq C\,\omega(f;1/n,m(n))+\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|$$

понеже $\pi/n\leq\varepsilon(n)$ /вж. /3.8//.

Интеграла в дясната част на /3.12/ преработваме

$$J_n=\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|=\left|\sum_{i=1}^{n-1}\int_{i\pi/n}^{(i+1)\pi/n}\psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n-2}\int_{\pi/n}^{2\pi/n}\psi_x\left(t+\frac{i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i\sin nt}{t+i\pi/n}dt\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n-2}\int_{\pi}^{2\pi}\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i\sin u}{u+i\pi}du\right|$$

$$\leq\pi\sup_{\pi\leq u\leq 2\pi}\left|\sum_{i=0}^{n-2}\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i}{u+i\pi}\right|.$$

В последната сума имаме $n-1$ на брой членове. Ако n е нечетно, то ние ще можем да ги групираме по двойки, а ако ли n е четно, то ще разгледаме сумата само до $i=n-3$, а последния член ще оценим по абсолютна величина с $2M\pi/n$. По-нататък оценките ще правим без да губим общност, считайки че n е нечетно.

За $\pi \leq u \leq 2\pi$ имаме

$$\left|\sum_{i=0}^{n-2} \psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{(-1)^i}{u+i\pi}\right|$$

/3.13/
$$=\left|\sum_{i=0}^{n-2}{}' \left\{\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)\frac{1}{u+i\pi} - \psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right\}\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=0}^{n-2}{}' \frac{\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)}{u+i\pi}\right| + \left|\sum_{i=0}^{n-2}{}' \psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{u+i\pi}-\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right)\right|,$$

където тук и навсякъде по-нататък $\sum'$ означава, че сумарният индекс i пробягва само четните числа.

Ще отбележим, че $1/(u+i\pi) - 1/(u+(i+1)\pi) \leq 1/(i+1)^2$

за $\pi \leq u \leq 2\pi$. Тогава, полагайки за краткост $q(n) = [\varepsilon(n)m/\pi] - 3$ и имайки предвид /3.3/, /3.8/ и /3.9/, получаваме

$$\left|\sum_{i=0}^{n-2}{}' \psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{u+i\pi}-\frac{1}{u+(i+1)\pi}\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-2}{}' \left|\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{q(n)-1} + \sum_{i=q(n)}^{r(n)-3} + \sum_{i=r(n)-2}^{n-2}$$

/3.14/

$$\leq \sum_{i=0}^{q(n)-1} 2\omega\left(f;\frac{(i+3)\pi}{n}, m(n)\right)\frac{1}{(i+1)^2} + \sum_{i=q(n)}^{r(n)-3}\left\{2\omega\left(f;\frac{(i+3)\pi}{3}, m(n)\right)+2H_1\right\}\frac{1}{(i+1)^2}$$

$$+2M\sum_{i=k(n)-2}^{m-2} 1/(i+1)^2$$

$$\leq C\omega(f;1/n,m(n))\left\{\sum_{i=0}^{q(n)-1}\frac{1}{i+1}+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}\frac{1}{i+1}\right\}+CH_1/q(n)+CM/k(n)$$

$$\leq C\omega(f;1/n,m(n))\ln k(n)+CH_1/(\varepsilon(n)n)+CM/k(n).$$

Ще направим последно преобразование, а именно в първия член отдясно на /3.13/ ще заменим $1/(u+i\pi)$ с $1/(i+1)\pi$. Получаваме

$$\left|\sum_{i=0}^{m-2}{}'\left\{\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right\}\frac{1}{u+i\pi}\right|$$

$$\leq\sum_{i=0}^{k(n)-3}\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\frac{1}{u+i\pi}+\left|\sum_{i=k(n)-2}^{m-2}{}'\left\{\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right\}\frac{1}{(i+1)\pi}\right|$$

$$+\sum_{i=k(n)-2}^{m-2}\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\left(\frac{1}{(i+1)\pi}-\frac{1}{u+i\pi}\right)=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Тъй като $1/\pi(i+1)-1/(u+i\pi)\leq 1/(i+1)^2$ за $\pi\leq u\leq 2\pi$ и $\left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|=\left|f\left(x+\frac{u+i\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|$, то имайки отново предвид /3.3/, /3.8/ и /3.9/ получаваме

$$\sigma_1=\sum_{i=0}^{q(n)-1}+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}\leq\sum_{i=0}^{q(n)-1}2\omega(f;\pi/n,m(n))/i+2H_1/q(n)$$

$$+\sum_{i=q(n)}^{k(n)-3}2\omega(f;\pi/n,m(n))/i\leq C\omega(f;1/n,m(n))\ln k(n)+CH_1/(\varepsilon(n)n),$$

/3.15/

$$/3.16/\quad \sigma_3 \leq \sum_{k(n)-2}^{n-2} \left|\psi_x\left(\frac{u+i\pi}{n}\right)-\psi_x\left(\frac{u+(i+1)\pi}{n}\right)\right|\frac{1}{(i+1)^2} \leq CM/k(n),$$

$$/3.17/\quad \sigma_2 \leq \left|T_{m,k(n)}\left(f, x+\frac{u}{n}\right)\right| + CM/k(n) \leq \|T_{m,k(n)}(f)\|_C + CM/k(n).$$

От оценките /3.12/ – /3.17/ получаваме

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_x(t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\,\|T_{m,k(n)}(f)\|_C$$

/3.18/

$$+\,C\omega(f; 1/n, m(n))\ln k(n) + CM/k(n) + CH_1/(\varepsilon(n)n).$$

По аналогичен начин се оценава и $\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \psi_x(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|$. За него се получава оценката /3.18/, но вместо $\|T_{n,k(n)}(f)\|_C$ участва члена $\|Q_{m,k(n)}(f)\|_C$.

От /3.18/, имайки предвид /3.10/ и /3.11/, се получава твърдението 1° на лемата.

Твърдението 2° на лемата се доказва аналогично.

Лемата е доказана.

§ 3.2. Основни резултати

Ще припомним определението на хаусдорфовото разстояние между две точкови съвкупности [15] .

ДЕФИНИЦИЯ 3.4. Нека F и G са две точкови съвкупности в равнината, 2π -периодически по оста x , ограничени и затворени. Под хаусдорфово разстояние с параметър α между F и G ще разбираме числото

$$\tau(F,G;\alpha)=\max\left\{\max_{(x,y)\in F}\ \min_{(\xi,\eta)\in G}\ \max\left(\frac{1}{\alpha}|x-\xi|,\ |y-\eta|\right),\right.$$

$$\left.\max_{(x,y)\in G}\ \min_{(\xi,\eta)\in F}\ \max\left(\frac{1}{\alpha}|x-\xi|,\ |y-\eta|\right)\right\}.$$

Ако точковата съвкупност F е графиката $(x, f(x))$ на непрекъснатата функция $f\in C_{2\pi}$, то под $\tau(f,G;\alpha)$ ще разбираме $\tau(F,G;\alpha)$. В аналогичен смисъл ще употребяваме и означенията $\tau(G,f;\alpha)$ и $\tau(f,g;\alpha)$.

ЛЕМА 3.3. /вж. [15], стр. 145/ Нека F и G са 2π -периодични по оста x . Ако

1° за всяка точка $A=(x,y)\in F$, $x\in[0,2\pi)$, съществува точка $B=(\xi,\eta)\in G$, $-\infty<\xi<\infty$, такава че $\tau(A,B;\alpha)\leq\delta$ и

2° за всяка точка $A=(x,y)\in G$, $x\in[0,2\pi)$, съществува точка $B=(\xi,\eta)\in F$, $-\infty<\xi<\infty$, такава че $\tau(A,B;\alpha)\leq\delta$, то $\tau(F,G;\alpha)\leq\delta$.

Ще формулираме още едно твърдение, което е добре известно /вж. свитъка от проблеми и хипотези 1972 г. на семинара по теория на апроксимациите с ръководител чл.кор. Бл. Сендов/

ЛЕМА 3.4. Нека

$$h(a,x) = \begin{cases} 0 & \text{за } a-\pi < x \leq a \\ H & \text{за } a < x \leq a+\pi \quad , \quad H>0 \end{cases}$$

и $h(a,x)$ е продължена на $(-\infty,\infty)$ с период 2π. Тогава

$$\tau(\phi_h, S_m(h), 1) \leq CH/\sqrt{m},$$

/3.19/ $$|S_m(h; a-\pi/m) + (\Gamma-1)H/2| \leq CH/\sqrt{m},$$

$$|S_m(h; a+\pi/m) - (\Gamma+1)H/2| \leq CH/\sqrt{m},$$

където C е абсолютна константа, а $\Gamma = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Ще формулираме и докажем нашето основно твърдение:

ТЕОРЕМА 3.1. Нека $f \in D_{2\pi}$, $\alpha > 0$, $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ са две редици от цели неотрицателни числа, такива че $k(n)\pi/n \leq \ell(f; m(n))/2$ и редицата $\{\varepsilon(n)\}_{n=1}^{\infty}$ е такава, че $\pi/n \leq \alpha\,\varepsilon(n) \leq \ell(f; m(n))/2$. Тогава

$$\tau(\phi_f, S_n(f); \alpha) \leq \max\Big\{\varepsilon(n), \frac{1}{\pi}\|T_{n,k(n)}(f)\|_C$$

/3.20/ $$+\frac{1}{\pi}\|Q_{n,k(n)}(f)\|_C + C_1\,\omega(f; \tfrac{1}{n}, m(n))\ln k(n) + C_2 M/k(n)$$

$$+ C_3 H_1/(\alpha\,\varepsilon(n) n) + C_4 M \omega_1(f; \tfrac{1}{n}) + \omega(f; \alpha\,\varepsilon(n), m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}\Big\},$$

където C_i, $i=1,2,\ldots,5$ са абсолютни константи и $M = \|f\|_C$.

Доказателство. Нека $n \geqslant 1$ е фиксирано. Да означим с U съвкупността от точките $x \in [0, 2\pi)$, такива че $|x - a_{i,m(n)}| \geqslant \alpha\,\varepsilon(n)$ за всяко $i = 0, 1, 2, \ldots, m(n)+1$, а с V съвкупността от точките $x \in [0, 2\pi)$, такива че $|x - a_{i,m(n)}| \leqq \alpha\,\varepsilon(n)$ за някое i /$0 \leqq i \leqq m(n)+1$/.

Очевидно $U \cup V = [0, 2\pi)$.

Отначало за всички точки от U ще докажем, че са изпълнени условията 1° и 2° на лема 3.3 с $\delta = W(f; n, k(n), m(n), \alpha\,\varepsilon(n))$ /вж. /3.6//. След това ще докажем същото и за всички точки от V с $\delta = \max\{\varepsilon(n), W(f; n, k(n), m(n), \alpha\,\varepsilon(n)) + \omega(f; \alpha\,\varepsilon(n), m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}$

/ще използваме /3.7//. Тогава от лема 3.3 ще следва твърдението на теоремата.

Нека $x \in U$. Тогава от лема 3.2 случай 1° получаваме, че за точката $A = (x, S_n(f; x))$ и за всяка точка $(x, y) \in \Phi_f$, $(x, y) = B$ е изпълнено

$$\tau(A, B; \alpha) \leqq |S_n(f; x) - y| \leqq W(f; n, k(n), m(n), \alpha\,\varepsilon(n)).$$

В последното неравенство се съдържа всичко, което искахме да получим за точките от U.

Нека $x \in V$ и е фиксирано, т.е. $x \in [0, 2\pi)$ и $|x - a_{i,m(n)}| \leqq \alpha\,\varepsilon(n)$ за някое i /$0 \leqq i \leqq m(n)+1$/. Без да ограничаваме общността на доказателството ще смятаме, че

$$f(a_{i,m(n)} - 0) < f(a_{i,m(n)} + 0).$$

Означаваме

$$h_i(a_{i,m(n)}, t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t < a_{i,m(n)}, \\ f(a_{i,m(n)}) - f(a_{i,m(n)} - 0) & \text{за } t = a_{i,m(n)}, \\ H_{i,m(n)} & \text{за } t > a_{i,m(n)}, \end{cases}$$

Тогава $f(t) = f_i(a_{i,m(n)}, t) + h_i(a_{i,m(n)}, t)$ / за определението на $f_i(a_{i,m(n)}, t)$ вж. /3.5//.

Ако $a_{i,m(n)} - \alpha\varepsilon(n) \leqq t \leqq a_{i,m(n)}$, то от лема 3.2 и лема 3.4 получаваме /вж. /3.4//

$$S_n(f;t) - S(f;a_{i,m(n)})$$

/3.21/
$$= \big(S_n(f_i;t) - f_i(a_{i,m(n)}, t)\big) + \big(f_i(a_{i,m(n)}, t) - f(a_{i,m(n)} - 0)\big)$$

$$+ \big(S_n(h_i;t) + (\Gamma - 1) H_{i,m(n)}/2\big)$$

$$\geqq - W(f;n, k(n), m(n), \alpha\varepsilon(n)) - \omega(f;\alpha\varepsilon(n), m(n)) - C_5 H_1/\sqrt{n}.$$

Ако $a_{i,m(n)} < t \leqq a_{i,m(n)} + \alpha\varepsilon(n)$, то оценката /3.21/ се получава още по-просто.

Аналогично за $a_{i,m(n)} - \alpha\varepsilon(n) \leqq t \leqq a_{i,m(n)} + \alpha\varepsilon(n)$ се получава и следната оценка отгоре

$$S(f;a_{i,m(n)}) - S_n(f;t)$$

/3.22/

$$\leqq W(f;n, k(n), m(n), \alpha\varepsilon(n)) + \omega(f;\alpha\varepsilon(n), m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}.$$

От /3.21/ и /3.22/ следва, че съществува точка $B = (a_{i,m(n)}, y) \in \Phi_f$, такава че за точката $A = (x, S_n(f;x))$, $x \in V$ е изпълнено

$$\tau(A, B; \alpha) \leqq \max\{\varepsilon(n),\ W(f;n, k(n), m(n), \alpha\varepsilon(n))$$

/3.23/

$$+ \omega(f;\alpha\varepsilon(n), m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}\}.$$

Сега ще сменим местата на $S_n(f;x)$ и Φ_f, т.е. за фиксирана точка $(x,y)\in\Phi_f$, $x\in V$ ще намерим точка от графиката $(t, S_n(f;t))$, която да е близка в хаусдорфов смисъл до (x,y).

Нека $x\in V$ и i е такова, че $|x-a_{i,m(n)}|\leq \alpha\,\varepsilon(n)$

От /3.19/ получаваме, че за точките $z_1 = a_{i,m(n)} - \pi/n$ и $z_2 = a_{i,m(n)} + \pi/n$ са изпълнени неравенствата

$$|S_n(f;z_1) - J(f;a_{i,m(n)})| \leq |S_n(f_i;z_1) - f_i(z_1)|$$

/3.24/
$$+|f_i(z_1) - f(a_{i,m(n)}-0)| + |S_n(h_i;z_1) - (\Gamma-1)H_{i,m(n)}/2|$$

$$\leq W(f;n,k(n),m(n),\alpha\,\varepsilon(n)) + \omega(f;\pi/n,m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}$$

и

$$|S_n(f;z_2) - S(f;a_{i,m(n)})|$$

/3.25/

$$\leq W(f;n,k(n),m(n),\alpha\,\varepsilon(n)) + \omega(f;\pi/n,m'(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n},$$

Отчитайки че $S_n(f;t)$ е непрекъсната, то от /3.24/ и /3.25/ получаваме, че за точката $A=(x,y)\in\Phi_f$ съществува точка $B=(\xi, S_n(f;\xi))$, такава че $|x-\xi|\leq\alpha\,\varepsilon(n)$ и

$$|y - S_n(f;\xi)| \leq W(f;n,k(n),m(n),\alpha\,\varepsilon(n)) + \omega(f;\pi/n,m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}.$$

Следователно

/3.26/
$$\tau(A,B;\alpha) \leq \max\{\varepsilon(n), W(f;n,k(n),m(n),\alpha\,\varepsilon(n))$$

$$+\omega(f;\alpha\,\varepsilon(n),m(n)) + C_5 H_1/\sqrt{n}\}.$$

От /3.23/ и /3.26/ следва, че за всяко $x \in V$ са изпълнени условията 1° и 2° на лема 3.3.

Теоремата е доказана.

От получената оценка /3.20/ на $\tau(\varphi_f, S_n(f); \alpha)$ получаваме

ТЕОРЕМА 3.2. Нека $f \in D_{2\pi}$ и $\alpha > 0$. Ако съществуват редица от цели числа $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $m(n) \geq 0$ и редица $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi(n) > 0$, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, такива че $l(f; m(n))n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

/3.27/ $$\lim_{n\to\infty} \|T_{n,k(n)}(f)\|_C = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|Q_{n,k(n)}(f)\| = 0,$$

където

/3.28/ $$k(n) = \min\{[n\, l(f; m(n))/2\pi], [\exp(\varphi(n)/\omega(f; 1/n, m(n)))]\},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\varphi_f, S_n(f); \alpha) = 0.$

Д о к а з а т е л с т в о. Ще отбележим, че ако функцията f има поне едно прекъсване, то за да са изпълнени условията /3.27/ е необходимо $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогава от определението на $k(n)$ /вж. /3.28// се вижда, че $\omega(f; 1/n, m(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и следователно редицата $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ изчерпва числото на прекъсванията на функцията f. Тогава от лема 3.1 получаваме, че $\omega(f; \delta_n, m(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при всеки избор на $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ако ли f е непрекъсната и са изпълнени условията на теоремата, то винаги можем да намерим друга редица $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, такава че $k(n) \to \infty$ и условията на теоремата пак да бъдат изпълнени/ например $\varphi(n) = (\omega(f; 1/n))^{1/2}$ /.

В оценката /3.20/ на $\tau(\varphi_f, S_n(f); \alpha)$ полагаме

$\varepsilon(n) = l(f; m(n))/2\alpha$, ако числото на прекъсванията p на интервала $[0, 2\pi)$ на функцията f е равно на ∞ и $\varepsilon(n)=\pi/(\alpha\sqrt{n})$, ако $p<\infty$. Тъй като $l(f; m(n))n \longrightarrow \infty$ при $n \to \infty$, то за n достатъчно голямо $\alpha\,\varepsilon(n)$ удовлетворява условията на теорема 3.1, $\varepsilon(n) \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$ и $1/(\alpha\,\varepsilon(n)n) \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

Получихме, че всички членове отдясно на /3.20/ при надлежащ избор на редиците $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon(n)\}_{n=1}^{\infty}$, се стремят към 0.

Теоремата е доказана.

Като следствие от теорема 3.2 при

$\varphi(n)=\omega(f; 1/n, m(n))\ln n \longrightarrow 0$ се получава следният аналог на критерия на Дини-Липшиц за хаусдорфова сходимост на $S_n(f; x)$ за функции от $D_{2\pi}$:

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Ако съществува редица от цели числа $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $m(n)\geqslant 0$, такава че за функцията $f\in D_{2\pi}$ са изпълнени условията

/3.29/ $\lim\limits_{n\to\infty} n\, l(f; m(n)) =\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f; 1/n, m(n)) \ln n =0$,

то $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\Phi_f, S_n(f); \alpha)=0$.

ЗАБЕЛЕЖКА 3.1. Тъй като за всеки две непрекъснати функции f и g е изпълнено /вж. [15], [25] /

/3.30/ $\|f-g\|_C \leqq \tau(f, g; \alpha) + \omega(f; \tau(f,g;\alpha)\alpha)$,

то ако за функцията $f\in C_{2\pi}$ имаме, че $\tau(\Phi_f, S_n(f); \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то понеже $\Phi_f=\{(x, f(x))\}$ и $\omega(f;\delta)\longrightarrow 0$ при $\delta\to 0$, то и $\|f-S_n(f)\|_C \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$. Т.е. от това че редицата от частичните суми $S_n(f; x)$ на реда на Фурие $S[f]$ на непрекъснатата функция f е хаусдорфово сходяща към f следва, че тя е и равномерно сходяща към f .

ЗАБЕЛЕЖКА 3.2. Ако $f \in C_{2\pi}$, то първото от условията /3.29/ е винаги изпълнено, тъй като $l(f;m)=2\pi$ за всяко m /вж. дефиниция 3.1/. Освен това, ако $f \in C_{2\pi}$, то $\omega(f;\delta,m)=\omega(f;\delta)$ за произволни m и δ .

Отчитайки забележките 3.1 и 3.2 получаваме, че следствие 3.1 съдържа в себе си критерия на Дини-Липшиц за равномерна сходимост на реда на Фурие /[1] , стр.280/.

От теорема 3.2 се получава и известната теорема на Салем /[1] , стр. 283/

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Ако $f \in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{n,1}(f)\|_C = 0 , \quad \lim_{n\to\infty} \|Q_{n,1}(f)\|_C = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(f;x)-f(x)\|_C = 0.$

Д о к а з а т е л с т в о. Ще покажем, че за функцията f са изпълнени условията на теорема 3.2.

Тъй като $l(f;m(n))=2\pi$ и $\omega(f;1/n,m(n))=\omega(f;1/n)$ / $f \in C_{2\pi}$ /, то редицата $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ може да изберем произволно.

Полагаме $\varphi(n)=(\omega(f;1/n))^{1/2}$. Очевидно $\varphi(n)\to 0$

$$k(n) \leq \exp(\omega(f;1/n)^{-1/2})$$

. Следователно

$\omega(f;1/n)\ln k(n) \leq \omega(f;1/n)^{1/2} \to 0$. Освен това за x произволно получаваме

$$\|T_{n,1}(f)\|_C \geq \Big|T_{n,k(n)}(f;x)\Big| - \sum_{i=1}^{k(n)} |f(x+i\pi/n)-f(x+(i+1)\pi/n)|/i$$

$$\geq \Big|T_{n,k(n)}(f;x)\Big| - C\,\omega(f;1/n)\ln k(n) \geq \Big|T_{n,k(n)}(f;x)\Big| - C(\omega(f;1/n))^{1/2}.$$

Следователно за така избраното $\varphi(n)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_{n,k(n)}(f)\|_C=0.$

Аналогично се получава, че и $\lim\limits_{n\to\infty}\|Q_{n,k(n)}(f)\|_C=0.$

Следователно $\tau(\Phi_f, S_n(f);L)=\tau(f,S_n(f);L)\to 0$ при $n\to\infty$.

Тогава от /3.30/ получаваме твърдението на следствието.

§ 3.3. Достатъчни условия за сходимост на реда на Фурие относно хаусдорфовото разстояние

Ще припомним определенията на някои характеристики на функциите:

ДЕФИНИЦИЯ 3.5.[18] Модул на изменение $\nu(f;n)$ на 2π-периодичната функция f определяме като

$$\nu(f;n) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})| , \quad n = 1, 2, \ldots,$$

където $\sup$ се взима по всевъзможните разделяния на интервала $[0, 2\pi)$ с точките $0 \leq x_0 < x_1 \leq x_2 < x_3 \leq \ldots \leq x_{2n-2} < x_{2n-1} < 2\pi$ при n фиксирано.

ДЕФИНИЦИЯ 3.5'. [23] За всяка 2π-периодична функция f определяме

$$\varkappa(f;n) = \sup_{0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| .$$

Не е трудно да се види, че $\nu(f;n)$ и $\varkappa(f;n)$ за всяка функция f имат еднакъв порядък на растеж. Поради това твърденията ще формулираме само чрез модула на изменение $\nu(f;n)$.

Ще припомним/ вж. [19] /, че необходимо и достатъчно условие функцията f да има само прекъсвания от I-ви род е $\nu(f;n) = o(n)$ при $n \to \infty$. Следователно за всяка функция от $D_{2\pi}$ е изпълнено $\nu(f;n) = o(n)$.

ДЕФИНИЦИЯ 3.6./ [1] , стр. 287 / Нека $\Phi(u)$ е строго растяща функция за $u \geq 0$ и $\Phi(0) = 0$. Ще казваме, че 2π -периодичната функция f има ограничена Φ -вариация и ще пишем $f \in V_\Phi$, ако

$$V_\phi(f) = \sup_{-\infty<a<\infty} \sup_{\Pi_a} \sum_{i=0}^{m-1} \phi(|f(x_{i+1}) - f(x_i)|) < \infty,$$

където $\Pi_a = \{a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq a+2\pi\}$ и m – произволно.

Ще отбележим, че функциите от V_ϕ могат да имат само прекъсвания от I-ви род. Лесно се доказва /вж. [18] /, че ако $\phi(u)$ е изпъкнала и $f \in V_\phi$, то

/3.31/ $$\nu(f;n) = O\{n\,\phi^{-1}(1/n)\},$$

където с ϕ^{-1} сме означили обратната функция на функцията ϕ

Ще покажем следната

ТЕОРЕМА 3.3. Нека $f \in D_{2\pi}$ и $\alpha > 0$. Ако съществуват редица от цели числа $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $m(n) \geq 0$ и редица $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi(n) > 0$ $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, такива че

/3.32/ $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=k(n)}^{n} \nu(f;i)/i^2 = 0,$$

където $k(n) = \min\{[n\,l(f;m(n))], [\exp(\varphi(n)/\omega(f;1/n, m(n)))]\}$,

то $\lim_{n\to\infty} \tau(\phi_f, S_n(f); \alpha) = 0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Ще покажем, че ако за функцията $f \in D_{2\pi}$ е изпълнено /3.32/ за някакви редици $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ то за нея са изпълнени условията на теорема 3.2 за същите редици $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Действително, ако $f \not\equiv const$, то за да е изпълнено /3.32/ очевидно трябва $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Следователно от определението на $k(n)$ получаваме $n\,l(f;m(n)) \to \infty$ при $n \to \infty$.

От друга страна нека точката $x \in [0, 2\pi)$ е произволна и фиксирана. След преобразование на Абел в израза за $T_{n,k(n)}(f;x)$ получаваме

$$|T_{n,k(n)}(f;x)| \leq \sum_{i=k(n)}^{n} |f(x+(i-1)\pi/n) - f(x+i\pi/n)|/i$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=k(n)}^{n} |f(x+(i-1)\pi/n) - f(x+i\pi/n)| + \sum_{j=k(n)}^{n-1}\frac{1}{j^2}\sum_{i=k(n)}^{j} \left|f\left(x+\frac{(i-1)\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{i\pi}{n}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}(\nu(f;n)+2M) + \sum_{j=k(n)}^{n}\frac{1}{j^2}(\nu(f;j)+2M)$$

$$\leq \nu(f;n)/n + CM/k(n) + \sum_{j=k(n)}^{n}\nu(f;j)/j^2 .$$

Членът $2M$ се появява тъй като за някое i точката 2π може да принадлежи на интервала $(x+(i-1)\pi/n,\ x+i\pi/n)$. Тогава члена $|f(x+(i-1)\pi/n) - f(x+i\pi/n)|$ оценяваме с $2M$.

Понеже $k(n)\to\infty$ и $\nu(f;n)/n = o(1)$, то всички членове в дясната част на последното неравенство се стремят към нула. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_{n,k(n)}(f;x)\|_C = 0.$

Аналогично се доказва, че и $\lim\limits_{n\to\infty}\|Q_{n,k(n)}(f)\|_C = 0.$

Получихме, че условията на теорема 3.2 са изпълнени. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\tau(\varphi_f, S_n(f); \alpha) = 0$.

Теоремата е доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3./вж. теорема 2.4/ Ако функцията $f\in D_{2\pi}$ е такава, че

/3.33/ $$\sum_{j=1}^{\infty}\nu(f;j)/j^2 < \infty ,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\tau(\varphi_f, S_n(f); \alpha) = 0.$

От следствие 3.3, отчитайки /3.31/, получаваме

ТЕОРЕМА 3.4. Ако $f\in D_{2\pi}$ и $f\in V_{\Phi}$, където функцията Φ е изпъкнала и

/3.34/ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)<\infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} r(\Phi_{f}, S_n(f); \alpha)=0.$

Условието /3.33/ е еквивалентно на условието /3.34/ и е еквивалентно на кое да е от следните условия /вж. [10],[14],[18] /

/3.35/ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\Psi\left(\frac{1}{n}\right)<\infty \quad , \quad \int_{0}^{1}\frac{1}{\ln\Phi(u)}\,du<\infty,$$

където Ψ е допълнителната в смисъл на Юнг Л. към функцията Φ /вж. [1] , стр. 32/.

Отчитайки забележките 3.1 и 3.2, за функция $f\in C_{2\pi}$ получаваме, че /3.32/, /3.33/, /3.34/ и /3.35/ се явяват и достатъчни условия за равномерна сходимост на реда на Фурие $S[f]$ на функцията f . Условията /3.32/-/3.35/ като условия за равномерна сходимост на реда на Фурие за непрекъснати функции са известни и са получени от Чантурия [19] , Салем /[1] , стр. 287/ и Осколков [10] . Освен това показано е че тези условия като условия за равномерна сходимост на реда на Фурие за непрекъснати функции са точни, т.е. ако някое от тях не е изпълнено, то съществува функция $f\in C_{2\pi}$, съответно имаща модул на изменение от същия порядък или имаща ограничена Φ -вариация и такава, че нейният ред на Фурие в някоя точка е разходящ /вж. [10] и [18] /. Отчитайки точността на условията /3.32/-/3.35/ като условия за равномерна сходимост на реда на Фурие, лесно е да се покаже, че условията /3.32/-/3.35/ са точни и като достатъчни условия за хаусдорфова сходимост на реда на Фурие за функции от $D_{2\pi}$.

Ще разгледаме още някои характеристики на функциите и чрез тях ще формулираме критерии за хаусдорфова и равномерна сходимост на реда на Фурие.

ДЕФИНИЦИЯ 3.7./ [13] / Ще казваме, че функцията g е частично-монотонна от ред n и ще пишем $g\in M_n$, ако съществуват такова реално число a и такова разделяне на интервала $[a, a+2\pi)$ на n подинтервала $\{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$, $\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k=[a, a+2\pi)$, че функцията $g(x)$ е монотонна на всеки един от тях. Съвкупността от всички функции, които са тъждествено равни на константа на $(-\infty, \infty)$ образуват класа от частично-монотонните функции от нулев порядък M_0.

Очевидно $M_k\subset M_n$ за $k\leq n$.

Най-доброто равномерно приближение на функцията $f\in D_{2\pi}$ с частично-монотонни функции от n-ти порядък ще наричаме величината

$$M_n(f)=\inf_{g\in M_n}\|f-g\|_C.$$

Най-доброто равномерно приближение с частично-монотонни функции и връзката му с равномерната сходимост на реда на Фурие е изследвана от Севастьянов [13], [14]. В [14] той показва, че ако функцията f е 2π-периодична, то

$$/3.36/\quad \nu(f;n)=2\sum_{k=0}^{n-1}M_k(f).$$

ДЕФИНИЦИЯ 3.8.[24] За 2π-периодичната функция f Попов въведе следния модул

$$\nu_k(f;\delta)=\inf_{\varphi\in V}\ \sup_{|\varphi(x+kh)-\varphi(x)|\leq\delta}|\Delta_h^k f(x)|,$$

където $\Delta_h^k f(x)$ е k-тата разделена разлика за функцията f в точката x със стъпка h, а с V е означен класът на монотонните функции с вариация на интервала $[0,2\pi)$ ненадминаваща единица.

Нека означим още с $E_n^k(f)$ най-доброто равномерно приближение на функцията f със сплайн-функции от k-та степен имащи $n-1$ възела на интервала $[0,2\pi)$ /вж.[24] /.

Петрушев в [22] доказа следните неравенства

$$\varkappa(f;n) \leq 2\sum_{i=1}^{n} E_i^0(f),$$

/3.37/ $$\varkappa(f;n) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu_1(f;1/i),$$

$$\varkappa(f;n) \leq \varkappa(f;4) + 8\sum_{i=1}^{n} \mu(f;1/i).$$

Ще отбележим, че първите две неравенства от /3.37/ следват веднага от /3.36/ тъй като очевидно

/3.38/ $$M_k(f) \leq E_{k+1}^0(f) \quad \text{и} \quad M_k(f) \leq \frac{1}{2}\nu_1(f;1/(k+1)).$$

Имайки предвид неравенствата /3.37/ и /3.36/, ще докажем

ТЕОРЕМА 3.5. Ако за функцията $f \in D_{2\pi}$ е изпълнено кое да е от условията

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(f;1/i)/i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} M_i(f)/i < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_1(f;1/i)/i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} E_i^0(f)/i < \infty,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\Phi_f, S_n(f);\alpha) = 0.$

Д о к а з а т е л с т в о. Ще покажем, че за функцията f е изпълнено /3.33/ от следствието 3.3. Действително, нека е изпълнено първото условие на теоремата, т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(f;1/i)/i < \infty$.

Тогава

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa(f;n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\varkappa(f;4) + 8\sum_{i=1}^{n} \mu(f;\tfrac{1}{i})\right)$$

$$\leq \varkappa(f;4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mu(f;\tfrac{1}{i})$$

$$\leq 2\varkappa(f;4) + 8\sum_{i=1}^{\infty}\mu(f;\tfrac{1}{i})\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\leq 2\varkappa(f;4) + 16\sum_{i=1}^{\infty}\mu(f;\tfrac{1}{i})/i < \infty .$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(\phi_f, S_n(f);\alpha) = 0.$

По аналогичен начин се доказва твърдението, ако е изпълнено някое от другите условия на теоремата.

Теоремата е доказана.

Попов в [23] и [24] показа, че ако $f \in C_{2\pi}$, то са в сила неравенствата

$$E_m^k(f) \leq C(k)\,\nu_{k+1}(f;(k+1)/m),$$

/3.39/ $$\nu_k(f;1/m) \leq 2^{k+1} E_m^k(f),$$

$$E_m^0(f) \leq \varkappa(f;m)/m \leq 6\,E_m^0(f).$$

Освен това очевидно

/3.40/ $$M_{km}(f) \leq E_m^k(f).$$

Отчитайки забележка 3.1, от неравенствата /3.33/, /3.39/ и /3.40/ и равенството /3.36/ получаваме следните достатъчни условия за равномерна сходимост на реда на Фурие:

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Ако функцията $f \in C_{2\pi}$ е такава, че е изпълнено кое да е от условията

а/ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(f;n)/n^2 < \infty$, б/ $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(f)/n < \infty$,

в/ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^k(f)/n < \infty$, г/ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_k(f;1/n)/n < \infty$,

то $\lim_{n\to\infty} \| S_n(f) - f \|_C = 0$.

Ще отбележим, че условието а/ за равномерна сходимост на реда на Фурие е получено от Чантурия [19] , а достатъчното условие б/ от Севастянов [13] . От /3.39/ и /3.40/ следва, че условията а/, б/, в/ и г/ са еквивалентни, а от това, че а/ е еквивалентно с условията чрез Φ -вариацията на функцията f , то и с условията /3.34/ и /3.35/.

ЗАБЕЛЕЖКА 3.3. Твърденията на теорема 3.5 и следствие 3.4 могат да се формулират малко по-силно, въвеждайки редицата $k(n)$ както това се прави в теорема 3.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. Москва, „Физматгиз", 1961.
2. Бредихина Е.А. Некоторые оценки отклонений частичных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций. Матем. сб., 50, № 3, 1960, 369-382.
3. Бредихина Е.А. Ряды Фурье как апарат приближения почти-периодических функций. Доклады АН СССР, 123, № 2, 1958, 219-222.
4. Жижиашвили Л.В. О тригонометрических рядах Фурье. Матем. сб., 100, № 4, 1976, 580-609.
5. Данфорд Н., Дж.Т. Шварц. Линейные операторы, Общая теория. т. I. Москва, ИИЛ, 1962.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. I и II. Москва, „Мир", 1965.
7. Купцов Н.П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов. Успехи мат. наук, 23, вып. 4, 1968, 117-178.
8. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. Москва, Гостехиздат, 1953.
9. Неваи Г.П. О признаке Дини-Липшица. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24, 3-4, 1973, 349-351.
10. Осколков К.И. Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье. Матем. заметки, 12, 1972, 313-324.
11. Попов В.А. Локальные приближения в пространстве Банаха. Год. на Соф. у-тет, мат. фак. , 66, 1971/72, 321-330.

12. Привалов А.А. О расходимости интерполяционных процессов в фиксированной точке. Матем. сб., 66, № 2, 1965, 272-286.

13. Севастьянов Е.А. Равномерные приближения кусочно-монотонными функциями и некоторые их приложения к Φ-вариациям и рядам Фурье. Доклады АН СССР, 217, № 1, 1974, 27-30.

14. Севастьянов Е.А. Кусочно-монотонная и рациональная аппроксимации и равномерная сходимость рядов Фурье. Analisis Mathematica, 1, № 4, 1975, 283-294.

15. Сендов Бл. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа. Успехи мат. наук, 24, № 5, 1969, 141-178.

16. Сендов Бл. Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние. Год. на Соф. у-тет, физ-мат. фак., 58, 1965, 107-140.

17. Харди Г.Х., В.В. Рогозинский. Ряды Фурье. Москва, Физматгиз, 1959.

18. Чантурия З.А. О равномерной сходимости рядов Фурье. Матем. сб., 100, № 4, 1976, 534-554.

19. Чантурия З.А. Модуль изменения функций и его применения в теории рядов Фурье. Доклады АН СССР, 214, № 1, 1974, 63-66.

20. Butzer P.L., H. Berens. Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer-Veriag, Berlin, Heildelberg, New-York, 1967.

21. Hille E., G. Klein. Riemman's localization theorem for Fourier series. Duke Mathematical Journal, 21, 1954, 587-591.

22. Petrušev P.P. On rational approximation of functions with unbounded variation, Serdica, 2, 1976, 149-153.

23. Popov V.A. On the connection between rational and spline approximation. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 27, № 5, 1974, 623-626.

24. Popov V.A. Direct and converse theorem for spline approximation with free knots. Compt. rend. Acad. bulg. Sci.,26, № 10, 1973, 1297-1299.

25. Sendov Bl., V.A. Popov. On the generalization of Jackson's theorem for best approximation. Journal of Approximation Theory, 9, № 2, 1973, 102-111.

26. Hristov V.H., P.P. Petrušev. On convergence of Fourier series in Banach space. Compt. rend. Acad. bulg. Sci. 29, № 8, 1976, 1099-1102.

27. Christov V.Ch., P.P. Petrušev. An improvement of Dini-Lipschitz condition. Proceedings of Conference of Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest, August 1976.

28. Петрушев П.П., В.Х. Христов. О сходимости ряда Фурье в метрике Хаусдорфа. Сердика, 1877, /в печат/.

29. Христов В.Х., П.П. Петрушев. Сходимость ряда Фурье в пространстве Банаха. Сердика, 1977, /в печат/.

30. Христов В.Х., П.П. Петрушев. Достаточные условия для сходимости рядов Фурье. Труды Межд. Конфер. по теории приближения функций, Калуга, июль 1975.

31. Христов В.Х., П.П. Петрушев. Одно улучшение критерия Дини-Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье. Доклады БАН, 29, №11, 1976, 1579-1582.

32. Христов В.Х. Критерий типа Дини-Липшица для равномерной сходимости интерполяционных полиномов. Сердика 1977,/в печат/

33. Христов В.Х., П.П. Петрушев. О равномерной сходимости рядов Фурье.

СЪДЪРЖАНИЕ