СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ
ПО ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

Антон Илиев Илиев

ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен *Доктор*

Научен ръководител:
доц. дмн Христо Семерджиев

София, 2000 г.

Съдържание

Въведение

Задачата за намиране на корените на уравнения възниква при решаване на важни теоретични и приложни въпроси. Такива са: решаване на характеристични уравнения на матрици, решаване на диференциални и диференчни уравнения. В теория на апроксимациите се използват не само алгебрични полиноми, но и тригонометрични полиноми от n-ти ред, експоненциални полиноми от n-ти ред и обобщени полиноми по произволно зададена чебишова система. В литературата на този въпрос са посветени много методи, които се делят на две основни категории: за индивидуално търсене на корените и методи за тяхното едновременно намиране. За индивидуално търсене на корените има разработени много методи още от древността. Последните няколко десетилетия възникнаха методи за едновременно намиране на всички корени (ЕНВК), което се обяснява с две причини:

1. тези методи са по-устойчиви и имат по-широка област на сходимост;

2. тези методи са особено подходящи за прилагане върху компютри с паралелни процесори.

При всеки метод за ЕНВК може да се прилага известната модификация на Gauss–Seidel, което води до по-добри приближения на следващата стъпка, но се изпуска възможността за паралелното търсене на корените. При прилагането им върху компютри с паралелни процесори, паралелните алгоритми за търсене на корените разпределят изчисленията между различните процесори и обменят получените данни на всяка стъпка, което води до ускоряване на процеса на намиране на корените. Детайлно този въпрос за метода (1) е разгледан от Cosnard и Fraigniaud [43, 44].

Досегашно развитие на методите за ЕНВК на алгебрични уравнения за еднократни корени

Нека е даден алгебричен полином

$$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 ,$$

имащ прости нули $x_1, x_2, \ldots x_n$. Приближенията, които се получават по итерационните формули за ЕНВК на $k+1$-та стъпка ще означаваме с $x_i^{[k+1]}, i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots$.

Пръв Weierstrass [92] през 1891 г., използва представянето (1) при конструирането на доказателството на фундаменталната теорема на алгебрата. Weierstrass [92] никъде не определя (1) като итерационна формула за търсене на корените на $A_n(x)$.

(1) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)} \quad , i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots.$$

Илиев [10] през 1950 г. доказва, че ако се използува информацията за всички нули на произволна функция $f(x)$ или полином може да се докаже сходимост в по-широка област на класическия метод на Newton от 1667 г.

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f\left(x_i^{[k]}\right) / f'\left(x_i^{[k]}\right) \quad , i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots,$$

който е за индивидуално търсене на нули на тази функция или на този полином. Тази идея насочва усилията към търсене на итерационен метод, така че приближенията $x_i^{[k+1]}, i=\overline{1,n}$ на всяка стъпка да са функции на всички останали предишни приближения $x_i^{[k]}, i=\overline{1,n}$. Durand [45] и Дочев [7] независимо един от друг определят (1) като итерационна формула, като Дочев е първият доказал вторият ú ред на сходимост. Освен това Дочев извежда итерационната формула (1) като използва хомотопията на Давиденко [6], който разработва редица числени методи от линейната алгебра с метода на въвеждане на непрекъснат параметър. При Durand методът (1) се привежда в неявна детерминантна форма. Още през 1961 г. Бърнев прави програма за този метод на машинен код за М-20 и се произвеждат многобройни числени експерименти. По-късно Kerner [62] също публикува програма на алгоритмичен език, реализираща метод (1).

През 1954 г. Maehly [72] и по-късно Börsch–Supan [40], Ehrlich [46], Weisenhorn [93] и Aberth [37] обосновават итерационната формула

$$(2)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left[\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}} \right]^{-1}, i=\overline{1,n}, k=0,1,2,\dots,$$

с трети ред на сходимост.

Кюркчиев и Андреев [65] през 1987 г. модифицират метода (2) и получават метод с ред на сходимост $2R+3$

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left[\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]} - \Delta_j^{R,k}} \right]^{-1}, i=\overline{1,n}, k=0,1,2,\dots,$$

където

$$\Delta_s^{R,k} = -\left[\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq s}}^{n} \frac{1}{x_s^{[k]} - x_l^{[k]} - \Delta_l^{R-1,k}}\right]^{-1}, s = \overline{1,n},\ \Delta_s^{0,k} = 0,\ s = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots.$$

През 1964 г. Бърнев и Дочев [5] и по-късно Семерджиев [29] показват, че итерационният метод

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right) - A_n'\left(x_i^{[k]}\right) + A_n\left(x_i^{[k]}\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}\right]\times \tag{3}$$

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{-2}, i = \overline{1,m},\ \ k = 0,1,2,\ldots$$

има трети ред на сходимост.

През 1970 г. Börsch–Supan [41] и по-късно Nourein [78], Ташев и Кюркчиев [35] предлагат метод без производни от трети ред

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)}{1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{A_n\left(x_j^{[k]}\right) / \prod\limits_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{n}\left(x_j^{[k]} - x_p^{[k]}\right)}{x_j^{[k]} - x_i^{[k]}}}, i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

Nourein [79] 1977 г. повишава скоростта на сходимост, без да увеличава съществено необходимите операции от (4), като новополученият метод има ред на сходимост 4

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)}{1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{A_n\left(x_j^{[k]}\right) / \prod\limits_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{n}\left(x_j^{[k]} - x_p^{[k]}\right)}{x_j^{[k]} - \left(x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod\limits_{\substack{p=1\\ p\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_p^{[k]}\right)\right)}}, i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{5}$$

Nourein [80] прави модификация на метода на Maehly с корекцията на Newton и постига четвърти ред на сходимост

$$(6)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left[\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - \dfrac{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n\left(x_j^{[k]}\right)} \right)} \right]^{-1}, i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots .$$

През 1983 г. Кюркчиев [14] получава метод за ЕНВК (7), който не изисква да се изчисляват производни с ред по-висок от първи и има четвърти ред на сходимост

$$(7)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right) \left[A_n'\left(x_i^{[k]}\right) - A_n\left(x_i^{[k]}\right) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} \right)^{-1} \right.$$

$$\left. - A_n\left(x_i^{[k]}\right) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} A_n\left(x_j^{[k]}\right) \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} \right)^{-3} \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq i}}^{n} \left(x_j^{[k]} - x_s^{[k]} \right)^{-1} \right]^{-1},$$

$i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots$

Кюркчиев и Андреев [15] през 1985 г. повишават реда на сходимост на $R+2$ на един от методите на Nourein [80]

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} - \Delta_j^{R,k} \right)}, i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$\Delta_j^{R,k} = -\frac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} \left(x_j^{[k]} - x_s^{[k]} - \Delta_s^{R-1,k} \right)},\ \Delta_j^{0,k} = 0,\ k = 0,1,2,\ldots .$$

Методът на Nourein [80] се получава при $R = 1$.

Следващите 3 метода са разработени от Wang и Wu [91] – 1987 г.

$$(8)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{ \frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{-1} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{-2} \right] \right\}^{-1}, \; i = \overline{1,n},\; k = 0,1,2,\ldots;$$

$$(9)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{ \frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - \frac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)} \right) \right)^{-1} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - \frac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)} \right) \right)^{-2} \right] \right\}^{-1},$$

$i = \overline{1,n},\; k = 0,1,2,\ldots;$

$$(10)\qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{ D\left(x_i^{[k]}\right) - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \times \left[\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - D^{-1}\left(x_j^{[k]}\right) \right) \right)^{-1} \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - D^{-1}\left(x_j^{[k]}\right) \right) \right)^{-2} \right] \right\}^{-1}, \; i = \overline{1,n},\; k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$D(x) = \frac{A_n'(x)}{A_n(x)} - \frac{A_n''(x)}{2A_n'(x)}.$$

Итерационните методи (8), (9) и (10) имат съответно четвърти, пети и шести ред на сходимост.

Метод от ред $p+2$ за ЕНВК е предложен [82] от Petkovic през 1981 г.

$$(11) \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{1}{\left[h_p\left(x_i^{[k]}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}} \right)^p \right]^{1/p}},$$

$$i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\dots,\ p = 1,2,\dots,$$

където

$$h_p(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^p}{dx^p} \left[\ln A_n(x) \right].$$

Досегашно развитие на методите за ЕНВК на тригонометрични, експоненциални и обобщени по зададена чебишова система полиноми при еднократни корени

За тригонометричния полином

$$T_n(x) = a_0 / 2 + \sum_{l=1}^{n} \left(a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx) \right)$$

предполагаме, че поне един от водещите коефициенти a_n и b_n е различен от нула и че той има реални нули $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [-\pi, \pi)$.

За първи път метод за ЕНВК на тригонометрични уравнения, имащ втори ред на сходимост (12) се разглежда от Семерджиев и Ангелова [1] през 1978 г.

$$(12) \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 2B_k T_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod_{j=1, j \neq i}^{2n} \sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} \right) / 2 \right),\ i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\dots,$$

където

$$B_k = \left[T_n(y) \right]^{-1} \prod_{j=1}^{2n} \sin\left(\left(y - x_j^{[k]} \right) / 2 \right)$$

и y е произволно число от интервала $[-\pi, \pi]$, различно от нулите на $T_n(x)$. Новополученият метод чувствително се различава от алгебричния си аналог в конструктивно отношение.

Трябва да се отбележи, че методът за ЕНВК на алгебрични уравнения може да се прилага и за тригонометрични, като се направи трансформация $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ и след това се положи e^{ix} равно на нова променлива. Това води до усложняване на разглежданията поради задължителната употреба на комплексни числа. Затова е по-добре да се използва специализиран метод за този вид уравнения.

Макрелов [16] 1979 г. разглежда метод от трети ред за ЕНВК на тригонометрични уравнения

$$\text{(13)} \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 4B_k T_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[t_i^{[k]} - B_k T_n'\left(x_i^{[k]}\right) + B_k T_n\left(x_i^{[k]}\right)u_i^{[k]}\right] / \left(t_i^{[k]}\right)^2,$$
$$i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$t_i^{[k]} = \prod_{j=1, j\neq i}^{2n} \sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right), \quad u_i^{[k]} = \frac{1}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)$$

и B_k се избира по същия начин както и в (12).

Семерджиев и Макрелов [17] през 1983 г. получават метод, който е значително по-икономичен от (13) и е отново с кубична скорост на сходимост

$$\text{(14)} \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - T_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[T_n'\left(x_i^{[k]}\right) - \frac{1}{2}T_n\left(x_i^{[k]}\right)\sum_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{cotg}\frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Нека е даден експоненциалният полином

$$E_n(x) = a_0/2 + \sum_{l=1}^{n}\left(a_l \operatorname{ch}(lx) + b_l \operatorname{sh}(lx)\right) = a_0/2 + \sum_{l=1}^{n}\left(a_l' \exp(lx) + b_l' \exp(-lx)\right).$$

Предполагаме, че поне един от старшите коефициенти a_n и b_n не е нула и че $E_n(x)$ има реални корени $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

Жидков, Макрелов и Семерджиев [9] разглеждат методи (15) и (16) съответно от втори и трети ред за ЕНВК на експоненциални уравнения

$$(15) \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 2C_k E_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right), i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$C_k = \left[E_n(z)\right]^{-1} \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sh}\left(\left(z - x_j^{[k]}\right)/2\right)$$

и z е произволно число, за което $E_n(z) \neq 0$.

$$(16) \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - 4C_k E_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[v_i^{[k]} - C_k E_n'\left(x_i^{[k]}\right) + C_k E_n\left(x_i^{[k]}\right) w_i^{[k]}\right] / \left(v_i^{[k]}\right)^2,$$
$$i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$v_i^{[k]} = \prod_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right), \quad w_i^{[k]} = \frac{1}{2} \sum_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{cth}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)$$

и C_k е както в метода (15).

От авторите на (14) в същата статия [17] е получен и метод за експоненциални уравнения

$$(17) \qquad x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - E_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[E_n'\left(x_i^{[k]}\right) - \frac{1}{2} E_n\left(x_i^{[k]}\right) \sum_{j=1, j\neq i}^{2n} \operatorname{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,2n},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Методите (14) и (17) са аналози на метода на Ehrlich [46].

Нека функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват чебишова система в интервала (a,b). Да разгледаме обобщен полином по тази система $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, за който предполагаме, че има n на брой прости корена $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Семерджиев и Макрелов [19] 1985 г. конструират метод за ЕНВК за полиноми по зададена чебишова система с втори ред на сходимост

(18) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - (-1)^n f\left(x_i^{[k]}\right)\Delta_k \,/\, R_k'\left(x_i^{[k]}\right),\ i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\dots,$$

където

$$R_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_n^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_n^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_n^{[k]}\right) \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi_0\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_{n-1}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \varphi_0\left(x_2^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_2^{[k]}\right) & \dots & \varphi_{n-1}\left(x_2^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_n^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_n^{[k]}\right) & \dots & \varphi_{n-1}\left(x_n^{[k]}\right) \end{vmatrix}.$$

Методът (18) е обобщение на метода (1), който се получава от (18) при $\varphi_k(x) = x^k$. Тогава детерминантите в (18) са на Van der Mond и се изчисляват лесно.

По-късно Макрелов [73, 74] 1991 г. показва, че методът

(19) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{f\left(x_i^{[k]}\right)}{f'\left(x_i^{[k]}\right)}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{f\left(x_i^{[k]}\right)}{f'\left(x_i^{[k]}\right)}\frac{R_k''\left(x_i^{[k]}\right)}{R_k'\left(x_i^{[k]}\right)}\right],\ i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,\dots,$$

има трети ред на сходимост. Формула (19) е по-добра от (18) поради по-бързата си сходимост и освен това не се налага използването на нормиращ множител.

Досегашно развитие на методите за ЕНВК на алгебрични уравнения за кратни корени

Налага се построяването на итерационни методи, които имат същата скорост на сходимост (както методите за ЕНВК при еднократни корени) и в случая на кратни корени.

Нека корените на $A_n(x)$ са $x_1, x_2, \ldots, x_m$ със съответни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n)$.

През 1977 г. Farmer и Loizou [48] обобщават метода (1) за кратни корени, така че той съхранява квадратичната си сходимост

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left(A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j} \right)^{1/\alpha_i}, i = \overline{1,m}, k = 0,1,2,\ldots. \tag{20}$$

Видимото неудобство на (20) е кореннуването, което води до задължителното използване на комплексни числа, а също и до необходимостта да се избира $\left(A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j} \right)^{1/\alpha_i}$, така че да минимизира $\left|A_n\left(x_i^{[k+1]}\right)\right|$.

Друг подход за обобщението на (1), базиран на разделени разлики с кратни възли, е предложен от Семерджиев [30] през 1982 г.

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \frac{A_n^{(j)}\left(x_i^{[k]}\right)}{j!\left(\alpha_i - 1 - j\right)!} \left[\frac{\left(x - x_i^{[k]}\right)^{\alpha_i}}{\Omega_{n,A}^{[k]}(x)} \right]_{x = x_i^{[k]}}^{(\alpha_i - 1 - j)}, i = \overline{1,m}, k = 0,1,2,\ldots, \tag{21}$$

където

$$\Omega_{n,A}^{[k]}(x) = \prod_{l=1}^{m} \left(x - x_l^{[k]}\right)^{\alpha_l}.$$

Gargantini [51] 1978 г. предлага итерационна формула за кратни корени с кубична скорост на сходимост явяваща се обобщение на (2)

(22) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{\alpha_i}{\dfrac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \dfrac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}}, \; i = \overline{1,m},\; k = 0,1,2,\ldots.$$

В своята монография Petkovic [86] 1989 г. получава метод, обобщение на метода (11) с ред на сходимост $p+2$.

(23) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{1}{\left\{\dfrac{1}{\alpha_i}\left[h_p\left(x_i^{[k]}\right) - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \left(\dfrac{1}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}\right)^p\right]\right\}^{1/p}},$$

$$i = \overline{1,m},\; k = 0,1,2,\ldots,\; p = 1,2,\ldots,$$

където

$$h_p(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^p}{dx^p}\left[\ln A_n(x)\right].$$

Случаят $p=2$ е разгледан за пръв път от Gargantini [52]. От (23) при $p=1$ се получава метода (22).

Petkovic, Milovanovic и Stefanovic [85] 1986 г. са показали, че (24) има ред на сходимост $p+3,\; p=1,2$

(24) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{1}{\left\{\dfrac{1}{\alpha_i}\left[h_p\left(x_i^{[k]}\right) - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} + \alpha_j \dfrac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)^{-p}\right]\right\}^{1/p}},$$

$$i = \overline{1,m},\; k = 0,1,2,\ldots,\; p = 1,2,$$

където

$$h_1(x) = \frac{A_n'(x)}{A_n(x)}$$

и

$$h_2(x) = \frac{\left[A_n'(x)\right]^2 - A_n(x)A_n''(x)}{\left[A_n(x)\right]^2}.$$

Метод (25) [85] (авторите са същите както тези на метода (24)) има шести ред на сходимост

(25) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{1}{\left\{\frac{1}{\alpha_i}\left[h_2\left(x_i^{[k]}\right) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]} + 2\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_j}\right)\frac{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n\left(x_j^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)^{-1}\right)^{-2}\right]\right\}^{1/2}},$$

$$i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където $h_2(x)$ е взето от (24).

Също така Wang и Wu [91] представят методи (26), (27) и (28), съответно от четвърти, пети и шести ред

(26) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right] - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}\right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\alpha_j}{\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^2}\right]\right\}^{-1},\ i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots;$$

(27) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right] - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - \alpha_j\frac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)\right)^{-1}\right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - \alpha_j\frac{A_n\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)\right)^{-2}\right]\right\}^{-1},$$

$$i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots;$$

(28)
$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)\frac{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n\left(x_i^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right] - \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{2A_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha_i}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - 2\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_j}\right)\frac{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n\left(x_j^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)^{-1}\right)\right)^{-1}\right)^{2}\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\left(x_i^{[k]} - \left(x_j^{[k]} - 2\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_j}\right)\frac{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n\left(x_j^{[k]}\right)} - \frac{A_n''\left(x_j^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_j^{[k]}\right)}\right)^{-1}\right)\right)^{-2}\right]\right]^{-1}\right\}, \quad i=\overline{1,m},\ k=0,1,2,\ldots$$

Досегашно развитие на методите за ЕНВК на тригонометрични, експоненциални и обобщени по зададена чебишова система полиноми при кратни корени

Предполагаме, че тригонометричният полином $T_n(x)$ има нули $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с дадени кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=2n)$.

Семерджиев и Макрелов [18] 1984 г. обобщават методите (12) и (15). За ЕНВК на тригонометрични уравнения

(29)
$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{2^{\alpha_i}B_k}{\alpha_i}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\frac{T_n^{(j)}\left(x_i^{[k]}\right)}{j!\left(\alpha_i-1-j\right)!}\left[\frac{\left(\sin\left(\left(x-x_i^{[k]}\right)/2\right)\right)^{\alpha_i}}{\Omega_{n,T}^{[k]}(x)}\right]_{x=x_i^{[k]}}^{(\alpha_i-1-j)},$$

$$i=\overline{1,m},\ k=0,1,2,\ldots,$$

където

$$B_k = \left[T_n(y)\right]^{-1}\prod_{j=1}^{n}\sin^{\alpha_j}\left(\left(y-x_j^{[k]}\right)/2\right),\quad \Omega_{n,T}^{[k]}(x) = \prod_{l=1}^{m}\sin^{\alpha_l}\left(\left(x-x_l^{[k]}\right)/2\right)$$

и y е произволна точка от интервала $[-\pi,\pi]$, $T_n(y)\neq 0$.

Ще считаме, че експоненциалният полином $E_n(x)$ има реални корени $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с известни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 2n)$.

Авторите на (29) получават и итерационния метод [18]

(30) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{2^{\alpha_i} C_k}{\alpha_i} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \frac{T_n^{(j)}\left(x_i^{[k]}\right)}{j!(\alpha_i - 1 - j)!} \left[\frac{\left(\operatorname{sh}\left(\left(x - x_i^{[k]}\right)/2\right)\right)^{\alpha_i}}{\Omega_{n,E}^{[k]}(x)} \right]_{x = x_i^{[k]}}^{(\alpha_i - 1 - j)},$$

$$i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$C_k = \left[T_n(z)\right]^{-1} \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sh}^{\alpha_j}\left(\left(z - x_j^{[k]}\right)/2\right),\ \Omega_{n,E}^{[k]}(x) = \prod_{l=1}^{m} \operatorname{sh}^{\alpha_l}\left(\left(x - x_l^{[k]}\right)/2\right)$$

и z е произволна точка, $E_n(z) \neq 0$. Методът (30) е предназначен за експоненциални полиноми.

Ще предполагаме, че полиномът по зададена чебишова система има нули $x_1, x_2, \ldots, x_m$ със съответни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = n$.

През 1985 г. Семерджиев и Тамбуров [33] получават обобщение на метода (18)

(31) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - (-1)^n f^{(\alpha_i - 1)}\left(x_i^{[k]}\right) / Q^{[k](\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right),\ i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

(32) $$M = \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ x & x_1 & \ldots & x_m \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{def}}} \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_1 - 1)}(x_1) & \varphi_1^{(\alpha_1 - 1)}(x_1) & \ldots & \varphi_n^{(\alpha_1 - 1)}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \ldots & \varphi_n(x_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_m - 1)}(x_m) & \varphi_1^{(\alpha_m - 1)}(x_m) & \ldots & \varphi_n^{(\alpha_m - 1)}(x_m) \end{vmatrix}$$

и

$$Q^{[k]}(x) = \det M \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ x & x_1^{[k]} & \dots & x_m^{[k]} \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \end{bmatrix} / \det M \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ x_1^{[k]} & x_2^{[k]} & \dots & x_m^{[k]} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Описаните методи (29)–(31) запазват своята квадратична сходимост.

Семерджиев, Макрелов и Тамбуров [20] 1986 г. обобщават метода (2) за обобщени полиноми по произволно зададена чебишова система, имащи кратни корени, като разработеният метод запазва кубична скорост на сходимост

(33) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f^{(\alpha_i - 1)}\left(x_i^{[k]}\right)\left[f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right) - f^{(\alpha_i - 1)}\left(x_i^{[k]}\right) Q^{[k](\alpha_i + 1)}\left(x_i^{[k]}\right)\left[2Q^{[k](\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{-1},$$

$$i = \overline{1,m}, k = 0,1,2,\dots,$$

където

$$Q^{[k]}(x) = \det M \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ x & x_1^{[k]} & \dots & x_m^{[k]} \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Цели на дисертационния труд:

а) в случая на кратни нули на полиноми (с известни кратности) – конструиране на методи, за едновременно намиране на всички нули на алгебрични, тригонометрични, експоненциални полиноми и полиноми по зададена чебишова система, които запазват кубичната си сходимост и не изискват изчисляването на стойности на производни на полинома (на който търсим нулите) от ред по-висок от първи.

б) построяване модификация на метода на Ehrlich–Кюркчиев за постигане на четвърти ред на сходимост в случая на кратни корени на алгебрични уравнения и не изискваща изчисляването на стойности на производни от ред по-висок от първи.

в) построяване на итерационна схема с ред на сходимост t за намиране на корените на система нелинейни уравнения.

При получаването на гореспоменатите методи от а) е използван конструктивен подход – между методите за едновременно намиране на прости корени (на алгебрични, тригонометрични, експоненциални и обобщени) и тези обосновани в дисертацията съществува принципиална разлика, а именно докато при итерационните формули за прости нули помощният полином $Q^{[k]}(x)$ е един, то за кратни нули са въведени m на брой помощни полинома $Q_i^{[k]}(x),\ i=\overline{1,m}$, които в частния случай когато $x=x_i^{[k]}$ и $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=1$ съвпадат с производната на известния помощен полином $Q^{[k]}(x)$ въведен от Семерджиев и неговите сътрудници [17]. При обобщението на метода за полиноми по произволна чебишова система се налага въвеждането и на мащабиращ числов множител пред частното $Q_i'^{[k]}(x)/Q_i^{[k]}(x)$. При обобщението на метода на Ehrlich–Кюркчиев освен m-те на брой помощни полинома $Q_i^{[k]}(x),\ i=\overline{1,m}$ се налага и въвеждането на допълнителен множител, в който участват $f(x)$, $f'(x)$, $Q_i^{[k]}(x)$ и $Q_i'^{[k]}(x)$.

При доказателството за сходимост на метода за едновременно намиране на нулите на полиноми по зададена чебишова система е използван нов подход. Този подход води както до опростяване на доказателството, така и до намаляване реда на производните на функцията, нулите на която търсим, до първи, което е значително подобрение на самия метод.

При компютърната реализация на примерите в дисертацията са използвани от специализираните езици за програмиране – C и Pascal, а от специализираните програми за математически пресмятания – системите Maple и Mathematica.

Изказвам своята благодарност на моя научен ръководител доц. дмн Христо Семерджиев за непрекъснатото внимание по време на подготовката на дисертацията, за ценните съвети и препоръки, и предоставената ми литература. Благодаря и на преподавателите от катедра „Приложна математика и моделиране“ за ценните препоръки направени при обсъждането на настоящата дисертация на откритите научни семинари.

1. Числени методи с трети ред на сходимост за едновременно намиране на всички корени на полиномни уравнения

В тази глава ще конструираме нови методи, които са обобщение на метода на Чебишов–Макрелов [74] и на метода на Обрешков–Ehrlich [46] за случая на алгебрични, тригонометрични, експоненциални полиноми и полиноми по зададена чебишова система. Тези методи притежават кубична скорост на сходимост, ефективни са от изчислителна гледна точка и могат да се използват за ЕНВК, ако корените имат известни кратности. Въпреки произволността на кратностите новите методи са от същата сложност, както и методите за ЕНВК при прости нули. Поради факта, че не използваме разделени разлики с кратни възли, не се налага изчисляване на производни от ред по-висок от първи на полинома, на който търсим корените [56,59].

1.1. Обобщение на метода на Чебишов за едновременно намиране на всички корени на полиномни уравнения

Тук ще разгледаме само най-често прилаганите на практика случаи на алгебрични, тригонометрични и експоненциални уравнения. Новите методи са по-ефективни (значително по-малко трудоемки) от досега известните методи за случаите на тригонометрични и експоненциални уравнения, имат кубична скорост на сходимост и са предназначени за едновременно намиране на всички корени с произволни кратности. Предложена е компютърна реализация в случая на алгебрични уравнения на метод за локализиране на началните приближения към корените и определяне на кратностите им.

През 1838 г. Чебишов предлага итерационната формула

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \left[f\left(x_i^{[k]}\right)/f'\left(x_i^{[k]}\right)\right]\left[1+\left[f\left(x_i^{[k]}\right)/f'\left(x_i^{[k]}\right)\right]f''\left(x_i^{[k]}\right)\left[2f'\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right],$$
$$i=\overline{1,n},\ k=0,1,2,\ldots,$$

с кубична сходимост за индивидуално търсене на еднократни корени на произволна функция $f(x)$.

Бърнев и Дочев [5] и по-късно Семерджиев [29] и Макрелов [74,75] модифицират метода на Чебишов, така че той да стане метод за ЕНВК. Трябва да се отбележи, че от Семерджиев и неговите сътрудници е получена [88] цяла поредица от обобщения на тези методи за неалгебрични уравнения (тригонометрични, експоненциални и обобщени). Те се отнасят към случая на прости корени или към случая на корени с произволни зададени кратности. В работите [74,75] от Макрелов е развито обобщение на метода на Чебишов за едновременно намиране на всички корени на обобщен полином $\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ (a_k, $k = \overline{0,n}$ дадени числа, $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ дадена чебишова система базисни функции). Методът на Чебишов–Макрелов се отнася само към случая на прости корени и освен това той е твърде трудоемък, тъй като на всяка итерация е необходимо да се изчисляват детерминанти от висок порядък.

1.1.1. Метод за уточняване на корените и техните кратности в случая на алгебрични уравнения.

В този параграф ще опишем програмните средства, които ни позволяват да уточним кратностите и началните приближения на всички корени на алгебрични уравнения. Методиката за локализация на корените се базира на алгоритъма на Cauchy.

Нека е даден алгебричният полином

(1) $$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

За (1) предполагаме, че има само реални нули $x_1, x_2, \ldots, x_m$ със съответни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$. Приближенията към корените на k-тата стъпка чрез някакъв итерационен процес ще означаваме с $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_m^{[k]}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Ще разгледаме накратко досегашното развитие на въпроса за локализация на нулите на алгебричен полином и уточняване на техните кратности.

За практическо прилагане в монографията на Обрешков [21] е посочено че Fujiwara през 1915 г. доказва, че окръжността с център координатното начало и радиус

(2) $$R = 2\max_{1\le p\le n}\left|a_{n-p} / a_n\right|^{1/p}$$

в комплексната равнина съдържа всички нули на полинома (1).

Задачата за отделянето на прости корени е разгледана подробно от Савельева [26]. В нейната статия от 1999 г. са разгледани подробно 12 алгоритъма за отделяне на реални и комплексни корени. В предложените алгоритми впечатление прави голямата им изчислителна сложност.

За случая на кратни корени Channabasappa [42] през 1979 г. разглежда функцията $S_a = \left|aA_n(\beta)A_n''(\beta) - (a-1)\left[A_n'(\beta)\right]^2\right|$, където β е в близка околност на i-тия корен. Кратността на корена Channabasappa предлага да се намира като се търси минимумът на функцията S_a за $a = \overline{1,n}$. Уникалността на крайния резултат за намерената кратност може да се провери с това, че методът на Schröder [90] от 1870 г.

(3) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i f\left(x_i^{[k]}\right) / f'\left(x_i^{[k]}\right), i = \overline{1,m}, k = 0,1,2,\dots,$$

който представлява модификация на известния метод на Newton, за кратни корени има втори ред на сходимост само когато $a = \alpha_i$.

Семерджиев и Тамбуров [32] през 1984 г. предлагат метод за аналитично пресмятане на кратностите по зададени коефициенти на полинома (1). Този метод свежда въпроса за уточняване на кратностите до решаване на система от линейни алгебрични уравнения. При практическо прилагане на този подход тежестта пада върху конструирането на линейната система, която трябва да се реши.

Предполагаме, че полиномът (1) има само реални корени. За намиране на разположението на корените на (1) ще опишем една правоъгълна ивица в комплексната равнина със страни успоредни на реалната и имагинерната ос (вж. пример 1.1.1). Страната успоредна на имагинерната ос ще вземем достатъчно малка, но по-голяма или равна на 10 пъти стъпката, с която работим. От представянето

$$A_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = a_n\rho_1\rho_2\dots\rho_n e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}\dots e^{i\varphi_n},$$

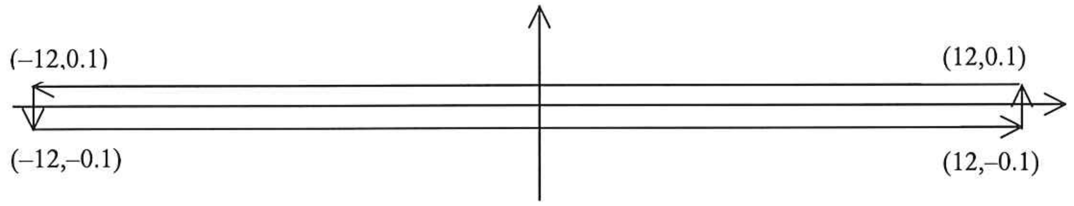
където ρ_p са модулите на комплексните числа $x - x_p,\, p = \overline{1,n}$ и $\varphi_p,\, p = \overline{1,n}$ са техните аргументи. При еднократен обход на контура в посока противоположна на часовниковата стрелка всеки от аргументите на корените в областта ще се измени с 2π, а всеки от аргументите вън от контура няма да се измени. Ако изменението на аргумента е $2\pi s$, $s \in [1,n]$, то следва, че вътре в разглежданата област има точно s корена. При предварителна липса на информация дали корените са реални се разглежда въпросната ивица достатъчно тясна. Така с произволна отнапред зададена точност може да сме сигурни, че корените са достатъчно близки до реални.

След като сме локализирали корените с предложения алгоритъм в отделни интервали, разглеждаме онези интервали, които съдържат повече от един корен. За всеки такъв интервал възниква въпросът дали в него е локализиран един кратен корен или няколко корена, които са достатъчно близо един до друг. Потвърждаване или отхвърляне на намерената кратност в „близка“ околност на корена може да стане с метода на Schröder (3).

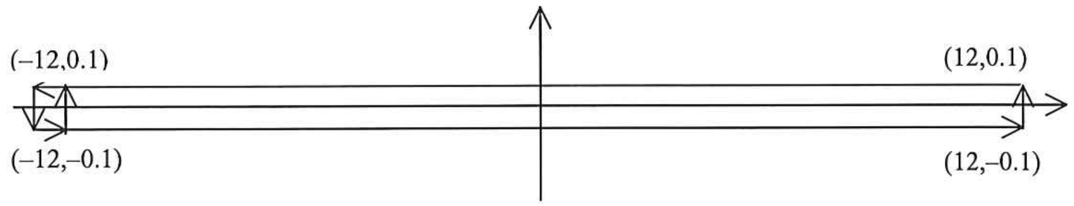
Пример 1.1.1. Да се уточнят корените и техните кратности за полинома

(4) $$A_6(x) = (x+2)^2(x-1)(x-3)^3 = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108 = 0.$$

След прилагане на (2) получаваме, че всички корени на (4) се намират в квадрата $[-12,12]\times[-12,12]$. Нашата цел е да търсим реалните корени на (4). Избираме за начално локализиране на корените „тясна“ област около реалната ос – например $[-12,12]\times[-0.1,0.1]$.



Така получената област разделяме на 100 правоъгълника по реалната ос и започваме движението си по контура $[-12,-0.1],[12,-0.1],[12,0.1],[-12,0.1],[-12,-0.1]$ със стъпка $h = 0.01$. Броим промените на знаците на реалната и имагинерната части на функционалната стойност на (4).



След приключване на процеса компютърната програма дава следните резултати:

Първият корен с кратност 2 е локализиран в 42-я правоъгълник между –2.16 и –1.92.

Вторият корен с кратност 1 е локализиран в 55-я правоъгълник между 0.96 и 1.20.

Третият корен с кратност 3 е локализиран в 63-я правоъгълник между 2.88 и 3.12.

По-нататък, за да сме сигурни в получените резултати е необходимо да се приложи някой метод за намиране на кратни корени с известни кратности – например метода (3). И ако той има квадратична сходимост, значи сме уточнили кратността. В противен случай трябва да увеличим броя на правоъгълниците, на които делим, но вече ще делим правоъгълниците с локализираните в тях корени отново по вертикалата на по-малки.

Така описаният алгоритъм ни позволява да локализираме достатъчно точно корените на (1) и техните кратности.

Пример 1.1.2. Прилагаме гореописаната методика за случая

(5)
$$A_6(x) = (x-3)^2(x-2.9)(x-2)^2(x-1)$$
$$= x^6 - 13.9x^5 + 78.9x^4 - 233.3x^3 + 377.3x^2 - 314.4x + 104.4 = 0,$$

когато корените $x = 3$ и $x = 2.9$ са „по-близки". За (5) от (2) получаваме, обхващащата област е $[-27.8, 27.8] \times [-27.8, 27.8]$. Отново взимаме ивица с ширина 0.2 около реалната ос $[-27.8, 27.8] \times [-0.1, 0.1]$. При същите начални параметри както пример 1.1.1 получаваме следните резултати:

Първият корен с кратност 1 е локализиран в 52-я правоъгълник между 0.556 и 1.112.

Вторият корен с кратност 2 е локализиран в 54-я правоъгълник между 1.668 и 2.224.

Третият корен с кратност 3 е локализиран в 56-я правоъгълник между 2.780 и 3.336.

Ще приложим метод (3), за да проверим дали действително третият корен е трикратен, а вторият двукратен. Получава се сходимост за двукратния корен и липсва сходимост за трикратния корен.

Сега е необходимо да направим „по-тесни" правоъгълниците, в които търсим корените и от компютърната програма получаваме следните резултати:

Първият корен с кратност 1 е локализиран в 208-я правоъгълник между 0.973 и 1.112.

Вторият корен с кратност 2 е локализиран в 215-я правоъгълник между 1.946 и 2.085.

Третият корен с кратност 1 е локализиран в 221-я правоъгълник между 2.780 и 2.919.

Четвъртият корен с кратност 2 е локализиран в 222-я правоъгълник между 2.919 и 3.058.

Следващият пример илюстрира възможността за гъсто струпване на нули.

Пример 1.1.3. Да разгледаме полинома

(6)
$$A_5(x) = \left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2(70x-99)$$
$$= 70x^5 - 99x^4 - 280x^3 + 396x^2 + 280x - 396 = 0.$$

Тук трябва да отбележим, че числата $\sqrt{2} \approx 1.414213562373$ и $99/70 \approx 1.414285714285$ са много близки и тук се налага описаната процедура за локализиране на корените да се прилага многократно, за да се достигне до точна локализация на корените и определяне на техните кратности.

Ще опишем резултатите от опита за локализация на нулите на полинома (6).

При първоначалното стартиране на програмата се получава, че от (2) всички корени са локализирани в $[-4,4]\times[-4,4]$. Първоначално разделяме областта $[-4,4]\times[-0.1,0.1]$ на 100 правоъгълника и получаваме следните резултати:

Първият корен с кратност 2 е локализиран между –1.44 и –1.36 в 33-я правоъгълник.

Вторият корен с кратност 3 е локализиран между 1.36 и 1.44 в 66-я правоъгълник.

За проверка на коректността на получените резултати, ще приложим метода (3). Тъй като първият корен е между –1.44 и –1.36, то за начално приближение към първия корен може да се избере средата, която е –1.40, аналогично за втория корен 1.40. При така получените кратности програмата дава следните резултати от итерациите по (3):

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	–1.400000000000000000	1.400000000000000000
1	–1.414286232278182680	1.421276595744680850
2	–1.414213564253419510	1.410783903670833550

От получените числени резултати става ясно, че за $x_1^{[k]}$ процесът е сходящ, а за $x_2^{[k]}$ – не е сходящ. Това ни насочва да търсим по-добра локализация за $x_2^{[k]}$. Разбира се, не бива да се изпуска и възможността за комплексен корен близко до реалната ос. Затова сега на нашите разглеждания е подложен интервала $[1.36,1.44]\times[-0.001,0.001]$. Разделяме го на 500 правоъгълника и със стъпка 0.00001 започваме движението си по контура. Програмата дава следните резултати:

Корен с кратност 2 е локализиран в интервала 1.41408 и 1.41424 в 339-я правоъгълник.

Еднократен корен е локализиран в интервала 1.41424 и 1.41440 в 340-я правоъгълник.

За да сме сигурни, че всичко е наред отново прилагаме метод (3) и получаваме квадратична сходимост, което показва, че корените на (6) са локализирани и вече могат да се търсят едновременно с някоя от итерационните схеми за ЕНВК.

Друга възможност за локализация на корените е да се дели областта с отсечки успоредни на имагинерната ос на две равни части и да се проверява дали в получените интервали има корени и колко са те?

1.1.2. Алгебрични уравнения.

Нека е даден алгебричният полином (1), за който се предполага, че всички корени са реални. Нека $x_1, x_2, \dots, x_m$ са точните корени на (1) имащи съответни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n)$, а $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]}$ – k-тите приближения към корените, определими с помощта на итерационния процес

(7)
$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \left[1 + \frac{A_n\left(x_i^{[k]}\right)}{A_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \frac{Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)} \right]$$
$$i = \overline{1,m}, \; k = 0,1,2,\dots,$$

където

$$Q_i^{[k]}(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{m} \left(x - x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j}.$$

Има място следната

Теорема 1.1.1. [58] *Нека* q, c *и* $d \overset{\text{def}}{=\!=} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$ *са реални числа такива, че се изпълняват неравенствата* $0 < q < 1$, $c > 0$, $d - 2c > 0$, $c(n - \alpha_i) < \alpha_i(d - 2c)$ *и* $c^2(n - \alpha_i) < (\alpha_i d - 2nc)(d - 2c)$, $i = \overline{1,m}$. *Тогава, ако началните приближения* $x_i^{[0]}$ *към корените на уравнението* (1) x_i, $i = \overline{1,m}$ *са избрани по такъв начин, че да се изпълняват неравенствата* $|x_i^{[0]} - x_i| \le cq$, $i = \overline{1,m}$, *то за всяко естествено число* k *се изпълняват също и неравенствата* $|x_i^{[k]} - x_i| \le cq^{3^k}$, $i = \overline{1,m}$.

Доказателство. Теоремата ще докажем с метода на математическата индукция по номера на итерацията k. От условието на теоремата е ясно, че твърдението е вярно при $k = 0$. Сега да допуснем, че неравенствата $|x_i^{[k]} - x_i| \le cq^{3^k}$, $i = \overline{1,m}$ са изпълнени за някое цяло $k \ge 0$. Изпълнени са съотношенията

$$\frac{Q_i'^{[k]}(x_i^{[k]})}{Q_i^{[k]}(x_i^{[k]})} = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}, \quad i = \overline{1,m} \tag{8}$$

и

$$\frac{A_n'(x_i^{[k]})}{A_n(x_i^{[k]})} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Използвайки (8), (9) метод (7) може да се преобразува във вида

$$x_i^{[k+1]} - x_i = x_i^{[k]} - x_i - \alpha_i \left[\frac{\alpha_i}{x_i^{[k]} - x_i} + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j} \right]^{-1}$$

$$- \alpha_i \sum_{j=1,\, j \neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}} \left[\frac{\alpha_i}{x_i^{[k]} - x_i} + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j} \right]^{-2}$$

или

$$(10) \qquad x_i^{[k+1]} - x_i = x_i^{[k]} - x_i - \alpha_i\left(x_i^{[k]} - x_i\right) / P_i^{[k]}$$

$$-\left(x_i^{[k]} - x_i\right)^2 \alpha_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}} \left(P_i^{[k]}\right)^{-2}, \ i = \overline{1,m},$$

където с $P_i^{[k]}$ е означен изразът $\alpha_i + \left(x_i^{[k]} - x_i\right) \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j}$.

Сега, ако изнесем множителя $\left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right) / P_i^{[k]}\right]^2$, то от (10) се получава

$$x_i^{[k+1]} - x_i = \left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right) / P_i^{[k]}\right]^2 \left[P_i^{[k]} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j} - \alpha_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}} \right]$$

или

$$(11) \qquad x_i^{[k+1]} - x_i = \left(x_i^{[k]} - x_i\right)^2 \left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right) \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j}{x_i^{[k]} - x_j} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \alpha_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \frac{\alpha_j \left(x_j - x_j^{[k]}\right)}{\left(x_i^{[k]} - x_j\right)\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)} \right] / \left(P_i^{[k]}\right)^2.$$

Имат място следните оценки:

$$\left|x_i^{[k]} - x_j\right| \geq \left|x_i - x_j\right| - \left|x_i - x_i^{[k]}\right| \geq d - cq^{3^k} > d - c > d - 2c$$

$$\left|x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right| \geq \left|x_i^{[k]} - x_j\right| - \left|x_j - x_j^{[k]}\right| \geq d - c - cq^{3^k} > d - 2c \ , i, j = \overline{1,m}, \ i \neq j.$$

Тогава от (11) намираме

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \leq \left(cq^{3^k}\right)^3 \left[(n - \alpha_i)^2 + \alpha_i(n - \alpha_i)\right] / \left[\alpha_i(d - 2c) - c(n - \alpha_i)\right]^2 < cq^{3^{k+1}}, \ i = \overline{1,m}.$$

С това теорема 1.1.1 е напълно доказана.

Пример 1.1.4. За алгебричния полином [20]

$$A_6(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108,$$

имащ нули $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$ с кратности съответно $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = 3$ при начални приближения $x_1^{[0]} = -3$, $x_2^{[0]} = 0.1$ и

$x_3^{[0]} = 4$ чрез формула (7) бяха получени корените с точност 18 десетични знака след 4 итерации.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	–3.000000000000000000	0.100000000000000000	4.000000000000000000
1	–2.074075484632669380	1.025215703994304140	3.060848242666424480
2	–2.000104622198420050	0.999992663820262272	3.000018360022861370
3	–2.000000000000256950	1.000000000000000240	3.000000000000001700
4	–2.000000000000000000	1.000000000000000000	3.000000000000000000

1.1.3. Тригонометрични уравнения.

Разглеждаме тригонометричния полином

(12) $$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

където $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Без да ограничаваме общността на разглежданията ще разгледаме само интервала $[-\pi, \pi)$. Нека $x_1, x_2, \dots, x_m$ са корените на полинома $T_n(x)$ в този интервал, имащи дадени кратности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ съответно $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 2n)$, а $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]}$ са k-тите приближения към тези корени. Получаваме следния аналог на метода (7):

(13) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i \frac{T_n\left(x_i^{[k]}\right)}{T_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\left[1 + \frac{T_n\left(x_i^{[k]}\right)}{T_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \frac{Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}\right]$$

$$i = \overline{1, m}, \; k = 0,1,2,\dots,$$

където

$$Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) = \prod_{j=1,\, j \neq i}^{m} \sin^{\alpha_j}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right).$$

Кубичната сходимост на итерационния метод (13) се установява със следната теорема

Теорема 1.1.2. [58] *Нека* $d \stackrel{\text{def}}{=\!=} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$. *Нека положителните числа* c, q *и* ξ *са такива, че* $q < 1,\ 2c < \xi,\ d - 2c > 0$ *и* $\max_{i \neq j} |x_i - x_j| < 2\pi - 2\xi$. *Предполага се също, че* c *е избрано достатъчно малко, че за* $i = \overline{1,m}$ *да се изпълняват неравенствата*

$$\alpha_i \left(1 - \frac{c^2}{8}\right) > \frac{c}{2} \frac{1}{A} (2n - \alpha_i)$$

и

$$c^2 \left\{ \alpha_i^2 + \frac{1}{4A^2} (2n - \alpha_i)^2 + \frac{c}{4} \frac{\alpha_i}{4} (2n - \alpha_i) + \alpha_i \left[\frac{1}{2A^2} (2n - \alpha_i) + \frac{1}{6} \frac{c}{A} (2n - \alpha_i) \right] \right\}$$

$$< \left[\alpha_i \left(1 - \frac{c^2}{8}\right) - \frac{c}{2} \frac{1}{A} (2n - \alpha_i) \right]^2,$$

където с A *е означен изразът* $\min\left\{ \left|\sin\frac{\xi}{2}\right|, \left|\sin\left(\frac{d}{2} - c\right)\right| \right\}$. *Тогава, ако началните приближения* $x_i^{[0]},\ i = \overline{1,m}$ *са избрани по такъв начин, че се изпълняват неравенствата* $\left|x_i^{[0]} - x_i\right| \le cq$, $i = \overline{1,m}$, *то за всяко цяло число* $k \ge 0$ *се изпълняват и неравенствата* $\left|x_i^{[k]} - x_i\right| \le cq^{3^k}$, $i = \overline{1,m}$.

Доказателство. Доказателство се извършва по схемата на доказателството на Теорема 1.1.1.

За краткост ще въведем следните съкращения

$$\operatorname{cotg}\frac{x_i^{[k]}-x_j^{[k]}}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}t_{ij}^{[k]} \qquad \operatorname{cotg}\frac{x_i^{[k]}-x_j}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\bar{t}_{ij}^{[k]}$$

$$\sin\frac{x_i^{[k]}-x_j^{[k]}}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}s_{ij}^{[k]} \qquad \sin\frac{x_i^{[k]}-x_j}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\bar{s}_{ij}^{[k]}$$

$$\cos\frac{x_i^{[k]}-x_j^{[k]}}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}c_{ij}^{[k]} \qquad \cos\frac{x_i^{[k]}-x_j}{2}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\bar{c}_{ij}^{[k]}.$$

Имат място представянията

$$\frac{Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}$$

и

$$\frac{T_n'\left(x_i^{[k]}\right)}{T_n\left(x_i^{[k]}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]}.$$

Итерационната формула (13) се представя във вида

$$x_i^{[k+1]}-x_i=x_i^{[k]}-x_i-\alpha_i\frac{T_n\left(x_i^{[k]}\right)}{T_n'\left(x_i^{[k]}\right)}-\alpha_i\left[\frac{T_n\left(x_i^{[k]}\right)}{T_n'\left(x_i^{[k]}\right)}\right]^2\frac{Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}$$

и съгласно новите означения – във вида

(14) $$x_i^{[k+1]}-x_i=x_i^{[k]}-x_i-2\alpha_i\Big/\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}-2\alpha_i\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\Big/\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]^2.$$

Привеждайки под общ знаменател отдясно формулата (14) и умножавайки числителя и знаменателя с $\left(\bar{s}_{ij}^{[k]}\right)^2$ получаваме

$$x_i^{[k+1]}-x_i=\left\{\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\left[\alpha_i\bar{c}_{ii}^{[k]}+\bar{s}_{ii}^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]^2-2\alpha_i\bar{s}_{ii}^{[k]}\left[\alpha_i\bar{c}_{ii}^{[k]}+\bar{s}_{ii}^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]\right.$$

$$\left.-2\alpha_i\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right\}\Big/\left[\alpha_i\bar{c}_{ii}^{[k]}+\bar{s}_{ii}^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]^2.$$

По-нататъшните преобразования довеждат до представянето

(15) $$x_i^{[k+1]}-x_i=\left\{\alpha_i^2\left[\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\left(\bar{c}_{ii}^{[k]}\right)^2-\sin\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right]+\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]^2\right.$$

$$+\alpha_i\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\sin\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}-2\alpha_i\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}$$

$$\left.-2\alpha_i\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right\}\Big/\left[\alpha_i\bar{c}_{ii}^{[k]}+\bar{s}_{ii}^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right]^2.$$

По-нататък разглеждаме функцията $F(x)=x\cos^2\frac{x}{2}-\sin x$.

Използвайки формулата на Taylor получаваме $F(x)=\frac{1}{6}F'''(\zeta)x^3$.

Тогава имаме, че $F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)=\frac{1}{12}\left(\zeta_i^{[k]}\sin\zeta_i^{[k]}-\cos\zeta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^3$,

$\zeta_i^{[k]}=\theta_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}-x_i\right)$, $0<\theta_i^{[k]}<1$, $i=\overline{1,m}$, откъдето следва, че е в сила оценката

(16) $$\left|F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right|\leq\frac{1}{12}(2\pi+1)\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3\leq\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3.$$

Аналогично за функцията $\Phi(x)=\frac{x}{2}\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}$ имаме $\Phi(x)=\frac{1}{24}\Phi^{\mathrm{IV}}(\eta)x^4$ и

$$\Phi\left(x_i^{[k]}-x_i\right)=\frac{1}{24}\left(\frac{\eta_i^{[k]}}{2}\sin\eta_i^{[k]}-\cos\eta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^4,$$

$$\eta_i^{[k]}=\tau_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}-x_i\right),\ 0<\tau_i^{[k]}<1,\ i=\overline{1,m}.$$

(17) $$\left|\Phi\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right|\leq\frac{1}{24}(\pi+1)\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^4\leq\frac{c}{4}\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3.$$

Сега с помощта на функциите $F(x)$ и $\Phi(x)$ получаваме

$$(18)\quad \left|x_i^{[k+1]}-x_i\right| \le \Bigg\{ \alpha_i^2 \left|F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right| + \left|x_i^{[k]}-x_i\right| \left|\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2\right| \left|\sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]}\right|^2 + \alpha_i \left|\Phi\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right| \left|\sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]}\right|$$

$$+\alpha_i \left| \frac{\left(x_i^{[k]}-x_i\right)}{2} \sin\left(x_i^{[k]}-x_i\right) \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]} - 2\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2 \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j t_{ij}^{[k]} \right| \Bigg\} \Bigg/ \left[\alpha_i \left|\bar{c}_{ii}^{[k]}\right| - \left|\bar{s}_{ii}^{[k]}\right| \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \left|\bar{t}_{ij}^{[k]}\right| \right]^2 .$$

Използвайки, че $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$, развиваме функцията $\sin x$ и $2\sin^2 \frac{x}{2}$ по формулата на Taylor и по този начин, получаваме

$$\sin\left(x_i^{[k]}-x_i\right) = \left(x_i^{[k]}-x_i\right) - \frac{1}{6}\cos\beta_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^3$$

и

$$2\sin^2\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right) = \frac{1}{24}\left[12\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^2 - \left(x_i^{[k]}-x_i\right)^4 \cos\gamma_i^{[k]}\right],$$

където $\beta_i^{[k]}$ и $\gamma_i^{[k]}$ са някакви реални числа.

Следователно,

$$(19)\qquad \alpha_i \left| \frac{\left(x_i^{[k]}-x_i\right)}{2} \sin\left(x_i^{[k]}-x_i\right) \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]} - 2\left(\bar{s}_{ii}^{[k]}\right)^2 \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j t_{ij}^{[k]} \right|$$

$$= \alpha_i \left| \frac{\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^2}{2} \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \frac{\bar{s}_{jj}^{[k]}}{s_{ij}^{[k]}\bar{s}_{ij}^{[k]}} - \frac{1}{12}\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^4 \right.$$

$$\left. \times \left[\cos\beta_i^{[k]} \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j \bar{t}_{ij}^{[k]} - \frac{1}{2}\cos\gamma_i^{[k]} \sum_{j=1,\, j\ne i}^{m} \alpha_j t_{ij}^{[k]} \right] \right|.$$

Поради $|\sin u| \le |u|$, е валидна следната оценка

$$\left|\bar{s}_{jj}^{[k]}\right| \le \frac{1}{2}\left|x_j^{[k]}-x_j\right|.$$

Можем също така да оценим израза в квадратните скоби. Именно

$$(20)\qquad \left|\cos\beta_i^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}-\frac{1}{2}\cos\gamma_i^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right|\le\left|\cos\beta_i^{[k]}\right|\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right|+\frac{1}{2}\left|\cos\gamma_i^{[k]}\right|\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right|$$

$$\le\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right|\le\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\frac{\left|\bar{c}_{ij}^{[k]}\right|}{\left|\bar{s}_{ij}^{[k]}\right|}+\frac{1}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\frac{\left|c_{ij}^{[k]}\right|}{\left|s_{ij}^{[k]}\right|}\le\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\frac{\alpha_j}{\left|\bar{s}_{ij}^{[k]}\right|}+\frac{1}{2}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\frac{\alpha_j}{\left|s_{ij}^{[k]}\right|}.$$

От друга страна имаме

$$\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\ge\left|x_i-x_j\right|-\left|x_i-x_i^{[k]}\right|\ge d-c>d-2c$$

$$\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\ge\left|x_i^{[k]}-x_j\right|-\left|x_j-x_j^{[k]}\right|\ge d-2c.$$

Освен това от предположенията на теоремата е изпълнено, че $\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi,\ i,j=\overline{1,m}$.

Като отчетем, че $2c<\xi$ получаваме също и оценка отгоре

$$\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|+\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi+cq^{3^k}<2\pi-2\xi+c<2\pi-\xi$$

$$\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|+\left|x_j^{[k]}-x_j\right|+\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi+2cq^{3^k}<2\pi-2\xi+2c<2\pi-\xi.$$

По този начин в сила е неравенството

$$\frac{d}{2}-c<\frac{\left|x_i^{[k]}-x_j\right|}{2}<\pi-\frac{\xi}{2},\quad \frac{d}{2}-c<\frac{\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|}{2}<\pi-\frac{\xi}{2}$$

и следователно,

$$(21)\qquad \left|s_{ij}^{[k]}\right|>A,\ \left|\bar{s}_{ij}^{[k]}\right|>A,\ i,j=\overline{1,m}.$$

Тогава, връщайки се към (19), намираме, че

$$(22)\qquad \left|\cos\beta_i^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j\bar{t}_{ij}^{[k]}-\frac{1}{2}\cos\gamma_i^{[k]}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\alpha_j t_{ij}^{[k]}\right|\le 2\frac{\left(2n-\alpha_i\right)}{A}.$$

Сега ще намерим оценка отдолу за знаменателя (18). Тъй като $\cos x=1-\frac{x^2}{2}\cos\delta x$, $0<\delta<1$ и $\left|\frac{x_i^{[k]}-x_i}{2}\right|<\frac{c}{2}$, то $\left|\bar{c}_{ii}^{[k]}\right|>1-\frac{c^2}{8}$ и

следователно

$$(23)\qquad \left[\alpha_i\left|\overline{c}_{ii}^{[k]}\right| - \left|\overline{s}_{ii}^{[k]}\right| \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left|\overline{t}_{ij}^{[k]}\right|\right]^2 > \left[\alpha_i\left(1-\frac{c^2}{8}\right) - \frac{c}{2}\frac{1}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right]^2.$$

Като, използваме (15)-(17),(19)-(23), от (18) получаваме

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le \left|x_i^{[k]} - x_i\right|^3 \left\{\alpha_i^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2n-\alpha_i}{A}\right)^2 + \alpha_i \frac{c}{4}\left[\frac{1}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right]\right.$$

$$\left. + \alpha_i\left[\frac{1}{2}\left(2n-\alpha_i\right)\frac{1}{A^2} + \frac{c}{6}\frac{\left(2n-\alpha_i\right)}{A}\right]\right\} / \left[\alpha_i\left(1-\frac{c^2}{8}\right) - \frac{c}{2}\frac{1}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right]^2$$

$$\le cq^{3^{k+1}} c^2 \left\{\alpha_i^2 + \frac{1}{4A^2}\left(2n-\alpha_i\right)^2 + \frac{c}{4}\frac{\alpha_i}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right.$$

$$\left. + \alpha_i\left[\frac{1}{2A^2}\left(2n-\alpha_i\right) + \frac{1}{6}\frac{c}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right]\right\} / \left[\alpha_i\left(1-\frac{c^2}{8}\right) - \frac{c}{2}\frac{1}{A}\left(2n-\alpha_i\right)\right]^2 < cq^{3^{k+1}},$$

$i = \overline{1,m}.$

Пример 1.1.5. За тригонометричния полином [20]

$$T_3(x) = \sin^3((x-1)/2)\sin^2((x-2)/2)\sin((x-2.5)/2)$$

при начални приближения $x_1^{[0]} = 0.2$, $x_2^{[0]} = 1.7$ и $x_3^{[0]} = 3$ бяха получени корените на уравнението $T_3(x)$ с точност 18 знака след петата итерация.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	0.200000000000000000	1.700000000000000000	3.000000000000000000
1	1.024086327992702930	2.102113721613658320	2.719836743505084910
2	0.999943864177073621	1.994771659856962850	2.539910728921209960
3	0.999999999989823071	1.999997954513862020	2.501199355320121160
4	1.000000000000000000	1.999999999999989780	2.500000051660666960
5	1.000000000000000000	2.000000000000000000	2.500000000000000000

1.1.4. Експоненциални уравнения.

Разглеждаме експоненциалния полином от n – ти ред

$$E_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \mathrm{ch} x + b_k \mathrm{sh} x \right). \tag{24}$$

Предполагаме, че поне едно от a_n и b_n е различно от нула. Ще считаме, че всички корени на уравнението $E_n(x) = 0$ са реални. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са корените на полинома (24) и имат кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 2n\right)$, а $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_m^{[k]}$ са k–тите приближения към съответните корени.

За да намерим корените ще използваме следната итерационна формула:

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i \frac{E_n\left(x_i^{[k]}\right)}{E_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \left[1 + \frac{E_n\left(x_i^{[k]}\right)}{E_n'\left(x_i^{[k]}\right)} \frac{Q_i'\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i\left(x_i^{[k]}\right)} \right], \; i = \overline{1,m}, \; k = 0,1,2,\ldots, \tag{25}$$

където

$$Q_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \mathrm{sh}^{\alpha_j}\left(\left(x - x_j^{[k]} \right) / 2 \right).$$

Аналогично на доказателството на теорема 1.1.1 се доказва, че итерационната формула (25) има кубична скорост на сходимост. Има място следната теорема:

Теорема 1.1.3. [58] *Означаваме* $\min\limits_{i \neq j} \left| x_i - x_j \right|$ *с* d. *Нека* q *и* c *са реални числа, удовлетворяващи следните изисквания:*

$$1 > q > 0, \; c > 0, \; d - 2c > 0, \; c\left|\mathrm{sh} c\right| + \mathrm{ch} c < 12, \; \mathrm{ch}(c/2) < 2, \; c\left(2n - \alpha_i\right) S^{-1} \mathrm{ch} c < \alpha_i,$$

$$c^2 \left\{ \alpha_i^2 + \left(2n - \alpha_i\right) S^{-1} \left[\alpha_i c \mathrm{ch} c + 2\alpha_i S^{-1} + \left(2n - \alpha_i\right) S^{-1} \mathrm{ch}^2 c \right] \right\} < \left[\alpha_i - c\left(2n - \alpha_i\right) S^{-1} \mathrm{ch} c \right]^2,$$

$i = \overline{1,m}$, *където с* S *е означен изразът* $\mathrm{sh}((d - 2c)/2)$. *Ако началните приближения* $x_i^{[0]}$, $i = \overline{1,m}$ *са избрани така, че да се* *изпълняват неравенствата* $\left|x_i^{[0]} - x_i\right| \le cq$, $i = \overline{1,m}$, *то за всяко* $k \in N$ *се изпълняват и неравенствата* $\left|x_i^{[k]} - x_i\right| \le cq^{3^k}$, $i = \overline{1,m}$.

Доказателство. Ще докажем теоремата посредством индукция относно номера на итерацията k. Допускаме, че неравенствата $\left|x_i^{[k]} - x_i\right| \le cq^{3^k}, i = \overline{1,m}$ са изпълнени за някакво цяло $k \ge 0$. От (25) следва:

$$\text{(26)}\quad x_i^{[k+1]} - x_i = x_i^{[k]} - x_i - \frac{2\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\dfrac{x_i^{[k]} - x_j}{2}} - \frac{2\alpha_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\dfrac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}}{\left[\alpha_i \operatorname{cth}\dfrac{x_i^{[k]} - x_i}{2} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\dfrac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right]^2},$$

$i = \overline{1,m}$.

Тук сме използвали, че $\dfrac{Q_i'\left(x_i^{[k]}\right)}{Q_i\left(x_i^{[k]}\right)} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\dfrac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}$, $i = \overline{1,m}$.

Привеждайки под общ знаменател дясната част на (26) и умножавайки числителя и знаменателя със $\operatorname{sh}^2 \dfrac{x_i^{[k]} - x_i}{2}$ получаваме:

$$\text{(27)}\quad x_i^{[k+1]} - x_i = \left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\left[\alpha_i \operatorname{ch}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} + \operatorname{sh}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right]^2\right.$$

$$-2\alpha_i \left[\alpha_i \operatorname{ch}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} + \operatorname{sh}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right] \operatorname{sh}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2}$$

$$\left. - 2\alpha_i \operatorname{sh}^2 \frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\right]$$

$$\times \left[\alpha_i \operatorname{ch}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} + \operatorname{sh}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right]^{-2}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Разкривайки скобите в числителя на (27) и извършвайки преобразования получаваме

(28)
$$x_i^{[k+1]} - x_i = \left[\alpha_i^2\left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\mathrm{ch}^2\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} - \mathrm{sh}\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\right]\right.$$
$$+\alpha_i\left[\left[\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\mathrm{sh}\left(x_i^{[k]} - x_i\right) - 4\mathrm{sh}^2\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2}\right]\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right.$$
$$\left.+2\mathrm{sh}^2\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j^{[k]}}{2}\right]\right]$$
$$\left.+\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\mathrm{sh}^2\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right]^2\right]$$
$$\times\left[\alpha_i\mathrm{ch}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2} + \mathrm{sh}\frac{x_i^{[k]} - x_i}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{cth}\frac{x_i^{[k]} - x_j}{2}\right]^{-2}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Въвеждаме помощните функции $F(x) = x\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{2} - \mathrm{sh}x$ и $G(x) = x\mathrm{sh}x - 4\mathrm{sh}^2\dfrac{x}{2}$. С помощта на формулата на Taylor получаваме $F(x) = \dfrac{1}{12}\left(\xi\mathrm{sh}\xi + \mathrm{ch}\xi\right)x^3$ и $G(x) = \dfrac{1}{24}\left(2\mathrm{ch}\zeta + \zeta\mathrm{sh}\zeta\right)x^4$, където ξ и ζ са реални числа между 0 и x. Следователно,

$$\left|F\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\right| < \frac{1}{12}\left(c|\mathrm{sh}c| + \mathrm{ch}c\right)\left|\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\right|^3 < \left|\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\right|^3, \quad i = \overline{1,m}$$

и

$$\left|G\left(x_i^{[k]} - x_i\right)\right| < \frac{1}{24}\left(2\mathrm{ch}c + c|\mathrm{sh}c|\right)\left|x_i^{[k]} - x_i\right|^4 < c\left|x_i^{[k]} - x_i\right|^3, \quad i = \overline{1,m},$$

за $c|\mathrm{sh}c| + \mathrm{ch}c < 12$.

Ще ни бъдат необходими също и оценките

$$\mathrm{ch}\left(x_i^{[k]} - x_i\right) < \mathrm{ch}c, \quad i = \overline{1,m}, \quad \mathrm{ch}\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right) < \mathrm{ch}(c/2) < \mathrm{ch}c, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\left|\operatorname{sh}\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right|<\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\operatorname{ch}c,\ i=\overline{1,m}$$

и

$$\left|\operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right|<2^{-1}\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\operatorname{ch}(c/2)<\left|x_i^{[k]}-x_i\right|,\ i=\overline{1,m},$$

при $\operatorname{ch}(c/2)<2$.

Изпълнени са също и неравенствата

$$\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\geq\left|x_i-x_j\right|-\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\geq d-c>d-2c,\ i,j=\overline{1,m}$$

и

$$\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\geq\left|x_i^{[k]}-x_j\right|-\left|x_j-x_j^{[k]}\right|>d-2c,\ i,j=\overline{1,m}.$$

Следователно, $\left|\operatorname{sh}\dfrac{x_i^{[k]}-x_j}{2}\right|\left|\operatorname{sh}\dfrac{x_i^{[k]}-x_j^{[k]}}{2}\right|>\operatorname{sh}^2\dfrac{d-2c}{2}$, $i,j=\overline{1,m}$. Полагаме

$$S=\operatorname{sh}\frac{d-2c}{2}.$$

Заместваме в (28) и получаваме

$$\left|x_i^{[k+1]}-x_i\right|\leq\left[\alpha_i^2\left(cq^{3^k}\right)^3+\alpha_i c\left(cq^{3^k}\right)^3(2n-\alpha_i)S^{-1}\operatorname{ch}c+2\alpha_i\left(cq^{3^k}\right)^3(2n-\alpha_i)S^{-2}\right.$$

$$\left.+\left(cq^{3^k}\right)^3(2n-\alpha_i)^2S^{-2}\operatorname{ch}^2c\right]\left[\alpha_i-c(2n-\alpha_i)S^{-1}\operatorname{ch}c\right]^{-2}<$$

$$cq^{3^{k+1}}\left[\alpha_i^2c^2+\alpha_ic^3(2n-\alpha_i)S^{-1}\operatorname{ch}c+2\alpha_ic^2(2n-\alpha_i)S^{-2}\right.$$

$$\left.+c^2(2n-\alpha_i)^2S^{-2}\operatorname{ch}^2c\right]\left[\alpha_i-c(2n-\alpha_i)S^{-1}\operatorname{ch}c\right]^{-2}<cq^{3^{k+1}},\ i=\overline{1,m}.$$

С това доказателството, че методът (25) има трети ред на сходимост е завършено.

Пример 1.1.6. Итерационният метод (25) бе приложен за едновременно намиране на всички корени на експоненциалния полином [20]

$$E_2(x)=a_0+a_1\exp(-x)+b_1\exp(x)+a_2\exp(-2x)+b_2\exp(2x),$$

където

$$a_0 = \left(4 + \exp(5) + \exp(-5)\right)/2\,,\; a_1 = -\left(\exp(-2) + \exp(3)\right),\; a_2 = \exp(1)/2\,,$$

$$b_1 = -\left(\exp(2) + \exp(-3)\right),\; b_2 = \left(2\exp(1)\right)^{-1},$$

имащ двукратни корени $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Използвайки начални приближения $x_1^{[0]} = -1.5$ и $x_2^{[0]} = 3.4$ с помощта на формула (25) бяха получени корените с точност 18 десетични знака след 4 итерации.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	-1.500000000000000000	3.400000000000000000
1	-1.936759338912996590	3.015817214722672100
2	-1.999910032597308230	3.000001221431438670
3	-1.999999999999752340	3.000000000000000000
4	-2.000000000000000000	3.000000000000000000

1.2. Обобщение на метода на Обрешков–Ehrlich за едновременно намиране на всички корени на полиномни уравнения

Тук ще разгледаме итерационни методи за едновременно намиране на всички нули на тригонометрични, експоненциални и полиноми по зададена чебишова система. Кратностите на корените се считат предварително уточнени. Доказана е кубична скорост на сходимост на предложените методи. Направени са числени експерименти.

Обрешков [22,23] през 1958 г. обосновава използването на итерационната формула

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f\left(x_i^{[k]}\right)\left[f_n'\left(x_i^{[k]}\right) - f\left(x_i^{[k]}\right) f''\left(x_i^{[k]}\right)\left[2 f'\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

с кубична сходимост за индивидуално търсене на прости корени на произволна функция $f(x)$.

В частния случай когато $f(x)$ е алгебричния полином

(1) $$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

е добре известна формулата на Ehrlich [46]

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[A_n'\left(x_i^{[k]}\right) - A_n\left(x_i^{[k]}\right)\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{-1}\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

която може да се запише във вида

(2) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[A_n'\left(x_i^{[k]}\right) - A_n\left(x_i^{[k]}\right) Q''^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\left[2Q'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

където

(3) $$Q^{[k]}(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(x-x_j^{[k]}\right).$$

Формулата на Ehrlich е записана във вида (2) за първи път от Семерджиев и Макрелов [17], които показват връзката ú с формулата на Обрешков. Именно формулата на Ehrlich се получава от тази на Обрешков като се замени $f(x)$ с $Q^{[k]}(x)$ от (3), което ни дава основание по-нататък да я наричаме формула на Обрешков–Ehrlich.

1.2.1. Тригонометрични уравнения.

За тригонометричния полином

$$T_n(x)=a_0/2+\sum_{l=1}^{n}\left(a_l\cos(lx)+b_l\sin(lx)\right)$$

предполагаме, че поне един от водещите коефициенти a_n и b_n е различен от нула и че той има реални нули $x_1,x_2,\dots,x_m$ с дадени кратности $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ $\left(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=2n\right)$. Дефинираме метода

(4) $$x_i^{[k+1]}=x_i^{[k]}-\alpha_i T_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[T_n'\left(x_i^{[k]}\right)-T_n\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)/Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}$$
$$i=\overline{1,m},\ k=0,1,2,\dots,$$

където

$$Q_i^{[k]}(x)=\prod_{j\neq i,\ j=1}^{m}\sin^{\alpha_j}\left(\left(x-x_j^{[k]}\right)/2\right).$$

Формулата (4) при $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=1$ съвпада с аналога на формулата на Обрешков–Ehrlich [17] за тригонометрични полиноми.

Теорема 1.2.1. [59] *Означаваме* $d\overset{\text{def}}{=\!=}\min\limits_{i\neq j}\left|x_i-x_j\right|$. *Нека* c, q *и* ξ *са реални, положителни числа, такива, че* $q<1$, $2c<\xi$, $d-2c>0$ *и* $\max\limits_{i\neq j}\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi$. *С* A *означаваме израза*

$\min\left\{\left|\sin\left(\xi/2\right)\right|,\left|\sin(d/2-c)\right|\right\}$. *Ако* $c^2\left(4n+\alpha_i\left(9A^2/8-2\right)\right)<A^2\alpha_i$, $i=\overline{1,m}$ *и началните приближения* $x_i^{[0]}$, $i=\overline{1,m}$ *са избрани така че* $\left|x_i^{[0]}-x_i\right|\le cq$, $i=\overline{1,m}$, *тогава за всяко естествено* k *са изпълнени и неравенствата* $\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\le cq^{3^k}$, $i=\overline{1,m}$.

Доказателство. Разделяме числителя и знаменателя на второто събираемо от дясната страна на (4) с $T_n\left(x_i^{[k]}\right)$ и намираме

(5) $$x_i^{[k+1]}-x_i=x_i^{[k]}-x_i-\alpha_i\left[T_n'\left(x_i^{[k]}\right)/T_n\left(x_i^{[k]}\right)-Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)/Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1},\ i=\overline{1,m}.$$

От друга страна имаме

(6) $$T_n'\left(x_i^{[k]}\right)/T_n\left(x_i^{[k]}\right)=2^{-1}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right),\ i=\overline{1,m}$$

и

(7) $$Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)/Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)=2^{-1}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right),\ i=\overline{1,m}.$$

Използвайки (6) и (7) трансформираме (5) във формата

(8) $$x_i^{[k+1]}-x_i=x_i^{[k]}-x_i-2\alpha_i\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1},$$
$i=\overline{1,m}$.

Като умножим числителя и знаменателя на второто събираемо в дясната страна на (8) със $\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)$ получаваме

$$x_i^{[k+1]}-x_i=x_i^{[k]}-x_i-2\alpha_i\Bigg[\alpha_i\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)+\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)$$

$$\times\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left[\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]\Bigg]^{-1}\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right).$$

Привеждаме под общ знаменател дясната страна и изнасяме $\left(x_i^{[k]}-x_i\right)$ пред скоби в числителя, след което намираме

$$x_i^{[k+1]}-x_i=\left(x_i^{[k]}-x_i\right)$$

$$\times\left[\alpha_i\left(\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)-2\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{-1}\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right)+\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left[\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]\right]\left[\alpha_i\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left[\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]\right]^{-1},\quad i=\overline{1,m}.$$

По-нататък разликата $\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)$ може да се трансформира както следва

$$\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\operatorname{cotg}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)=\left[\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1}$$

$$\times\left[\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)-\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\right]$$

$$=\sin\left(\left(x_j-x_j^{[k]}\right)/2\right)\left[\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1},\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j.$$

Следователно, за отклонението на $x_i^{[k+1]}$ от x_i получаваме израза

$$x_i^{[k+1]}-x_i=\left[\alpha_i\left[\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)-2\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(x_i^{[k]}-x_i\right)Y_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]\left[\alpha_i\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)+Y_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}, \tag{9}$$

където

$$Y_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)=\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\sum_{j=1\,,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\sin\left(\left(x_j-x_j^{[k]}\right)/2\right)\left[\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1},$$

$i=\overline{1,m}$.

Да оценим изразите $\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\cos\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)-2\sin\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right), i=\overline{1,m}$. За тази цел разглеждаме помощната функция $F(x)=x\cos(x/2)-2\sin(x/2)$ и нейното маклореново развитие с остатъчен член съдържащ $F'''(x)$. По този начин намираме

$$F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)=\left(-2^{-1}\cos\left(\zeta_i^{[k]}/2\right)+\left(\zeta_i^{[k]}/8\right)\sin\left(\zeta_i^{[k]}/2\right)\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^3/6$$

$$\left(\zeta_i^{[k]}=\theta_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}-x_i\right),\, 0<\theta_i^{[k]}<1\,, i=\overline{1,m}\right)$$

откъдето следва оценката

$$\left|F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right|\le(1/12+2\pi/48)\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3/4\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3,\ i=\overline{1,m}.$$

От друга страна са верни неравенствата

(10) $\quad \left|x_i^{[k]}-x_j\right|\ge\left|x_i-x_j\right|-\left|x_i-x_i^{[k]}\right|\ge d-cq^{3^k}>d-c>d-2c,\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$

и

(11) $\quad \left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\ge\left|x_i^{[k]}-x_j\right|-\left|x_j-x_j^{[k]}\right|\ge d-2cq^{3^k}>d-2c,\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$.

Поради факта, че всички корени са в интервал с дължина 2π т. е. $\left|x_i-x_j\right|<2\pi,\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$, следва, че съществува положително число ξ, такова, че $\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi,\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$.

Получаваме неравенствата

$$\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|+\left|x_j^{[k]}-x_j\right|+\left|x_i-x_j\right|<2\pi-2\xi+2cq^{3^k}\ ,i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$$

$$\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\le\left|x_i^{[k]}-x_i\right|+\left|x_i-x_j\right|,i,j=\overline{1,m},\ i\neq j.$$

От предположенията на теоремата следва, че $2c<\xi$. Тогава

$$\left|x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right| < 2\pi - \xi,\ i,j = \overline{1,m},\ i \neq j$$

$$\left|x_i^{[k]} - x_j\right| < 2\pi - 2\xi + \xi/2 < 2\pi - \xi,\ i,j = \overline{1,m},\ i \neq j.$$

Следователно $d/2 - c < \left|x_i^{[k]} - x_j\right|/2 < \pi - \xi/2,\ i,j = \overline{1,m},\ i \neq j$ и $d/2 - c < \left|x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right|/2 < \pi - \xi/2,\ i,j = \overline{1,m},\ i \neq j.$ Двата израза $\left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right|$ и $\left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j\right)/2\right)\right|$ са по-големи от A. От (9) оценяваме абсолютната стойност на $x_i^{[k+1]} - x_i,\ i = \overline{1,m}$ т. е.

(12) $$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le \left[\alpha_i \left|x_i^{[k]} - x_i\right|^3 + \left|x_i^{[k]} - x_i\right| Z_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]\left[\alpha_i \left|\cos\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\right| - Z_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1},$$

където

$$Z_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) = \left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\right|$$

$$\times \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left|\sin\left(\left(x_j - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right| \left[\left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j\right)/2\right)\right| \left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right|\right]^{-1},\ i = \overline{1,m}.$$

Поради представянето $\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right) = \left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\cos\varsigma_i^{[k]},\ i = \overline{1,m}$, където $\varsigma_i^{[k]} = \theta_i^{[k]}\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right),\ 0 < \theta_i^{[k]} < 1,\ i = \overline{1,m}$, са валидни следните оценки $\left|\sin\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\right| \le \left|x_i^{[k]} - x_i\right|/2,\ i = \overline{1,m}$. Тогава от (12) получаваме

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le c^3\left(q^{3^k}\right)^3 \left[\alpha_i + A^{-2}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j\right]\left[\alpha_i \left|\cos\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\right| - (c/A)^2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j\right]^{-1},\ i = \overline{1,m}.$$

От неравенството $\left|\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right| < c/2,\ i = \overline{1,m}$ и представянето $\cos\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right) = 1 - (1/8)\left(x_i^{[k]} - x_i\right)^2 \cos\zeta_i^{[k]},\ i = \overline{1,m}$ следва, че $\left|\cos\left(\left(x_i^{[k]} - x_i\right)/2\right)\right| > 1 - c^2/8,\ i = \overline{1,m}$ за достатъчно малко c.

Окончателно получаваме

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le cq^{3^{k+1}} c^2 \left[\alpha_i + (2n-\alpha_i)/A^2\right]\left[\alpha_i(1-c^2/8) - (2n-\alpha_i)(c/A)^2\right]^{-1} < cq^{3^{k+1}},$$
$$i = \overline{1,m}$$

за достатъчно малко c. С това теоремата е напълно доказана.

Пример 1.2.1. За тригонометричния полином (от пример 1.1.5)

$$T_3(x) = \sin^3((x-1)/2)\sin^2((x-2)/2)\sin((x-2.5)/2),$$

имащ точни корени $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 2.5$ с кратности съответно $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ и $\alpha_3 = 1$ при начални приближения $x_1^{[0]} = 0.2$, $x_2^{[0]} = 1.7$ и $x_3^{[0]} = 3$ достигаме корените на $T_3(x)$ с точност от 18 знака на 5-тата итерация.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	0.200000000000000000	1.70000000000000000	3.00000000000000000
1	1.08093197781206681	2.13081574593339511	2.68530050098035859
2	0.999087999636487434	1.98917328088624173	2.46587439388854078
3	1.00000001182848523	2.00000867262537340	2.50012119040535689
4	1.00000000000000000	1.99999999999998133	2.49999999999881136
5	1.00000000000000000	2.00000000000000000	2.50000000000000000

1.2.2. Експоненциални уравнения.

Да разгледаме полинома

$$(13)\quad E_n(x) = a_0/2 + \sum_{l=1}^{n}(a_l \operatorname{ch}(lx) + b_l \operatorname{sh}(lx)) = a_0/2 + \sum_{l=1}^{n}(a_l' \exp(lx) + b_l' \exp(-lx)).$$

Предполагаме, че поне един от старшите коефициенти a_n и b_n не е нула и че $E_n(x)$ има реални корени $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с известни съответни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 2n)$. Корените на (13) могат да бъдат уточнени едновременно с помощта на изчислителната схема

(14) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i E_n\left(x_i^{[k]}\right)\left[E_n'\left(x_i^{[k]}\right) - E_n\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) / Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}$$
$$i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$Q_i^{[k]}(x) = \prod_{j\neq i,\ j=1}^{m} \mathrm{sh}^{\alpha_j}\left(\left(x - x_j^{[k]}\right)/2\right).$$

Теорема 1.2.2. [59] *Означаваме* $\min\limits_{i\neq j}\left|x_i - x_j\right|$ *с* d. *Нека* q *и* c *са реални числа, такива, че* $1 > q > 0,\ c > 0,\ d - 2c > 0,$ $\left(2^{-1}\mathrm{ch}(c/2) + 8^{-1}c\left|\mathrm{sh}(c/2)\right|\right) < 6$, $\mathrm{ch}(c/2) < 2$ *и* $c^2\left(4n + \left(S^2 - 2\right)\alpha_i\right) < S^2\alpha_i$, $i = \overline{1,m}$, *където изразът* $\mathrm{sh}((d-2c)/2)$ *е означен с* S. *Ако началните приближения* $x_i^{[0]},\ i = \overline{1,m}$ *са взети така, че* $\left|x_i^{[0]} - x_i\right| \le cq$, $i = \overline{1,m}$, *то за всяко* $k \in N$ *са изпълнени неравенствата* $\left|x_i^{[k]} - x_i\right| \le cq^{3^k}$, $i = \overline{1,m}$.

Доказателство. Доказателството ще извършим по метода на математическата индукция по номера на итерацията k. За целта образуваме

(15) $$x_i^{[k+1]} - x_i = x_i^{[k]} - x_i - \alpha_i\left[E_n'\left(x_i^{[k]}\right)/E_n\left(x_i^{[k]}\right) - Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)/Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1},\quad i = \overline{1,m}.$$

Аналогично на (6) и (7) получаваме

(16) $$x_i^{[k+1]} - x_i = x_i^{[k]} - x_i - 2\alpha_i\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \mathrm{cth}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j\right)/2\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j \mathrm{cth}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1},$$
$$i = \overline{1,m}.$$

След преобразувания намираме

$$(17)\quad x_i^{[k+1]} - x_i = \Big[\alpha_i\big(x_i^{[k]} - x_i\big)\mathrm{ch}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big) - 2\alpha_i \mathrm{sh}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big) + \big(x_i^{[k]} - x_i\big)$$

$$\times\, \mathrm{sh}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \alpha_j\Big(\mathrm{cth}\big(\big(x_i^{[k]} - x_j\big)/2\big) - \mathrm{cth}\big(\big(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\big)/2\big)\Big)\Big]$$

$$\times\Big[\alpha_i \mathrm{ch}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big) + \mathrm{sh}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big)$$

$$\times \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \alpha_j\Big(\mathrm{cth}\big(\big(x_i^{[k]} - x_j\big)/2\big) - \mathrm{cth}\big(\big(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\big)/2\big)\Big)\Big]^{-1}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Разглеждаме функцията

$$F(x) = x\mathrm{ch}(x/2) - 2\mathrm{sh}(x/2).$$

Ясно е, че $F(0) = 0$. Ще развием $F(x)$ около $x = 0$. За целта пресмятаме

$$F'(x) = \mathrm{ch}(x/2) + 2^{-1}x\mathrm{sh}(x/2) - \mathrm{ch}(x/2) = 2^{-1}x\mathrm{sh}(x/2)$$

и $F'(0) = 0$. Образуваме

$$F''(x) = 2^{-1}\mathrm{sh}(x/2) + 4^{-1}x\mathrm{ch}(x/2).$$

Ясно е, че $F''(0) = 0$.

За $F'''(x)$ намираме

$$F'''(x) = 4^{-1}\mathrm{ch}(x/2) + 4^{-1}\mathrm{ch}(x/2) + 8^{-1}x\mathrm{sh}(x/2) = 2^{-1}\mathrm{ch}(x/2) + 8^{-1}x\mathrm{sh}(x/2)$$

и оттук

$$F(x) = x^3F'''(\zeta)/3!.$$

Следователно,

$$F\big(x_i^{[k]} - x_i\big) = \big(x_i^{[k]} - x_i\big)\mathrm{ch}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big) - 2\mathrm{sh}\big(\big(x_i^{[k]} - x_i\big)/2\big) =$$
$$6^{-1}\big(x_i^{[k]} - x_i\big)^3\big(2^{-1}\mathrm{ch}(\zeta_i/2) + 8^{-1}\zeta_i\mathrm{sh}(\zeta_i/2)\big),$$

където

$$\zeta_i = \theta_i\big(x_i^{[k]} - x_i\big), \quad 0 < \theta_i < 1, \quad i = \overline{1,m}.$$

Знаем също, че $\big|x_i^{[k]} - x_i\big| \le c, \quad i = \overline{1,m}$. Следователно, $|\zeta_i| \le c, \quad i = \overline{1,m}$.

Тогава

$\left|F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\right| \le 6^{-1}\left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3\left(2^{-1}\mathrm{ch}(c/2)+8^{-1}c\left|\mathrm{sh}(c/2)\right|\right) < \left|x_i^{[k]}-x_i\right|^3, \quad i=\overline{1,m},$ при $\left(2^{-1}\mathrm{ch}(c/2)+8^{-1}c\left|\mathrm{sh}(c/2)\right|\right) < 6,$ което е дадено в условието на теоремата.

Преобразуваме разликата

$$\mathrm{cth}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)-\mathrm{cth}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)=\left[\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]^{-1}$$

$$\times\left[\mathrm{ch}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)-\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{ch}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]$$

$$=\mathrm{sh}\left(\left(x_j-x_j^{[k]}\right)/2\right)\left[\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right], \quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}$$

и заместваме в (17)

(18) $$x_i^{[k+1]}-x_i=\left[\alpha_i F\left(x_i^{[k]}-x_i\right)+\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right.$$

$$\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m}\alpha_j\mathrm{sh}\left(\left(x_j-x_j^{[k]}\right)/2\right)\left[\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]$$

$$\times\left[\alpha_i\mathrm{ch}\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)+\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right.$$

$$\left.\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\mathrm{sh}\left(\left(x_j-x_j^{[k]}\right)/2\right)\left[\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j\right)/2\right)\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)/2\right)\right]\right]^{-1}, \quad i=\overline{1,m}.$$

От теоремата за крайните нараствания за функцията $\mathrm{sh}(x)$ получаваме $\mathrm{sh}x = x\,\mathrm{ch}\,\theta_1 x,\ \theta_1\in(0,1)$. Следователно,

$$\left|\mathrm{sh}\left(\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)\right| \le 2^{-1}\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\mathrm{ch}\left(\theta_1\left(x_i^{[k]}-x_i\right)/2\right)$$
$$\le 2^{-1}\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\mathrm{ch}(c/2) < \left|x_i^{[k]}-x_i\right|,\ i=\overline{1,m},$$

при $\mathrm{ch}(c/2)<2$.

Известно е, че са изпълнени неравенствата

$$\left|x_i^{[k]}-x_j\right| \ge \left|x_i-x_j\right|-\left|x_i^{[k]}-x_i\right| = d-c > d-2c,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}$$

и

$$\left|x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right| \ge \left|x_i^{[k]} - x_j\right| - \left|x_j - x_j^{[k]}\right| \ge d - 2c,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}\,.$$

Следователно,

$$\left|\operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j\right)/2\right)\operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right|$$

$$= \left|\operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j\right)/2\right)\right|\left|\operatorname{sh}\left(\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)/2\right)\right| \ge \left(\operatorname{sh}\left((d-2c)/2\right)\right)^2,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}.$$

Полагаме $S = \operatorname{sh}\left((d-2c)/2\right)$.

Заместваме получените оценки в (18) и получаваме

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le c^3 q^{3^{k+1}} \left[\alpha_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{sh}^{-2}\left((d-2c)/2\right)\right]\left[\alpha_i - c^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m} \alpha_j \operatorname{sh}^{-2}\left((d-2c)/2\right)\right]^{-1}$$

$$= cq^{3^{k+1}} c^2 \left[\alpha_i + \left(2n - \alpha_i\right) S^{-2}\right]\left[\alpha_i - c^2\left(2n - \alpha_i\right) S^{-2}\right]^{-1} < cq^{3^{k+1}},\ i = \overline{1,m}.$$

За достатъчно малко c това е изпълнено. Получаваме $\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le cq^{3^{k+1}},\quad i = \overline{1,m}$, с което теоремата е доказана.

Пример 1.2.2. Итерационният метод (14) беше приложен за ЕНВК на експоненциалния полином (от пример 1.1.6)

$$E_2(x) = a_0 + a_1 \exp(-x) + b_1 \exp(x) + a_2 \exp(-2x) + b_2 \exp(2x)\,,$$

където

$$a_0 = \left(4 + \exp(5) + \exp(-5)\right)/2\,,\ a_1 = -\left(\exp(-2) + \exp(3)\right),\ a_2 = \exp(1)/2\,,$$

$$b_1 = -\left(\exp(2) + \exp(-3)\right),\ b_2 = \left(2\exp(1)\right)^{-1}.$$

Уравнението $E_2(x) = 0$ има двукратни корени $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Използвайки начални приближения $x_1^{[0]} = -1$ и $x_2^{[0]} = 4$ чрез формула (18) получаваме корените с 18 десетични знака само след 4 итерации.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	–1.00000000000000000	4.00000000000000000
1	–1.93448948248966207	3.07207901269406155
2	–1.99997875689833755	3.00002895806496640
3	–1.99999999999999929	3.00000000000000190
4	–2.00000000000000000	3.00000000000000000

1.2.3. Полиноми върху зададена чебишова система.

Нека функциите $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ са достатъчно гладки и образуват чебишова система в интервала (a,b). Да разгледаме обобщен полином по тази система:

(19) $$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x),$$

чиито нули са $x_1,x_2,\ldots,x_m \in (a,b)$ и имат съответно кратности $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$. Предполагаме $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j = n$. Означаваме приближенията на k-тата итерация към нулите на (19) с $x_1^{[k]},x_2^{[k]},\ldots,x_m^{[k]}$.

Полиномът $f(x)$ може да бъде представен с точност до постоянен множител в следната детерминантна форма

(20) $$f(x)=\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}(x_1) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}(x_1) & \ldots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \ldots & \varphi_n(x_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}(x_m) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}(x_m) & \ldots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}(x_m) \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} \det\begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ x & x_1 & \ldots & x_m \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix},$$

$$\alpha_0 \overset{\text{def}}{=\!=} 1.$$

За едновременно търсене на корените на уравнението $f(x)=0$ ще обосновем следната итерационна формула [60]

(21) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i f\left(x_i^{[k]}\right)\left[f'\left(x_i^{[k]}\right) - f\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\left[\left(\alpha_i+1\right)Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{-1},$$
$$i=\overline{1,m}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

където

$$Q_i^{[k]}(x) = \frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}\det\begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ x & x_1^{[k]} & \dots & x_m^{[k]} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \end{bmatrix}, \; i=\overline{1,m}.$$

Тази формула е обобщение на итерационните формули на Ehrlich [46] и Обрешков [22].

Определение 1.2.1. За функциите $p\left(x_j\right)$ и $q\left(x_j\right)$ ще пишем $p\left(x_j\right) \equiv q\left(x_j\right) \bmod \left(x_j - x_j^{[k]}\right)^\gamma, j=\overline{1,m}$ ($p\left(x_j\right)$ сравнимо с $q\left(x_j\right)$ по модул $\left(x_j - x_j^{[k]}\right)^\gamma, j=\overline{1,m}$), когато разликата $p\left(x_j\right) - q\left(x_j\right)$ може да бъде представена като $h\left(x_j - x_j^{[k]}\right), j=\overline{1,m}$, където производните на функцията $h\left(y_j\right)$, ($y_j = x_j - x_j^{[k]}$) до $\gamma-1$ ред са равни на нула в точката $y_j=0$.

При $\gamma=1$ като развием функцията $h\left(y_j\right)$ в маклоренов ред до събираеми от първа степен относно y_j получаваме

$$h\left(x_j - x_j^{[k]}\right) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial y_s}\bigg|_{(\theta y_s)} y_s = \sum_{p=1}^{m} A_p\left(x_p - x_p^{[k]}\right), \; j=\overline{1,m},$$

където производните $A_p = \dfrac{\partial h}{\partial y_p}$, $p=\overline{1,m}$ са пресметнати в точката

$$\left(\theta\left(x_1 - x_1^{[k]}\right), \theta\left(x_2 - x_2^{[k]}\right), \dots, \theta\left(x_m - x_m^{[k]}\right)\right), \; 0<\theta<1.$$

Ще покажем, че

$$Q_i^{[k]}(x) \equiv f^{(\alpha_i)}(x) \bmod \left(x_j^{[k]} - x_j\right),\ j = \overline{1,m}$$

(22)

$$Q_i'^{[k]}(x) \equiv f^{(\alpha_i+1)}(x) \bmod \left(x_j^{[k]} - x_j\right),\ j = \overline{1,m}\,.$$

Да представим втория ред на $Q_i^{[k]}(x)$ по следния начин

$$Q_i^{[k]}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x) & \varphi_1^{(\alpha_i)}(x) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_i)}(x) \\ \varphi_0\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_m^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x) & \varphi_1^{(\alpha_i)}(x) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_i)}(x) \\ \varphi_0(x_1) + \left[\varphi_0\left(x_1^{[k]}\right) - \varphi_o(x_1)\right] & \varphi_1(x_1) + \left[\varphi_1\left(x_1^{[k]}\right) - \varphi_1(x_1)\right] & \dots & \varphi_n(x_1) + \left[\varphi_n\left(x_1^{[k]}\right) - \varphi_n(x_1)\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_m^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x) & \varphi_1^{(\alpha_i)}(x) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_i)}(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_m^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x) & \varphi_1^{(\alpha_i)}(x) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_i)}(x) \\ \varphi_0'\left(\xi_{0,1}^{0,k}\right)\left(x_1^{[k]}-x_1\right) & \varphi_1'\left(\xi_{1,1}^{0,k}\right)\left(x_1^{[k]}-x_1\right) & \dots & \varphi_n'\left(\xi_{n,1}^{0,k}\right)\left(x_1^{[k]}-x_1\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_m^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) \end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix} \varphi_0^{(\alpha_i)}(x) & \varphi_1^{(\alpha_i)}(x) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_i)}(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0'\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1'\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n'\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_1-1)}\left(x_1^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n\left(x_m^{[k]}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}\left(x_m^{[k]}\right) \end{vmatrix} \bmod\left(x_1-x_1^{[k]}\right),\ i=\overline{1,m}.$$

Оттук виждаме, че $Q_i^{[k]}(x)\equiv Q_{i,2}^{[k]}(x) \bmod \left(x_1^{[k]}-x_1\right)$, $i=\overline{1,m}$. Тук $Q_{i,2}^{[k]}(x)$ е детерминантата $Q_i^{[k]}(x)$, в която вторият ред е заместен с $\left(\varphi_0(x_1),\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_n(x_1)\right)$.

Аналогично получаваме, че $Q_i^{[k]}(x)\equiv Q_{i,3}^{[k]}(x) \bmod \left(x_1^{[k]}-x_1\right)$, $i=\overline{1,m}$, където $Q_{i,3}^{[k]}(x)$ е $Q_{i,2}^{[k]}(x)$, в която третият ред е заместен с $\left(\varphi_0'(x_1),\varphi_1'(x_1),\dots,\varphi_n'(x_1)\right)$. Продължавайки тази процедура намираме, че

$$Q_i^{[k]}(x)\equiv f^{(\alpha_i)}(x) \bmod \left(x_j^{[k]}-x_j\right),\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,m}.$$

Аналогично проверяваме и формулата

$$Q_i'^{[k]}(x)\equiv f^{(\alpha_i+1)}(x) \bmod \left(x_j^{[k]}-x_j\right), j=\overline{1,m}, i=\overline{1,m}.$$

Трансформираме (21) и получаваме

(23) $$x_i^{[k+1]} - x_i = \frac{(\alpha_i+1)\left[\left(x_i^{[k]}-x_i\right)f'\left(x_i^{[k]}\right)-\alpha_i f\left(x_i^{[k]}\right)\right]Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)-\left(x_i^{[k]}-x_i\right)f\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{(\alpha_i+1)f'\left(x_i^{[k]}\right)Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)-f\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)},$$

$i=\overline{1,m}$.

Полагаме

(24) $$\begin{aligned}\Phi(x) &= (\alpha_i+1)\left[(x-x_i)f'(x)-\alpha_i f(x)\right]Q_i^{[k]}(x)-(x-x_i)f(x)Q_i'^{[k]}(x)\\ \Psi(x) &= (\alpha_i+1)f'(x)Q_i^{[k]}(x)-f(x)Q_i'^{[k]}(x).\end{aligned}$$

Тъй като разглежданата функция $\Phi(x)$ от (24) може да се представи като $(x-x_i)^{\alpha_i}P_i(x)$, където $P_i(x)$ е полином, то всички производни на $\Phi(x)$ до ред α_i-1 включително се обръщат в нула при $x=x_i$. Ще докажем, че α_i-тата производна на $\Phi(x)$ се обръща в нула при $x=x_i$. Второто събираемо $(x-x_i)f(x)Q_i'^{[k]}(x)$ може да се представи във вида $(x-x_i)^{\alpha_i+1}G_i(x)$, където $G_i(x)$ е полином, и следователно, всички негови производни до α_i-ти ред включително се обръщат в нула при $x=x_i$. За получаване на α_i-тата производна на първото събираемо от изразяването (24) на функцията $\Phi(x)$ прилагаме формулата на Лайбниц за диференциране на произведението на функциите $(\alpha_i+1)\left[(x-x_i)f'(x)-\alpha_i f(x)\right]$ и $Q_i^{[k]}(x)$. Намираме, че

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i}\binom{\alpha_i}{j}(\alpha_i+1)\left[(x-x_i)f'(x)-\alpha_i f(x)\right]^{(\alpha_i-j)}\left[Q_i^{[k]}(x)\right]^{(j)}.$$

Изразът $\left[(x-x_i)f'(x)-\alpha_i f(x)\right]$ е представим във вида $(x-x_i)^{\alpha_i}F_i(x)$, където $F_i(x)$ е полином от степен $n-\alpha_i$. Следователно всички събираеми, освен това, което се получава при $j=0$ се обръщат в нула при $x=x_i$. Ще докажем, че в нула се обръща и събираемото получаващо се при $j = 0$. Разглеждаме това събираемо

$$(\alpha_i + 1)\left[(x - x_i)f'(x) - \alpha_i f(x)\right]^{(\alpha_i)} Q_i^{[k]}(x)$$

$$= (\alpha_i + 1)\left[\left((x - x_i)f'(x)\right)^{(\alpha_i)} - \alpha_i f^{(\alpha_i)}(x)\right] Q_i^{[k]}(x)$$

$$= (\alpha_i + 1)\left[(x - x_i)f^{(\alpha_i+1)}(x) + \binom{\alpha_i}{1} f^{(\alpha_i)}(x) - \alpha_i f^{(\alpha_i)}(x)\right] Q_i^{[k]}(x)$$

$$= (\alpha_i + 1)(x - x_i)f^{(\alpha_i+1)}(x) Q_i^{[k]}(x),$$

което е равно на нула при $x = x_i$. Следователно, получихме, че

(25) $$\Phi'(x_i) = \Phi''(x_i) = \ldots = \Phi^{(\alpha_i-1)}(x_i) = \Phi^{(\alpha_i)}(x_i) = 0\,.$$

По-нататък

(26) $$\Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i) = (\alpha_i + 1)Q_i^{[k]}(x_i)\left[(\alpha_i + 1)f^{(\alpha_i+1)}(x_i) - \alpha_i f^{(\alpha_i+1)}(x_i)\right] - Q_i'^{[k]}(x_i)(\alpha_i + 1)f^{(\alpha_i)}(x_i)$$

$$= (\alpha_i + 1)Q_i^{[k]}(x_i)f^{(\alpha_i+1)}(x_i) - (\alpha_i + 1)Q_i'^{[k]}(x_i)f^{(\alpha_i)}(x_i)\,.$$

От (22) и (26) следва

(27) $$\Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i) \equiv 0 \bmod \left(x_j^{[k]} - x_j\right),\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,m}.$$

Следователно от (27),

(28) $$\Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i) = \sum_{s=1}^{m} A_{is}\left(x_s^{[k]} - x_s\right),\ i = \overline{1,m}.$$

От (25) и от формулата на Taylor получаваме

(29) $$\Phi\left(x_i^{[k]}\right) = \Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i)\frac{1}{(\alpha_i + 1)!}\left(x_i^{[k]} - x_i\right)^{\alpha_i+1} + \frac{1}{(\alpha_i + 2)!}\Phi^{(\alpha_i+2)}\left(\zeta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_i\right)^{\alpha_i+2}.$$

Аналогично, намираме че

$$\Psi'(x_i) = \Psi''(x_i) = \ldots = \Psi^{(\alpha_i-2)}(x_i) = 0\,.$$

За $\Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i)$, $i = \overline{1,m}$ получаваме

$$\Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i) \equiv (\alpha_i + 1)\left[f^{(\alpha_i)}(x_i)\right]^2 \bmod \left(x_j^{[k]} - x_j\right),\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,m}.$$

Така, че

$$(30)\qquad \Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i)=(\alpha_i+1)\left[f^{(\alpha_i)}(x_i)\right]^2+\sum_{s=1}^{m}B_{is}\left(x_s^{[k]}-x_s\right),\ i=\overline{1,m}.$$

Прилагайки формулата на Taylor получаваме

$$(31)\quad \Psi\left(x_i^{[k]}\right)=\frac{1}{(\alpha_i-1)!}\Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i-1}+\frac{1}{\alpha_i!}\Psi^{(\alpha_i)}\left(\eta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i},\ i=\overline{1,m}.$$

Заместваме (29) и (31) във формула (23) и получаваме

$$(32)\quad x_i^{[k+1]}-x_i\le\frac{\dfrac{1}{(\alpha_i+1)!}\Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i+1}+\dfrac{1}{(\alpha_i+2)!}\Phi^{(\alpha_i+2)}\left(\zeta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i+2}}{\dfrac{1}{(\alpha_i-1)!}\Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i-1}+\dfrac{1}{\alpha_i!}\Psi^{(\alpha_i)}\left(\eta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i}},$$

$i=\overline{1,m}$.

Съкращаваме $\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{\alpha_i-1}$ от числителя и знаменателя и така от (32) достигаме до

$$(33)\quad x_i^{[k+1]}-x_i\le\frac{\dfrac{1}{(\alpha_i+1)!}\Phi^{(\alpha_i+1)}(x_i)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{2}+\dfrac{1}{(\alpha_i+2)!}\Phi^{(\alpha_i+2)}\left(\zeta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^{3}}{\dfrac{1}{(\alpha_i-1)!}\Psi^{(\alpha_i-1)}(x_i)+\dfrac{1}{\alpha_i!}\Psi^{(\alpha_i)}\left(\eta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)},$$

$i=\overline{1,m}$.

Заместваме (28) и (30) в (33), откъдето намираме

$$(34)\quad x_i^{[k+1]}-x_i\le\frac{\dfrac{1}{(\alpha_i+1)!}\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^2\sum_{s=1}^{m}A_{is}\left(x_s^{[k]}-x_s\right)+\dfrac{1}{(\alpha_i+2)!}\Phi^{(\alpha_i+2)}\left(\zeta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^3}{\dfrac{1}{(\alpha_i-1)!}\left[(\alpha_i+1)\left[f^{(\alpha_i)}(x_i)\right]^2+\sum_{s=1}^{m}B_{is}\left(x_s^{[k]}-x_s\right)\right]+\dfrac{1}{\alpha_i!}\Psi^{(\alpha_i)}\left(\eta_i^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_i\right)},$$

$i=\overline{1,m}$.

Функциите $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ са цели рационални функции по базисните функции $\varphi_r(x),\ r=\overline{1,n}$ и освен това са диференцируеми и имат непрекъснати производни от произволен ред. Следователно, те са ограничени в областта на разглежданията. Същото се отнася и за коефициентите A_{is} и $B_{is},\ s=\overline{1,m}$. Нека

$$(35)\quad \begin{aligned} &A \overset{\text{def}}{=\!=} \max_{s,i=\overline{1,m}} \left\{ \sup \left| A_{is} \right| \right\},\ B \overset{\text{def}}{=\!=} \max_{s,i=\overline{1,m}} \left\{ \sup \left| B_{is} \right| \right\},\ M \overset{\text{def}}{=\!=} \max_{i=\overline{1,m}} \left\{ \sup \left| \Phi^{(\alpha_i+2)}(x) \right| \right\}, \\ &K \overset{\text{def}}{=\!=} \max_{i=\overline{1,m}} \left\{ \sup \left| \Psi^{(\alpha_i)}(x) \right| \right\},\ P \overset{\text{def}}{=\!=} \min_{i=\overline{1,m}} \left\{ \inf \left| f^{(\alpha_i)}(x_i) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Нека $c > 0$ и $0 < q < 1$ са реални числа така, че са изпълнени следните неравенства:

$$(36)\qquad c^2\left[mA + M(\alpha_i+2)^{-1}\right] < (\alpha_i+1)^2 \alpha_i P^2 - c(\alpha_i+1)[\alpha_i Bm + K],\ i = \overline{1,m}.$$

Предполагаме, че $\left|x_i^{[k]} - x_i\right| < cq^{3^k}$ за някое $k \in N \cup \{0\}$. От (34), (35) и (36) следва че

$$\left|x_i^{[k+1]} - x_i\right| \le \frac{\dfrac{1}{(\alpha_i+1)!} mA\left(cq^{3^k}\right)^3 + \dfrac{1}{(\alpha_i+2)!} M\left(cq^{3^k}\right)^3}{\dfrac{\alpha_i+1}{(\alpha_i-1)!} P^2 - \dfrac{1}{(\alpha_i-1)!} Bmcq^{3^k} - \dfrac{1}{\alpha_i!} Kcq^{3^k}} < cq^{3^{k+1}},\ i = \overline{1,m}.$$

С това доказателството, че метод (21) има трети ред на сходимост е завършено.

Забележка 1.2.1. Полиномът $Q_i^{[k]}(x)$ е определен с точност до произволен ненулев множител, защото във формула (21) участва само частното $Q_i'^{[k]}(x)\left[Q_i^{[k]}(x)\right]^{-1}$.

Пример 1.2.3. Въведеното понятие еквивалентни функции (Определение 1.2.1) позволява да се получат методи за едновременно намиране от методи за индивидуално търсене на корени на полиноми. За ЕНВК на (1) ще получим локално еквивалентен метод, на метода за индивидуално търсене на корените на Krishnamurthy и Sen [42] от 1976 г.

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right)}{f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)},\quad i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Тъй като ще разгледаме случая, когато $f(x)$ е алгебричен полином със старши коефициент 1, то $f^{(\alpha_i)}(x)$ може да се запише във вида

$$f^{(\alpha_i)}(x)=\alpha_i!(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}...(x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}...(x-x_m)^{\alpha_m}+(x-x_i)Z_i(x),$$

където полинома $Z_i(x)$ е от степен $n-\alpha_i-1$. По-нататък разглеждаме

$$f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)=\alpha_i!\left(x_i^{[k]}-x_1^{[k]}+x_1^{[k]}-x_1\right)^{\alpha_1}...\left(x_i^{[k]}-x_{i-1}^{[k]}+x_{i-1}^{[k]}-x_{i-1}\right)^{\alpha_{i-1}}$$

$$\times\left(x_i^{[k]}-x_{i+1}^{[k]}+x_{i+1}^{[k]}-x_{i+1}\right)^{\alpha_{i+1}}...\left(x_i^{[k]}-x_m^{[k]}+x_m^{[k]}-x_m\right)^{\alpha_m}+\left(x_i^{[k]}-x_i\right)Z_i\left(x_i^{[k]}\right).$$

След разкриване на скобите във всички събираеми с изключение на члена

$$\alpha_i!\left(x_i^{[k]}-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\left(x_i^{[k]}-x_2^{[k]}\right)^{\alpha_2}...\left(x_i^{[k]}-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x_i^{[k]}-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}...\left(x_i^{[k]}-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}$$

ще се съдържа израз от вида $x_j^{[k]}-x_j$ на някаква положителна степен. Следователно,

$$f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)\equiv\alpha_i!\left(x_i^{[k]}-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\left(x_i^{[k]}-x_2^{[k]}\right)^{\alpha_2}...\left(x_i^{[k]}-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}$$

$$\times\left(x_i^{[k]}-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}...\left(x_i^{[k]}-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}\bmod\left(x_j^{[k]}-x_j\right),i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}.$$

Полагаме $Q_i^{[k]*}(x)=\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\left(x-x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j}$ и записваме

$$f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)\equiv\alpha_i!\,Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)\bmod\left(x_j^{[k]}-x_j\right),i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}.$$

Следователно,

$$f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)=\alpha_i!\,Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)+\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\left(x_j^{[k]}-x_j\right),$$

където A_{ij} са ограничени функции на x_i и $x_i^{[k]}$, $i=\overline{1,m}$.

В достатъчно малка околност на корените е изпълнено, че

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left(x_j^{[k]} - x_j\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)} \right| < 1.$$

Следователно,

$$\frac{1}{f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right)} = \frac{1}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)} \left(1 - \theta_i \frac{\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left(x_j^{[k]} - x_j\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)} \right),$$

където $0 < \theta_i < 1$ и

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)} - \theta_i f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right) \frac{\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left(x_j^{[k]} - x_j\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)}.$$

Изразът $\theta_i f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right) \frac{\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left(x_j^{[k]} - x_j\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)}$ е от втора степен относно разликата $\left|x_i^{[k]} - x_i\right|, i = \overline{1,m}$. Така полученият метод за ЕНВК

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \frac{f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right)}{\alpha_i!\, Q_i^{[k]*}\left(x_i^{[k]}\right)}, \ i = \overline{1,m},\ k = 0,1,2,\ldots$$

съвпада с метода на Семерджиев и Тамбуров [33] за търсене на нули на полиноми по зададена чебишова система за частния случай, когато чебишовата система функции е $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Пример 1.2.4. Да разгледаме приложението на метода (21) в случая, когато $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x, \ldots, \varphi_n(x) = x^n$, т. е. $f(x)$ е от вида $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. От (20) получаваме

$$
f(x) = \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \dots & x^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\
0 & 1 & 2x_1 & \dots & nx_1^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & x_1^{n-\alpha_1+1}\prod\limits_{p=0}^{\alpha_1-2}(n-p) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \\
0 & 1 & 2x_m & \dots & nx_m^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & x_m^{n-\alpha_m+1}\prod\limits_{p=0}^{\alpha_m-2}(n-p)
\end{vmatrix}.
$$

От условието, че полиномът $f(x)$ е еднозначно определен (с точност до ненулев множител), когато са зададени неговите корени, следва че $f(x) = K(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_m)^{\alpha_m}$. Коефициентът $K = K(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Оттук

$$
Q_i^{[k]}(x) = \frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} \left. \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \dots & x^n \\
1 & x_1^{[k]} & \left(x_1^{[k]}\right)^2 & \dots & \left(x_1^{[k]}\right)^n \\
0 & 1 & 2x_1^{[k]} & \dots & n\left(x_1^{[k]}\right)^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(x_1^{[k]}\right)^{n-\alpha_1+1}\prod\limits_{p=0}^{\alpha_1-2}(n-p) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & x_m^{[k]} & \left(x_m^{[k]}\right)^2 & \dots & \left(x_m^{[k]}\right)^n \\
0 & 1 & 2x_m^{[k]} & \dots & n\left(x_m^{[k]}\right)^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(x_m^{[k]}\right)^{n-\alpha_m+1}\prod\limits_{p=0}^{\alpha_m-2}(n-p)
\end{vmatrix} \right|_{x=x_i^{[k]}}
$$

$$
= \frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} K\left(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(x - x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j}
$$

и

$$
Q_i'^{[k]}(x) = \frac{d^{\alpha_i+1}}{dx^{\alpha_i+1}} K\left(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(x - x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j}.
$$

След пресмятане на детерминантите, за $Q_i^{[k]}(x)$ и $Q_i'^{[k]}(x)$ получаваме, че

$$Q_i^{[k]}(x) \equiv K\alpha_i!\Big[\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}$$

$$+\alpha_i\alpha_1\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_i^{[k]}\right)\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}$$

$$+\ldots+\alpha_i\alpha_m\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_i^{[k]}\right)\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m-1}\Big]$$

$$\operatorname{mod}\left(x-x_i^{[k]}\right)^2, i=\overline{1,m}$$

и

$$Q_i'^{[k]}(x) \equiv K\alpha_i!\Big[\alpha_1\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}$$

$$+\ldots+\alpha_m\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m-1}\Big]$$

$$+K\alpha_i!\alpha_i\Big[\alpha_1\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m}$$

$$+\ldots+\alpha_m\left(x-x_1^{[k]}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(x-x_{i-1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(x-x_{i+1}^{[k]}\right)^{\alpha_{i+1}}\ldots\left(x-x_m^{[k]}\right)^{\alpha_m-1}\Big]$$

$$\operatorname{mod}\left(x-x_i^{[k]}\right), i=\overline{1,m}.$$

Следователно, можем да вземем

(37) $$Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)=K\alpha_i!\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{\alpha_j}, \quad i=\overline{1,m}$$

и

(38) $$Q_i'^{[k]}(x)=K\left(\alpha_i+1\right)!\prod_{\substack{p=1\\ p\neq i}}^{m}\left(x_i^{[k]}-x_p^{[k]}\right)^{\alpha_p}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}, \quad i=\overline{1,m}.$$

От (38) и (37) намираме $\dfrac{Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}{\left(\alpha_i+1\right)Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)}=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}$, което съвпада с намереното в [59].

Пример 1.2.5. Да сравним полученото обобщение (21) с това намерено в [20]

(39) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right)\left[f^{(\alpha_i)}\left(x_i^{[k]}\right) - f^{(\alpha_i-1)}\left(x_i^{[k]}\right)Q_i'\left(x_i^{[k]}\right)\left[2Q_i\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{-1},$$

$$i = \overline{1,m}\,, k = 0,1,2,\ldots$$

По базисната система функции [20] $\left\{1, x^2, \sin 3x, \exp(-x), \left(1+x^2\right)^{-1}\right\}$ е конструиран обобщен полином имащ двойни нули $x_1 = -0.5$ и $x_2 = 3$.

k	метод (21)		метод (39)	
	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	–0.4000000000	2.8000000000	–0.4000000000	2.8000000000
1	–0.5001904855	2.9812593584	–0.5021054	2.9677106
2	–0.5000000001	2.9999296686	–0.500000081	2.99935
3	–0.5000000000	3.0000000000	–0.5000000000	2.9999999915

Забележка 1.2.2. Направените числени експерименти с използването на методи (4) и (14), съответно за ЕНВК на тригонометрични и експоненциални уравнения показват абсолютно еднакви резултати с метод (21), прилаган за съответната чебишова система. От практическа гледна точка, поради значително по-големия брой операции за изчисляването на детерминантите в метода (21), е по-добре в случаите на алгебрични, тригонометрични и експоненциални уравнения да се прилагат специализираните методи за съответния вид уравнение, дадени в дисертацията.

2. Числен метод с четвърти ред на сходимост за едновременно намиране на всички корени на алгебрични уравнения

В тази глава ще обосновем нов метод представляващ обобщение на метода на Ehrlich–Кюркчиев [16] за алгебрични уравнения. Този метод притежава четвърти ред на сходимост, ефективен е от изчислителна гледна точка и може да бъде използван за ЕНВК на алгебричен полином, когато корените могат да бъдат кратни и с известни кратности.

Нека е даден алгебричния полином

(1) $$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са неговите корени с известни кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n)$. Когато корените са прости $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_m = 1)$ Кюркчиев [16] предлага следната итерационна формула за ЕНВК

(2) $$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - A_n\left(x_i^{[k]}\right) / \left[A_n'\left(x_i^{[k]}\right) - A_n\left(x_i^{[k]}\right) W_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) / W_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) \right.$$

$$\left. + A_n\left(x_i^{[k]}\right) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_n\left(x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)^{-2} / W_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right) \right],$$

$$i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

където

$$W_p^{[k]}\left(x_p^{[k]}\right) = \prod_{l=1, l\neq p}^{n} \left(x_p^{[k]} - x_l^{[k]}\right), \quad p = \overline{1,n}.$$

Нашата цел е да обобщим (2) за случая, когато корените не са прости, т. е. когато $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ не са задължително единици.

Дефинираме

(3) $x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \alpha_i \left[S_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \alpha_j \left(x_j^{[k]} - x_i^{[k]}\right)^{-2} A_n\left(x_j^{[k]}\right) \left[S_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right) / \alpha_j \right]^{\alpha_j - 1} / Q_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right) \right]^{-1}$,

$i = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2,\ldots$,

където

$$S_p^{[k]}\left(x_p^{[k]}\right) = A_n'\left(x_p^{[k]}\right) / A_n\left(x_p^{[k]}\right) - Q_p'^{[k]}\left(x_p^{[k]}\right) / Q_p^{[k]}\left(x_p^{[k]}\right), \; p = \overline{1,m}$$

и

$$Q_p^{[k]}\left(x_p^{[k]}\right) = \prod_{l=1, l\neq p}^{m} \left(x_p^{[k]} - x_l^{[k]}\right)^{\alpha_l}, \; p = \overline{1,m}.$$

Следната теорема показва, че итерационната формула (3) е сходяща с четвърти ред на сходимост.

Теорема 2.1. [59] *Нека* c, q *и* $d \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i\neq j} \left| x_i - x_j \right|$ *са реални положителни константи, така че са изпълнени следните неравенства*

$$q < 1, \; d - 2c > 0,$$

$$2c^2 n(d-2c)^{-2} \left[c(d-2c)^{-1} + \left(1 + c(d-2c)^{-1}\right)[N + MN + M] \right] < \alpha_i, \; i = \overline{1,m},$$

където $M \stackrel{\text{def}}{=} \left[[1 + c/(d-2c)]^n - 1 \right]$ *и* $N \stackrel{\text{def}}{=} \left[\left[1 + n(c/(d-2c))^2 \right]^{n-1} - 1 \right]$.

Предполагаме, че началните приближения $x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \ldots, x_m^{[0]}$ *към корените на* (1) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *са избрани така, че се удовлетворяват следните неравенства* $\left| x_i^{[0]} - x_i \right| < cq$, $i = \overline{1,m}$. *Тогава за всяко естествено число* k *са изпълнени и неравенствата*

(4) $$\left| x_i^{[k]} - x_i \right| < cq^{4^k}, \; i = \overline{1,m}.$$

Доказателство. Нека предположим, че неравенствата (4) са изпълнени за някое естествено k. Ще докажем, че $\left| x_i^{[k+1]} - x_i \right| < cq^{4^{k+1}}$, $i = \overline{1,m}$.

Лесно може да се намери, че

(5) $$Q_i'^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) / Q_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j / \left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right),\ i = \overline{1,m}$$

и

(6) $$S_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) = \alpha_i / \left(x_i^{[k]} - x_i\right) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left(x_j - x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_j\right)\right]^{-1},\ i = \overline{1,m}.$$

Ако извадим x_i от двете страни на итерационната формула (3), след това използвайки (5), (6) и привеждайки под общ знаменател дясната страна на (3) получаваме

(7) $$x_i^{[k+1]} - x_i = \left[\alpha_i + \left(x_i^{[k]} - x_i\right)\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left(x_j - x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_j\right)\right]^{-1}\right.$$

$$\left. + \left(x_i^{[k]} - x_i\right)P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) - \alpha_i\right]\left[S_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) + P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1},\ i = \overline{1,m},$$

където

$$P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j A_n\left(x_j^{[k]}\right)\left(x_j^{[k]} - x_i^{[k]}\right)^{-2}\left[S_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right) / \alpha_j\right]^{\alpha_j - 1} / Q_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right).$$

По-нататък, от числителя и от знаменателя на (7) изнасяме съответно изразите $\left(x_i^{[k]} - x_i\right)$ и $\left(x_i^{[k]} - x_i\right)^{-1}$. Тогава (7) може да бъде записано във формата

(8) $$x_i^{[k+1]} - x_i = \left(x_i^{[k]} - x_i\right)^2\left[\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left(x_j - x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_j\right)\right]^{-1} + P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]$$

$$\times\left[\alpha_i + \left(x_i^{[k]} - x_i\right)\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \alpha_j \left(x_j - x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]} - x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]} - x_j\right)\right]^{-1} + \left(x_i^{[k]} - x_i\right)P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)\right]^{-1},$$

$i = \overline{1,m}$.

Сега преобразуваме $P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right),\ i = \overline{1,m}$ по следния начин

$$P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right)=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left(x_j^{[k]}-x_i^{[k]}\right)^{-2}\left[S_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)/\alpha_j\right]^{\alpha_j-1}\prod_{l=1}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_l\right)^{\alpha_l}\prod_{s=1,\,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}$$

$$=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left(x_j^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-2}\left[1+\left(\left(x_j^{[k]}-x_j\right)/\alpha_j\right)\sum_{l=1,\,l\neq j}^{m}\alpha_l\left(x_l-x_l^{[k]}\right)\left[\left(x_j^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{\alpha_j-1}$$

$$\times\prod_{s=1,\,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s},\ i=\overline{1,m}.$$

След като умножим числителя и знаменателя на предишния израз за $P_i^{[k]}\left(x_i^{[k]}\right),\ i=\overline{1,m}$ с $\left(x_i^{[k]}-x_j\right)$ и поставим намерения израз в (8) получаваме

$$x_i^{[k+1]}-x_i=\left(x_i^{[k]}-x_i\right)^2\left[\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left(x_j-x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\right]^{-1}\right.\tag{9}$$

$$\times\left[1-\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\prod_{s=1,\,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}\right]\Bigg]$$

$$\times\left[\alpha_i+\left(x_i^{[k]}-x_i\right)\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left(x_j-x_j^{[k]}\right)\left[\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\right]^{-1}\left[1-\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\prod_{s=1,\,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}\right]\right]^{-1},\ i=\overline{1,m},$$

където

$$R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)=\left[1+\left(\left(x_j^{[k]}-x_j\right)/\alpha_j\right)\sum_{l=1,\,l\neq j}^{m}\alpha_l\left(x_l-x_l^{[k]}\right)\left[\left(x_j^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{\alpha_j-1}.$$

Означаваме

$$Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right)\overset{\text{def}}{=\!=}1-\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\prod_{s=1,\,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s},\tag{10}$$

$$i,j=\overline{1,m},\ i\neq j.$$

Изразът за $R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)$, $j=\overline{1,m}$ може да бъде трансформиран във формата

$$(11)\quad R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)=1+\sum_{r=1}^{\alpha_j-1}\left(\alpha_j-1\right)!\left[r!\left(\alpha_j-1-r\right)!\right]^{-1}$$

$$\times\left[\left(\left(x_j^{[k]}-x_j\right)/\alpha_j\right)\sum_{l=1,l\neq j}^{m}\alpha_l\left(x_l-x_l^{[k]}\right)\left[\left(x_j^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^r,\ j=\overline{1,m}.$$

Като използваме следните неравенства

$$(12)\quad \begin{gathered}\left|x_j^{[k]}-x_l\right|\geq\left|x_j-x_l\right|-\left|x_j-x_j^{[k]}\right|\geq d-cq^{4^k}>d-c>d-2c\\ \left|x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right|\geq\left|x_j^{[k]}-x_l\right|-\left|x_l-x_l^{[k]}\right|\geq d-2cq^{4^k}>d-2c,\ l,j=\overline{1,m},\ l\neq j\end{gathered}$$

можем да намерим оценка за $\left|R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\right|$, $j=\overline{1,m}$.

Именно, от (11), (12) и $N\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}\left[\left[1+n\left(c/(d-2c)\right)^2\right]^{n-1}-1\right]$ следва, че

$$(13)\quad \left|R_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\right|\leq 1+\left(q^{4^k}\right)^2N,\ j=\overline{1,m}.$$

По-нататък, правим следната трансформация

$$Z_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\stackrel{\mathrm{def}}{=\!=}\prod_{s=1,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}$$

$$=\left[\prod_{s=1,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}-\prod_{s=2,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}\right]$$

$$+\ldots+\left[\prod_{s=m-1,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}-\prod_{s=m,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}\right]$$

$$+\left[\prod_{s=m,s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}-1\right]+1,\ j=\overline{1,m}.$$

Дефинираме $\prod_{s=m+1, s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}$ да е равно на 1. Изразът $Z_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right),\ j=\overline{1,m}$ може да бъде представен във формата

$$(14)\qquad Z_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)=1+\sum_{l=1, l\neq j}^{m}\left(x_l^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)^{-\alpha_l}\prod_{s=l+1, s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}$$

$$\times\sum_{p=1}^{\alpha_l}\left(x_j^{[k]}-x_l\right)^{\alpha_l-p}\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)^{p-1},\quad j=\overline{1,m}.$$

От друга страна имаме

$$(15)\qquad Z_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)=\prod_{s=1, s\neq j}^{m}\left[1+\left(x_s^{[k]}-x_s\right)/\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)\right]^{\alpha_s},\quad j=\overline{1,m}.$$

Сега, използвайки (12), (15) и $M\overset{\text{def}}{=\!=}\left[\left[1+c/(d-2c)\right]^{n}-1\right]$ намираме следната оценка

$$(16)\qquad \left|Z_j^{[k]}\left(x_j^{[k]}\right)\right|\leq 1+q^{4^k}M,\quad j=\overline{1,m}.$$

За да получим оценка за $Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right),\ i,j=\overline{1,m},\ i\neq j$ трансформираме този израз чрез използването на (11) и (14) както следва

$$(17)\quad Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right)=1-\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}-\left(x_i^{[k]}-x_j\right)\left(x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right)^{-1}$$

$$\times\left[\sum_{r=1}^{\alpha_j-1}\left(\alpha_j-1\right)!\left[r!\left(\alpha_j-1-r\right)!\right]^{-1}\left[\left(\left(x_j^{[k]}-x_j\right)/\alpha_j\right)\sum_{l=1, l\neq j}^{m}\alpha_l\left(x_l-x_l^{[k]}\right)\left[\left(x_j^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{r}\right.$$

$$+\sum_{l=1, l\neq j}^{m}\left(x_l^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)^{-\alpha_l}\prod_{s=l+1, s\neq j}^{m}\left(x_j^{[k]}-x_s^{[k]}\right)^{-\alpha_s}\left(x_j^{[k]}-x_s\right)^{\alpha_s}\sum_{p=1}^{\alpha_l}\left(x_j^{[k]}-x_l\right)^{\alpha_l-p}\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)^{p-1}$$

$$\left.\times\left[1+\sum_{r=1}^{\alpha_j-1}\left(\alpha_j-1\right)!\left[r!\left(\alpha_j-1-r\right)!\right]^{-1}\left[\left(\left(x_j^{[k]}-x_j\right)/\alpha_j\right)\sum_{l=1, l\neq j}^{m}\alpha_l\left(x_l-x_l^{[k]}\right)\left[\left(x_j^{[k]}-x_l\right)\left(x_j^{[k]}-x_l^{[k]}\right)\right]^{-1}\right]^{r}\right]\right],$$

$i,j=\overline{1,m},\ i\neq j.$

Използвайки (12), (13), (16) и (17) получаваме оценката

$$(18)\quad \left|Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right)\right| \le q^{4^k}\left[c(d-2c)^{-1}+\left(1+cq^{4^k}(d-2c)^{-1}\right)\left[q^{4^k}N+M\left[1+\left(q^{4^k}\right)^2 N\right]\right]\right]$$

$$i,j=\overline{1,m},\ i\neq j.$$

Сега, от (9) получаваме

$$(19)\quad \left|x_i^{[k+1]}-x_i\right| \le \left(x_i^{[k]}-x_i\right)^2\left[\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left|x_j-x_j^{[k]}\right|\left[\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\right]^{-1}\left|Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right)\right|\right]$$

$$\times\left[\alpha_i-\left|x_i^{[k]}-x_i\right|\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m}\alpha_j\left|x_j-x_j^{[k]}\right|\left[\left|x_i^{[k]}-x_j^{[k]}\right|\left|x_i^{[k]}-x_j\right|\right]^{-1}\left|Y_{ij}^{[k]}\left(x_i^{[k]},x_j^{[k]}\right)\right|\right]^{-1},i=\overline{1,m}.$$

Накрая, с помощта на неравенствата (12), оценката (18) и използвайки условията на теоремата от (19) намираме

$$\left|x_i^{[k+1]}-x_i\right| < c^2\left(q^{4^k}\right)^2 ncq^{4^k}(d-2c)^{-2}q^{4^k}\left[c/(d-2c)+\left(1+cq^{4^k}(d-2c)^{-1}\right)\left[q^{4^k}N+M\left[1+\left(q^{4^k}\right)^2N\right]\right]\right]$$

$$\times\left[\alpha_i-c^2\left(q^{4^k}\right)^2 n(d-2c)^{-2}q^{4^k}\left[c(d-2c)^{-1}+\left(1+cq^{4^k}(d-2c)^{-1}\right)\left[q^{4^k}N+M\left[1+\left(q^{4^k}\right)^2N\right]\right]\right]\right]^{-1}$$

$$< cq^{4^{k+1}}c^2n(d-2c)^{-2}\left[c/(d-2c)+\left(1+c(d-2c)^{-1}\right)[N+MN+M]\right]$$

$$\times\left[\alpha_i-c^2n(d-2c)^{-2}\left[c(d-2c)^{-1}+\left(1+c(d-2c)^{-1}\right)[N+MN+M]\right]\right]^{-1} < cq^{4^{k+1}},\ i=\overline{1,m}.$$

С това теорема 2.1 е напълно доказана.

Забележка 2.1. В случая когато $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=1$, нашият метод (3) съвпада с метода (2) на Кюркчиев.

Пример 2.1. За алгебричния полином (от пример 1.1.4)

$$A_6(x)=x^6-6x^5+50x^3-45x^2-108x+108,$$

имащ нули $x_1=-2$, $x_2=1$ и $x_3=3$ с кратности съответно $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$ и $\alpha_3=3$ използвайки начални приближения $x_1^{[0]}=-3$,

$x_2^{[0]} = 0.1$, $x_3^{[0]} = 4$ с помощта на метод (3) бяха намерени корените с точност 18 десетични знака само след 3 итерации.

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	-3.00000000000000000	0.100000000000000000	4.00000000000000000
1	-1.98938060918119354	0.995064651338749428	3.02604710332169412
2	-1.99999999967737963	0.999999994237752166	3.00000000683325288
3	-2.00000000000000000	1.000000000000000000	3.00000000000000000

3. Числен метод с ред на сходимост t за решаване на система нелинейни уравнения

В тази глава ще разгледаме задачата за решаване на уравнения в R_n. Задачата за решаване на общи операторни уравнения е разгледана от редица автори (Канторович и Акилов [11], Ortega и Rheinboldt [81], Collatz [12]), но на практика основно се прилага методът на Newton–Канторович, разработен за най-често срещания случай на уравнения в R_n (система от n нелинейни алгебрични или трансцендентни уравнения с n неизвестни). Тук ще разгледаме итерационни процедури (процеси) именно за този най-важен за практиката случай. Към тези процедури принадлежи класическият метод на Newton. Тук итерационната формула на Обрешков [22] също е обобщена в R_n. Разгледан е и общ итерационен метод с ред на сходимост t, от който като частни случаи се получават метода на Newton ($t=2$) и метода на Обрешков ($t=3$). Доказана е сходимостта на получените методи и е обоснован редът им на сходимост. Разработката се базира на обобщената формула на Taylor. Приведени са резултати от числени експерименти за методите от ред II, III, IV и V, които потвърждават изложената в тази глава теория.

Нека е дадена системата уравнения

(1) $$f_i(\vec{x})=0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Предполагаме, че f_i и частните производни на тези функции от достатъчно висок ред са непрекъснати в околност на решението $\vec{\xi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. От формулата на Taylor получаваме

(2) $$0 = f_i(\vec{\xi}) = f_i(\vec{x}_{(k)}) + f_{ij}^{(1)}(\xi^i - x_{(k)}^j) + O_i(\varepsilon^2),$$

където $\vec{x}_{(k)}(x_{(k)}^1, x_{(k)}^2, ..., x_{(k)}^n)$е векторът на k-тото приближение към решението, $h^j = \xi^j - x_{(k)}^j$ и $\varepsilon = \max_j |h^j|$.

С $f_{ij}^{(1)} = \left\{ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{\vec{x}_{(k)}}$ сме означили матрицата от първите частни производни на функциите f_i.

Ще въведем норма на многомерна матрица по следния начин: $\|a_{ijl...s}\| = \max_i \sum_j \sum_l ... \sum_s |a_{ijl...s}|$.

Да разгледаме

$$|a_{ijl...s} a^j b^l ... c^s| \le \|a^j\| \|b^l\| ... \|c^s\| \sum_j \sum_l ... \sum_s |a_{ijl...s}|$$
$$\le \|a^j\| \|b^l\| ... \|c^s\| \max_i \sum_j \sum_l ... \sum_s |a_{ijl...s}| \le \|a_{ijl...s}\| \|a^j\| \|b^l\| ... \|c^s\|.$$

По този начин установихме, че е изпълнено

(3) $$\|a_{ijl...s} a^j b^l ... c^s\| \le \|a_{ijl...s}\| \|a^j\| \|b^l\| ... \|c^s\|.$$

Като следствие от (3) $\|\vec{h}\| = \max_j |h^j|$ и $\|f^{(1)}\| = \max_i \sum_{j=1}^n |f_{ij}^{(1)}|$.

Предполагаме, че $\{f_{ij}^{(1)}\}$ е неизродена. Ще означим с $\{f_{(1)}^{sl}\}$ обратната матрица на $\{f_{ij}^{(1)}\}$. В този параграф ще прилагаме правилото на Айнщайн, според което, ако в едно произведение има еднакви горен и долен индекс това означава, че имаме сумиране по този индекс от 1 до n. От приетите означения следват следните две условия

(4) $$f_{ij}^{(1)} f_{(1)}^{jl} = \delta_i^l$$

и

(5) $$f_{(1)}^{sj} f_{jl}^{(1)} = \delta_l^s,$$

където δ_i^l е символът на Кронекер $\delta_i^l = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ 1, & i = l \end{cases}$.

Умножаваме лявата и дясната страна на (2) с $f_{(1)}^{li}$ и получаваме $0 = f_{(1)}^{li} f_i(\vec{x}_{(k)}) + f_{(1)}^{li} f_{ij}^{(1)}(\xi^i - x_{(k)}^j) + f_{(1)}^{li} O_i(\varepsilon^2)$. От (5) следва $0 = f_{(1)}^{li} f_i(\vec{x}_{(k)}) + \delta_j^l h^j + f_{(1)}^{li} O_i(\varepsilon^2)$. Означаваме $f_{(1)}^{li} O_i(\varepsilon^2)$ с $O^l(\varepsilon^2)$ и решаваме последните уравнения относно h^l. По този начин получаваме

(6) $$h^l = -f_{(1)}^{li} f_i + O^l(\varepsilon^2).$$

Да означим

(7) $$H_1^j = -f_{(1)}^{jl} f_l .$$

От (6) и (7) следва

(8) $$h^l = H_1^l + O^l(\varepsilon^2).$$

Известно е, че

$$O_i(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^l}\right)_{\vec{x}_{(k)} + \theta(\vec{\xi} - \vec{x}_{(k)})} h^j h^l ,$$

където $0 < \theta < 1$. Поради непрекъснатостта на частните производни на функциите f_i можем да считаме, че съществува положително число M_2, такова, че в достатъчно малка околност на решението $\vec{\xi}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ е изпълнено неравенството $\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^l}\right| < M_2$ за $\forall j$ и $\forall l$. В резултат от това получаваме следната оценка

$$\left|O_i(\varepsilon^2)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^l}\right| \left|h^j\right| \left|h^l\right| \leq \frac{1}{2} n^2 M_2 \varepsilon^2$$

От това, че матрицата $\left\{f_{ij}^{(1)}\right\}$ е неизродена, следва, че $\left\|f_{(1)}^{il}\right\|$ е положително число.

Валидна е следната оценка

(9) $$\left\|O^i\left(\varepsilon^2\right)\right\| \leq \left\|f_{(1)}^{ij}\right\|\left\|O_j\left(\varepsilon^2\right)\right\|.$$

Методът на Newton се получава, когато

(10) $$x_{(k+1)}^s = x_{(k)}^s + H_1^s.$$

Като използваме връзката (10) намираме

$$\xi^s - x_{(k+1)}^s = \xi^s - x_{(k)}^s - H_1^s = h^s - H_1^s = O^s\left(\varepsilon^2\right).$$

Следователно, в сила е оценката

$$\left\|\xi^s - x_{(k+1)}^s\right\| = \left\|O^s\left(\varepsilon^2\right)\right\| \leq \frac{1}{2}n^2 M_2 \varepsilon^2 \left\|f_{(1)}^{il}\right\|,$$

откъдето следва, че методът (10) е от втори ред относно ε.

Ако във формулата на Taylor отчетем и членовете от втора степен относно h^i получаваме

(11) $$0 = f_i + f_{ij}^{(1)} h^j + \frac{1}{2} f_{ijl}^{(1)} h^j h^l + \overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right),$$

където

$$\overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right) = \frac{1}{6} \left.\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^l \partial x^j \partial x^s}\right|_{\vec{x}_{(k)}+\theta\left(\vec{\xi}-\vec{x}_{(k)}\right)} h^l h^j h^s.$$

Ясно е, че $\left|\overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^l \partial x^j \partial x^s}\right| \left|h^l\right| \left|h^j\right| \left|h^s\right|$. Както по-горе съществува константа M_3, такава, че $\left|\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^l \partial x^j \partial x^s}\right| < M_3$, за всяко l, j и s. Оттук следва, че $\left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right)\right\| \leq \frac{1}{6} n^3 M_3 \varepsilon^3$.

От (8) и (11) при направените предположения, получаваме

(12) $$0 = f_i + \left(f_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2} f_{ijl}^{(1)} H_1^l \right) h^j + O_i\left(\varepsilon^3\right),$$

където, за краткост сме положили $O_i\left(\varepsilon^3\right) = \overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right) + \frac{1}{2} f_{ijl}^{(1)} h^j O^l\left(\varepsilon^2\right)$.

Нека $\left\{f_{(2)}^{ij}\right\}$ е обратната матрица на матрицата $\left\{f_{ij}^{(2)}\right\}=\left\{f_{ij}^{(1)}+\frac{1}{2}f_{ijl}^{(1)}H_1^l\right\}$. Матрицата $\left\{f_{(2)}^{ij}\right\}$ съществува, тъй като в достатъчно малка околност на решението матрицата $\left\{f_{ij}^{(2)}\right\}$ е произволно близка до $\left\{f_{ij}^{(1)}\right\}$ и следователно, е неизродена. Като заместим в (12) ще получим

(13) $$0=f_i+f_{ij}^{(2)}h^j+O_i\left(\varepsilon^3\right).$$

Аналогично на проведените преди това разглеждания решаваме (13) относно h^j и намираме

(14) $$h^l=H_2^l+O^l\left(\varepsilon^3\right),$$

където сме означили $H_2^l=-f_{(2)}^{li}f_i$ и $O^l\left(\varepsilon^3\right)=f_{(2)}^{li}O_i\left(\varepsilon^3\right)$. Така се получава аналог на формулата на Обрешков за системи уравнения

(15) $$x_{(k+1)}^s=x_{(k)}^s+H_2^s.$$

Както при метода на Newton намираме

$$\xi^s-x_{(k)}^s-H_2^s=h^s-H_2^s=\xi^s-x_{(k+1)}^s=O^s\left(\varepsilon^3\right).$$

От израза за $O_i\left(\varepsilon^3\right)$ получаваме следните оценки

$$\left\|O_i\left(\varepsilon^3\right)\right\|\le\left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^3\right)\right\|+\frac{1}{2}\left\|f_{ijl}^{(1)}h^j\right\|\left\|O^l\left(\varepsilon^2\right)\right\|.$$

От друга страна имаме

$$\sum_j\left|f_{ijl}^{(1)}h^j\right|\le\max_i\sum_k\left|f_{ijl}^{(1)}\right|\left|h^j\right|\le\varepsilon nM_2.$$

Следователно е в сила и оценката $\left\|f_{ijl}^{(1)}h^j\right\|\le\varepsilon nM_2$.

От получените оценки следва, че

$$\left\|O_i\left(\varepsilon^3\right)\right\|\le\frac{1}{6}n^3M_3\varepsilon^3+\frac{1}{2}\varepsilon nM_2\frac{1}{2}n^2M_2\varepsilon^2=\left[\frac{1}{6}n^3M_3+\frac{1}{4}n^3\left(M_2\right)^2\right]\varepsilon^3\overset{\text{def}}{=\!=}M_3^*\varepsilon^3$$

и

(16) $$\left\| \xi^s - x^s_{(k+1)} \right\| = \left\| O^s\left(\varepsilon^3\right) \right\| \le \left\| f^{ij}_{(2)} \right\| M^*_3 \varepsilon^3 ,$$

което показва, че методът е от трети ред относно ε.

В случая, когато в развитието на Taylor отчетем и членовете от трета степен относно h^s, се получава

(17) $$0 = f_i + f^{(1)}_{ij} h^j + \frac{1}{2} f^{(1)}_{ijs} h^j h^s + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} h^j h^s h^l + \overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right).$$

Като използваме (14) системата уравнения (17) добива вида

$$0 = f_i + \left(f^{(1)}_{ij} + \frac{1}{2} f^{(1)}_{ijs} H^s_2 + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} H^s_2 H^l_2 \right) h^j$$

$$+ \frac{1}{2} f^{(1)}_{ijs} O^s\left(\varepsilon^3\right) h^j + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} \left[O^s\left(\varepsilon^3\right) H^l_2 + O^l\left(\varepsilon^3\right) H^s_2 + O^s\left(\varepsilon^3\right) O^l\left(\varepsilon^3\right) \right] h^j + \overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right).$$

За краткост въвеждаме вектора $O_i\left(\varepsilon^4\right)$ и матрицата $f^{(3)}_{ij}$ както следва:

$$O_i\left(\varepsilon^4\right) = \frac{1}{2} f^{(1)}_{ijs} O^s\left(\varepsilon^3\right) h^j + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} O^s\left(\varepsilon^3\right) H^l_2 h^j + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} O^l\left(\varepsilon^3\right) H^s_2 h^j$$

$$+ \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} O^s\left(\varepsilon^3\right) O^l\left(\varepsilon^3\right) h^j + \overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right),$$

(18) $$f^{(3)}_{ij} = f^{(1)}_{ij} + \frac{1}{2} f^{(1)}_{ijs} H^s_2 + \frac{1}{6} f^{(1)}_{ijsl} H^s_2 H^l_2 .$$

Съкратеният запис на системата е

(19) $$0 = f_i + f^{(3)}_{ij} h^j + O_i\left(\varepsilon^4\right).$$

Решаваме (19) относно h^j и получаваме

(20) $$h^j = -f^{js}_{(3)} f_s - f^{js}_{(3)} O_s\left(\varepsilon^4\right).$$

Тук $\left\{ f^{js}_{(3)} \right\}$ е матрица обратна на $\left\{ f^{(3)}_{sl} \right\}$. По този начин системата (20) се записва във вида

(21) $$h^j = H^j_3 + O^j\left(\varepsilon^4\right),$$

където е положено $O^j\left(\varepsilon^4\right) = -f^{js}_{(3)} O_s\left(\varepsilon^4\right)$ и $H^j_3 = -f^{js}_{(3)} f_s$.

Новополученият итерационен метод за решаване на системата нелинейни уравнения е

(22) $$x^s_{(k+1)} = x^s_{(k)} + H^s_3 .$$

Образуваме

$$\xi^s - x^s_{(k+1)} = \xi^s - x^s_{(k)} - H^s_3 = h^s - H^s_3 = O^s\left(\varepsilon^4\right).$$

Валидни са следните оценки

$$\left\|O_i\left(\varepsilon^4\right)\right\| \le \frac{1}{2}\left\|f^{(1)}_{ijs}\right\|\left\|O^s\left(\varepsilon^3\right)\right\|\left\|h^j\right\| + \frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|\left\|O^s\left(\varepsilon^3\right)\right\|\left\|H^l_2\right\|\left\|h^j\right\|$$

$$+\frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|\left\|O^l\left(\varepsilon^3\right)\right\|\left\|H^s_2\right\|\left\|h^j\right\| + \frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|\left\|O^s\left(\varepsilon^3\right)\right\|\left\|O^l\left(\varepsilon^3\right)\right\|\left\|h^j\right\| + \left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right)\right\|$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|f^{(1)}_{ijs}\right\|M^*_3\varepsilon^4 + \frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|M^*_3\varepsilon^4\left\|H^l_2\right\| + \frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|\left\|H^s_2\right\|M^*_3\varepsilon^4$$

$$+\frac{1}{6}\left\|f^{(1)}_{ijsl}\right\|\left(M^*_3\right)^2\varepsilon^7 + \left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right)\right\|.$$

и

$$\left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^4\right)\right\| = \left\|\frac{1}{4!}f^{(1)}_{ijslm}h^j h^s h^l h^m\right\| \le \frac{1}{4!}\left\|f^{(1)}_{ijslm}\right\|\varepsilon^4 ,$$

от които следва, че

(23)
$$\left\|O_i\left(\varepsilon^4\right)\right\| \le M^*_4\varepsilon^4 ,$$
$$\left\|\xi^s - x^s_{(k+1)}\right\| = \left\|O^s\left(\varepsilon^4\right)\right\| \le \left\|f^{js}_{(3)}\right\|\left\|O_s\left(\varepsilon^4\right)\right\| \le \left\|f^{js}_{(3)}\right\|M^*_4\varepsilon^4 ,$$

където M^*_4 е положителна константа, съществуването на която се гарантира от достатъчната гладкост на функциите. Неравенствата (23) гарантират, че новият метод (22) има четвърти ред на сходимост относно ε.

Ще направим обобщение както на метода на Newton, така и на метода на Обрешков като разгледаме общия случай, когато във формулата на Taylor включим всички членове до степен $t-1$ относно h^s. Формулата на Taylor има вида

(24) $$0 = f_i + f^{(1)}_{ii_1}h^{i_1} + \frac{1}{2!}f^{(1)}_{ii_1i_2}h^{i_1}h^{i_2} + \frac{1}{3!}f^{(1)}_{ii_1i_2i_3}h^{i_1}h^{i_2}h^{i_3} + \ldots + \frac{1}{(t-1)!}f^{(1)}_{ii_1i_2\ldots i_{t-1}}h^{i_1}h^{i_2}\ldots h^{i_{t-1}} + \overline{O}\left(\varepsilon^t\right).$$

Следвайки схемата, по която бяха разработени итерационните методи на Newton и Обрешков предполагаме, че в предидущите разглеждания са установени

(25) $$h^j = H_{t-2}^j + O^j\left(\varepsilon^{t-1}\right)$$

и

(26) $$\left\|O_i\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\| \le M_{t-1}^{*}\varepsilon^{t-1}$$

Тогава като заместим h^j от (25) в (24) получаваме

(27) $$0 = f_i + \left(f_{ii_1}^{(1)} + \frac{1}{2!}f_{ii_1i_2}^{(1)}H_{t-2}^{i_2} + \frac{1}{3!}f_{ii_1i_2i_3}^{(1)}H_{t-2}^{i_2}H_{t-2}^{i_3} + \ldots + \frac{1}{(t-1)!}f_{ii_1i_2\ldots i_{t-1}}^{(1)}H_{t-2}^{i_2}H_{t-2}^{i_3}\ldots H_{t-2}^{i_{t-1}}\right)h^{i_1}$$

$$+\frac{1}{2!}f_{ii_1i_2}^{(1)}O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)h^{i_1} + \frac{1}{3!}f_{ii_1i_2i_3}^{(1)}\left(O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3} + O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_2} + O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right)h^{i_1}$$

$$+\ldots+\frac{1}{(t-1)!}f_{ii_1i_2\ldots i_{t-1}}^{(1)}\left[O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3}H_{t-2}^{i_4}\ldots H_{t-2}^{i_{t-1}} + \ldots + H_{t-2}^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\ldots O^{i_{t-1}}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right.$$

$$\left. + O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\ldots\right]h^{i_1} + \overline{O}_i\left(\varepsilon^{t}\right).$$

Системата (27) записваме във вида

(28) $$0 = f_i + f_{ii_1}^{(t)}h^{i_1} + O_i\left(\varepsilon^{t}\right),$$

където сме положили

$$f_{ii_1}^{(t)} = f_{ii_1}^{(1)} + \frac{1}{2!}f_{ii_1i_2}^{(1)}H_{t-2}^{i_2} + \ldots + \frac{1}{(t-1)!}f_{ii_1i_2\ldots i_{t-1}}^{(1)}H_{t-2}^{i_2}H_{t-2}^{i_3}\ldots H_{t-2}^{i_{t-1}}$$

и

$$O_i\left(\varepsilon^{t}\right) = \frac{1}{2!}f_{ii_1i_2}^{(1)}O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)h^{i_1}$$

$$+\frac{1}{3!}f_{ii_1i_2i_3}^{(1)}\left[O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3} + O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_2} + O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right]h^{i_1}$$

$$+\ldots+\frac{1}{(t-1)!}f_{ii_1i_2\ldots i_{t-1}}^{(1)}\left[O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3}H_{t-2}^{i_4}\ldots H_{t-2}^{i_{t-1}}\right.$$

$$\left.+\ldots+H_{t-2}^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)H_{t-2}^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\ldots O^{i_{t-1}}\left(\varepsilon^{t-1}\right)+\ldots\right]h^{i_1} + \overline{O}_i\left(\varepsilon^{t}\right).$$

Елементите на обратната матрица на $\left\{f_{ii_1}^{(t)}\right\}$ означаваме с $f_{(t)}^{ii_1}$.

От системата (28) определяме h^{i_1}

(29) $$h^{i_1} = -f_{(t)}^{i_1 s} f_s + f_{(t)}^{i_1 s} O_s\left(\varepsilon^t\right).$$

За краткост полагаме $f_{(t)}^{i_1 s} O_s\left(\varepsilon^t\right) = O^{i_1}\left(\varepsilon^t\right)$ и $H_{t-1}^{i_1} = -f_{(t)}^{is} f_s$.

Формираме итерационен метод

(30) $$x_{(k+1)}^s = x_{(k)}^s + H_{t-1}^s.$$

за решаване на нелинейна система.

Да образуваме

$$\xi^s - x_{(k)}^s - H_t^s = \xi^s - x_{(k+1)}^s = h^s - H_t^s = O^s\left(\varepsilon^t\right).$$

Аналогично на разглежданията досега имаме

$$\begin{aligned}\left\|O_i\left(\varepsilon^t\right)\right\| \le \frac{1}{2!}\left\|f_{ii_1 i_2}^{(1)}\right\|\left\|O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\|\left\|h^{i_1}\right\| \\ + \frac{1}{3!}\left[\left\|f_{ii_1 i_2 i_3}^{(1)}\right\|\left\|O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\|\left\|h^{i_1}\right\| + \left\|f_{ii_1 i_2 i_3}^{(1)}\right\|\left\|O^{i_3}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\|\left\|h^{i_1}\right\| + \ldots\right] \\ + \ldots + \frac{1}{(t-1)!}\left[\left\|f_{ii_1 i_2 \ldots i_{t-1}}^{(1)}\right\|\left\|O^{i_2}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\|\left\|H_{t-1}^{i_3}\right\| \ldots \left\|H_{t-1}^{i_{t-1}}\right\|\right. \\ \left. + \ldots + \left\|f_{ii_1 i_2 \ldots i_{t-1}}^{(1)}\right\|\left\|H_{t-1}^{i_2}\right\|\left\|H_{t-1}^{i_3}\right\| \ldots \left\|O^{i_{t-1}}\left(\varepsilon^{t-1}\right)\right\| + \ldots\right]\left\|h^{i_1}\right\| + \left\|\overline{O}\left(\varepsilon^t\right)\right\|\end{aligned}$$

и

$$\left\|\overline{O}_i\left(\varepsilon^t\right)\right\| = \left\|f_{ii_1 i_2 \ldots i_t}^{(1)} h^{i_1} h^{i_2} \ldots h^{i_t}\right\| \le \left\|f_{ii_1 i_2 \ldots i_t}^{(1)}\right\|\left\|h^{i_1}\right\|\left\|h^{i_2}\right\| \ldots \left\|h^{i_t}\right\| \le \left\|f_{ii_1 i_2 \ldots i_t}^{(1)}\right\| \varepsilon^t,$$

където са пропуснати всички събираеми съдържащи множители ε^s, при $s > t$.

Като отчетем, че функциите f_i са достатъчно гладки и че в горните оценки всички събираеми са от порядъка на $O_i\left(\varepsilon^t\right)$.

Установяваме валидността на следната оценка

(31) $$\left\|O_i\left(\varepsilon^t\right)\right\| \le M_t^* \varepsilon^t,$$

където M_t^* е положителна константа.

Използвайки (31) получаваме неравенството

$$\left\|\xi^s - x_{(k+1)}^s\right\| \le \left\|O^s\left(\varepsilon^t\right)\right\| \le M_t^* \varepsilon^t \left\|f_{(t)}^{i_1 l}\right\|,$$

което доказва, че редът на сходимост на този метод е t.

Пример 3.1. За системата $\left| \begin{array}{l} 3x_1^2 x_2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^4 + x_1 x_2^3 = 1 \end{array} \right.$, като приложим описаната по-горе методика за итерационни методи при начални приближения $x_1^{[0]} = 2$ и $x_2^{[0]} = -1$, получаваме следните числени резултати, като с тъмен шрифт са отбелязани верните цифри.

Метод (10) – метод на Newton (II ред на сходимост)		
k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	2.000000000000000000	–1.000000000000000000
1	1.471204188481675390	–0.434554973821989529
2	1.160971103732131220	–0.000211512078262731
3	1.030491163618779090	0.247285062098385618
4	**0.99**5486960519633108	**0.30**2874141673445504
5	**0.9927**94407241188532	**0.3064**22485001680910
6	**0.9927799**95253887578	**0.306440446**016981499
7	**0.992779994851123249**	**0.30644044651102043**1
8	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**
9	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**

Метод (15) – метод на Обрешков (III ред на сходимост)		
k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	2.000000000000000000	–1.000000000000000000
1	1.236361502136902590	–0.102010783027205119
2	1.016236675279352840	0.283124619837572002
3	**0.992**806803517828091	**0.30**6410483449974681
4	**0.99277999948**51170731	**0.306440446**510967770
5	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**
6	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**

Метод (22) (IV ред на сходимост)		
k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	2.000000000000000000	–1.000000000000000000
1	1.132550738861533230	0.023572314322562824
2	**0.99**4110525451864892	**0.30**3989504948906135
3	**0.99277994487**6562587	**0.306440446**474358190
4	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**
5	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**

Метод (30) при $t = 5$ (V ред на сходимост)		
k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	2.000000000000000000	–1.000000000000000000
1	1.082281042482679530	0.123366196386319406
2	**0.992**837748938471569	**0.306**361894605406281
3	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**
4	**0.992779994851123249**	**0.306440446511020432**

Информационни източници

1. Ангелова, Е., Хр. Семерджиев. Методы одновременного приближенного нахождения корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, 22, № 1, 218-223.
2. Балинский, А., Б. Подлевский. Вычислительные аспекты использования матрицы Фробениуса в вопросах отделения корней многочленов. Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1999, 39, № 7, 1069-1073.
3. Березин, И., Н. Жидков. Методы вычислений. Физматгиз, 1982, М., част II.
4. Боянов, Б., Хр. Семерджиев. Числени методи. Изд-во ПУ, П., 1982.
5. Бырнев П., Дочев К., О некоторых модификациях метода Ньютона для приближённого решения алгебраических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 5, 915-920.
6. Давиденко, Д. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. Докл. Акад. Наук СССР, 1953, 88, № 4, 601-602.
7. Дочев, К. Видоизменен метод на Нютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на едно алгебрично уравнение. Физ. мат. списание, 1962, 5, № 2, 136-139.
8. Дочев, К., П. Бърнев, П. Русев. Един метод за пресмятане на корените на цели функции от Лагеров тип. Известие МИ БАН, 1969, 10, 156-160.

9. Жидков, Е., И. Макрелов, Хр. Семерджиев. Два метода для одновременного нахождения всех корней экспоненциальных уравнений. Сообщение ОИЯИ, Дубна, Р11-83-764, 1983.
10. Илиев, Л. Върху приближенията на Newton. Год. на Соф. у-тет, 1949–1950, 46, № 1, 167-171.
11. Канторович, Л., Г. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.
12. Коллатц, Л., Функциональный анализ и вычислительная математика. Мир, М., 1969.
13. Кюркчиев, Н., С. Ташев. Один метод одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраических уравнений. Докл. БАН, 1981, 34, № 8, 1053-1056.
14. Кюркчиев, Н., О некоторых модификациях метода Л. Эрлиха для приближенного решения алгебраических уравнений, Плиска, 1983, 5, 43-50.
15. Кюркчиев, Н., А. Андреев. Об одной модификации метода Вейерщрасса–Дочева порядка сходимости $R+2$ для одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. Докл. БАН, 1985, 38, № 11, 1461-1463.
16. Макрелов, Ил. Върху един числен метод за едновременно намиране на всички корени на даден тригонометричен полином. Научни трудове ПУ – Математика, 1979, 17, № 1, 205-218.
17. Макрелов, Ил., Хр. Семерджиев. О двух аналогах метода Эрлиха для одновременного нахождения всех нулей

тригонометрических и экспоненциальных полиномов. Докл. БАН, 1983, 36, № 7, 879-882.

18. Макрелов, Ил., Хр. Семерджиев. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений, если заданы их кратности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, 24, № 10, 1443-1453.
19. Макрелов, Ил., Хр. Семерджиев. Метод Дочева для обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. Докл. БАН, 1985, 38, № 10, 1323-1326.
20. Макрелов, Ил., Хр. Семерджиев, С. Тамбуров. Метод для одновременного нахождения всех нулей данного обобщенного полинома по чебышевской системе. Сердика бълг. мат. сп., 1986, 12, № 4, 351-357.
21. Обрешков, Н. Нули на полиномите. Изд-во БАН, С., 1963.
22. Обрешков, Н. Висша алгебра, Изд-во „Наука и изкуство", С., 1958.
23. Обрешков, Н. Върху численото решение на уравненията. Год. на Соф. у-т, 1963, 1, 73-83.
24. Ортега, Дж., В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Мир, М., 1975.
25. Петков, М. Числени методи на алгебрата. Изд-во „Наука и изкуство", С., 1974.
26. Савельева, Н. Компьютерно-алгебраические процедуры для задачи разделения корней алгебраических

уравнений. Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1999, 39, № 10, 1603-1619.

27. Савенко, С. Об одном итерационном методе решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1964, 4, 738-744.
28. Семерджиев, Хр., Е. Ангелова. Върху един числен метод за едновременно намиране на всички нули на даден тригонометричен полином. Науч. трудове на млади науч. работници ПУ, 1978, 6, 127-136.
29. Семерджиев, Хр. Методы одновременного приближенного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения. ОИЯИ, Р5-12485, Дубна, 1979.
30. Семерджиев, Хр. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического полинома, если заданы их кратности. Докл. БАН, 1982, 35, № 8, 1057-1060.
31. Семерджиев, Хр. Интерполяционные полиномы тригонометрического и экспоненциального типа в ньютоновской форме. Сообщение ОИЯИ, Р11-82-856, Дубна, 1982.
32. Семерджиев, Хр., С. Тамбуров. Об одном методе определения кратностей нулей алгебраических полиномов. Докл. БАН, 1984, 37, № 9, 1143-1145.
33. Семерджиев, Хр., С. Тамбуров. Метод определения всех нулей обобщенного полинома по произвольной чебышёвской системе. Сообщение ОИЯИ, Р11-85-931, Дубна, 1985.

34. Сендов, Бл., В. Попов. Числени методи – част I. Изд-во „Наука и изкуство“, С., 1976.

35. Ташев, С., Н. Кюркчиев. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. Сердика бълг. мат. сп., 1983, 9, 67-73.

36. Трауб, Дж. Итерационные методы решения уравнений. Мир, М., 1985.

37. Aberth, O. Iteration method for finding all zeros of a polynomial simultaneously. Math. Comp., 1973, 27, 339-344.

38. Asu, I. An efficient process of successive approximations. Acta math. Acad. scient. Hung., 1958, № 3-4, 291-297.

39. Bodewig, E. Quart. Appl. Math., 1949, 7, 325-333.

40. Börsch–Supan, W. A posteriori error bounds for the zeros of polynomials. Numer. Math., 1963, 5, 380-398.

41. Börsch–Supan, W. Residuenabschätzung für Polynom–Nullstellen mittels Lagrange–Interpolation. Numer. Math., 1970, 14, 287-296.

42. Channabasappa, M. A note on the computation of multiple zeros of polynomials by Newton's method. BIT 19, 1979, 134-135.

43. Cosnard, M., P. Fraigniaud. Finding the roots of a polynomial on an MIMD multicomputer. North–Holland, Parallel Comp., 1990, 15, 75-85.

44. Cosnard, M., P. Fraigniaud. Analysis of Asynchronous Polynomial Root Finding Methods on a Distributed Memory

Multicomputer. IEEE Trans. on Parallel and Distributed Sys., 1994, 5, № 6, 639-648.

45. DURAND, E. Solution numerique des equations algebraique (tome I), Masson, Paris, 1960.

46. EHRLICH, L. A modified Newton Method for Polynomials, Comm. ACM 10, 1967, № 2, 107-113.

47. ELDON, H., P. MERREL. A family of root finding methods. Numer. Math., 1977, 27, № 3, 257-269.

48. FARMER, M., G. LOIZOU. An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1977, 82, 427-437.

49. FLEURY, E., P. FRAIGNIAUD. Fine and coarse grained parallel implementations of polynomial root finding algorithms. World Cong. of Nonlin. Analysts'92, V. Lakshmikantham, eds., 1996, 3871-3884.

50. FRAIGNIAUD, P. The Durand–Kerner polynomials roots–finding method in case of multiple roots. BIT 31, 1991, 112-123.

51. GARGANTINI, I. Further applications of circular arithmetic: Schroeder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials. SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, 497-510.

52. GARGANTINI, I. The numerical stability of simultaneous iteration via square-rooting. Comput. Math. Appl., 1979, 5, 25-31.

53. HEINZ, Y. Polynom – Nullstellen mit dem Rechenstab. Prax. Math., 1963, 5, № 4, 97-99.

54. ILIEFF, L., K. DOCEV. Über Newtonsche Iterationen. Univ. Dresden Wiss. Z. Techn., 1963, 12, № 1, 117-118.
55. ILIEFF, L. Laguerre entire functions. Sofia, Publishing house of the Bulgarian Academy of Sciences, 1987.
56. ILIEV, A. A generalization of Obreshkoff-Ehrlich method for multiple roots of polynomial equations. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 1996, 49, № 5, 23-26.
57. ILIEV, A. Generalization of Ehrlich-Kjurkchiev method for multiple roots of algebraic equations. Serdica Math. J., 1998, 24, 215-224.
58. ILIEV, A., KHR. SEMERDZHIEV. Some Generalizations of the Chebyshev Method for Simultaneous Determination of All Roots of Polynomial Equations. Comp. Math. and Math. Phys., 1999, 39, № 9, 1384-1391.
59. ILIEV, A. A Generalization of Obreshkoff-Ehrlich Method for Multiple Roots of Algebraic, Trigonometric and Exponential Equations. Math. Balk., New Series, 2000, 14, № 1-2, (in print).
60. ILIEV, A., KHR. SEMERDZHIEV. On a generalisation of Obreshkoff–Ehrlich method for simultaneous extraction of all roots of polynomials over an arbitrary chebyshev system. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 2000, 53, № 7, (in print).
61. JENKINS, M., J. TRAUB. A three – stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration. SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7, № 4, 545-566.
62. KERNER, I. Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen. Numer. Math., 1966, 8, 290-294.

63. KERNER, I. Algorithm 283. Comm. ACM, 1966, 9, 273.

64. KJURKCHIEV, N., S. MARKOV. Two interval methods for algebraic equations with real roots. Pliska, 1983, 5, 118-131.

65. KJURKCHIEV, N., A. ANDREEV. Ehrlich's methods with a raised speed of convergence. Serdica, 1987, 13, 52-57.

66. KJURKCHIEV, N., A. ANDREEV. On the Generalization of the Alefeld–Herzberger's Method. Computing, 1992, 47, 355-360.

67. KYURKCHIEV, N. Initial approximations and methods for finding all roots with known multiplicities. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 2000, 53, № 2, (in print).

68. LAGOUANELL, J. Sur une methode de calcule de l'ordre de multiplicité des zéros d'un polynome. C. R. Acad. Sci. AB 262, Paris, A626-A627, 1966.

69. LANCASTER, P. Convergence of the Newton – Raphson method for arbitrary polynomials. Math. Gaz., 1964, 48, № 365, 291-295.

70. LAWRENCE, T., E. LAWRENCE. A new algorithm for factoring polynomials. Proc. IEEE, 1972, 60, № 6, 733-738.

71. LOIZOU, G. Une Note sur le procédé itératif de Marica Presic. C. R. Acad. Sc. Paris, 1982, t. 295, série I, 707-710.

72. MAEHLY, V., Zur iterativen Aufl sung algebraischer Gleichungen. Z. Angew. Math. Phys., 1954, 5, 260-263.

73. MAKRELOV, I., KHR. SEMERDZHIEV. On the Convergence of Two Methods for the Simultaneous Finding of all Roots of Exponential Equations. IMA Journal of Numerical Analysis, 1985, 5, № 2, 191-200.

werden kann als ein Produkt aus Linearen Funktionen derselben Veränderlichen. Ges. Werke 3, 1903, 251-269.

93. WEISENHORN, F. Ein Beitrag zur Bestimmung der Nullstellen aus einem Polynom in Summenform und aus der Summe von Polynomen in Produktform. AËU – Arch. Elektron. Übertragungstech, 1970, 24, 372-378.

94. WERNER, W. Über die Konvergenz eines Nullstellenverfahrens der Ordnung $i+2$ bei mehrfachen Nullstellen. Z. Angew. Math., 1980, 60, № 7, 328–330.

95. WYNN, P. On a cubically convergent process for determining the zeros of certain function. Math. Tables and other Hids comput., 1956, 10, № 54, 97-100.

За историята на най-съществените постижения при търсене нули на полиноми е използвана информация от Wolfram Research, Inc.

http://www.wolfram.com/posters/quintic/timeline.html