СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ
ПО ИНФОРМАТИКА И ПРИЛОЖНА
МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

Всеволод Иванов Иванов

ОПТИМИЗАЦИЯ НА ИЗПЪКНАЛИ И ПСЕВДОИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен
„доктор“
Научна специалност „Изследване на операциите“
шифър 01.01.11

Научен консултант:
проф. д-р Дочо Тодоров Дочев

Варна, 2003г.

2' ~~1~~ 26

Съдържание

Въведение

Минимизацията на изпъкналите функции заема особено важно място в изследване на операциите. Една от причините за това е, че голяма част от оптимизационните модели са изпъкнали. Би могло да се добави, че тези функции притежават много полезни свойства, което улеснява изучаването им. В тази дисертация ще се спрем върху едно тяхно свойство. Ще обърнем специално внимание на силно изпъкналите и на строго изпъкналите функции.

Ще акцентираме и върху псевдоизпъкналите функции. Те са тясно свързани с изпъкналите функции. Всяка диференцируема изпъкнала функция е псевдоизпъкнала. Голяма част от полезните им свойства са отражение на резултат, свързан с изпъкналите функции. Затова тяхното разглеждане не може да се отдели от изпъкналите функции.

Дефиниция. *(Псевдоизпъкнала функция.)* Диференцируемата числова функция f, дефинирана в някакво отворено множество в крайномерното евклидово пространството $\mathbf{R}^n$, съдържащо множеството S, се нарича псевдоизпъкнала в точката $x \in S$, ако е изпълнена импликацията

$$y \in S,\ f(y) < f(x) \quad \Longrightarrow \quad \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0.$$

Тук с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е означено скаларното произведение в пространството

$\mathbf{R}^n$. Наричаме f псевдоизпъкнала в множеството S, ако тя е псевдоизпъкнала във всяка точка $x \in S$.

Ако S е изпъкнало множество и f е псевдоизпъкнала в S, то условието

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \text{за всяко} \quad y \in S$$

е необходимо и достатъчно f да има глобален минимум върху S в точката x. Така, че принципът на Ферма, отнесен до задачата на псевдоизпъкналото оптимиране, се явява необходимо и достатъчно условие за глобален минимум.

В тази дисертация ще разглеждаме преди всичко недиференцируеми псевдоизпъкнали функции. Ще анализираме и връзката им с други два по-широки класа обобщено изпъкнали функции - квазиизпъкналите и инвексните. Последните два класа, в случая, когато е запазена диференцируемостта, съдържат и изпъкналите, и псевдоизпъкналите функции.

Ще подчертаем връзката на всички споменати дотук функции с оптимизационната задача. И четирите класа касаят задачата за намиране на глобален минимум. Техните свойства са полезни най-вече за глобалната оптимизация.

Интересът към псевдоизпъкналите функции се поддържа и от факта, че много голям брой математически модели са псевдоизпъкнали, без да са изпъкнали. Не е малък и броят на обобщено изпъкналите модели, които не са псевдоизпъкнали. Голяма част от споменатите модели са свързани с негладкост.

Всеобщо признание изпъкналите функции са получили още в началото на века след работите на Jensen [45, 46]. Псевдоизпъкналите функции са въведени независимо от Tuy (1964г.) [80] и Mangasarian (1965г.) [55]. По-късно понятието псевдоизпъкналост се пренася върху недиференцируемите функции. De Finetti [24] е дефинирал квазиизпъкналите функции през 1949г. Hanson [35] е въвел инвексните функции сравнително отскоро - през 1981г., а силно изпъкналите - Поляк [89] през 1966г. Оптимизацията на негладки и недиференцируеми функции е направление, което се развива вече почти четири десетилетия.

Нека $\mathbf{E}$ е линейно топологическо пространство, X е непразно отворено множество в $\mathbf{E}$ и S е подмножество на X. Множеството на реалните числа ще означаваме с $\mathbf{R}$, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ е разширената числова права, включваща двата безкрайни елемента ∞ и $-\infty$.

Дефиниция. *(Функция, псевдоизпъкнала по отношение на някаква обобщена производна.)* Нека функцията f е дефинирана върху множеството X и $h : X \times \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$ е обобщена производна по направление на f. Функцията f се нарича *(строго) псевдоизпъкнала по отношение на производната* h в точката $x \in S$, ако е изпълнена импликацията

$$y \in S,\ f(y) < f(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x, y - x) < 0$$

$$(y \in S,\ y \neq x,\ f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x, y - x) < 0).$$

Тук с $h(x, y - x)$ е означена производната на f в точката x по направление $y - x$. Наричаме f (строго) псевдоизпъкнала в множеството S по отношение на производната h, ако f е (строго) псевдоизпъкнала по отношение на производната h във всяка точка $x \in S$. Функцията f се нарича (строго) псевдовдлъбната, ако $-f$ е (строго) псевдоизпъкнала.

Измежду недиференцируемите функции най-голямо приложение в оптимизацията имат локално липшицовите. Голяма част от обобщените производни по направление са дефинирани за локално липшицови функции. Други обобщени производни са крайни, когато функцията е локално липшицова. Това оправдава големият интерес към тях и в частност към локално липшицовите псевдоизпъкнали функции, които ще наричаме по-кратко ЛЛПИ. За първи път локално липшицови псевдоизпъкнали по отношение на обобщената производна на Кларк функции са разгледани от Mifflin (1977г.) [64].

В първата глава на настоящата дисертация са разгледани три характеризации от първи ред на псевдоизпъкналите функции. Първата от тях е нова. Известно е, че всяка диференцируема псевдоизпъкнала функция е инвексна. Тогава възниква обратният въпрос: кога една инвексна функция е псевдоизпъкнала. Отговор дава първата характеризация. Неравенството, което изразява характеризацията, е послужило за основа при дефинирането на клас от функции, наречени силно псевдоизпъкнали (виж статията на Weir (1990г.) [83], както и литературата, цитирана там). Характеризацията показва, че всяка псевдоизпъкнала функция е „силно" псевдоизпъкнала. Разгледан е специално случаят, когато функцията е строго псевдоизпъкнала.

По подобие на първата характеризация на псевдоизпъкналите функции е получена характеризация на псевдомонотонните обобщени производни по направление. Псевдомонотонните изображения са въведени в математиката независимо от Ortega и Rheinboldt (1970г.) [65] и от Karamardian (1976г.) [50]. Псевдомонотонните обобщени производни по направление са изучавани от Komlosi (1994г.,1995г.) [53, 54].

Втората характеризация на псевдоизпъкналите функции е добре известна и многократно изследвана. Тя се състои в следното. Добре известно е, че всяка диференцируема псевдоизпъкнала функция е квазиизпъкнала. Тогава възниква обратният въпрос, а именно при какво условие квазиизпъкналата функция е псевдоизпъкнала. Отговорът е: тогава и само тогава, когато множеството на стационарнита точки съвпада с множеството на глобалните минимуми. Тази характеризация дължим на Crouzeix и Ferland (1982г.) [20]. Те са разгледали случая на диференцируема функция. Komlosi (1983г.) [51] я обобщава за радиално полунепрекъснатите отгоре функции, псевдоизпъкнали по отношение на горната производна на Дини. Giorgi (1987г.) [30] също анализира тази характеризация. Aussel (1998г.) [5] я обобщава за полунепрекъснатите отдолу и радиално непрекъснати функции, псевдоизпъкнали по отношение на абстрактния субдиференциал, въведен от Aussel, Corvellec и Lassonde [4]. Giorgi и Thierfeldar (1999г.) [34] дават ново и елегантно доказателство на теоремата. Komlosi (1993г.) [52] изследва връзката на този проблем с псевдолинейните функции.

Третата характеризация също е добре известна. Тя се състои в следното. Необходимо и достатъчно условие за псевдоизпъкналост на една диференцируема функция е функцията да бъде едновременно квазиизпъкнала и инвексна. Тази характеризация е изучавана независимо от Giorgi (1990г.) [31] и Tanaka (1990г.) [79]. Всъщност Tanaka разглежда регулярна в смисъл на Кларк ЛЛПИ функция.

Ние изследваме втората и третата характеризации в случая, когато функцията е полунепрекъсната отгоре. Полученият резултат използваме, за да покажем, че първата характеризация не би могла да се обобщи за квазиизпъкнала функция. Изследванията не са свързани с конкретна обобщена производна по направление. По-нататък разглеждаме друг тип недиференцируеми псевдоизпъкнали функции, които наричаме ∂-псевдоизпъкнали (или просто псевдоизпъкнали по отношение на субдиференциала ∂f). Показваме как се пренасят втората и третата характеризации в случая на ∂-псевдоизпъкнала функция. Доказваме и някои твърдения, свързани с връзката между псевдоизпъкналите, квазиизпъкналите и инвексните функции. Даваме и примери на обобщени производни, за които са в сила нашите изводи.

Резултатите на тази глава са публикувани в статията [40]. В предхождащата публикация [41] е дадено друго доказателство на теореми 1.5 и 1.6.

Във втората глава са получени пълни характеризации на множеството от решения на задача за минимизация на функция при предположението, че е известно едно нейно решение. Подобни характеризации са полезни за изучаване на оптимизационните задачи, които имат повече от едно решение. Могат да се използват и за изследване свойствата на множеството от решения, както и в числените методи за оптимизация.

Първата статия, в която е получена характеризация на множеството от решения на задачата на изпъкналото оптимиране, при условие, че е известно едно нейно решение, принадлежи на Mangasarian (1988г.) [57]. По-късно в недиференцируемия изпъкнал случай характеризацията на Mangasarian е обобщена от Burke и Ferris (1991г.) [12]. Няколко нови характеризации на множеството от решения на псевдолинейна минимизационна задача с диференцируема целева функция, при предположението, че е известно едно решение на задачата, са получени от Jeyakumar и Yang (1995г.) [47]. Ще припомним, че псевдолинейни наричаме онези функции, които са едновременно псевдоизпъкнали и псевдовдлъбнати.

Тъй като изпъкналите и псевдолинейните функции са невключващи се едно друго множества, то естествено е да се търси пренасяне на характеризациите върху по-широки класове, които съдържат и едните, и другите. Такива са например псевдоизпъкналите функции. В настоящата работа характеризациите на Jeyakumar и Yang се пренасят върху псевдоизпъкналите недиференцируеми функции. Получени са още три нови характеризации, от които едната е с използване на производни от по-висок ред, а другата се базира на субдиференциал. Освен това е показано, че в общия случай разгледаните характеризации не могат да се пренесат върху следващия по-общ клас от функции - квазиизпъкналите. Все пак това е възможно за част от тях в квадратичният случай. Доказано е, че множеството от минимумите на квазиизпъкнала квадратична функция върху изпъкнало множество е афинно. С това се уточнява основният резултат в статията на Benson, Smith, Schochetman и Bean (1994г.) [10]. Накрая в тази глава са изведени аналогични характеризации на множеството от решения на стандартното вариационното неравенство от тип включване. С пример е показано, че характеризации от тип равенство в общия случай не са в сила.

Основните резултати на втора глава са публикувани в статията [43].

Много са опитите да се дефинират производни на недиференцируеми функции. В определенията на тези производни обичайната граница lim се заменя с долната граница lim inf и тогава производната се нарича долна, или - с горната граница lim sup, и тогава производната се нарича горна. Причината да се прави такава замяна е, че обичайната граница lim не съществува. Това поражда два типа производни, наречени долни, когато в определението се използва lim inf и - горни, когато в определението се използва lim sup. Долната и горната граници, дори в случая на първа производна, могат да бъдат $-\infty$ или $+\infty$. Затова се налага да се предполага, че производните са елементи на разширената реална права $\overline{\mathbf{R}}$, дори когато функцията приема крайни стойности. Названията долна и горна производни идват от вида на използваната граница. При това долната първа производна винаги е по-малка или равна на съответната горна първа производна. Същите названия се ползват и при производните от по-висок ред. Все пак в този случай подобно съотношение (долната производна е по-малка или равна на горната) не съществува при по-голямата част от известните производни по направление.

Като правило резултатите, свързани с математическия анализ и оптимизацията на диференцируемите функции, се обобщават в недиференцируемия случай с използване на различни долни или горни производни.

Заедно с Иван Гинчев ние също правим опит да въведем нови обобщени производни по направление от n-ти ред [28]. Тези производни могат да имат смисъл за произволна евентуално прекъсната функция. Трета глава започва с дефинирането им. По-нататък се разглеждат някои техни основни свойства. Мотивацията за въвеждане на нови производни по направление се дава от задачата за минимизация на недиференцируема функция без ограничения и от желанието да се характеризират недиференцируемите функции с помощта на обобщени производни по направление.

В статията си [25] (2002г.) Гинчев дефинира обобщени производни по направление от n-ти ред от типа на производните на Адамар и с тяхна помощ характеризира изолираните минимуми на оптимизационната задача без ограничения. Все пак производните в тази работа не удовлетворяват естествения „принцип за допълнителност“, изискващ обобщените производни да се съгласуват с класическите, в случай че последните съществуват. Настоящите производни са близки до тези, които разглежда Гинчев. Те съвпадат с производните на Фреше по направление от съответния ред, ако функцията притежава такива производни.

В продължение на повече от тридесет години бяха публикувани не малко статии, които се отнасят до негладката оптимизация. Въпреки това там все още има много нерешени проблеми. Ще споменем няколко работи (подредени по азбучен ред), в които са разгледани обобщени производни от втори ред: Auslender (1984г.) [3], Chan, Huang и Ng (1994г.) [13], Chaney (1987г.) [14], Cominetti и Correa (1990г.) [17], Cominetti (1991г.) [18], монографията на Демьянов и Рубинов (1995г.) [21], Гинчев и Guerraggio (1998г.) [26], Hiriart-Urruty (1986г.) [37], Huang и Ng (1996г.) [38], Jeyakumar и Yang (1995г.) [48], Michel и Penot (1993г., 1994г.) [62, 63], Oustry (1998г.) [66], Penot (1985г., 1992г.) [68, 69], епипроизводните на Rockaffelar (1989г.) [74], Садыгов (1994г.) [91], Studniarski (1991г.) [78], Ward (1993г.) [82], Yang и Jeyakumar (1992г.) [84]. Статиите, в които са разгледани производни от ред по-висок от втори са твърде малко, например Pallaschke, Recht, Urbański (1991г.) [67] и Studniarski (1986г.) [77]. Като че ли най-близки до производните, които разглеждаме сега, са контингентните производни на Aubin и Frankowska (1990г.) [2] и параболичните производни на Ben-Tal и Zowe (1985г.) [9]. И двата последни типа производни не удовлетворяват „принципа за допълнителност“.

Въведените от нас първи и втори производни приемат доста опростен вид, когато функцията е локално липшицова. Първата долна (горна) производна съвпада с долната (съответно горната) производна по направление на Дини. По аналогия с първите производни втората долна (горна) производна бихме могли в разглеждания случай да наречем втора долна (горна) производна по направление на Дини.

Дадени са необходими и достатъчни условия за съвпадане на долната и горната производни от нулев, първи и втори ред.

По-нататък в глава 3 се характеризира негладка изпъкнала функция с помощта на обобщените производни по направление на Дини от първи и втори ред. Добре известени са следните класически резултати. Двукратно непрекъснато диференцируемата функция f, дефинирана в изпъкналото множество $X \subset \mathbf{R}$, е изпъкнала тогава и само тогава, когато

$$\langle u, Hf(x)u\rangle \geq 0, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, u \in \mathbf{R}^n. \tag{0.1}$$

Тук с $Hf(x)$ е означена матрицата на Hesse за функцията f в точката x. Очевидно равенството (0.1) означава, че хесианът е положително полудефинитна матрица за всяко x. Ако

$$\langle u, Hf(x)u\rangle > 0, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, u \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

то f е строго изпъкнала функция. Функцията f е силно изпъкнала в множеството X тогава и само тогава, когато съществува константа $\kappa > 0$, за която

$$\langle u, Hf(x)u\rangle \geq \kappa, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, u \in \mathbf{R}^n.$$

Характеризацията (0.1) на изпъкналите функции е обобщена за различни обобщени производни по направление. Целта е да се отслаби предположението $f \in \mathrm{C}^2$. Chaney (1987г.) [14, твърдение 2.1, теорема 2.4] обобщава характеризацията (0.1) за регулярна в смисъл на Кларк и полугладка функция. Cominetti и Correa (1990г.) [17, твърдение 4.3] пренасят характеризацията върху непрекъснато диференцируема по Гато и двукратно C-диференцируема функция [17, дефиниция 1.6]. Yang и Jeyakumar (1992г.) [84] разглеждат случая $f \in \mathrm{C}^{1,1}$. Yang (1994г.) [85] обобщава характеризацията до случая на непрекъснато диференцируема по Гато функция. Huang и Ng (1997г.) [39, теорема 2] показват, че характеризацията е в сила и за регулярна в смисъл на Кларк локално липшицова функция. В частност те уточняват резултата на Chaney, като установяват, че полугладкостта на функцията f не е необходима.

С помощта на първата и втората горни производни на Дини обобщаваме характеризацията (0.1) за произволна полунепрекъсната отгоре функция. В получената пълна характеризация се появява едно ново условие, неизползвано от никого преди нас, в което участват производните от първи ред. При това вече не е необходимо втората производна да бъде неотрицателна навсякъде. Резултатът на Huang и Ng се явява частен случай от нашия. Поставеното ново условие е винаги изпълнено, когато функцията е регулярна локално липшицова. Вероятно това условие е попречило на Huang и Ng да се освободят от регулярността на функцията. Изнесеният от тях пример, показващ че резултатът им не може да се обобщи, всъщност не удовлетворява това условие от първи ред. Специално разглеждаме и случаите на строго изпъкнала и силно изпъкнала функции.

По-нататък пренасяме характеризацията върху псевдоизпъкналите по отношение на горната производна на Дини функции. Получената пълна характеризация е обобщение на класически резултат, принадлежащ на Diewert, Avriel, Zang (1981г.) [23, следствия 10.1, 11.1].

Като използваме първата и втората горни производни на Дини даваме характеризация на множеството от решения на оптимизационна задача с радиално полунепрекъсната отдолу и псевдоизпъкнала по отношение на горната производна на Дини целева функция, при условие, че е известно едно решение на задачата. Получената характеризация е обобщение на резултат, принадлежащ на Jeyakumar и Yang (1995г.) [47], третиращ случая на псевдолинейна двукратно диференцируема функция.

Производните на Дини от втори ред, които споменахме по-горе, са изследвани например в работата на Ginchev, Guerraggio, Roca (2002) [27]. Когато функцията притежава класическа производна по направление, тези производни се изучават и в статиите [37, 66] (в случая на изпъкнала функция), [82] (в случая на диференцируема по Фреше функция). Горните производни на Дини от втори ред могат да се разгледат като частен случай на горните производни на Ben-Tal и Zowe [9]

$$f_+^{BZ}(x,u,w) := \limsup_{t\to+0} 2t^{-2}(f(x+tu+t^2w) - f(x) - tf'_+(x,u)),$$

когато $w = 0$. Тук с $f'_+(x,u)$ е означена горната производна на Дини от първи ред $f'_+(x,u) := \limsup_{t\to+0} t^{-1}(f(x+tu)-f(x))$. Ben-Tal и Zowe въвеждат своите производни в случая, когато съществува производната по направление $f'(x,u)$ и горната граница $\limsup$ е заменена с границата $\lim$. В написания по-горе вид производните на Ben-Tal и Zowe се появяват в статиите на Penot [68, 69] и Studniarski [78]. Подобни производни са дефинирани и от Huang и Ng [39], но почти без да се изследват.

Друг възможен начин за дефиниране на втори производни на Дини е следният: втора производна на Дини е производната на Дини на производната на Дини (виж Giorgi и Komlosi (1992г.) [32], Shiraishi (1993г.) [75], Yang (1994) [85]).

С помощта на производните, които въвеждаме заедно с Гинчев е обобщена характеризацията (0.1) за произволна непрекъсната функция, подобно на разглежданата вече характеризация на изпъкналите функции. Като приложение на разгледаната характеризация са получени неравенство на Тейлър от втори ред и достатъчно условие една функция да е линейна.

Една част от резултатите на тази глава са публикувани в статията [28], а друга в препринта [29].

В четвъртата глава са разгледани числени методи за минимизация на ЛЛПИ функции. Измежду производните на локално липшицовите функции може би най-често се използва обобщената производна на Кларк [15]. В тази глава се изучават псевдоизпъкнали по отношение на производната на Кларк функции.

Може да се очаква, че много от методите за оптимизация на изпъкнали и псевдоизпъкнали функции се обобщават за ЛЛПИ функции. Един от вариантите на метода на разполовяването (Базара и Шети (1979г.) [7, с. 277]) за минимизация върху затворен интервал на диференцируема псевдоизпъкнала функция на една променлива е пример за такъв метод. Сходящ е със скорост на геометрична прогресия.

В раздел 4.3 заедно с Дочо Дочев прилагаме този метод за решаването на минимаксната задача

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y),$$

в която $X \equiv [a,b]$ е затворен интервал, Y е крайно множество, а функциите $f(\cdot,y)$ са ЛЛПИ в X за всяко фиксирано $y \in Y$.

Резултатите на този раздел са публикувани в статията [87].

В раздел 4.4 същият метод е приложен за намиране на седловата точка на антагонистична игра, в която множествата от стратегиите на двамата играчи са затворени числови интервали, а платежната функция е локално липшицова псевдовдлъбната по отношение на първия си аргумент при всяка фиксирана стойност на втория и ЛЛПИ по отношение на втория си аргумент при всяка фиксирана стойност на първия. Доказано е, че играта винаги има седлова точка.

Резултатите на този раздел са публикувани в статията [42].

Глава 1

Три характеризации от първи ред на псевдоизпъкналите функции

1.1 Основни определения

В тази глава ще разгледаме някои характеризации на псевдоизпъкналите функции.

Навсякъде в тази глава ще предполагаме, че $\mathbf{E}$ е дадено линейно топологическо пространство, $X \subset \mathbf{E}$ е отворено множество, $S \subset X$ е изпъкнало множество. Ще означим топологическото дуално пространство на $\mathbf{E}$ с $\mathbf{E}^*$. За произволен линеен функционал $\xi \in \mathbf{E}^*$ и произволен елемент $x \in \mathbf{E}$ да означим $\xi(x)$ с $\langle \xi, x \rangle$. Множеството на реалните числа ще означаваме с $\mathbf{R}$, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ е разширената числова права, включваща двата безкрайни елемента ∞ и $-\infty$. Ще предполагаме, че алгебрическите операции и граници с безкрайните елементи са дефинирани по същия начин, както това се прави в изпъкналия анализ [73].

Разглеждаме дадена функция $f : X \to \mathbf{R}$. Предполагаме, че $h(x, u)$ е някаква обобщена производна на f в точката x по направление u. Функцията $h(x, u)$ може да бъде разгледана като бифункция $h : X \times \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$.

Ще припомним следните добре известни определения.

1.1. Дефиниция. Точката $x \in X$ се нарича *стационарна* по отношение на производната h, ако $h(x, u) \geq 0$ за всяко $u \in \mathbf{E}$.

1.2. Дефиниция. Функцията f се нарича *квазиизпъкнала* в множеството S, ако

$$f(x + t(y - x)) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \ \forall\, x, y \in S, \ \forall\, t \in [0, 1].$$

Следният конус е свързан с квазиизпъкналата функция f във всяка фиксирана точка $x \in S$:

$$\mathcal{N}(x) = \{\xi \in \mathbf{E}^* \mid y \in S, \ f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad \langle \xi, y - x \rangle \leq 0\}.$$

Всъщност това е нормалния конус към множеството на субниво

$$L_{f(x)} = \{y \in S \mid f(y) \leq f(x)\}$$

в x. Тъй като f е квазиизпъкнала, то $L_{f(x)}$ е изпъкнало множество.

1.3. Дефиниция. Функцията $f : X \to \mathbf{R}$ се нарича *инвексна* по отношение на обобщената производна h в множеството S, ако съществува такова изображение $\eta : S \times S \to \mathbf{E}$, че

$$f(y) - f(x) \geq h(x, \eta(x, y)) \quad \text{за произволни} \quad x, y \in S. \qquad (1.1)$$

Понятието субдиференциал произхожда от изпъкналия анализ и може да бъде приложено към разглежданата производна по направление h.

1.4. Дефиниция. Всеки непрекъснат линеен функционал ξ върху $\mathbf{E}$, който удовлетворява неравенството

$$\langle \xi, u \rangle \leq h(x,u), \quad \forall\, u \in \mathbf{E}$$

се нарича *субградиент* на f по отношение на h в x. Множеството от всички субградиенти $\partial f(x)$ в x се нарича *субдиференциал* на f в x. $\partial f(x)$ е затворено изпъкнало (евентуално празно) множество в $\mathbf{E}$.

Ще припомним следните долни обобщени производни на функцията f в точката x по направление u, които ще разглеждаме по-нататък:

a) производна на Дини [32, 21]:

$$f'_-(x,u) = \liminf_{t\to+0} t^{-1}(f(x+tu) - f(x)); \tag{1.2}$$

b) производна на Кларк [15, 16]:

$$f^0_-(x,u) = \liminf_{(y,t)\to(x,+0)} t^{-1}(f(y+tu) - f(y));$$

c) производна на Адамар [21], наричана понякога производна на Дини-Адамар [32] или контингентна производна [2], или просто субпроизводна [16]:

$$f^H_-(x,u) = \liminf_{(t,u')\to(+0,u)} t^{-1}(f(x+tu') - f(x)); \tag{1.3}$$

d) производна на Michel-Penot [61, 81]:

$$f^{MP}_-(x,u) = \inf_{z\in\mathbf{E}} \liminf_{t\to 0} t^{-1}(f(x+tz+tu) - f(x+tz)).$$

Тук сходимостта $y \to x$, $u' \to u$ се подразбира, че е породена от силната топология на пространството $\mathbf{E}$, t е реално положително число, което клони към 0. Като заменим $\liminf$ с $\limsup$ и $\inf$ с $\sup$ получаваме съответните горни производни.

1.2 Характеризация от тип неравенство на псевдоизпъкналите функции

В този раздел ще предполагаме, че S е произволно изпъкнало множество, а производната h удовлетворява свойствата:

Свойство 1. *$h(x,u) < \infty$ за произволни $x \in S$, $u \in \mathbf{E}$.*

Свойство 2. *Ако f е псевдоизпъкнала в S по отношение на h, то*

$$x,\ y \in S,\ f(y) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x, y-x) \leq 0.$$

Следните две теореми дават необходими и достатъчни условия за псевдоизпъкналост и строга псевдоизпъкналост.

1.5. Теорема. *Нека производната h удовлетворява свойствата 1, 2. Тогава необходимо и достатъчно условие функцията $f : X \to \mathbf{R}$ да бъде псевдоизпъкнала в S, е да съществува положителна функция $p : S \times S \to \mathbf{R}$, за която*

$$f(y) - f(x) \geq p(x,y)\, h(x, y-x), \quad \forall\, x,\ y \in S. \tag{1.4}$$

Доказателство. Ще докажем първо достатъчното условие. Да допуснем, че x, $y \in S$ и $f(y) < f(x)$. От (1.4) следва, че $h(x, y-x) < 0$, т.е. функцията е псевдоизпъкнала.

Да докажем необходимото условие. Нека f е псевдоизпъкнала. Ако $h(x, y-x) = -\infty$, то неравенството (1.4) е очевидно. Да допуснем, че $h(x, y-x) > -\infty$. Ще конструираме явно функцията p по следния начин.

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{h(x,y-x)}, & \text{ако} \quad f(y) < f(x) \quad \text{или} \quad h(x,y-x) > 0, \\ 1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Функцията p е добре дефинирана, строго положителна и удовлетворява неравенството (1.4). Наистина, ако $f(y) < f(x)$, то $h(x, y - x) < 0$ съгласно псевдоизпъкналостта. Ако $h(x, y - x) > 0$, то $f(y) \geq f(x)$ отново поради псевдоизпъкналостта. Нека да допуснем, че е възможно да бъде изпълнено равенството $f(y) = f(x)$. Съгласно свойство 2, $h(x, y - x) \leq 0$, което е противоречие. Следователно $f(y) - f(x) > 0$ и $p > 0$. Ако $f(y) \geq f(x)$ и $h(x, y - x) \leq 0$, то $p(x, y) = 1$. Директно се вижда, че и този път неравенството (1.4) е изпълнено. □

1.6. Теорема. *Нека производната h удовлетворява свойство 1. Тогава необходимо и достатъчно условие $f : X \to \mathbf{R}$ да бъде строго псевдоизпъкнала в S, е да съществува такава положителна функция $p : S \times S \to \mathbf{R}$, че*

$$f(y) - f(x) > p(x, y)\, h(x, y - x) \quad \textit{за произволни} \quad x, y \in S,\ x \neq y.$$

Доказателство. Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 1.5. Функцията p, която удовлетворява неравенството е

$$p(x, y) = \begin{cases} 2\frac{f(y)-f(x)}{h(x,y-x)}, & \text{ако} \quad f(y) < f(x),\ x \neq y \\ \frac{1}{2}\frac{f(y)-f(x)}{h(x,y-x)}, & \text{ако} \quad h(x, y - x) > 0,\ x \neq y \\ 1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

□

Ще разгледаме някои примери на обобщени производни по направление h, които удовлетворяват свойства 1, 2.

1.7. Пример. *Да допуснем, че f е диференцируема по Фреше. Нека $h(x, u)$ е производната на Фреше на функцията f в точката x по направление u. Това е класическият случай и псевдоизпъкналите функции съвпадат с диференцируемите псевдоизпъкнали* *функции, въведени от Mangasarian [56]. И двете свойства са изпълнени. Свойство 2 се удовлетворява поради факта, че всяка диференцируема по Фреше псевдоизпъкнала функция е квазиизпъкнала в произволно изпъкнало множество, а за квазиизпъкналите функции е в сила импликацията от свойство 2.*

Нека функцията f е диференцируема по Фреше в отвореното изпъкнало множество $T \subset \mathbf{R}^n$. Ако съществува положителна функция $p : T \times T \to \mathbf{R}$, за която

$$f(y) - f(x) \geq p(x,y)\langle \nabla f(x), y - x\rangle, \quad \forall\, x,\ y \in T,$$

то Bector (1968г.) [8] и Weir (1990г.) [83] наричат f *силно псевдоизпъкнала* в T по отношение на p. В случая, когато $p \equiv 1$ се получава класът на изпъкналите функции. Weir [83] твърди, че ограничението функцията да е силно псевдоизпъкнала е по-силно от ограничението да бъде псевдоизпъкнала и по-слабо от ограничението за изпъкналост. От теорема 1.5 следва, че за всяка псевдоизпъкнала функция f съществува положителна функция p, спрямо която f е „силно“ псевдоизпъкнала.

Освен това определение в математиката са въведени и няколко други концепции за силна псевдоизпъкналост.

1.8. Пример. *Нека $h(x,u)$ е горната или долната производна на Дини в точката x по направление u. Свойство 2 е изпълнено за радиално полунепрекъснати отдолу функции, тъй като всяка радиално полунепрекъсната отдолу псевдоизпъкнала функция е квазиизпъкнала [33, Теорема 3.5] и за радиално полунепрекъснати отдолу функции квазиизпъкналостта е еквивалентна на следната импликация*

$$x \in S,\ y \in S,\ f(y) \leq f(x) \Longrightarrow h(x, y - x) \leq 0$$

в случая, когато h е горната или долната производна на Дини [22, Теорема 4]. В случая, когато функцията е локално липшицова, то производните на Дини приемат крайни стойности и значи са удовлетворени и двете свойства.

1.9. Забележка. Да допуснем, че f е дадена псевдоизпъкнала функция и h е такава нейна обобщена производна по направление, че съществува положителна функция p, удовлетворяваща (1.4). Нека g е друга обобщена производна по направление на f такава, че $h(x,u) \geq g(x,u)$ за произволни $x \in S$, $u \in \mathbf{E}$. Очевидно е, че g удовлетворява (1.4) със същата функция p. Като използваме този факт бихме могли да конструираме други обобщени производни по направление, които са по-малки от производните на Дини и удовлетворяват теореми 1.5 и 1.6, например долните производни на Адамар, на Кларк и на Michel-Penot.

1.3 Критерий за псевдоизпъкналост на квазиизпъкнала функция

В този раздел ще установим дали квазиизпъкналите функции могат да бъдат характеризирани с помощта на неравенство от типа (1.1) с подходящ избор на изображението η както псевдоизпъкналите функции. Ще предполагаме, че S е отворено изпъкнало множество, а производната h удовлетворява за всяко $x \in S$ следните свойства:

Свойство 3. *Множеството $\partial f(x)$ е непразно.*

Свойство 4 (Принцип на Ферма).

$$\bar{x} \in \arg\min \{f(x) \mid x \in S\} \quad \Longrightarrow \quad h(\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall\, x \in S.$$

Тук се предполага, че $\bar{x}$ е точка на глобален минимум.

Свойство 5. *$h(x, u)$ разгледана като функция на u е опорна функция на $\partial f(x)$ и $h(x, u) = \max\{\langle \xi, u \rangle \mid \xi \in \partial f(x)\}$ за всяко $u \in \mathbf{E}$.*

Свойство 6. *Ако f е квазиизпъкнала в S, то $\partial f(x) \subset \mathcal{N}(x)$.*

Свойство 4 означава, че всеки глобален минимум е стационарна точка. Като следствие от свойство 5, $h(x, u)$ е положително хомогенна и субадитивна функция на u. Освен това $h(x, 0) = 0$. От свойство 3 следва, че $h(x, u) > -\infty$ за произволни $x \in S$, $u \in \mathbf{E}$, тъй като за всяко $x \in S$ съществува $\xi \in \partial f(x)$. Оттук $h(x, u) \geq \langle \xi, u \rangle > -\infty$ за всяко $u \in \mathbf{E}$.

Свойства 3, 5, 6 са по-силни от свойства 1, 2. За да докажем този факт, ние се нуждаем от следните резултати.

1.10. Теорема. *Всяка псевдоизпъкнала функция $f : S \to \mathbf{R}$, която удовлетворява свойство 3, е квазиизпъкнала.*

Доказателство. Да допуснем противното, че съществуват $x, y \in S$ и $z = x + t(y - x)$, $t \in (0, 1)$, за които

$$f(z) > \max\{f(x), f(y)\}.$$

Съгласно свойство 3, съществува $\xi \in \partial f(z)$. От псевдоизпъкналостта следва, че

$$t\langle \xi, x - y \rangle = \langle \xi, x - z \rangle \leq h(z, x - z) < 0$$
$$(1 - t)\langle \xi, y - x \rangle = \langle \xi, y - z \rangle \leq h(z, y - z) < 0.$$

Тези неравенства си противоречат едно на друго. □

1.11. Лема. *Нека функцията $f : S \to \mathbf{R}$ удовлетворява свойства 3, 5. Тогава свойство 6 е еквивалентно на следната импликация: Ако f е квазиизпъкнала, то*

$$x, y \in S, \ f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x, y - x) \leq 0. \tag{1.5}$$

Доказателство. Да допуснем, че свойство 6 е удовлетворено $x,\ y \in S$ и $f(y) \le f(x)$. Съгласно свойство 5 съществува такова $\xi \in \partial f(x)$, че $h(x, y-x) = \langle \xi, y-x \rangle$. От свойство 6 следва, че $\xi \in \mathcal{N}(x)$. Оттук $\langle \xi, y-x \rangle \le 0$ съгласно определението за конуса $\mathcal{N}(x)$. Следователно импликацията (1.5) е удовлетворена.

Нека импликацията (1.5) е изпълнена. За да докажем свойство 6 да допуснем, че $x,\ y \in S$, $\xi \in \partial f(x)$ и $f(y) \le f(x)$. Следователно $\langle \xi, y-x \rangle \le h(x, y-x) \le 0$, т.е. $\xi \in \mathcal{N}(x)$. □

Свойство 1 следва от свойствата 3, 5. Съгласно теорема 1.10 и лема 1.11 заключаваме, че свойство 2 е следствие от свойства 3, 5, 6.

Ще докажем следната лема, която е дадена в книгата на Нестеров [88] в случая, когато пространството е $\mathbf{R}^n$ и тогава доказателството значително се упростява.

1.12. Лема. *Нека $f : S \to \mathbf{R}$ е полунепрекъсната отгоре квазиизпъкнала функция. Тогава е в сила импликацията*

$$x,\ y \in S,\ f(y) < f(x) \quad \Longrightarrow \quad \langle \xi, y-x \rangle < 0,\ \forall\, \xi \in \mathcal{N}(x),\ \xi \ne 0.$$

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. съществуват $x,\ y \in S$, $f(y) < f(x)$ и $\xi \in \mathcal{N}(x)$, $\xi \ne 0$, за които $\langle \xi, y-x \rangle \ge 0$. Съгласно определението за конуса $\mathcal{N}(x)$, получаваме, че $\langle \xi, y-x \rangle = 0$. Тъй като f е полунепрекъсната отгоре, то множеството на subниво $L_{f(x)} = \{z \in S \mid f(z) < f(x)\}$ е отворено. Следователно съществува такава отворена околност U_y на y, че $U_y \subset L_{f(x)}$. Съществува такава отворена околност U на нулата на пространството, че $U_y = y + U$. Следователно $f(y+z) < f(x)$ за всяко $z \in U$. Съгласно определението за конуса $\mathcal{N}(x)$, $\langle \xi, y+z-x \rangle \le 0$ за всяко $z \in U$. Оттук $\langle \xi, z \rangle \le 0$ за всяко $z \in U$. Съществува уравновесена околност V на нулата, т.е. $\lambda z \in V$ за всяко $z \in V$ и $\lambda \in [-1, 1]$, за която $V \subset U$. Тъй като $-z \in V$ за всяко $z \in V$, то $\langle \xi, z \rangle = 0$ за всяко $z \in V$. Използвайки непрекъснатостта на линейните операции, от равенството $0.z_1 = 0$ за всяко $z_1 \in \mathbf{E}$ следва, че съществуват $t \in \mathbf{R}$ и $z \in V$, за които $z_1 = tz$. Следователно, $\langle \xi, z_1 \rangle = 0$ за всяко $z_1 \in \mathbf{E}$. Това е невъзможно съгласно допускането $\xi \neq 0$. □

Следната теорема е необходимо и достатъчно условие за псевдоизпъкналост на квазиизпъкнала функция [5, 20, 31, 34, 51].

1.13. Теорема. *Да допуснем, че производната h удовлетворява свойствата 3, 4, 5 и 6. Нека функцията $f : S \to \mathbf{R}$ е квазиизпъкнала и полунепрекъсната отгоре. Тогава необходимо и достатъчно условие f да бъде псевдоизпъкнала в S, е множеството на глобалните минимуми да съвпада с множеството на стационарните точки.*

Доказателство. *Необходимо условие.* Да допуснем, че f е псевдоизпъкнала в S. Съгласно свойство 4 всеки глобален минимум е стационарна точка. Да допуснем противното на твърдението, т.е. съществува стационарна точка x, която не е глобален минимум. Следователно съществува такова $y \in S$, че $f(y) < f(x)$. Съгласно псевдоизпъкналостта, $h(x, y - x) < 0$. Полученото неравенство противоречи на определението за стационарна точка.

Достатъчно условие. Да допуснем, че множеството на стационарните точки съвпада с множеството на глобалните минимуми. Искаме да докажем, че функцията е псевдоизпъкнала. Нека x, $y \in S$ и $f(y) < f(x)$. Тъй като x не е глобален минимум, то съгласно допускането x не е стационарна точка. Това означава, че $0 \notin \partial f(x)$. В противен случай бихме получили, че

$$h(x,u) = \max\{\langle \xi, u \rangle \mid \xi \in \partial f(x)\} \geq \langle 0, u \rangle = 0 \text{ за всяко } u \in \mathbf{E}$$

и x би била стационарна. От $f(y) < f(x)$ съгласно лема 1.12 следва, че $\langle \xi, y - x \rangle < 0$ за всяко $\xi \in \mathcal{N}(x)$, $\xi \neq 0$. От свойства 3, 6 и от $0 \notin \partial f(x)$ можем да заключим, че $\langle \xi, y - x \rangle < 0$ за всяко $\xi \in \partial f(x)$. Използвайки свойство 5 получаваме, че $h(x, y - x) < 0$. $\square$

1.14. Теорема. *Да допуснем, че производната h удовлетворява свойства 3, 4, 5 и 6. Тогава всяка псевдоизпъкнала функция $f : S \to \mathbf{R}$ е инвексна.*

Доказателство. Теоремата следва директно от теорема 1.5. $\square$

Като следствие от теореми 1.10 и 1.14 можем да направим заключението, че множеството на псевдоизпъкналите функции е подмножество на сечението на множествата на квазиизпъкналите и на инвексните функции. Обратното също е вярно [31, 79].

1.15. Теорема. *Да допуснем, че производната h удовлетворява свойствата 3, 4, 5 и 6. Ако полунепрекъснатата отгоре функция $f : S \to \mathbf{R}$ е квазиизпъкнала и инвексна, то тя е псевдоизпъкнала.*

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. f е квазиизпъкнала и инвексна, но не е псевдоизпъкнала. Съгласно теорема 1.13, множеството на глобалните минимуми не съвпада с множеството на стационарните точки. Значи съществува стационарна точка $x \in S$, която не е глобален минимум. Следователно съществува такова $y \in S$, че $f(y) < f(x)$. Тъй като f е инвексна, то съществува такова $\eta \in \mathbf{E}$, за което $0 > f(y) - f(x) \geq h(x, \eta) \geq 0$. Получихме невъзможно неравенство. $\square$

1.16. Пример. *Да допуснем, че $h(x, u)$ е горната обобщена производна на Кларк на локално липшицовата функция f в точката*

x *по направление* u. *Тогава* $\partial f(x)$ *съвпада с обобщения градиент на Кларк. Всички свойства са изпълнени [15], освен свойство 6. Ако* f *е регулярна, то и свойство 6 е удовлетворено [15, следствие 1 от теорема 2.4.7].*

1.17. Пример. *Нека* f *е квазидиференцируема в смисъл на Пшеничный [90], т.е. съществува класическата производна по направление* $f'(x,u)$ *за всяко* $x \in S$, $u \in \mathbf{E}$, *тя е крайна,* $f'(x,\cdot)$ *е изпъкнала функция и съществува непразно затворено изпъкнало множество* $\partial f(x)$ *такова, че* $f'(x,u) = \max\{\langle \xi, u\rangle \mid \xi \in \partial f(x)\}$ *за всяко* $x \in S$. *Този клас от функции съдържа функциите, които са регулярни в смисъл на Кларк. В случая* $h(x,u) \equiv f'(x,u)$. *Всички свойства са изпълнени.*

1.18. Пример. *Нека локално липшицовата функция* $f : S \to \mathbf{R}$ *има полунепрекъсната отгоре горна производна на Дини*

$$f'_+(x,u) = \limsup_{t\to+0} t^{-1}(f(x+tu) - f(x)), \tag{1.6}$$

разгледана като функция на x *за всяко фиксирано направление* u. *Тогава* $f'_+(x,u) = f^0(x,u)$ *за произволни* x *и* u *[21, твърдение 2.1.9]. Тук с* $f^0(x,u)$ *е означена горната производна на Кларк. Следователно горната производна на Дини удовлетворява свойства 3, 4, 5. Да проверим, че свойство 6 също е изпълнено. Да допуснем, че* f *е квазиизпъкнала,* x, y, $\xi \in \partial f(x)$ *и* $f(y) \le f(x)$. *Оттук*

$$\langle \xi, y-x\rangle \le f'_+(x,y-x) = \limsup_{t\to+0} t^{-1}(f(x+t(y-x)) - f(x)) \le 0,$$

съгласно определението за квазиизпъкналост.

Локално липшицовата функция $f : S \to \mathbf{R}$ *се нарича псевдорегулярна, ако* $f'_+(x,u) = f^0(x,u)$ *за произволни* $x \in S$ *и* $u \in \mathbf{E}$.

Добре известно е, че една псевдорегулярна функция не е задължително регулярна (виж [71]). В разгледаня случай горната производна на Адамар съвпада с горната производна на Дини и също удовлетворява всички тези свойства.

1.19. Пример. *Нека $h(x, u)$ да бъде горната производна на Michel-Penot [61]. В този случай $h(x, u)$ е изпъкнала функция на направлението u. Когато функцията f е локално липшицова, свойства 3, 4, 5 са изпълнени. Ако функцията е полурегулярна [11], т.е. съществува класическата производна по направление и тя съвпада с производната на Michel-Penot, то и свойство 6 е изпълнено. Свойство 6 се удовлетворява и в случая, когато горната производна на Michel-Penot съвпада с горната производна на Дини.*

1.20. Забележка. Квазиизпъкнала функция $f : S \to \mathbf{R}$, която не е псевдоизпъкнала не може да бъде характеризирана с подобно неравенство от типа (1.1), както псевдоизпъкналите функции. Наистина, да допуснем, че съществува изображение $\eta : S \times S \to \mathbf{E}$ от някакъв вид, което удовлетворява (1.1). Благодарение на теорема 1.15, f е псевдоизпъкнала. Това заключение противоречи на допускането, че f не е псевдоизпъкнала.

1.4 ∂-псевдоизпъкнали функции

И в този раздел ще предполагаме, че S е отворено изпъкнало множество. Свойства 3 и 5 до голяма степен ограничават класа на разглежданите функции. Ще отслабим свойствата, които допускаме, че удовлетворява производната по направление. В този раздел няма да изискваме да е изпълнено свойство 3, а свойство 5 ще заменим със следните по-слаби свойства:

Свойство 7. *$h(x,u)$ е положително хомогенна функция на u за всяко $x \in S$.*

Свойство 8. *$h(x,0) \leq 0$ за всяко $x \in S$.*

В този случай може да бъде използвано друго по-слабо понятие за обобщена псевдоизпъкналост, за което са в сила теореми 1.13 и 1.15. То е също обобщение на класическото понятие диференцируема псевдоизпъкнала функция (виж напр. Penot, Quang [70] или Aussel [5]).

1.21. Дефиниция. Функцията $f : S \to \mathbf{R}$ се нарича *∂-псевдоизпъкнала* (или псевдоизпъкнала по отношение на субдиференциала ∂f) в S, ако за произволни x, $y \in S$ е изпълнена импликацията

$$f(y) < f(x) \quad \Longrightarrow \quad \langle \xi, y - x \rangle < 0 \quad \text{за всяко} \quad \xi \in \partial f(x).$$

Всяка, псевдоизпъкнала по отношение на обобщената производна h, функция е ∂-псевдоизпъкнала. Когато са изпълнени свойства 3, 5, тези две понятия съвпадат (напр. в случая на производната на Кларк). Когато свойства 3, 5 са заменени със свойства 7, 8, една ∂-псевдоизпъкнала или псевдоизпъкнала функция не е задължително квазиизпъкнала.

1.22. Пример. *Да разгледаме функцията*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ако} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{ако} \quad x = 0. \end{cases}$$

Тя е псевдоизпъкнала и ∂-псевдоизпъкнала, ако вземем $h(x,u)$ да бъде долната производна на Дини, тъй като $f'_-(0,1) = -\infty$, $f'_-(0,-1) = -\infty$, $\partial f(0) = \emptyset$, но f не е квазиизпъкнала.

Ако свойство 3 е изпълнено, то теорема 1.10 може да бъде обобщена до следното твърдение.

1.23. Твърдение. *Всяка ∂-псевдоизпъкнала функция $f : S \to \mathbf{R}$, която удовлетворява свойство 3, е квазиизпъкнала.*

Доказателство. Извеждането на този резултат повтаря аргументите в доказателството на теорема 1.10. □

При ∂-псевдоизпъкналите функции теорема 1.14 се променя по следния начин.

1.24. Твърдение. *Нека са изпълнени свойства 7, 8. Тогава всяка ∂-псевдоизпъкнала функция $f : S \to \mathbf{R}$ е инвексна.*

Доказателство. Да допуснем, че съществува функция f, която е ∂-псевдоизпъкнала, но не е инвексна. Тогава съществуват такива x, $y \in S$, че

$$f(y) - f(x) < h(x,u), \qquad \forall\, u \in \mathbf{E} \tag{1.7}$$

Тъй като $h(x,0) \leq 0$, заключаваме, че $f(y) < f(x)$. Ако съществува такова $\eta \in \mathbf{E}$, че $h(x,\eta) < 0$, то неравенството (1.7) не би било удовлетворено за всички направления от типа $t\eta$, където $t > 0$ е достатъчно голямо. Следователно допускането, че съществува такова η е невярно. Оттук $\langle 0,u\rangle = 0 \leq h(x,u)$ за всяко $u \in \mathbf{E}$. Съгласно определението за субдиференциал $0 \in \partial f(x)$. Съгласно ∂-псевдоизпъкналостта и неравенството $f(y) < f(x)$ получаваме невъзможното неравенство $\langle 0, y-x\rangle < 0$, което доказва твърдението. □

Теореми 1.13, 1.15 също се променят.

1.25. Теорема. *Да допуснем, че производната h удовлетворява свойства 4 и 6. Нека $f : S \to \mathbf{R}$ е квазиизпъкнала и полунепрекъсната отгоре. Тогава необходимо и достатъчно условие f да бъде ∂-псевдоизпъкнала в S, е множеството на глобалните минимуми да съвпада с множеството на стационарните точки.*

Доказателство. *Необходимо условие.* Нека f е ∂-псевдоизпъкнала в S. Да допуснем противното на твърдението, т.е. съществува стационарна точка x, която не е глобален минимум. Следователно съществува такова $y \in S$, че $f(y) < f(x)$. Тъй като x е стационарна, то $h(x,u) \geq 0 = \langle 0, u\rangle$ за всяко $u \in \mathbf{E}$. Оттук $0 \in \partial f(x)$, което противоречи на неравенството $f(y) < f(x)$, съгласно ∂-псевдоизпъкналостта.

Достатъчно условие. Да допуснем, че множеството на стационарните точки съвпада с множеството на глобалните минимуми. Искаме да докажем, че функцията е ∂-псевдоизпъкнала. Нека x, $y \in S$ и $f(y) < f(x)$. Тъй като x не е глобален минимум, то съгласно допускането x не е стационарна точка. Това означава, че $0 \notin \partial f(x)$. От $f(y) < f(x)$, съгласно лема 1.12 следва, че $\langle \xi, y-x\rangle < 0$ за всяко $\xi \in \mathcal{N}(x)$, $\xi \neq 0$. От свойство 6 и от $0 \notin \partial f(x)$ можем да заключим, че $\langle \xi, y-x\rangle < 0$ за всяко $\xi \in \partial f(x)$. □

1.26. Теорема. *Да допуснем, че производната h удовлетворява свойства 4 и 6. Ако полунепрекъсната отгоре функция $f : S \to \mathbf{R}$ е квазиизпъкнала и инвексна, то тя е ∂-псевдоизпъкнала.*

Доказателство. Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 1.15. □

1.27. Пример. *Следният пример показва, че изразът „глобален минимум" в теорема 1.25 не може да бъде заменен с израза „локален минимум", както това може да се направи в диференцируемия случай [20, теорема 2.2]. Да разгледаме функцията*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ако} \quad x < 0, \\ 1, & \textit{ако} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Тя е квазиизпъкнала и полунепрекъсната отгоре в $\mathbf{R}$. Нека h е долната производна на Дини. Тогава тази функция удовлетворява свойство 6 и свойство 4 (в смисъл, че всеки локален минимум *е стационарна точка).*

$$\mathcal{N}(x) = 0 \text{ за всяко } x \in \mathbf{E}, \ \partial f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x \neq 0, \\ \emptyset, & \text{ако} \quad x = 0. \end{cases}$$

Множествата на локалните минимуми и на стационарните точки съвпадат с $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$*, но* f *не е* ∂*-псевдизпъкнала в* $\mathbf{R}$*, защото при* $x > 0$ *и* $y < 0$ *имаме* $f(y) < f(x)$*, но неравенството* $\langle \xi, y - x \rangle < 0$*,* $\xi \in \partial f(x)$ *е нарушено.*

1.28. Забележка. Субдиференциалът ∂f бе дефиниран с помощта на обобщената производна h. Един субдиференциал може да се дефинира и само чрез използване стойностите на функцията без помощта на обобщената ѝ производна, както това се прави с класическия субдиференциал на изпъкнала функция. Теорема 1.25 и доказателството ѝ остават в сила и в този случай, само че тогава трябва да се използва друго определение за стационарна точка. А именно, точката x се нарича стационарна за функцията f, ако $0 \in \partial f(x)$. Свойство 4 означава, че всеки глобален минимум е стационарна точка.

В статията на Aussel [5] е получен близък до теорема 1.25 резултат. За банахово пространство с ∂-гладка ренорма Aussel доказва, че една квазиизпъкнала, полунепрекъсната отдолу и радиално непрекъсната върху отворено множество функция, за която всяка стационарна точка е глобален минимум, се явява ∂-псевдоизпъкнала по отношение на субдиференциала, въведен от автора, Corvellec и Lassonde в по-ранна статия. Ако сравним теорема 1.25 с теорема 4.1 от статията на Aussel [5], пример 1.27 показва, че една квазиизпъкнала функция може да бъде полунепрекъсната отгоре, да удовлетворява свойства 4 (в смисъл, че всеки глобален минимум е стационарна точка) и 6, и въпреки това да не бъде полунепрекъсната отдолу.

Особено интересен е съответният резултат на Komlosi [51], отнасящ се до крайномерно пространство, но там е разгледана функция, псевдоизпъкнала по отношение само на горната производна на Дини. А именно, той доказва, че ако една функция е квазиизпъкнала, радиално полунепрекъсната отгоре и всяка стационарна точка е глобален минимум, то тя е псевдоизпъкнала по отношение на горната производна на Дини.

1.29. Пример. *Нека $h(x, u)$ е долната производна по направление на Адамар. Тя удовлетворява свойства 4, 7 и 8 (виж [2]). Ще докажем, че удовлетворява и свойство 6. Наистина, нека $\xi \in \partial f(x)$ и $y \in S$ са произволни и такива, че $f(y) \leq f(x)$. Използвайки квазиизпъкналостта на f, получаваме, че*

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f_-^H(x, y - x) \leq \liminf_{t \to +0} \frac{1}{t}(f(x + t(y - x)) - f(x)) \leq 0.$$

Следователно $\xi \in \mathcal{N}(x)$ и $\partial f(x) \subset \mathcal{N}(x)$.

1.30. Пример. *Горната и долната производни на Дини на произволна функция са примери за обобщени производни, които удовлетворяват свойства 4, 6, 7, 8.*

1.5 Една характеризация на псевдомонотонните обобщени производни по направление

При по-общо третиране обобщената производна по направление би могла да бъде разгледана като бифункция $h(x, u)$ със стойности от $\overline{\mathbf{R}}$, където $x \in X$, а X е дадено отворено подмножество на $\mathbf{E}$ и $u \in \mathbf{E}$ е дадено направление. В този раздел ще предполагаме, че S е произволно изпъкнало подмножество на X.

1.31. Дефиниция. ([53]). Наричаме обобщената производна $h : X \times \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$ *псевдомонотонна (строго псевдомонотонна)* в множеството S, ако за произволна двойка различни точки $y,\ z \in S$ е изпълнена импликацията

$$h(y, z-y) > 0 \quad (\text{съответно } h(y, z-y) \geq 0) \implies h(z, y-z) < 0.$$

Следните теореми дават необходими и достатъчни условия за псевдомонотонност и строга псевдомонотонност.

1.32. Теорема. *Да допуснем, че обобщената производна h удовлетворява свойства 1 и 8. Тогава необходимо и достатъчно условие h да бъде псевдомонотонна в S, е да съществува отрицателна функция $p : S \times S \to \mathbf{R}$, за която*

$$h(z, y-z) \leq p(y,z)\, h(y, z-y), \quad \forall\, y,\ z \in S \tag{1.8}$$

Доказателство. Доказателството е подобно на доказателството на теорема 1.5.

Ще докажем само необходимото условие поради очевидността на достатъчното. Нека h е псевдомонотонна. Ясно е, че неравенството (1.8) е удовлетворено за всяко $p(y,z) < 0$, когато $h(y, z-y) = -\infty$ или $h(z, y-z) = -\infty$. Да предположим, че $h(y, z-y) > -\infty$ и $h(z, y-z) > -\infty$. Съгласно свойство 1 и двете стойности ще бъдат крайни. Построяваме явно $p(y,z)$ по следния начин.

$$p(y,z) = \begin{cases} \frac{h(z,y-z)}{h(y,z-y)}, & \text{ако } h(y,z-y) > 0,\ y \neq z, \\ \frac{h(z,y-z)}{h(y,z-y)}, & \text{ако } h(z,y-z) > 0,\ y \neq z, \\ -1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Функцията p е добре дефинирана, строго отрицателна и удовлетворява неравенството (1.8). Ако $h(y, z-y) > 0,\ y \neq z$, то от псевдомонотонността следва, че $h(z, y-z) < 0$ и значи $p(y,z) < 0$.

Ако $h(z, y - z) > 0$, $y \neq z$, то от псевдомонотонността следва, че $h(y, z - y) < 0$ и оттук отново $p(y, z) < 0$. Ако $h(y, z - y) \leq 0$, $h(z, y - z) \leq 0$, $y \neq z$, то неравенството отново е изпълнено, защото в този случай $p(y, z) = -1$. В случая $y = z$ неравенството е удовлетворено поради свойство 8. $\square$

1.33. Теорема. *Да допуснем, че обобщената производна h удовлетворява свойство 1. Тогава необходимо и достатъчно условие h да бъде строго псевдомонотонна в S, е да съществува отрицателна функция $p : S \times S \to \mathbf{R}$, за която*

$$h(z, y - z) < p(y, z)\, h(y, z - y) \quad \textit{за произволни} \quad y,\ z \in S,\ y \neq z.$$

Доказателство. Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 1.32. Функцията p построяваме по формулата

$$p(y, z) = \begin{cases} 0,5\frac{h(z, y-z)}{h(y, z-y)}, & \text{ако } h(y, z - y) > 0,\ y \neq z, \\ 2\frac{h(z, y-z)}{h(y, z-y)}, & \text{ако } h(z, y - z) > 0,\ y \neq z, \\ -1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

$\square$

1.34. Пример. *Пример за обобщена производна, която е строго псевдомонотонна (псевдомонотонна), е долната производна на Дини на строго псевдоизпъкнала (съответно полунепрекъсната отдолу псевдоизпъкнала) функция върху изпъкнало множество [53, теореми 4, 5]. Тази производна удовлетворява свойство 8 и е крайна, когато функцията е локално липшицова.*

Глава 2

Характеризации на множеството от решения на задачата на обобщено изпъкналото оптимиране

2.1 Няколко характеризации на множеството от решения на псевдоизпъкналата оптимизационна задача

В тази глава ще предполагаме, че $X \subset \mathbf{R}^n$ и $S \subset X$ са съответно отворено и изпъкнало множества. Разглеждаме задачата на нелинейното оптимиране

$$\min_{x \in S} f(x) \tag{P}$$

Предполагаме, че разглежданата функция f е дефинирана в множеството X и $h(x, u)$ е някаква нейна производна в точката x по направление u.

2.1. Дефиниция. Наричаме функцията $f : X \to \mathbf{R}$ *радиално полунепрекъсната отдолу (отгоре)* в изпъкналото множество X, ако функцията $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$, е полунепрекъсната отдолу (отгоре) за произволни $a, b \in X$.

Допускаме, че производната h удовлетворява някои от свойствата, разгледани в глава 1. Свойство 2 е заменено със следното свойство.

Свойство 9. *Ако f е квазиизпъкнала в S, то*

$$x,\ y \in S,\ f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x, y - x) \leq 0.$$

Да разгледаме задачата за глобална минимизация (P). Ще дадем характеризации на множеството от решения на задачата (P), при условие, че е известен един неин минимум $\bar{x}$.

Да означим с $\bar{S}$ множеството от решения $\arg\min\ \{f(x) \mid x \in S\}$ и нека то е непразно. Да допуснем, че $\bar{x}$ е произволен негов фиксиран елемент. Ще разглеждаме следните множества:

$$\tilde{S} := \{z \in S \mid h(z, \bar{x} - z) = 0\},$$

$$\tilde{S}_{\geq} := \{z \in S \mid h(z, \bar{x} - z) \geq 0\},$$

$$\hat{S} := \{z \in S \mid h(\bar{x}, z - \bar{x}) = 0\},$$

$$S^{*} := \{z \in S \mid h(z, \bar{x} - z) = h(\bar{x}, z - \bar{x})\},$$

$$S^{\#} := \{z \in S \mid h(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) = 0 \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in (0, 1]\},$$

$$S^{0} := \{z \in S \mid h(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) = h(\bar{x}, z - \bar{x}) \text{ за всяко } \lambda \in (0, 1]\}.$$

Тук ние сме означили с $z\lambda\bar{x}$ сумата $z\lambda\bar{x} = \bar{x} + \lambda(z - \bar{x})$.

2.2. Теорема. *Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ е псевдоизпъкнала в изпъкналото множество S по отношение на производната h и* *удовлетворява свойства 3, 4, 7, 9. Нека $\bar{x}$ е произволна фиксирана точка от $\bar{S}$. Тогава*

$$\bar{S} = S^{\#} \cap \hat{S} = \tilde{S} \cap \hat{S} = \tilde{S} = \tilde{S}_{\geq} = S^{*} = S^{0}.$$

Доказателство. Очевидно е, че

$$S^{\#}\cap\hat{S} \subset \tilde{S}\cap\hat{S} \subset \tilde{S} \subset \tilde{S}_{\geq}, \quad S^{\#}\cap\hat{S} \subset \tilde{S}\cap\hat{S} \subset S^{*}, \quad S^{\#}\cap\hat{S} \subset S^{0} \subset S^{*}.$$

Ще докажем, че $\bar{S} \subset S^{\#} \cap \hat{S}$. Нека z е произволна точка от $\bar{S}$. Съгласно теорема 1.10 функцията f е квазиизпъкнала в S. Следователно множеството $\bar{S}$ е изпъкнало като множество на субниво на квазиизпъкнала функция. Да допуснем, че λ е произволно число от интервала $(0, 1]$. Тогава $z\lambda\bar{x} \in \bar{S}$. В такъв случай от свойство 4 следва, че $h(z\lambda\bar{x}, x - z\lambda\bar{x}) \geq 0$ за всяко $x \in S$. Вземайки в последното неравенство $x = \bar{x}$, получаваме, че $h(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) \geq 0$, тъй като $h(x, u)$ е положително хомогенна функция на u съгласно свойство 7. От равенството $f(\bar{x}) = f(z\lambda\bar{x})$ следва, съгласно свойство 9, че

$$h(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z\lambda\bar{x}) \leq 0. \tag{2.1}$$

Оттук правим извода, че $h(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) = 0$. Съгласно свойство 4, $h(\bar{x}, z - \bar{x}) \geq 0$. От свойство 9, получаваме, съгласно равенството $f(z) = f(\bar{x})$, че $h(\bar{x}, z - \bar{x}) \leq 0$. Следователно $h(\bar{x}, z - \bar{x}) = 0$. И така $z \in S^{\#} \cap \hat{S}$.

За да покажем включването $\tilde{S}_{\geq} \subset \bar{S}$, допускаме, че $z \in \tilde{S}_{\geq}$. Следователно $h(z, \bar{x} - z) \geq 0$. От псевдоизпъкналостта следва, че $f(\bar{x}) \geq f(z)$, което означава, че $z \in \bar{S}$.

Накрая ще докажем включването $S^{*} \subset \tilde{S}_{\geq}$. Нека z е произволна точка от S^{*}. Използвайки свойство 4, получаваме от $\bar{x} \in \bar{S}$, че $h(\bar{x}, z - \bar{x}) \geq 0$. Съгласно равенството $h(z, \bar{x} - z) = h(\bar{x}, z - \bar{x})$ се вижда, че $z \in \tilde{S}_{\geq}$. Доказателството е завършено. □

Характеризациите от теорема 2.2 с изключение на една са обобщение на резултати, принадлежащи на Jeyakumar и Yang (1995г.) [47], отнасящи се до диференцируемите псевдолинейни функции. Нашето доказателство е значително по-компактно, макар и третиращо по-общ случай.

Да разгледаме случая на псевдоизпъкнала функция, която има производни от по-висок ред. Следният пример показва, че съществуват псевдоизпъкнали задачи с множества от минимумите, съдържащи поне две точки, за които функцията има производни от по-висок ред.

2.3. Пример. *Функцията на две променливи $f = \frac{x_2}{x_1}$ е псевдоизпъкнала в множеството*

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1\}.$$

Това директно се вижда от определението. Множеството от минимумите на f върху S е интервала

$$\bar{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x_1 \le 2,\ x_2 = 0\}.$$

В сила е следното следствие.

2.4. Следствие. *Ако функцията f е двукратно диференцируема по Фреше в X и псевдоизпъкнала в S, то*

$$\bar{S} = \hat{S} \cap \{z \in S \mid \langle z - \bar{x}, \nabla^2 f(z\lambda\bar{x})(z - \bar{x})\rangle = 0, \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\}.$$

Доказателство. Нека $z \in \bar{S}$. Съгласно теорема 2.2 $\bar{S} \subset \hat{S}$. От теоремата следват и равенствата $\langle \nabla f(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x})), z - \bar{x}\rangle = 0$ и $\langle \nabla f(\bar{x} + (\lambda + \mu)(z - \bar{x})), z - \bar{x}\rangle = 0$ за произволни λ, μ такива, че $\lambda \in [0,1]$ и $\lambda + \mu \in [0,1]$. Така стигаме до извода, че

$$\langle \frac{\nabla f(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}) + \mu(z - \bar{x})) - \nabla f(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}))}{\mu}, z - \bar{x}\rangle = 0.$$

Извършвайки граничен преход, когато $\mu \to 0$, получаваме, че

$$\langle z - \bar{x}, \nabla^2 f(z\lambda\bar{x})(z - \bar{x})\rangle = 0 \quad \text{за произволно} \quad \lambda \in [0,1].$$

Ще докажем и обратното включване. Да допуснем, че

$$\langle \nabla f(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle = 0 \text{ и } \langle z - \bar{x}, \nabla^2 f(z\lambda\bar{x})(z - \bar{x})\rangle = 0 \text{ за всяко } \lambda \in [0,1].$$

От теоремата на Тейлър следва, че съществува такова $\theta \in (0,1)$, за което

$$f(z) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle z - \bar{x}, \nabla^2 f(z\theta\bar{x})(z - \bar{x})\rangle.$$

Оттук получаваме, че $z \in \bar{S}$. □

Подобен резултат в случая на двукратно непрекъснато диференцируема по Фреше и псевдолинейна функция е доказан в статията [47, следствие 3.2]. По-точно, там е показано, че

$$\bar{S} = S^{\#} \cap \hat{S} \cap \{z \in S \mid \langle \bar{x} - z, \nabla^2 f(z\lambda\bar{x})(\bar{x} - z)\rangle = 0,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\}.$$

2.5. Забележка. За произволно фиксирано $z \in X$ да разгледаме функцията на една променлива $\varphi_z(t) = f(\bar{x} + t(z - \bar{x}))$. Да предположим, че f е псевдоизпъкнала в S и φ_z има производни от произволен ред в интервала $\{t \in \mathbf{R} \mid \bar{x} + t(z - \bar{x}) \in X\}$ и за всяко $z \in X$ е изпълнено равенството

$$\varphi_z(1) = \varphi_z(0) + \frac{1}{1!}\varphi_z'(0) + \frac{1}{2!}\varphi_z''(0) + \cdots + \frac{1}{k!}\varphi_z^{(k)}(0) + \cdots,$$

като съответният ред на Тейлър е сходящ. Лесно се вижда по аналогия със следствие 2.4, че

$$\bar{S} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{z \in S \mid \varphi_z^{(k)}(0) = 0\}.$$

2.6. Пример. *Теорема 2.2 е в сила например за произволна радиално полунепрекъсната отдолу псевдоизпъкнала по отношение на горната производна на Дини функция. Горната производна на Дини удовлетворява принципа на Ферма и свойство 7. Както вече споменахме в пример 1.8 една такава функция е квазиизпъкнала и удовлетворява свойство 9. Свойство 3 не е в сила за тези функции, но в теоремата то се използва само, за да осигури квазиизпъкналостта на функцията.*

В глава 1 бяха разгледани и други обобщени производни, за които са изпълнени разглежданите свойства.

Следващите резултати са нови.

2.7. Теорема. *Нека радиално полунепрекъснатата отдолу функция $f : X \to \mathbf{R}$ е псевдоизпъкнала в изпъкналото множество S по отношение на производната h и са изпълнени свойствата 3, 9. Ако $\bar{x}$ е произволна фиксирана точка от $\bar{S}$, то $\bar{S} = S^\partial$, където*

$$S^\partial = \{z \in S \mid \langle \xi, \bar{x} - z\rangle = 0,\ \forall\, \xi \in \partial f(z\lambda\bar{x}),\ \forall\, \lambda \in (0,1)\}.$$

Доказателство. Ще докажем включването $\bar{S} \subset S^\partial$. Да допуснем, че $z \in \bar{S}$ и $\lambda \in (0,1)$. Поради свойство 3 функцията е квазиизпъкнала. Тъй като $f(\bar{x}) = f(z\lambda\bar{x})$, то съгласно свойство 9 е изпълнено неравенството (2.1). Следователно $\langle \xi, \bar{x} - z\rangle \le 0$ за всяко $\xi \in \partial f(z\lambda\bar{x})$. Тъй като $f(z) = f(z\lambda\bar{x})$, то съгласно свойство 9, имаме $h(z\lambda\bar{x}, z - z\lambda\bar{x}) \le 0$. Следователно $\langle \xi, \bar{x} - z\rangle \ge 0$ за произволно $\xi \in \partial f(z\lambda\bar{x})$. И така $z \in S^\partial$.

За да докажем обратното включване, да допуснем, че съществува $z \in S^\partial \setminus \bar{S}$. Като резултат имаме, че $f(\bar{x}) < f(z)$. Като използваме, че f е радиално полунепрекъсната отдолу, получаваме, че съществува $\lambda \in (0,1)$, за което $f(\bar{x}) < f(z\lambda\bar{x})$. Съгласно псевдоизпъкналостта $\langle \xi, \bar{x} - z\rangle < 0$ за произволно $\xi \in \partial f(z\lambda\bar{x})$, което е противоречие. □

Всяка псевдоизпъкнала функция, която удовлетворява свойство 3 е квазиизпъкнала.

Теорема 2.2 поражда въпроса съществува ли такъв клас от функции, съдържащ псевдоизпъкналите, за който са изпълнени разгледаните характеризации. Следващите две теореми са свързани с отговора на този въпрос.

2.8. Теорема. *Нека $S \subset \mathbf{R}^n$ е отворено изпъкнало множество. Да разгледаме полунепрекъснатата отгоре квазиизпъкнала функция f, която е дефинирана върху S и удовлетворява свойства 3, 4, 5 и 9. Да допуснем, че $\bar{x}$ е произволен фиксиран елемент от $\bar{S}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

a) f *е псевдоизпъкнала в* S*;*

b) $\bar{S} = \tilde{S}$*;*

c) $\bar{S} = \tilde{S}_{\geq}$*.*

Доказателство. Импликацията $a) \Rightarrow b)$ следва от теорема 2.2.

Нека да докажем импликацията $b) \Rightarrow a)$. Да допуснем, че $\bar{S} = \tilde{S}$ и $z \in S$ е произволна стационарна точка. Следователно $h(z, u) \geq 0$ за всяко $u \in \mathbf{R}^n$. В частност $h(z, \bar{x} - z) \geq 0$. Тъй като $\bar{x} \in \bar{S}$, то $f(\bar{x}) \leq f(z)$. От свойство 9, следва, че $h(z, \bar{x} - z) \leq 0$. Оттук $z \in \tilde{S}$. Съгласно предположението $b)$, z е глобален минимум. Свойство 4 означава, че е изпълнено и обратното, т.е. всеки глобален минимум е стационарна точка. Тогава твърдението следва от теорема 1.13, тъй като съгласно лема 1.11 свойство 9 е еквивалентно в разглеждания случай на свойство 6.

Доказателството на твърдението $c) \iff a)$ е подобно. $\square$

2.9. Теорема. *Нека $S \subset \mathbf{R}^n$ е отворено изпъкнало множество. Да разгледаме диференцируемата по Фреше квазиизпъкнала* *функция f, която е дефинирана върху S. Да допуснем, че $\bar{x}$ е произволен фиксиран елемент от $\bar{S}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

a) f *е псевдоизпъкнала в* S;

b) $\bar{S} = \tilde{S} \cap \hat{S}$;

c) $\bar{S} = S^*$.

Доказателство. Импликацията $a) \Rightarrow b)$ следва от теорема 2.2.

За да докажем импликацията $b) \Rightarrow a)$, да допуснем, че z е стационарна точка. Следователно $\nabla f(z) = 0$. От включването $\bar{x} \in \bar{S}$ правим извода, че $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Оттук получаваме, че $z \in \tilde{S} \cap \hat{S}$. Следователно в z функцията достига глобалния си минимум. Тогава съгласно теорема 1.13 стигаме до извода, че f е псевдоизпъкнала.

Доказателството на твърдението $a) \iff c)$ е аналогично. $\square$

2.2 Няколко характеризации на множеството от решения на квазиизпъкналата задача на квадратичното оптимиране

Ще разгледаме специалния случай, когато f е квадратична функция от вида

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle,$$

където Q е константна симетрична $n \times n$ матрица и c е константен n-мерен вектор. Предположението Q да е симетрична не ограничава общността, тъй като за незадължително симетрична матрица $\bar{Q}$ имаме

$$\langle x, \bar{Q}x\rangle = \langle x, (\frac{1}{2}\bar{Q} + \frac{1}{2}\bar{Q}')x\rangle,$$

където с $\bar{Q}'$ сме означили транспонираната на матрицата $\bar{Q}$. Матрицата $\frac{1}{2}\bar{Q} + \frac{1}{2}\bar{Q}'$ е винаги симетрична.

Ако $S \equiv \mathbf{R}^n$, то квадратичната функция е квазиизпъкнала тогава и само тогава, когато f е изпъкнала (виж например [58, теорема 9.2.23]). Когато $S \not\equiv \mathbf{R}^n$, Martos е доказал в своя по-ранна работа [59, 60], че квазиизпъкналите и псевдоизпъкналите функции могат да не бъдат изпъкнали. Когато S съвпада с неотрицателния ортант той е дал необходими и достатъчни условия за псевдоизпъкналост и квазиизпъкналост на квадратична неизпъкнала функция. По-късно тези условия са обобщени за произволно изпъкнало множество.

Следващият пример показва, че множествата на квадратичните квазиизпъкнали функции, които не са псевдоизпъкнали и на квадратичните псевдоизпъкнали функции, които не са изпъкнали, са непразни.

2.10. Пример. *Да разгледаме функцията на две променливи [1]*

$$f(x_1, x_2) = -x_1 x_2.$$

Тя е квазиизпъкнала в затворения неотрицателен ортант

$$\mathbf{R}^2_{\geq} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Наистина директно се проверява, че множествата на субниво

$$S_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2_{\geq} \mid f(x_1, x_2) \leq \alpha\}$$

са изпъкнали за всяко $\alpha \in \mathbf{R}$. В същото време тази функция не е псевдоизпъкнала в началото $\mathbf{0}$ на координатната система, т.е. ако изберем $x = (0, 0)$ и $y = (y_1, y_2)$, където $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, то е изпълнено неравенството $f(y) < f(x)$, но е нарушено неравенството $\langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0$.

Директно се проверява, че тази функция е псевдоизпъкнала в отворения неотрицателен ортант

$$\mathbf{R}^2_> = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\}.$$

Наистина, от неравенството $f(y) < f(x)$, където $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ са произволни точки от неотрицателния ортант $\mathbf{R}^2_>$ следва, че $\langle \nabla f(x), y - x\rangle < 0$. В същото време тази функция не е изпъкнала в $\mathbf{R}^2_>$, защото неравенството

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

е нарушено, когато $x_1 = x_2 = \tilde{x} > 0$, $y_1 = y_2 = \tilde{y} > 0$ и $\tilde{x} \neq \tilde{y}$.

Естествено е да си зададем въпроса възможно ли е минимумът на една квазиизпъкнала квадратична функция върху изпъкнало множество да се достига в поне две различни точки. Следващият пример дава положителен отговор на този въпрос.

2.11. Пример. *Функцията на две променливи $f = -(x_1 + x_2)^2$ е квазиизпъкнала в изпъкналото множество*

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Това се вижда лесно, като се провери, че множествата ѝ на subниво са изпъкнали. Глобалният минимум на f върху S се достига върху правата $x_1 + x_2 = 2$.

Оказва се, че множеството от минимумите $\bar{S}$ на квазиизпъкнала квадратична функция върху изпъкнало множество или е празното множество, или се състои само от един елемент, или ако съдържа две различни точки, то цялата права, която ги свързва принадлежи на $\bar{S}$.

2.12. Твърдение. *Нека квадратичната функция*

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle$$

е квазиизпъкнала в изпъкналото множество S. *Ако* $\bar{x}$ *и* $\bar{y}$ *са различни точки от множеството от минимумите* $\bar{S}$, *то* $\bar{x}+t(\bar{y}-\bar{x}) \in \bar{S}$ *за всяко* $t \in \mathbf{R}$.

Доказателство. Да означим минималната стойност на f с $\bar{f}$. Съгласно условието

$$\frac{1}{2}\langle \bar{x}, Q\bar{x}\rangle + \langle c, \bar{x}\rangle = \bar{f}, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2}\langle \bar{y}, Q\bar{y}\rangle + \langle c, \bar{y}\rangle = \bar{f}. \tag{2.3}$$

Тъй като f е квазиизпъкнала, то $\bar{S}$ е изпъкнало. Следователно $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \in \bar{S}$. Оттук, като вземем в предвид равенствата (2.2) и (2.3), получаваме, че

$$\langle \bar{x}, Q\bar{y}\rangle + \langle \bar{y}, Q\bar{x}\rangle = 4\bar{f} - 2\langle c, \bar{x}\rangle - 2\langle c, \bar{y}\rangle \tag{2.4}$$

Нека t е произволно реално число. Съгласно равенствата (2.2), (2.3) и (2.4) правим извода, че

$$f(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = \frac{1}{2}t^2\langle \bar{y}, Q\bar{y}\rangle + \frac{1}{2}(1-t)^2\langle \bar{x}, Q\bar{x}\rangle +$$

$$\frac{1}{2}t(1-t)(\langle \bar{x}, Q\bar{y}\rangle + \langle \bar{y}, Q\bar{x}\rangle) + t\langle c, \bar{y}\rangle + (1-t)\langle c, \bar{x}\rangle = \bar{f},$$

откъдето следва твърдението. □

В работата на Benson, Smith, Schochetman и Bean (1994г.) [10] са потърсени допълнителни условия, при които множеството от минимумите на изпъкнала функция f върху афинно множество S в хилбертово пространство, е също афинно. Доказан е следният факт: ако квадратичната функция $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle$, където Q е линеен оператор, е изпъкнала върху афинно множество S в хилбертово пространство, то множеството от минимумите е също афинно (теорема 2.2). Понятието афинно множество се разбира в смисъл, че заедно с кои да е две свои различни точки, множеството съдържа и правата, която ги свързва.

Както се вижда от доказаното твърдение множеството от минимумите е афинно и когато множеството от ограничения е произволно изпъкнало, не задължително афинно, а функцията е квазиизпъкнала, тъй като за доказателството е необходимо единствено множеството от минимумите да бъде изпъкнало. В частност доказаното твърдение остава в сила и в случая на квадратична изпъкнала функция. Като допълнение ще добавим, че показаното доказателство е многократно по-кратко. То не се променя и в случая на квадратична функция в хилбертово пространство.

Част от разгледаните в предишния подраздел характеризации остават верни и в квадратичния квазиизпъкнал случай.

Да разгледаме множествата

$$\hat{S} = \{z \in S \mid \langle \nabla f(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle = 0\} = \{z \in S \mid \langle Q\bar{x} + c, z - \bar{x}\rangle = 0\},$$

$$\tilde{S} = \{z \in S \mid \langle \nabla f(z), \bar{x} - z\rangle = 0\} = \{z \in S \mid \langle Qz + c, \bar{x} - z\rangle = 0\},$$

$$S^! = \{z \in S \mid \langle Q(z - \bar{x}), z - \bar{x}\rangle = 0\}.$$

2.13. Теорема. *Да разгледаме задачата за минимум на квадратичната квазиизпъкнала функция*

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle c, x\rangle$$

със симетрична матрица Q върху изпъкналото множество $S \subset \mathbf{R}^n$. Да допуснем, че $\bar{x}$ е произволен елемент от $\bar{S}$. Тогава

$$\bar{S} = S^{\#} \cap \hat{S} = \tilde{S} \cap \hat{S} = S^* = S^0 = S^! \cap \hat{S}.$$

Доказателство. Очевидно е, че $S^{\#} \cap \hat{S} \subset \tilde{S} \cap \hat{S} \subset S^*$.

Ще покажем, че $\bar{S} \subset S^{\#} \cap \hat{S}$. Нека $z \in \bar{S}$ е произволно. Тъй като множеството от решения на квазиизпъкналата задача е изпъкнало, то $f(z) = f(\bar{x}) = f(z\lambda\bar{x})$ за всяко $\lambda \in (0, 1]$. От квазиизпъкналостта следва, че $\langle \nabla f(\bar{x}), z - \bar{x} \rangle \leq 0$ и $\langle \nabla f(z\lambda\bar{x}), \bar{x} - z\lambda\bar{x} \rangle \leq 0$ за всяко $\lambda \in (0, 1]$. Използвайки изпъкналостта на S получаваме съгласно принципа на Ферма, че $\langle \nabla f(\bar{x}), z - \bar{x} \rangle \geq 0$ и $\langle \nabla f(z\lambda\bar{x}), \bar{x} - z\lambda\bar{x} \rangle \geq 0$ за всяко $\lambda \in (0, 1]$. Следователно $z \in S^{\#} \cap \hat{S}$.

За да докажем включването $S^* \subset \bar{S}$ допускаме, че $z \in S^*$, т.е.

$$\langle Qz + c, \bar{x} - z \rangle = \langle Q\bar{x} + c, z - \bar{x} \rangle. \tag{2.5}$$

Тъй като Q е симетрична матрица, то $\langle Q\bar{x}, z \rangle = \langle Qz, \bar{x} \rangle$. Това означава, че (2.5) може да се запише по следния начин: $f(\bar{x}) = f(z)$. Следователно $z \in \bar{S}$.

Равенството $\bar{S} = S^0$ следва от включването $S^{\#} \cap \hat{S} \subset S^0 \subset S^*$.

Ще докажем равенството $\bar{S} = S^! \cap \hat{S}$. Нека $z \in \bar{S}$. От равенството $\bar{S} = \hat{S} \cap \tilde{S}$ следва, че $\langle Q\bar{x} + c, z - \bar{x} \rangle = 0$ и $\langle Qz + c, \bar{x} - z \rangle = 0$. Като съберем тези равенства, получаваме, че $z \in S^!$.

Обратно, да допуснем, че $z \in S^! \cap \hat{S}$. От равенствата $\langle Q\bar{x} + c, z - \bar{x} \rangle = 0$ и $\langle Q(z - \bar{x}), z - \bar{x} \rangle = 0$ следва, че $\langle Qz + c, \bar{x} - z \rangle = 0$. Оттук съгласно равенството $\bar{S} = \hat{S} \cap \tilde{S}$ получаваме, че $z \in \bar{S}$. Доказателството е завършено. □

2.14. Следствие. *Нека Q е константна симетрична $n \times n$ матрица, а c - константен n-мерен вектор. Да разгледаме задачата за минимум на квазиизпъкналата квадратична функция $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle + \langle c, x \rangle$ върху отвореното изпъкнало множество $S \subset \mathbf{R}^n$. Да допуснем, че $\bar{S} \neq \emptyset$. Тогава f е псевдоизпъкнала в S.*

Доказателство. Нека $\bar{x}$ е произволен фиксиран елемент от $\bar{S}$. Съгласно теорема 2.13 $\bar{S} = \tilde{S} \cap \hat{S}$. От теорема 2.9 следва, че f е псевдоизпъкнала. □

Твърдението на това следствие остава в сила и без да се предполага, че множеството $\bar{S}$ е непразно [6]. Това може да се докаже чрез директно прилагане на теорема 1.13.

2.3 Характеризация на множеството от решения на стандартното вариационно неравенство

Ще пренесем разгледаните характеризации върху стандартното вариационно неравенство.

Да припомним следните добре известни понятия.

2.15. Дефиниция. ([36]). Нека са дадени множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и оператор $F : V \to \mathbf{R}^n$. Решаването на *стандартното вариационно неравенство* се състои в намирането на онези елементи $\bar{x} \in V$, за които

$$\langle F(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in V. \tag{SVI}$$

2.16. Дефиниция. ([50]). Операторът $F : V \to \mathbf{R}^n$ се нарича *псевдомонотонен*, ако е изпълнена импликацията

$$x,\ y \in V,\ \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(y), y - x \rangle \geq 0.$$

Да означим множеството от решения на стандартното вариационно неравенство с $\bar{V}$ и нека $\bar{x}$ е произволен фиксиран елемент на $\bar{V}$. Да въведем следните означения:

$$\hat{V} := \{z \in V \mid \langle F(\bar{x}), z - \bar{x} \rangle = 0\}, \quad \tilde{V} := \{z \in V \mid \langle F(z), \bar{x} - z \rangle = 0\},$$

$$V^* := \{z \in V \mid \langle F(z), \bar{x} - z \rangle = \langle F(\bar{x}), z - \bar{x} \rangle\},$$

$$V^\# := \{z \in V \mid \langle F(z\lambda\bar{x}), \bar{x} - z \rangle = 0 \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in [0,1]\},$$

$$V^0 := \{z \in V \mid \langle F(z\lambda\bar{x}), \bar{x} - z\rangle = \langle F(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in (0,1]\}.$$

В сила е следната теорема.

2.17. Теорема. *Нека множеството $V \subset \mathbf{R}^n$ е изпъкнало, операторът $F : V \to \mathbf{R}^n$ е псевдомонотонен и $\bar{x} \in V$ е произволен фиксиран елемент на $\bar{V}$. Тогава*

$$\bar{V} \subset \tilde{V} \cap \hat{V} = V^* = V^{\#} = V^0 = \tilde{V} \subset \hat{V}.$$

Доказателство. Ще докажем, че $\bar{V} \subset \tilde{V} \cap \hat{V}$. Нека z е произволен елемент от $\bar{V}$. Следователно

$$\langle F(z), \bar{x} - z\rangle \geq 0. \tag{2.6}$$

Използвайки псевдомонотонността на F, получаваме, че $\langle F(\bar{x}), \bar{x} - z\rangle \geq 0$. Поради $\bar{x} \in \bar{V}$ имаме

$$\langle F(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle \geq 0, \tag{2.7}$$

което означава, че $\langle F(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle = 0$. Съгласно псевдомонотонността от (2.7) следва неравенството

$$\langle F(z), z - \bar{x}\rangle \geq 0. \tag{2.8}$$

От (2.6) и (2.8) правим извода, че $\langle F(z), \bar{x} - z\rangle = 0$. Следователно $z \in \tilde{V} \cap \hat{V}$.

Очевидно $\tilde{V} \cap \hat{V} \subset V^*$. Обратното включване $V^* \subset \tilde{V} \cap \hat{V}$ е последица от (2.7), (2.8) и дефиницията на V^*.

Ще докажем равенството $V^{\#} = \hat{V} \cap \tilde{V}$. Очевидно е, че $V^{\#} \subset \hat{V} \cap \tilde{V}$. За да докажем обратното включване, да допуснем, че z е произволен елемент от $\hat{V} \cap \tilde{V}$. От равенството $\langle F(\bar{x}), z - \bar{x}\rangle = 0$ следва, че $\langle F(\bar{x}), z\lambda\bar{x} - \bar{x}\rangle = 0$ за всяко $\lambda \in (0,1)$. Съгласно псевдомонотонността $\langle F(z\lambda\bar{x}), z\lambda\bar{x} - \bar{x}\rangle \geq 0$, откъдето получаваме, че

$$\langle F(z\lambda\bar{x}), z - \bar{x}\rangle \geq 0 \text{ за всяко } \lambda \in (0,1). \tag{2.9}$$

От равенството $\langle F(z), \bar{x} - z\rangle = 0$ следва, че $\langle F(z), z\lambda\bar{x} - z\rangle = 0$ за всяко $\lambda \in (0,1)$. Съгласно псевдомонотонността $\langle F(z\lambda\bar{x}), z\lambda\bar{x} - z\rangle \geq 0$. Оттук получаваме, че

$$\langle F(z\lambda\bar{x}), \bar{x} - z\rangle \geq 0 \text{ за всяко } \lambda \in (0,1). \tag{2.10}$$

От неравенствата (2.9) и (2.10) и от $z \in \hat{V} \cap \tilde{V}$ правим извода, че $z \in V^{\#}$.

Равенството $V^{\#} = V^0$ следва от очевидните съотношения

$$\hat{V} \cap \tilde{V} = V^{\#} \subset V^0 \subset V^* = \hat{V} \cap \tilde{V}.$$

И накрая, за да докажем включването $\tilde{V} \subset \hat{V}$ допускаме, че $z \in \tilde{V}$. Оттук получаваме, че $\langle F(z), \bar{x} - z\rangle = 0$. Съгласно псевдомонотонността $\langle F(\bar{x}), \bar{x} - z\rangle \geq 0$. От това неравенство и от неравенството (2.7) следва, че $z \in \hat{V}$. Теоремата е доказана. □

2.18. Забележка. Включванията в теорема 2.17 са строги. Наистина да допуснем, че $V \equiv \mathbf{R}^n$. Тогава множеството от решения на вариационното неравенство съвпада с множеството от решения на операторното уравнение $F(x) = 0$. Да предположим, че $\bar{x} \in \bar{V}$. Следователно $\hat{V} \equiv \mathbf{R}^n$. Включването $z \in \tilde{V}$ не означава, че $F(z) = 0$ и то не е задължително изпълнено за всяко $z \in \mathbf{R}^n$.

Глава 3

Характеризации от втори ред на изпъкналите и на псевдоизпъкналите функции

3.1 Нови производни по направление от n-ти ред на негладка функция

В тази глава ще предполагаме, че $\mathbf{E}$ е дадено реално линейно нормирано пространство.

Въвеждаме производни по направление от втори и по-висок ред на негладката функция $f : \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$. Нека са дадени функцията $f : \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$, точката $x_0 \in \mathbf{E}$ и направлението $u \in \mathbf{E}$. Дефинираме долната производна на функцията f в точката x_0 от ред нула по следния начин:

$$f_-^{(0)}(x_0) = \liminf_{v \to 0} f(x_0 + v).$$

Сходимостта $v \to 0$ се разбира в смисъл, че $v \in \mathbf{E}$ и $\|v\| \to 0$.

Обикновено производни по направление от нулев ред не се въвеждат. Обща практика е да се започне с производни от първи ред. Ние разглеждаме производни по направление от ред нула, защото прекъснатите функции също са в полето на нашия интерес. Производната $f_-^{(0)}(x_0)$ винаги съществува като елемент на разширената реална права $\overline{\mathbf{R}}$ и въпреки, че наричаме нулевата производна производна по направление в съответствие със следващата дефиниция, тя всъщност не зависи от направлението u.

За дадено цяло положително число n и дадено направление $u \in \mathbf{E}$ да допуснем, че долната n-та производна $f_-^{(n)}(x_0, u)$ по направление u в точката x_0 съществува като елемент на $\overline{\mathbf{R}}$ тогава и само тогава, когато производните $f_-^{(0)}(x_0)$, $f_-^{(i)}(x_0, u)$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, съществуват като елементи на $\mathbf{R}$. Тогава ние полагаме

$$\begin{aligned} f_-^{(n)}(x_0, u) = \liminf\nolimits_{(t,v)\to(+0,0)} \tfrac{n!}{t^n} \big(f(x_0 + tu + t^n v) \\ - f_-^{(0)}(x_0) - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{t^i}{i!} f_-^{(i)}(x_0, u)\big) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Сходимостта $(t, v) \to (+0, 0)$ се разбира в смисъл, че t е реално положително число, което клони към 0 и $v \in \mathbf{E}$ е такова, че $\|v\| \to 0$. Тъй като $f_-^{(i)}(x_0, u) \in \mathbf{R}$ за $i = 0, \dots, n-1$ само членът $f(x_0 + tu + t^n v)$ в (3.1) може да приема стойност безкрайност. Следователно в (3.1) неопределени изрази от типа $\infty - \infty$ не могат да се появят. Чрез заместване в (3.1) $\liminf$ с $\limsup$ ние получаваме n-тата горна производна $f_+^{(n)}(x_0, u)$.

В случая, когато функцията f е полунепрекъсната отдолу в x_0, то $f_-^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ и първата долна производна по направление съвпада с първата долната производна на Адамар (1.3).

Следната теорема твърди, че производните дефинирани чрез равенството (3.1) обобщават класическите производни по направление, т.е. удовлетворяват принципа за допълнителност.

3.1. Теорема. *Нека функцията $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ има производни на Фреше $f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ във всяка точка $x \in \mathbf{E}$ от някаква околност на $x_0 \in \mathbf{E}$ и нека съществува n-тата производна на Фреше $f^{(n)}(x_0)$. Тогава n-тата долна производна $f_-^{(n)}(x_0, u)$ съществува за всяка посока $u \in \mathbf{E}$ и тя съвпада със съответната производна по направление на Фреше, т. е.*

$$f_-^{(n)}(x_0, u) = f^{(n)}(x_0)(u, \dots, u).$$

Доказателство. Да допуснем, че ако f е непрекъсната в x_0, тя има нулева производна на Фреше в тази точка, която е равна на $f(x_0)$. Тогава случаят $n = 0$ е очевиден. Ще докажем твърдението по индукция. Да допуснем, че теоремата е вярна за $i = 1, 2, \dots, n-1$. Съгласно дефиницията на долната производна, използвайки формулата на Тейлър, получаваме

$$f_-^{(n)}(x_0, u) = \liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{n!}{t^n}\big(f(x_0) + f'(x_0)(tu + t^n v) + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(tu+t^n v, \dots, tu+t^n v) + o(t^n) - f_-^{(0)}(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!} f_-^{(i)}(x_0, u)\big)$$

$$= \liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \big(n! f'(x_0)(v) + f^{(n)}(x_0)(u, \dots, u) + \alpha(t)\big)$$

$$= f^{(n)}(x_0)(u, \dots, u).$$

Тук $\alpha(t) \to 0$, когато $t \to 0$. □

Следващото твърдение дава необходими и достатъчни условия да бъдат равни горните и долните производни.

3.2. Твърдение. *Нека са дадени точка $x_0 \in \mathbf{E}$, направление $u \in \mathbf{E}$ и функция $f : \mathbf{E} \to \overline{\mathbf{R}}$. В сила са твърденията:*

a) $f_-^{(0)}(x_0) = f_+^{(0)}(x_0)$ *тогава и само тогава, когато* f *е непрекъсната в* x_0.

b) Ако

$$A_i = f_-^{(i)}(x_0, u) = f_+^{(i)}(x_0, u), \ (i = 0,\ 1),$$

то f *има производна по направление* u *в* x_0 *и* $f'(x_0, u) = A_1$.

Обратно, ако f *удовлетворява условието на Липшиц в някаква околност на* x_0 *и съществува производната по направление* $f'(x_0, u)$, *то съществуват долната и горната първи производни по направление* u *в* x_0 *съответно* $f_-^{(1)}(x_0, u)$, $f_+^{(1)}(x_0, u)$ *и*

$$f_-^{(1)}(x_0, u) = f_+^{(1)}(x_0, u) = f'(x_0, u).$$

c) Ако

$$A_i = f_-^{(i)}(x_0, u) = f_+^{(i)}(x_0, u), \ (i = 0,\ 1,\ 2),$$

то f *има втора производна*

$$f''(x_0, u) = \lim_{t \to +0} \frac{2}{t^2}(f(x_0 + tu) - f(x_0) - tf'(x_0, u))$$

по направление u *в* x_0 *и* $f''(x_0, u) = A_2$.

Обратно, ако f *удовлетворява условието на Липшиц в някаква околност на* x_0 *и съществуват производните по направление* $f'(x_0, u)$, $f''(x_0, u)$, *то съществуват вторите долна и горна производни по направление* $f_-^{(2)}(x_0, u)$ *и* $f_+^{(2)}(x_0, u)$ *съответно и*

$$f_-^{(2)}(x_0, u) = f_+^{(2)}(x_0, u) = f''(x_0, u).$$

Доказателство. Ще докажем твърдение c), тъй като доказателствата a) и b) са аналогични.

Да допуснем, че

$$f_-^{(i)}(x_0, u) = f_+^{(i)}(x_0, u) = A_i, \ i = 0,\ 1,\ 2.$$

Съгласно твърдения a) и b)

$$f_-^{(2)}(x_0,u) = \liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{2}{t^2}(f(x_0+tu+t^2v) - f(x_0) - tf'(x_0,u))$$

$$\leq \liminf_{t\to+0} \frac{2}{t^2}(f(x_0+tu) - f(x_0) - tf'(x_0,u))$$

$$\leq \limsup_{t\to+0} \frac{2}{t^2}(f(x_0+tu) - f(x_0) - tf'(x_0,u))$$

$$\leq \limsup_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{2}{t^2}(f(x_0+tu+t^2v) - f(x_0) - tf'(x_0,u)) = f_+^{(2)}(x_0,u).$$

Следователно $f''(x_0,u)$ съществува и

$$f''(x_0,u) = f_-^{(2)}(x_0,u) = f_+^{(2)}(x_0,u).$$

Да допуснем, че f е липшицова в някаква околност на x_0 и съществуват $f'(x_0,u)$ и $f''(x_0,u)$. Оттук следва, че съществува долната производна $f_-^{(2)}(x_0,u)$, защото $f_-^{(1)}(x_0,u)$ е крайна. Съгласно условието на Липшиц

$$f_-^{(2)}(x_0,u) = \liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{2}{t^2}\Big((f(x_0+tu) - f(x_0) - tf'(x_0,u))$$

$$+(f(x_0+tu+t^2v) - f(x_0+tu))\Big) = f''(x_0,u) +$$

$$\liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{2}{t^2}(f(x_0+tu+t^2v) - f(x_0+tu)) = f''(x_0,u).$$

Другата част на доказателството е аналогична. □

Следващото твърдение показва как изглеждат първата и втората производни, когато функцията е локално липшицова.

3.3. Твърдение. *Нека за някое фиксирано* $x_0 \in \mathbf{E}$ *функцията* f *удовлетворява условието на Липшиц с константа* $L > 0$ *в някаква околност на* x_0 *(казваме, че функцията е липшицова от ранг*

L) и $u \in \mathbf{E}$ е какво да е направление. Тогава долната производна $f_-^{(1)}(x_0, u)$ съвпада с долната производна по направление на Дини, т.е.

$$f_-^{(1)}(x_0, u) = \liminf_{t \to +0} \frac{1}{t}(f(x_0 + tu) - f(x_0)).$$

Втората долна производна има вида:

$$f_-^{(2)}(x_0, u) = \liminf_{t \to +0} \frac{2}{t^2}(f(x_0 + tu) - f(x_0) - tf_-^{(1)}(x_0, u)).$$

Доказателство. Първото твърдение е известен факт [2].

Ще докажем второто твърдение. Съгласно определението за втората долна производна

$$f_-^{(2)}(x_0, u) = \liminf_{(t,v) \to (+0,0)} \frac{2}{t^2}(f(x_0 + tu + t^2 v) - f_-^{(0)}(x_0) - tf_-^{(1)}(x_0, u)).$$

В израза отдясно членът $f(x_0 + tu + t^2 v)$ може да бъде заместен с $f(x_0 + tu)$ поради неравенството

$$\frac{2}{t^2}|f(x_0 + tu + t^2 v) - f(x_0 + tu)| \leq 2L\|v\|.$$

Това неравенство е изпълнено за произволни t и v, достатъчно близки до 0. Съгласно твърдение 3.2, $f_-^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, тъй като функцията е непрекъсната в x_0. Следователно, като вземем в предвид първото твърдение, получаваме

$$f_-^{(2)}(x_0, u) = \liminf_{t \to +0} \frac{2}{t^2}(f(x_0 + tu) - f(x_0) - tf_-^{(1)}(x_0, u)),$$

което трябваше да докажем. □

3.2 Характеризация от втори ред на изпъкналите функции с помощта на първата и втората горни производни на Дини

Ще предполагаме, че функцията f е определена върху отвореното множество $X \subset \mathbf{E}$. Разглеждаме горната и долната първи производни по направление на Дини съответно (1.6) и (1.2). Дефинираме втората горна (долна) производна на Дини на функцията f в точката $x \in X$ по направление $u \in \mathbf{E}$ по следния начин:

$$f''_{+}(x,u) = \limsup_{t \to +0} 2t^{-2}(f(x+tu) - f(x) - tf'_{+}(x,u)),$$

$$(f''_{-}(x;u) = \liminf_{t \to +0} 2t^{-2}(f(x+tu) - f(x) - tf'_{-}(x;u))).$$

Очевидно е неравенството $f'_{-}(x,u) \leq f'_{+}(x,u)$ за произволни $x \in X$ и $u \in \mathbf{E}$. Наричаме f''_{+} горна, а f''_{-} - долна поради вида на използваните граници. Следният пример показва, че неравенството $f''_{-}(x,u) \leq f''_{+}(x,u)$ не е задължително изпълнено за произволни $x \in X$ и $u \in \mathbf{E}$.

3.4. Пример. *Да разгледаме функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ е рационално} \\ 1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ако x е рационално, то $f'_{+}(x,1) = \infty$, $f'_{-}(x,1) = 0$, $f''_{+}(x,1) = -\infty$, $f''_{-}(x,1) = 0$.

Ще припомним следното определение.

3.5. Дефиниция. ([89]). Нека $X \subset \mathbf{E}$ е изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbf{R}$ се нарича *силно изпъкнала* в X, ако съществува такава константа $\kappa > 0$, че за произволни x, $y \in X$ и всяко

$\lambda \in [0,1]$

$$f\left(\lambda y + (1-\lambda)x\right) \le \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) - \kappa\lambda(1-\lambda)\|y-x\|^2.$$

Ще използваме следното необходимо условие за оптималност.

3.6. Лема. *Нека функцията $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ има локален максимум в точката x. Тогава $f'_+(x,u) \le 0$ за всяко $u \in \mathbf{E}$ и равенството $f'_+(x,u) = 0$ означава, че $f''_+(x,u) \le 0$.*

Доказателство. Доказателството следва директно от определенията за първа и втора производни на Дини. □

Да разгледаме следните условия:

$$\begin{array}{llll}
(C_1) & f'_+(x,u) + f'_+(x,-u) \ge 0 & & \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in \mathbf{E}; \\
(C_2) & f'_+(x,u) + f'_+(x,-u) = 0 & \Longrightarrow & f''_+(x,u) \ge 0; \\
(C_3) & f'_+(x,u) + f'_+(x,-u) = 0 & \Longrightarrow & f''_+(x,u) \ge 2\kappa\|u\|^2; \\
(C_4) & f'_+(x,u) + f'_+(x,-u) = 0,\ u \ne 0 & \Longrightarrow & f''_+(x,u) > 0;
\end{array}$$

Следната теорема дава характеризации от втори ред на различни типове изпъкнали функции.

3.7. Теорема. *Нека функцията f е радиално полунепрекъсната отгоре в отвореното изпъкнало множество $X \subset \mathbf{E}$. Тогава*

(i) необходимо и достатъчно условие f да бъде изпъкнала в X, е да са изпълнени условията (C_1) и (C_2);

(ii) необходимо и достатъчно условие f да бъде силно изпъкнала в X с константа $\kappa > 0$, е да са удовлетворени (C_1) и (C_3);

(iii) заедно условията (C_1) и (C_4) означават, че f е строго изпъкнала в X.

Доказателство. Да разгледаме изпъкналия случай. Да допуснем, че f е изпъкнала. Следователно $f'_+(x,u)$ съвпада с класическата производна по направление $f'(x,u)$ за всяко x и всяко u.

Субдиференциалът $\partial f(x)$ е непразно множество за всяко $x \in X$ и значи съществува $\xi \in \partial f(x)$. Така правим извода, че

$$f'_+(x,u) + f'_+(x,-u) \geq \langle \xi, u \rangle + \langle \xi, -u \rangle = 0.$$

От неравенството $f(x+tu) - f(x) - tf'(x,u) \geq 0$ за произволни $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$ следва, че $f''_+(x,u) \geq 0$ за всяко $x \in X$ и всяко $u \in \mathbf{E}$.

Да допуснем, че условията (C_1) и (C_2) са изпълнени. За произволни фиксирани x и u да означим функцията $\varphi(t) = f(x+tu)$. Тя е дефинирана за всяко $t \geq 0$, за което $x + tu \in X$. Нека $[a,b]$ да бъде какъв да е затворен интервал от дефиниционната област на φ. Да допуснем, че ε е произволно достатъчно малко положително число. Да означим

$$\psi(t) = \varphi(t) + \varepsilon(t-a)(t-b) + A(t-a) + B(t-b),$$

където A и B са такива константи, че $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Следователно $A = \frac{\varphi(b)}{a-b}$ и $B = \frac{\varphi(a)}{b-a}$. Тъй като ψ е полунепрекъсната отгоре, то съгласно теоремата на Вайерщрас ψ достига най-голямата си стойност в интервала $[a,b]$ в някоя точка ξ. Да допуснем, че ξ е вътрешна за $[a,b]$. След лесни изчисления се получава, че

$$\begin{aligned}\psi'_+(\xi,1) &= f'_+(x+\xi u, u) + \varepsilon(\xi-a) + \varepsilon(\xi-b) + A + B,\\ \psi'_+(\xi,-1) &= f'_+(x+\xi u, -u) - \varepsilon(\xi-a) - \varepsilon(\xi-b) - A - B.\end{aligned}$$

Съгласно условието (C_1),

$$\psi'_+(\xi,1) + \psi'_+(\xi,-1) = f'_+(x+\xi u, u) + f'_+(x+\xi u, -u) \geq 0 \qquad (3.2)$$

Като използваме необходимото условие от първи ред за локален максимум, получаваме че $\psi'_+(\xi,1) \leq 0$ и $\psi'_+(\xi,-1) \leq 0$. Следователно от (3.2) стигаме до извода, че $\psi'_+(\xi,1) = \psi'_+(\xi,-1) = 0$, т.е.

$$f'_+(x+\xi u, u) + f'_+(x+\xi u, -u) = 0 \qquad (3.3)$$

Съгласно необходимото условие от втори ред за локален максимум $\psi''_+(\xi, 1) \leq 0$. От условието (C_2) следва, че $f''_+(x+\xi u, u) \geq 0$. Оттук получаваме, че

$$\psi''_+(\xi, 1) = f''_+(x + \xi u, u) + 2\varepsilon > 0,$$

което е противоречие. И така, ξ не може да бъде вътрешна точка на $[a, b]$. Следователно $\psi(t) \leq \psi(a) = 0$ за всяко $t \in [a, b]$. Извършвайки граничен преход в последното неравенство, когато $\varepsilon \to 0$, стигаме до извода, че

$$\varphi(t) = \varphi(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b) \leq \frac{b-t}{b-a}\varphi(a) + \frac{t-a}{b-a}\varphi(b), \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Тъй като $[a, b]$ е произволен интервал от дефиниционната област на φ, то φ е изпъкнала. Следователно f също е изпъкнала.

Доказателството на силно изпъкналия случай е аналогично на доказателството на изпъкналия с тази разлика, че ψ трябва да се замени с функцията

$$\psi_1(t) = \varphi(t) + A(t-a) + B(t-b) + (\varepsilon - \kappa\|u\|^2)(t-b)(t-a).$$

Да разгледаме строго изпъкналия случай. Сравнявайки с изпъкналия случай, трябва да заменим в доказателството функцията ψ с $\psi_2(t) = \varphi(t) + A(t-a) + B(t-b)$. Без да извършваме какъвто и да било граничен преход, получаваме, че

$$\varphi(t) < \frac{b-t}{b-a}\varphi(a) + \frac{t-a}{b-a}\varphi(b) \quad \text{за всяко} \quad t \in (a, b).$$

Следователно функцията е строго изпъкнала. □

3.8. Пример. *Този пример показва, че условието (C_1) не може да бъде изпуснато, а условието (C_2) заменено с $f''_+(x, u) \geq 0$ за произволни $x \in X$ и $u \in \mathbf{E}$ както в класическия случай. Функцията $f(x) = -|x|$, където $|\cdot|$ е абсолютната стойност на реално число, удовлетворява равенството $f''_+(x, u) = 0$ за произволни*

$x,\ u \in \mathbf{R}$. Тази функция е непрекъсната, без да е изпъкнала. Очевидно, $f'_+(0,1) + f'_+(0,-1) = -2$.

3.9. Пример. *Допускането f да е радиално полунепрекъсната отгоре не може да бъде пропуснато в теорема 3.7. Наистина, да разгледаме функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е ирационално;} \\ x^2, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Тази функция удовлетворява (C_1) и (C_2), но f не е изпъкнала. Виждаме, че тя не е полунепрекъсната отгоре.

Теорема 3.7 *i)* е обобщение на теорема 2 в Huang, Ng (1997г.) [39]. В тяхната работа съответната теорема е доказана чрез използването на производните от втори ред на Ben-Tal и Zowe [9]. В сравнение с настоящата теорема разглеждането в Huang, Ng [39] е ограничено само до регулярна локално липшицова функция. Условието (C_1) всъщност не се появява тъй като в тази работа функцията е локално липшицова и регулярна. При такава функция то очевидно винаги е удовлетворено. Характеризация от втори ред на изпъкналите функции с помощта на обобщени производни по направление се появява и в статиите Chaney (1987г.) [14], Cominetti, Correa (1990г.) [17], Yang, Jeyakumar (1992г.) [84] и Yang (1994) [85], където са разгледани функции от ограничени класове, удовлетворяващи условието (C_1). В никоя от споменатите работи условието (C_1) не се появява явно.

3.3 Характеризация от втори ред на псевдоизпъкналите функции

Понятието стационарна точка е свързано със съответна производна по направление. В този раздел ще разбираме, че точката x е стационарна, точно когато

$$f'_+(x,u) \geq 0 \quad \text{за всяко} \quad u \in \mathbf{E}.$$

Следната лема, доказана в случая, когато пространството е крайномерно, и принадлежаща на Komlosi [51, теорема 1] (или [33, теорема 3.6]), е аналог на теорема 1.13.

3.10. Лема. *Нека f е радиално полунепрекъсната отгоре квазиизпъкнала функция, дефинирана в отворено изпъкнало множество $X \subset \mathbf{E}$. Ако във всяка стационарна точка x на функцията f се достига глобален минимум, то f е псевдоизпъкнала в X по отношение на горната производна на Дини.*

В този раздел ще пропускаме думите „по отношение на горната производна на Дини“ за простота и ще наричаме функцията просто псевдоизпъкнала.

Да разгледаме следните условия:

$$\begin{array}{lll}
(C_5) & f'_+(x,u) = 0 & \Longrightarrow \quad f''_+(x,u) \geq 0; \\
(C_6) & f'_+(x,u) = f''_+(x,u) = 0 & \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x+tu) \\
 & \forall\, t \geq 0, \text{ за което } x+tu \in X; & \\
(C_7) & x \in X,\ u \in \mathbf{E},\ f'_+(x,u) = 0,\ u \neq 0 & \Longrightarrow \quad f''_+(x,u) > 0.
\end{array}$$

Сега ще дадем характеризация от втори ред на псевдоизпъкналите функции.

3.11. Лема. *Нека f е псевдоизпъкнала функция, дефинирана в отвореното множество $X \subset \mathbf{E}$ и $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$. Тогава е изпълнено условието (C_5) и $f(x) \leq f(x+tu)$ за всяко $t \geq 0$, за което $x+tu \in X$, $f'_+(x,u) = 0$.*

Доказателство. Да допуснем, че $f'_+(x,u) = 0$. В такъв случай

$$f''_+(x,u) = \limsup_{t \to +0} 2t^{-2}(f(x+tu) - f(x)).$$

Съгласно определението за псевдоизпъкналост

$$f(x+tu) \geq f(x) \text{ за всяко } t \geq 0, \text{ за което } x+tu \in X.$$

Следователно $f''_+(x,u) \geq 0$. □

3.12. Лема. *Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ е радиално полунепрекъсната отгоре и X е отворено множество. Да допуснем, че са изпълнени условията (C_1), (C_5) и (C_6). Тогава f е псевдоизпъкнала в X.*

Доказателство. Ще докажем, че f е квазиизпъкнала. Да допуснем противното, т.е. съществуват такива x, $y \in X$ и $\tau \in (0,1)$, че

$$f(x+\tau(y-x)) > \max\{f(x), f(y)\} \tag{3.4}$$

За произволни фиксирани x, $y \in X$ да разгледаме функцията $\varphi(t) = f(x+t(y-x))$, дефинирана за всяко $t \geq 0$, за което $x+t(y-x) \in X$. Тъй като φ е полунепрекъсната отгоре, съгласно теоремата на Вайерщрас функцията φ достига глобалния си максимум върху интервала $[0,1]$ в някоя точка ξ. Съгласно (3.4), $0 < \xi < 1$. От необходимото условие за максимум от първи ред следва, че

$$\begin{aligned} \varphi'_+(\xi,1) &= f'_+(x+\xi(y-x), y-x) \leq 0, \\ \varphi'_+(\xi,-1) &= f'_+(x+\xi(y-x), x-y) \leq 0. \end{aligned}$$

Като вземем в предвид условието (C_1) получаваме, че $\varphi'_+(\xi,1) = \varphi'_+(\xi,-1) = 0$. От условието (C_5) правим извода, че

$$\begin{aligned} \varphi''_+(\xi,1) &= f''_+(x+\xi(y-x), y-x) \geq 0, \\ \varphi''_+(\xi,-1) &= f''_+(x+\xi(y-x), x-y) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Съгласно необходимото условие за максимум от втори ред и от (3.5) следва, че

$$f''_+(x+\xi(y-x), y-x) = f''_+(x+\xi(y-x), x-y) = 0.$$

Благодарение на условието (C_6), в ξ се достига глобалния минимум на φ върху интервала $[0,1]$. Съгласно избора на точката ξ, функцията φ е константна върху интервала $[0,1]$. И така получихме противоречие с неравенството (3.4). Значи f е квазиизпъкнала.

Ще докажем, че във всяка стационарна точка функцията достига глобалния си минимум. Да допуснем противното, т.е. съществуват такива x, $y \in X$, че $f'_+(x,u) \geq 0$ за всяко $u \in \mathbf{E}$ и $f(y) < f(x)$. Благодарение на доказаната квазиизпъкналост

$$f(x+t(y-x)) \leq f(x) \text{ за всяко } t \in [0,1].$$

Следователно $f'_+(x,y-x) \leq 0$. Тъй като x е стационарна точка, то $f'_+(x,y-x) = 0$. От условието (C_5) следва, че $f''_+(x,y-x) \geq 0$. От друга страна, като вземем в предвид, че f е квазиизпъкнала, получаваме, че

$$f''_+(x,y-x) = \limsup_{t\to+0} 2t^{-2}(f(x+t(y-x)) - f(x)) \leq 0.$$

Следователно $f''_+(x,y-x) = 0$. Условието (C_6) означава, че

$$f(x) \leq f(x+t(y-x)) \text{ за всяко } t \in [0,1],$$

което е невъзможно, тъй като по допускане $f(y) < f(x)$.

Тогава твърдението на лемата е следствие от лема 3.10. $\square$

Свързвайки леми 3.11 и 3.12 получаваме чрез следната теорема пълна характеризация на псевдоизпъкналите функции, както и характеризация на строго псевдоизпъкналите функции.

3.13. Теорема. *Нека f е радиално полунепрекъсната отгоре функция, дефинирана в отвореното изпъкнало множество $X \subset \mathbf{E}$. Да допуснем, че f удовлетворява условието (C_1). Тогава,*

(i) за да бъде f псевдоизпъкнала в X, е необходимо и достатъчно да са изпълнени условията (C_5) и (C_6);

(ii) *ако f удовлетворява условието (C_7), то тя е строго псевдоизпъкнала в X.*

Доказателство. Доказателството на случая *(i)* следва от леми 3.11 и 3.12.

Да разгледаме случая *(ii)*, чието доказателство е по-просто от това на твърдение *(i)*. Да допуснем противното, че функцията не е строго псевдоизпъкнала. Следователно съществуват такива $x \in X$ и $y \in X$, че

$$f(y) \leq f(x), \ y \neq x \text{ и } f'_+(x, y-x) \geq 0.$$

Функцията φ достига глобалния си максимум върху интервала $[0,1]$ в някоя точка ξ, където $\varphi(t) = f(x+t(y-x))$. Разглеждаме два случая. Когато $0 < \xi < 1$, съгласно аргументацията от доказателството на лема 3.12, необходимото условие за максимум от втори ред противоречи на допускането (C_7). Следователно ξ не може да е вътрешна точка и в $t = 0$ се достига глобалния максимум на φ върху $[0,1]$. Следователно $\varphi'_+(0,1) \leq 0$. От допускането $f'_+(x, y-x) \geq 0$ следва, че $\varphi'_+(0,1) = 0$. Оттук необходимото условие за максимум от втори ред противоречи на допускането (C_7). $\square$

Теорема 3.13 е обобщение на добре известени факти, отнасящи се до двукратно диференцируемите функции, принадлежащи на Diewert, Avriel, Zang [23, следствия 10.1, 11.1]. Виж също Crouzeix [19, твърдения 3, 4].

3.14. Забележка. Някои класове от функции, които удовлетворяват условието (C_1) са диференцируемите по Гато, локално липшицовите регулярни в смисъл на Кларк [15], квазидиференцируемите в смисъл на Пшеничный [90]. Други функции, които удовлетворяват това условие са функциите, за които горният субдиференциал на Дини

$$\partial f(x) := \{\xi \in \mathbf{E}^* \mid \langle \xi, u \rangle \leq f'_+(x,u), \quad \forall\, u \in \mathbf{E}\}$$

е непразно множество за всяко $x \in X$.

3.4 Характеризация от втори ред на множеството от решения на задачата на псевдоизпъкналото оптимиране с помощта първата и втората горни производни на Дини

В този раздел ще дадем едно обобщение на следствие 2.4. Както в глава 2 разглеждаме функция f, дефинирана в отвореното множество $X \subset \mathbf{R}^n$ и оптимизационната задача (P), в която $S \subset X$ е изпъкнало множество. Нека е известно решението $\bar{x}$ на задачата (P). Ще предполагаме, че производната h на функцията f, за която се говореше в глава 2 е горната производна на Дини. Ще въведем и следните нови означения:

$$\hat{S}_1 := \{z \in S \mid f''_+(\bar{x}, z - \bar{x}) = 0\},$$

$$S_1^\# := \{z \in S \mid f''_+(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) = 0 \quad \text{за всяко} \quad \lambda \in (0, 1]\},$$

В сила е следната теорема.

3.15. Теорема. *Нека $f : X \to \mathbf{R}$ е радиално полунепрекъсната отдолу и псевдоизпъкнала в множеството S по отношение на горната производна на Дини. Тогава*

$$\bar{S} \subset \hat{S}_1 \cap S_1^\#.$$

Доказателство. Съгласно пример 2.6 са в сила твърденията на теорема 2.2.

Ще докажем, че $\bar{S} \subset S_1^{\#}$. Нека $z \in \bar{S}$. Тъй като $\bar{S}$ е изпъкнало множество, то $z\lambda\bar{x} \in \bar{S}$ за всяко $\lambda \in (0,1]$. От теорема 2.2 следва, че $f'_+(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) = 0$. Оттук получаваме, че

$$f''_+(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z) =$$

$$\limsup_{t\to+0} 2t^{-2}(f(z\lambda\bar{x} + t(\bar{x} - z)) - f(z\lambda\bar{x}) - tf'_+(z\lambda\bar{x}, \bar{x} - z)) = 0,$$

защото $z\lambda\bar{x} + t(\bar{x} - z)$ принадлежи на отсечката $[z, \bar{x}]$ за всяко $\lambda \in (0,1]$ и за всички достатъчно малки положителни t. Следователно $z \in S_1^{\#}$.

Доказателството на включването $\bar{S} \subset \hat{S}_1$ е аналогично и също следва от теорема 2.2. □

3.16. Забележка. По аналогичен начин могат да се получат подобни характеризации, като се дефинират чрез Тейлъровото развитие на функцията обобщени производни на Дини по направление от по-висок ред и тези производни се включат в характеризацията. За да бъде по-кратко изложението няма да описваме тези характеризации.

3.5 Характеризация от втори ред на изпъкнала функция с помощта на долните производни

В този раздел ще дадем подобна на разгледаната вече характеризация на произволна негладка изпъкнала функция, приемаща крайни стойности, с помощта на долните производни, които разгледахме в раздел 3.1. Ще припомним, че всяка изпъкнала функция $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ е локално липшицова [72]. Тогава $f_-^{(0)}(x) = f(x)$ и $f_-^{(1)}(x, u) = f'(x, u)$ за произволни $x, u \in \mathbf{E}$.

Следната теорема дава необходимо условие за изпъкналост на функция.

3.17. Теорема. *Нека $X \subset \mathbf{E}$ е отворено изпъкнало множество, а функцията $f : X \to \mathbf{R}$ е изпъкнала (силно изпъкнала с константа κ). Тогава втората долна производна винаги съществува и*

$$f_-^{(2)}(x,u) \geq 0 \ (f_-^{(2)}(x,u) \geq 2\kappa\|u\|^2), \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in \mathbf{E}.$$

Доказателство. Изпъкналият случай следва от твърдение 3.3, като се използва факта, че за изпъкналите функции е в сила неравенството

$$f(x+tu) - f(x) - tf'(x,u) \geq 0$$

за произволни $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$ и $t > 0$, за които $x + tu \in X$.

Силно псевдоизпъкналият случай е аналогичен. $\square$

Нека $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е дадена функция. Да припомним, че границата

$$\varphi_+^{[\prime\prime]}(h) = \limsup_{t \to +0} \frac{1}{t^2}(\varphi(h+t) + \varphi(h-t) - 2\varphi(h))$$

се нарича втора горна производна на Шварц на функцията φ в точката h. Тя винаги съществува, но евентуално приема безкрайни стойности ∞ или $-\infty$.

3.18. Лема. *Да допуснем, че Δ е някакъв отворен интервал в $\mathbf{R}$. Нека $\varphi : \Delta \to \mathbf{R}$ е полунепрекъсната отгоре и $\varphi_+^{[\prime\prime]}(h) \geq 0$ във всяка точка h на Δ. Тогава φ е изпъкнала функция.*

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ и $[a,b] \subset \Delta$. Разглеждаме функцията

$$\psi(h) = \varphi(h) + \varepsilon(h-a)(h-b) + A(h-a) + B(h-b),$$

където A и B са такива константи, че $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Следователно

$$A = \frac{\varphi(b)}{a-b},\ B = \frac{\varphi(a)}{b-a} \text{ и } \psi_+^{[\prime\prime]}(h) = \varphi_+^{[\prime\prime]}(h) + 2\varepsilon > 0 \text{ за всяко } h \in (a,b).$$

Съгласно теоремата на Вайерщрас функцията ψ достига глобалния си максимум върху $[a,b]$ в някаква точка ξ. Ако $\psi(\xi) > 0$, то $\xi \in (a,b)$. Следователно $\psi_+^{[\prime\prime]}(\xi) \leq 0$, което е невъзможно. Оттук, $\psi(\xi) \leq 0$ и от избора на ξ следва, че $\psi(h) \leq 0$ за всяко $h \in [a,b]$. Извършвайки граничен преход, когато $\varepsilon \to 0$, заключаваме, че

$$\varphi(h) = \varphi(\frac{b-h}{b-a}a + \frac{h-a}{b-a}b) \leq \frac{b-h}{b-a}\varphi(a) + \frac{h-a}{b-a}\varphi(b),\ \forall\, h \in [a,b].$$

Следователно φ е изпъкнала в Δ. □

Следната теорема дава достатъчни условия за изпъкналост на функция.

3.19. Теорема. *Нека $X \subset \mathbf{E}$ е отворено изпъкнало множество. Да допуснем, че функцията $f : X \to \mathbf{R}$ е непрекъсната. Ако*

$$f_-^{(1)}(x,u) + f_-^{(1)}(x,-u) \geq 0, \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in \mathbf{E} \tag{3.6}$$

и за произволни $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$ е изпълнена импликацията

$$f_-^{(1)}(x,u) + f_-^{(1)}(x,-u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_-^{(2)}(x,u) \geq 0 \tag{3.7}$$

$$(f_-^{(1)}(x,u) + f_-^{(1)}(x,-u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_-^{(2)}(x,u) \geq 2\kappa\|u\|^2),$$

то f е изпъкнала (силно изпъкнала с константа κ) в X.

Доказателство. Ще разгледаме само изпъкналия случай. Поради полунепрекъснатостта отдолу на f имаме $f_-^{(0)}(x) = f(x)$ за всяко $x \in X$. Тъй като f приема само крайни стойности, то първата и втората долни производни съществуват за всяко $u \in \mathbf{E}$.

Нека $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$, $u \neq 0$, $h \in \mathbf{R}$ са фиксирани произволно избрани и такива, че $x + hu \in X$. Разглеждаме два случая.

Първи случай. $f_-^{(1)}(x + hu, u) + f_-^{(1)}(x + hu, -u) = 0$. От импликацията (3.7) следва, че $f_-^{(2)}(x + hu, u) \geq 0$ и $f_-^{(2)}(x + hu, -u) \geq 0$. Използвайки определението за втора долна производна и известното неравенство, че долната граница на сума от функции не е по-малка от сумата на долните граници на функциите, получаваме, че

$$0 \leq f_-^{(2)}(x + hu, u) + f_-^{(2)}(x + hu, -u) \leq$$

$$\liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{2}{t^2}(f(x + hu + tu + t^2 v) + f(x + hu - tu + t^2 v)$$

$$-2f(x + hu) - tf_-^{(1)}(x + hu, u) - tf_-^{(1)}(x + hu, -u)) \leq$$

$$\liminf_{t\to+0} \frac{2}{t^2}(f(x + hu + tu) + f(x + hu - tu) - 2f(x + hu)).$$

Да означим $\varphi(s) = f(x + su)$. Функцията φ е дефинирана за такива s, че $x + su \in X$. Следователно втората долна производна на Шварц в точката h

$$\varphi_-^{[\prime\prime]}(h) := \liminf_{t\to+0} \frac{1}{t^2}(\varphi(h + t) + \varphi(h - t) - 2\varphi(h))$$

удовлетворява неравенството $\varphi_-^{[\prime\prime]}(h) \geq 0$. Оттук $\varphi_+^{[\prime\prime]}(h) \geq 0$.

Втори случай. Нека $f_-^{(1)}(x + hu, u) + f_-^{(1)}(x + hu, -u) > 0$. Съгласно определението за долната производна от първи ред и използваната вече аргументация

$$0 < \liminf_{(t,v)\to(+0,0)} \frac{1}{t}(f(x + hu + tu + tv) + f(x + hu - tu + tv)$$

$$-2f(x + hu)) \leq \liminf_{t\to+0} \frac{1}{t}(f(x + hu + tu) + f(x + hu - tu)$$

$$-2f(x + hu)) = \liminf_{t\to+0} \frac{1}{t}(\varphi(h + t) + \varphi(h - t) - 2\varphi(h)).$$

Следователно $\varphi(h+t)+\varphi(h-t)-2\varphi(h)>0$ за всички достатъчно малки $t>0$ и

$$\liminf_{t\to+0}\frac{1}{t^2}(\varphi(h+t)+\varphi(h-t)-2\varphi(h))=+\infty.$$

Оттук $\varphi_+^{[\prime\prime]}(h)>0$.

От лема 3.18, вземайки в предвид първия и втория случай, следва, че φ е изпъкнала върху $\Delta=\{t\in\mathbf{R}\mid x+tu\in X\}$ за произволни $x\in X$, $u\in\mathbf{E}$, откъдето f е също изпъкнала.

При доказателството на силно изпъкналия в сравнение с изпъкналия случай трябва само в доказателството на лема 3.18 да се смени функцията $\psi(h)$ с

$$\psi_1(h)=\varphi(h)+A(h-a)+B(h-b)+(\varepsilon-\kappa\|u\|^2)(h-b)(h-a).$$

Останалото повтаря доказателството на изпъкналия случай. □

Теорема 3.19 също е обобщение на съответния резултат на Huang и Ng (1997г.) [39].

3.20. Забележка. Условието (3.6) е удовлетворено например в случая на диференцируема в смисъл на Фреше или регулярна в смисъл на Кларк, или квазидиференцируема в смисъл на Пшеничный функция.

3.21. Забележка. Ако заместим нестрогото неравенство в предположението (3.7) със строго и предположим, че последното е изпълнено, когато $u\neq0$, то f е строго изпъкнала в X.

3.22. Пример. *Предположението (3.6) в теорема 3.19 не може да се пропусне, тъй като функцията $f(x)=-|x|$ е непрекъсната и има навсякъде крайна производна по направление, но не е изпъкнала. Всъщност тя е вдлъбната и не удовлетворява само предположението (3.6) на теоремата, по-точно $f_-^{(1)}(0,1)+$*

$f_-^{(1)}(0,-1) = -2$. *В теорема 3.19 не може да се изпусне и предположението (3.7), защото една диференцируема функция на една променлива може да не удовлетворява само това условие и въпреки това да не е изпъкнала.*

3.23. Следствие. *Нека $X \subset \mathbf{E}$ е отворено изпъкнало множество и функцията $f : X \to \mathbf{R}$ е локално липшицова и диференцируема по Фреше в X. Да допуснем, че f има такава крайна втора класическа производна по направление, че $f''(x,u) = 0$ за произволни $x \in X$, $u \in \mathbf{E}$. Тогава f е линейна.*

Доказателство. От твърдение 3.2 следва, че съществуват втората долна и втората горна производни и

$$f_-^{(2)}(x,u) = f_+^{(2)}(x,u) = 0 \quad \text{за произволни} \quad x \in X,\ u \in \mathbf{E}.$$

Съгласно теорема 3.19, f е едновременно изпъкнала и вдлъбната. Добре известно е, че такава функция е линейна. □

Като приложение на теорема 3.19 ще докажем следващото обобщение на формулата на Тейлър от втори ред, което бихме могли да наречем неравенство на Тейлър от втори ред.

3.24. Теорема. *Нека функцията $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ е диференцируема по Фреше навсякъде в $\mathbf{E}$. Тогава за произволни x, $u \in \mathbf{E}$ и за всяко $\alpha > 0$*

$$f(x+\alpha u) - f(x) - \alpha f'(x)(u) \geq \frac{1}{2}\alpha^2 m, \ \textit{където}$$

$$m = \min\{\inf_{s\in(0,\alpha)} f_-^{(2)}(x+su,u),\ \inf_{s\in(0,\alpha)} f_-^{(2)}(x+su,-u)\}.$$

Доказателство. Нека за произволни фиксирани x, $u \in \mathbf{E}$ да означим $\varphi(t) = f(x+tu)$ и

$$\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0) - \frac{1}{2}mt^2.$$

Трябва да покажем, че $\psi(\alpha) \geq 0$. Съгласно определението за втора долна производна имаме

$$\psi_-^{(2)}(s,u) = \varphi_-^{(2)}(s,u) - m \geq 0 \text{ за всяко } s \in (0,\alpha),$$

когато $u = \pm 1$. Следователно от теорема 3.19 следва, че ψ е изпъкнала функция в $(0,\alpha)$. От непрекъснатостта на ψ следва, че ψ е изпъкнала върху $[0,\alpha]$.

Нека t и s са произволни положителни числа, за които $0 < t < s < t+s < \alpha$. От изпъкналостта на ψ получаваме неравенствата

$$\psi(s) \leq \frac{t}{s}\psi(t) + (1-\frac{t}{s})\psi(t+s),\ \psi(t) \leq \frac{t}{s}\psi(s) + (1-\frac{t}{s})\psi(0).$$

Като съберем тези две неравенства, след преобразуване виждаме, че

$$\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} \leq \frac{\psi(s+t)-\psi(s)}{t}.$$

Извършваме граничен преход $t \to +0$ и стигаме до заключението, че $\psi'(s) \geq 0$ за всяко $s \in (0,\alpha)$. Следователно ψ е монотонно ненамаляваща в $(0,\alpha)$. От непрекъснатостта на ψ върху $[0,\alpha]$ следва, че $\psi(\alpha) \geq \psi(0) = 0$, което завършва доказателството. $\square$

В случая на функция на една променлива неравенството на Тейлър остава в сила и без да се изисква диференцируемост на функцията.

3.25. Теорема. *Нека функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и за всяко $x \in \mathbf{R}$ е изпълнено неравенството*

$$\varphi_-^{(1)}(x,1) + \varphi_-^{(1)}(x,-1) \geq 0. \tag{3.8}$$

Тогава за произволно $x \in \mathbf{R}$ и за всяко $\alpha > 0$ имаме

$$\varphi(x+\alpha) - \varphi(x) - \alpha\varphi_-^{(1)}(x,1) \geq \frac{1}{2}\alpha^2 m, \text{ където}$$

$$m = \min\{\inf_{s\in A}\varphi_-^{(2)}(x+s,1),\ \inf_{s\in A}\varphi_-^{(2)}(x+s,-1)\},$$

$$A = \{s \in (0, \alpha) \mid \varphi_-^{(1)}(x+s, 1) + \varphi_-^{(1)}(x+s, -1) = 0\},$$

ако $A \neq \emptyset$ *и* $m = 0$, *ако* $A = \emptyset$.

Доказателство. Нека $x \in \mathbf{R}$ е произволно фиксирано число. Ще докажем теоремата в случая, когато A е непразно множество. Да разгледаме функцията на една променлива

$$\psi(t) = \varphi(x+t) - \varphi(x) - t\varphi_-^{(1)}(x, 1) - \frac{1}{2}mt^2.$$

Ще покажем, че $\psi(\alpha) \geq 0$. Съгласно определението за първа долна производна имаме

$$\psi_-^{(1)}(s, 1) + \psi_-^{(1)}(s, -1) = \varphi_-^{(1)}(x+s, 1) + \varphi_-^{(1)}(x+s, -1) \geq 0$$

за всяко $s \in (0, \alpha)$. Съгласно определението за втора долна производна имаме

$$\psi_-^{(2)}(s, w) = \varphi_-^{(2)}(x+s, w) - m \geq 0 \text{ за всяко } s \in A,$$

когато $w = \pm 1$. От теорема 3.19 следва, че ψ е изпъкнала функция в интервала $(0, \alpha)$, тъй като долните производни са положително хомогенни по отношение на направлението. От непрекъснатостта на ψ следва, че ψ е изпъкнала и върху затворения интервал $[0, \alpha]$. Нека t_1 и t_2 са произволни положителни числа, за които $t_1 < t_2 < \alpha$. От изпъкналостта на ψ получаваме неравенството

$$\psi(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2}\psi(t_2) + (1 - \frac{t_1}{t_2})\psi(0).$$

От очевидното равенство $\psi(0) = 0$ следва, че $\frac{\psi(t_1)}{t_1} \leq \frac{\psi(t_2)}{t_2}$, което означава, че функцията на една променлива $\frac{\psi(t)}{t}$ е монотонно ненамаляваща в интервала $(0, \alpha)$. Поради неравенството

$$\liminf_{t \to +0} \frac{\psi(t)}{t} = \varphi'_-(x, 1) - \varphi_-^{(1)}(x, 1) \geq 0,$$

правим извода, че $\psi(t) \geq 0$ за всяко $t \in (0, \alpha)$. От непрекъснатостта на ψ заключаваме, че $\psi(\alpha) \geq 0$.

Да разгледаме случая, когато A е празно множество. От неравенството (3.8) следва, че

$$\varphi_-^{(1)}(x+s, 1) + \varphi_-^{(1)}(x+s, -1) > 0$$

за всяко $s \in (0, \alpha)$. От теорема 3.19 се вижда, че φ е изпъкнала функция в интервала $(x, x+\alpha)$. От непрекъснатостта на φ следва, че φ е изпъкнала и върху затворения интервал $[x, x+\alpha]$. Както в първия случай се доказва, че функцията на една променливата $\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ е монотонно ненамаляваща върху $(0, \alpha)$, само че вместо ψ се разглежда φ.

Да изберем този път $\psi(t) = \varphi(x+t) - \varphi(x) - t\varphi_-^{(1)}(x, 1)$. Ясно е, че и функцията $\frac{\psi(t)}{t}$ е монотонно ненамаляваща върху $(0, \alpha)$. Оттук както в първия случай показваме, че $\psi(\alpha) \geq 0$.

Теоремата е доказана. $\square$

Друго неравенство на Тейлър, което не е включено в тази дисертация, в случая на полунепрекъсната отгоре функция, чрез производните на Дини, е дадено в статията на автора [44].

3.26. Забележка. При доказателството на теореми 3.19 и 3.25 полунепрекъснатостта отдолу на функцията се използваше само, за да се осигури равенството между производната от ред 0 и стойността на функцията във всяка точка, т.е. $f_-^{(0)}(x) = f(x)$ за всяко x. Ако по определение $f_-^{(0)}(x) = f(x)$ за всяко x, т.е. ако се откажем да дефинираме производна от нулев ред, то тези две теореми ще важат и за полунепрекъснатите отгоре функции.

Глава 4

Метод на разполовяването

4.1 Основни понятия

В тази глава ще предполагаме, че Z е непразно отворено множество в $\mathbf{R}^m$ и $S \subset Z$.

4.1. Дефиниция. ([15]). Нека числовата функция f е дефинирана и локално липшицова върху Z. *Обобщена производна на Кларк* на функцията f в точката $x \in Z$ по направление $v \in R^m$ наричаме границата

$$f^0(x,v) = \limsup_{(y,t)\to(x,+0)} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t},$$

където $y \in Z$, а t е положително число.

Да означим с $\partial f(x)$ субдиференциала в смисъла на дефиниция 1.4. Той се нарича обикновено обобщен градиент на Кларк за функцията f в точката x [15].

Ще дадем необходимо и достатъчно условие една локално липшицова функция да е псевдоизпъкнала по отношение на производната на Кларк, което ще използваме по-нататък. Това условие е добре известно, но ще го докажем за пълнота. В тази глава ще пропускаме израза „по отношение на производната на Кларк“, когато говорим за псевдоизпъкнали по отношение на производната на Кларк функции.

4.2. Лема. *Нека числовата функция f е дефинирана и локално липшицова върху множеството Z. Функцията f е псевдоизпъкнала в множеството S тогава и само тогава, когато за всяко $x \in S$ и за всяко $y \in S$, за което $f(y) < f(x)$, е изпълнено неравенството*

$$\langle \xi, y - x \rangle < 0 \text{ за всяко } \xi \in \partial f(x). \tag{4.1}$$

Доказателство. Да допуснем, че е изпълнена импликацията (4.1). Нека x, $y \in S$ и $f(y) < f(x)$. Добре известно е [15], че

$$f^0(x, y - x) = \max_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, y - x \rangle.$$

Тъй като обобщеният градиент е непразно изпъкнало слабо* компактно множество [15], то максимумът се достига, а от неравенство (4.1) следва, че $f^0(x, y - x) < 0$.

Обратното твърдение е очевидно. □

Следното твърдение ни дава достатъчно условие за глобален минимум на ЛЛПИ функция и също е добре известно.

4.3. Лема. *Нека числовата функция f е локално липшицова в някакво отворено множество, съдържащо S и $\bar{x} \in S$. Ако f е псевдоизпъкнала в $\bar{x}$ и $0 \in \partial f(\bar{x})$, то f достига в точката $\bar{x}$ глобалния си минимум върху S.*

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. съществува $x \in S$, за което $f(x) < f(\bar{x})$. Тогава включването $0 \in \partial f(\bar{x})$ противоречи на лема 4.2. □

Множеството от оптималните точки на задача за минимизация на локално липшицова строго псевдоизпъкнала функция, ако е непразно, се състои от един единствен елемент.

4.2 Метод на разполовяването за намиране минимума на локално липшицова псевдоизпъкнала функция

Предполагаме, че числовата функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е ЛЛПИ в интервала $[a, b]$. Търсим глобалния минимум на f в $[a, b]$. Този минимум се достига в някоя точка $\bar{x} \in [a, b]$, защото f е непрекъсната функция. Ще предполагаме, че можем да намерим обобщения градиент на функцията f във всяка точка от интервала $[a, b]$.

Следният метод на разполовяването решава минимизационната задача. Нека началният интервал на неопределеност за точката, в която се достига глобалния минимум да е $[a, b]$. За $k = 1, 2, ...$ да предположим, че $[a_k, b_k]$ е k-тия интервал на неопределеност и λ_k да е средата му. Ако $0 \in \partial f(\lambda_k)$, то съгласно лема 4.3, λ_k е търсената точка, в която се достига глобалния минимум на функцията f. Множеството $\partial f(\lambda_k)$ е непразно слабо* компактно и следователно - затворен интервал. Ако $0 \notin \partial f(\lambda_k)$, то $\partial f(\lambda_k) \subset (0, \infty)$ или $\partial f(\lambda_k) \subset (-\infty, 0)$. В първия случай $\xi(x - \lambda_k) \geq 0$ за всяко x, за което $x \geq \lambda_k$ и за всяко $\xi \in \partial f(\lambda_k)$. Тъй като функцията f е псевдоизпъкнала, то $f(x) \geq f(\lambda_k)$ винаги, когато $x \geq \lambda_k$, и ние можем да намалим интервала на неопределеност до $[a_k, \lambda_k]$, т.е. полагаме $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \lambda_k$. Във втория случай - до $[\lambda_k, b_k]$ и полагаме $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$. Повтаряме описаните действия до постигане на желаната точност.

Очевидно методът е сходящ със скорост на геометрична прогресия.

Разглежданият метод е обобщение на метода на разполовяването, който се отнася до минимизация на диференцируема псевдоизпъкнала функция [7].

4.3 Метод на разполовяването за решаване на една минимаксна задача

Нека е дадена функцията $f\colon X \times Y \to R$, $X \subset \mathbf{R}$, приемаща крайни стойности, където X е затворен интервал, а Y е някакво множество. Да предположим, че f е непрекъсната върху декартовото произведение $X \times Y$, а функциите $f(\cdot, y)$ са ЛЛПИ в интервала X за всяко фиксирано $y \in Y$. За всяко фиксирано $x \in X$ задачата за намиране на глобалния максимум на функцията $f(x, \cdot)$ в множеството Y има решение и ние ще предполагаме, че можем да го намерим (особено лесно е да се направи това, ако Y е крайно множество). Ще приложим метода на разполовяването за решаване на следната минимаксна задача:

$$\min_{x \in X} F(x), \text{ където } F(x) = \max_{y \in Y} f(x, y). \tag{4.2}$$

За произволна фиксирана стойност на аргумента $x \in X$ да означим с $I(x)$ множеството от онези елементи $y \in Y$, за които се достига максимумът

$$\max_{y \in Y} f(x, y).$$

Да разгледаме следния алгоритъм за намиране на глобалния минимум на функцията $F(x)$ в интервала X. Да изберем X за началния интервал на неопределеност за точката на глобален минимум $\bar{x}$. Нека X^k да е k-тия интервал на неопределеност и x_k да е средата на този интервал. Да означим с $\partial_1 f(x,y)$ частния обобщен градиент на функцията $f(x,y)$ по първия аргумент в точката (x,y) [15].

Ако

$$0 \in \partial_1 f(x_k, \bar{y}) \text{ за някое } \bar{y} \in I(x_k),$$

то съгласно лема 4.3, функцията $f(\cdot, \bar{y})$ има глобален минимум в точката x_k. Оттук

$$F(x_k) = f(x_k, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y}) \leq F(x) \text{ за всяко } x \in X,$$

което означава, че x_k е решение на минимаксната задача.

Ако

$$0 \notin \partial_1 f(x_k, \bar{y}) \text{ за всяко } \bar{y} \in I(x_k),$$

то като вземем в предвид, че обобщеният градиент е изпъкнало слабо* компактно множество [15], т.е. затворен интервал в случая, ще получим, че или

$$\partial_1 f(x_k, \bar{y}) \subset (0, \infty), \text{ или } \partial_1 f(x_k, \bar{y}) \subset (-\infty, 0).$$

Да разгледаме най-напред случая, когато

$$\partial_1 f(x_k, \bar{y}) \subset (0, \infty) \text{ за всяко } \bar{y} \in I(x_k).$$

Следователно

$$\langle \xi, x - x_k \rangle \geq 0 \text{ за всяко } x, \text{ за което } x \geq x_k \text{ и за всяко } \xi \in \partial_1 f(x_k, \bar{y}).$$

Тъй като функцията $f(\cdot, \bar{y})$ е ЛЛПИ, то $f(x, \bar{y}) \geq f(x_k, \bar{y})$ за всяко x, за което $x \geq x_k$ и за всяко $\bar{y} \in I(x_k)$, откъдето получаваме, че

$$F(x_k) = f(x_k, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y}) \leq F(x) \text{ за всяко } x \geq x_k,$$

което означава, че точката, в която се достига глобалния минимум на $F(x)$ може да бъде само в интервала $\{x \in X \mid x \leq x_k\}$. Затова можем да изберем новия интервал на неопределеност за глобалния минимум да е

$$X^{k+1} = \{x \in X^k \mid x \leq x_k\}.$$

По аналогия, ако $\partial_1 f(x_k, \bar{y}) \subset (-\infty, 0)$ за всяко $\bar{y} \in I(x_k)$, то

$$F(x_k) \leq F(x) \text{ за всяко } x \leq x_k$$

и затова

$$X^{k+1} = \{x \in X^k \mid x \geq x_k\}.$$

Да разгледаме и случая, когато съществуват такива

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2 \in I(x_k), \text{ че } \partial_1 f(x_k, \bar{y}_1) \subset (0, \infty) \text{ и } \partial_1 f(x_k, \bar{y}_2) \subset (-\infty, 0).$$

Тогава

$$f(x_k, \bar{y}_1) \leq f(x, \bar{y}_1) \text{ за всяко } x \geq x_k$$

и

$$f(x_k, \bar{y}_2) \leq f(x, \bar{y}_2) \text{ за всяко } x \leq x_k.$$

Оттук заключаваме, че функцията F има глобален минимум в точката x_k.

Продължаваме итерационния процес, докато дължината на последния интервал на неопределеност за оптимума надхвърля предварително зададено достатъчно малко положително число ε и произволен елемент от последния интервал на неопределеност вземаме за приближение на оптималната точка.

Сходимостта на метода е очевидна.

4.4. Пример. *Ще разгледаме един пример, който илюстрира възможностите на метода. Търси се минимума на функцията $F(x)$ в интервала $[-12, 9]$, където*

$$F(x) = \max\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\},$$

$$f_1(x) = \frac{7}{4}|x|,\ f_2(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{12},\ f_3(x) = \begin{cases} 2|x|, & |x| \leq 1/2, \\ |x| + 1/2, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Минимума на функцията $F(x)$ е $1/3$ и се достига при $x = -1/6$. Програма, написана на Turbo Pascal 7.0 и реализирана на компютър PC 486 с честота 100 MHz намира приближение на минимума за 38 итерации. Приближената стойност на търсения минимум е $0,33333333336$, а намереното приближение на точката, в която се достига минимума е $x = -0,16666666665$.

4.4 Метод на разполовяването за решаване антагонистична игра с локално липшицова платежна функция

Нека Z е непразно отворено множество в $\mathbf{R}^n$, реалнозначната локално липшицова функция f е дефинирана в Z и $S \subset Z$. Да означим горната и долната обобщени производни на Кларк на функцията f в точката x по направление v съответно с $f^0_+(x,v)$ и $f^0_-(x,v)$. Тъй като функцията $v \mapsto f^0_+(x,v)$ ($v \mapsto f^0_-(x,v)$) е сублинейна (суперлинейна), то

$$f^0_+(x,v) = \max_{\xi \in \underline{\partial} f(x)} \langle \xi, v \rangle \ (f^0_-(x,v) = \min_{\xi \in \overline{\partial} f(x)} \langle \xi, v \rangle),$$

където $\underline{\partial} f(x)$ ($\overline{\partial} f(x)$) е субдиференциала (супердиференциала) на тази функция. Добре известно е, че множествата $\underline{\partial} f(x)$ и $\overline{\partial} f(x)$ съвпадат [21, с. 73] и тези изпъкнали компактни множества се наричат субдиференциал на Кларк за функцията f в точката x. Означаваме го с $\partial f(x)$. Горната производна за простота означаваме с $f^0(x,v)$.

4.5. Дефиниция. Казваме, че точката $x_\varepsilon \in S$ е *ε-оптимална* ($\varepsilon \geq 0$) за функцията f в множеството S, ако $f(x_\epsilon) \leq \bar{f} + \epsilon$, където

$$\bar{f} = \inf_{x \in S} f(x).$$

По нататък ще използваме следното известно твърдение.

4.6. Лема. *Нека числовата функция f е ЛЛПИ в изпъкналото множество S. Тогава и множеството $\bar{S}_\epsilon$ от всички ϵ-оптимални точки е изпъкнало.*

Доказателство. Лемата следва от факта, че всяка ЛЛПИ функция е строго квазиизпъкнала и квазиизпъкнала [64]. $\square$

Ще приложим метода на разполовяването за решаване на антагонистичната игра

$$\Gamma = \langle X, Y, f \rangle$$

с множества от стратегиите на първия и втория играч съответно X и Y и платежна функция на първия играч $f(x,y)$. Тук X и Y са затворени числови интервали, функциите $f(\cdot, y)$ са локално липшицови псевдовдлъбнати в множеството X за всяко $y \in Y$, а функциите $f(x, \cdot)$ са ЛЛПИ в множеството Y за всяко $x \in X$.

4.7. Дефиниция. ([86]). Казваме, че точката $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ е ε-седлова ($\varepsilon \geq 0$) за играта Γ, ако

$$f(x, \hat{y}) - \varepsilon \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y) + \varepsilon, \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

Стратегиите $\hat{x}$ и $\hat{y}$ наричаме ε-оптимални. В случая, когато $\varepsilon = 0$ наричаме $(\hat{x}, \hat{y})$ седлова точка.

Търсим седловата точка на играта Γ. Да означим с $\partial_1 f(x,y)$ и $\partial_2 f(x,y)$ частните обобщени градиенти на функцията f в точката (x,y) по отношение съответно на първия и втория ѝ аргументи

[15]. Ще предполагаме, че можем да намираме тези множества навсякъде върху декартовото произведение $X \times Y$.

Да допуснем, че играта има седлова точка, а двойката $(x', y') \in X \times Y$ е такава, че x' е ε-оптимална по отношение на максимума на функцията $f(\cdot, y')$ в X, т.е. изпълнено е неравенството

$$f(x, y') - \varepsilon \leq f(x', y') \text{ за всяко } x \in X. \tag{4.3}$$

За частния обобщен градиент $\partial_2 f(x', y')$ са възможни следните три случая:

$$0 \in \partial_2 f(x', y'),\ \partial_2 f(x', y') \subset (0, \infty) \text{ и } \partial_2 f(x', y') \subset (-\infty, 0).$$

Във втория случай $\langle \xi, y - y' \rangle \geq 0$ за всяко y такова, че $y \geq y'$ и за всяко $\xi \in \partial_2 f(x', y')$. Оттук, тъй като $f(x', \cdot)$ е ЛЛПИ функция, то $f(x', y) \geq f(x', y')$. Като вземем в предвид неравенството (4.3) ще получим, че за всяко $x \in X$ и за всяко $y \in Y$, за което $y \geq y'$ имаме

$$f(x, y') - \varepsilon \leq f(x', y') \leq f(x', y) \tag{4.4}$$

Да означим с $(\hat{x}, \hat{y})$ търсената седлова точка. Тогава

$$f(x, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y), \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y. \tag{4.5}$$

От неравенствата (4.4) и (4.5) следва, че вторият играч има такава стратегия $\tilde{y}$, образуваща с $\hat{x}$ ε-седлова точка, че $\tilde{y} \leq y'$. Наистина, ако $\hat{y} \leq y'$, то $\tilde{y} = \hat{y}$. Да допуснем, че $\hat{y} > y'$. Ако в неравенствата (4.4) заместим x с $\hat{x}$ и y с $\hat{y}$, а в (4.5) - x с x' и y с y', ще получим, че двойката $(\hat{x}, y')$ е ε-седлова точка, т.е. $\tilde{y} = y'$ е ε-оптимална стратегия на втория играч.

И така получихме, че интервалът $\{y \in Y \mid y \leq y'\}$ винаги съдържа стратегия, която заедно с $\hat{x}$ образува ϵ-седлова точка.

Ако $\partial_2 f(x', y') \subset (-\infty, 0)$, то по аналогия ще получим, че интервалът $\{y \in Y \mid y \geq y'\}$ съдържа стратегия, образуваща заедно с $\hat{x}$ ε-седлова точка. Ако $0 \in \partial_2 f(x', y')$ ще получим, че $(\hat{x}, y')$ е ε-седлова точка, т.е. y' е търсената стратегия.

Използваме изказаните съображения, за да обосновем чрез индукция следния алгоритъм за намиране приближение на ε-оптималната стратегия на втория играч. Избираме множеството Y за начален интервал на неопределеност за ε-оптималната стратегия на втория играч. Нека Y^k да е k-тия интервал на неопределеност и y_k да е средата на този интервал. Нека стратегията на първия играч x_k да е ϵ-оптимална по отношение на максимума на функцията $f(\cdot, y_k)$ в множеството X. Имаме три възможности :

$$0 \in \partial_2 f(x_k, y_k),\ \partial_2 f(x_k, y_k) \subset (0, \infty) \text{ и } \partial_2 f(x_k, y_k) \subset (-\infty, 0).$$

Според доказаното в първия случай y_k е ε-оптимална и заедно с $\hat{x}$ образуват ε-седлова точка. Във втория случай интервалът $\{y \in Y \mid y \leq y_k\}$ съдържа ε-оптимална стратегия на втория играч, която заедно с $\hat{x}$ образува ε-седлова точка. Ще докажем, че интервалът

$$Y^{k+1} = \{y \in Y^k \mid y \leq y_k\}$$

също съдържа ε-оптимална стратегия на втория играч, съответстваща на $\hat{x}$. В противен случай Y^{k+1} не съдържа ε-оптимална стратегия на втория играч, съответстваща на $\hat{x}$. Съгласно индукционното предположение Y^k съдържа ε-оптимална стратегия на втория играч, съответстваща на $\hat{x}$. Следователно $Y^{k+1} \not\equiv \{y \in Y \mid y \leq y_k\}$ и съществуват две точки

$$z_1 \in \{y \in Y \mid y \leq y_k\} \setminus Y^k \text{ и } z_2 \in Y^k \setminus \{y \in Y \mid y \leq y_k\},$$

които са ε-оптимални по отношение на глобалния минимум на функцията $f(\hat{x}, \cdot)$ в множеството Y. Съгласно лема 4.6 всички точки от затворения интервал $[z_1, z_2]$ са ε-оптимални. Но $Y^{k+1} \subset [z_1, z_2]$, т.е. получихме противоречие с допускането, че множеството Y^{k+1} не съдържа ε-оптимални точки.

В третия случай по аналогичен начин се доказва, че интервалът

$$Y^{k+1} = \{y \in Y^k \mid y \geq y_k\}$$

съдържа ε-оптимална стратегия на втория играч.

Показахме как можем да намалим два пъти дължината на интервала на неопределеност за ε-оптималната стратегия на втория играч. Продължаваме процеса, докато дължината на последния интервал на неопределеност надхвърля предварително зададено положително число δ.

По аналогичен начин можем да намерим интервал на неопределеност с дължина не по-голяма от δ за ε-оптималната стратегия на първия играч, която образува с $\hat{y}$ ε-седлова точка.

Ще използваме следната :

4.8. Лема. ([86, с. 211]). *Да разгледаме антагонистичната игра*

$$\Gamma = \langle X, Y, f \rangle$$

с множества от стратегиите на първия и втория играч съответно X и Y и платежна функция на първия играч $f(x,y)$. Тогава, ако ситуациите $(\hat{x},\tilde{y})$ и $(\tilde{x},\hat{y})$ са ε-седлови точки, то $(\tilde{x},\tilde{y})$ е 4ε-седлова точка.

Съгласно лема 4.8 за всяко $k = 1, 2, \dots$ правоъгълникът $X^k \times Y^k$ съдържа 4ε-седлова точка на играта Γ.

Сходимостта на метода към някоя седлова точка, когато $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, е очевидна.

При обосноваването на метода предполагахме, че играта има седлова точка. Сега ще докажем, че това наистина е така. Добре известно е, че всяка ЛЛПИ функция, дефинирана върху изпъкнало множество, е строго квазиизпъкнала [64, теорема 8]. Тъй като всяка строго квазиизпъкнала полунепрекъсната отдолу функция е квазиизпъкнала [49], то функциите $f(\cdot, y)$ са квазивдлъбнати за всяко $y \in Y$, а функциите $f(x, \cdot)$ са квазиизпъкнали за всяко $x \in X$. Тогава съгласно следната лема, принадлежаща на Sion [76], играта има седлова точка.

4.9. Лема. *Нека X и Y са изпъкнали компактни множества в $\mathbf{R}^n$. Да допуснем, че функцията $f(x, y)$ е дефинирана върху декартовото произведение $X \times Y$. Ако функциите $f(x, \cdot)$ са полунепрекъснати отдолу и квазиизпъкнали в Y за всяко $x \in X$, а функциите $f(\cdot, y)$ са полунепрекъснати отгоре и квазивдлъбнати в X за всяко $y \in Y$, то играта $\Gamma = \langle X, Y, f \rangle$ има седлова точка.*

Вместо производната на Кларк в нашите разглеждания можем да вземем коя да е друга производна по направление, изпъкнала по отношение на направлението, например производната на Michel-Penot [61], или асимптотичната горна производна на Дини [81].

4.10. Пример. *Ще илюстрираме възможностите на метода чрез следния пример. Търси се седловата точка на антагонистичната игра с множества от стратегиите на първия и втория играч съответно интервалите $[-7, 8]$ и $[-9, 3]$ и с платежна функция на първия играч*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} - y, & y < -2, \\ e^{-(x-1)^2} + 2|y+1|, & -2 \leq y \leq 0, \\ e^{-(x-1)^2} + y + 2, & y > 0. \end{cases}$$

Седловата точка на играта е $(x, y) = (1, -1)$. Програма, написана на Turbo Pascal 7.0 и реализирана на компютър PC 486 с *честота 100 MHz намира приближение на седловата точка за 37 итерации. Приближената стойност на търсената седлова точка с точност до десетия знак след десетичната точка е* $(1.0000000000, -1.0000000000)$.

Методът може да бъде използван за решаване на матрични игри с голям брой стратегии.

Ако функциите $f(x, \cdot)$ са локално липшицови строго псевдоизпъкнали, а функциите $f(\cdot, y)$ са локално липшицови строго псевдовдлъбнати, то седловата точка на играта е единствена.

Благодарности

Благодаря на научния си консултант проф. д-р Дочо Дочев и на колегите от секция „Изследване на операциите“ на ИМИ - БАН за проявеното внимание и препоръки при разработването на проблематиката. Изказвам благодарността си и към доц. д-р Иван Гинчев за насочване усилията ми към харатеризации на обобщено изпъкнали функции с помощта на обобщени производни по направление, за полезните съвети, както и за литературата, която той ми предостави.

Библиография

[1] K. J. Arrow, A. C. Enthoven: Quasi-concave programming. *Econometrica*, **29**, 1961, 779–800.

[2] J.-P. Aubin, H. Frankowska: *Set-valued analysis.* Birkhäuser, Basel 1990.

[3] A. Auslender: Stability in mathematical programming with nondifferentiable data. *SIAM J. Control Optim.*, **22**, 1984, 239–254.

[4] D. Aussel, J.-N. Corvellec, M. Lassonde: Mean value property and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions. *Trans. Am. Math. Soc.*, **347**, 1995, No 10, 4147–4161.

[5] D. Aussel: Subdifferential properties of quasiconvex and pseudoconvex functions: Unified approach. *J. Optimization Theory Appl.*, **97**, 1998, No 1, 29–45.

[6] M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible, I. Zang: *Generalized concavity.* Plenum Publishing Corporation, New York, 1988.

[7] M. S. Bazaraa, C. M. Shetty: *Nonlinear programming. Theory and Algorithms.* New York, John Wiley & Sons, 1979.

[8] C. R. Bector: Mathematical analysis of some nonlinear programming problems. Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur, 1968.

[9] A. Ben-Tal, J. Zowe: Directional derivatives in nonsmooth optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, **47**, December 1985, No 4, 483–490.

[10] P. Benson, R. L. Smith, I. E. Schochetman, J. C. Bean: Optimal solution characterization for infinite positive semi-defined programming. *Appl. Math. Lett.*, **7**, 1994, 65–67.

[11] J. R. Birge, L. Qi: Semiregularity and generalized subdifferentials with applications to optimization. *Mathematics of Operations Research*, **18**, 1993, No 4, 982–1005.

[12] J. V. Burke, M. C. Ferris: Characterizations of solution sets of convex programs. *Oper. Res. Lett.*, **10**, 1991, 57–60.

[13] W. L. Chan, L. R. Huang, K. F. Ng: On generalizsd second-order derivatives and Taylor expansion in nonsmooth optimization. *SIAM J. Control Optim.*, **32**, 1994, 591–611.

[14] R. W. Chaney: Second order directional derivatives for nonsmooth functions. *J. Math. Anal. Appl.*, **128**, 1987, 495–511.

[15] F. H. Clarke: *Optimization and nonsmooth analysis.* Repr. of the orig. 1983, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York 1990.

[16] F. H. Clarke, Yu. Ledyaev, R. Stern, P. Wolenski: *Nonsmooth analysis and control theory.* Springer-Verlag, New York 1998.

[17] R. Cominetti, R. Correa: A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization. *SIAM J. Control Optim.*, **28**, July 1990, No 4, 789–809.

[18] R. Cominetti: On pseudo-differentiability. *Trans. Amer. Math. Soc.* **324**, 1991, 843–865.

[19] J. P. Crouzeix: *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results*, J. P. Crouzeix et al., eds., Characterizations of generalized convexity and generalized monotonicity, a survey, *Nonconvex Optim. Appl.*, **27**, 1998, Kluwer Academic Publisher, Dordrech, 237–256.

[20] J.-P. Crouzeix, J. A. Ferland: Criteria for quasi-convexity and pseudo-convexity: relations and comparisons. *Math. Programming*, **23**, 1982, 193–205.

[21] V. F. Demyanov, A. M. Rubinov: *Constructive nonsmooth analysis.* Peter Lang, Frankfurt am Main 1995.

[22] W. E. Diewert: Alternative characterizations of six kind of quasiconvexity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth programming. In "*Generalized Concavity in Optimization and Economics*", S. Schaible, W. T. Ziemba (eds.), Academic Press, New York, 1981.

[23] W. E. Diewert, M. Avriel, I. Zang: Nine kinds of quasiconcavity and concavity. *J. of Economic Theory*, **25**, 1981, 397–420.

[24] B. De Finetti: Sulla stratificazoni convesse. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **30**, 141, 1949, 173–183.

[25] I. Ginchev: Higher order optimality conditions in nonsmooth optimization. *Optimization*, **51**, 2002, No 1 ,47–72.

[26] I. Ginchev, A. Guerraggio: Second order optimality conditions in unconstrained nonsmooth optimization. In: P.S. Kenderov, J.P. Revalski (Eds.), *Proc. 4th International Conference on Mathematical Methods in Operations Research and 6th Workshop on Well-posedness and Stability of Optimization Problems*, Sozopol

(Bulgaria), September 16–20, 1997, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **12**, 1998, 39–50.

[27] I. Ginchev, A. Guerraggio, M. Rocca: On second-order conditions in vector optimization. *Working paper 2002/32*, Universita Dell'Insubria, Facolta di Economia, October 2002.

[28] I. Ginchev, V. I. Ivanov: Higher order directional derivatives for nonsmooth functions. *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, **54**, 2001, No 11, 33–38.

[29] I. Ginchev, V. I. Ivanov: Second-order characterization of convex and pseudoconvex functions. Preprint M-01/02, May 2002, Department of Mathematics, Technical University of Varna (submitted to Journal of Applied Analysis).

[30] G. Giorgi: A note on quasiconvex functions that are pseudoconvex. *Trabajos de Investigacion Oper.*, **2**, 1987, 80–83.

[31] G. Giorgi: A note on the relationships between convexity and invexity. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **32**, 1990, 97–99.

[32] G. Giorgi, S. Komlósi: Dini derivatives in optimization - part 1. *Riv. Mat. Sci. Econ. Soc.*, **15**, 1992, No 1, 3–30.

[33] G. Giorgi, S. Komlósi: Dini derivatives in optimization - part 2. *Riv. Mat. Sci. Econ. Soc.*, **15**, 1992, No 2, 3–24.

[34] G. Giorgi, J. Thierfelder: Constrained quadratic forms and generalized convexity of C^2-functions revisited. In "*Generalized convexity and optimization for economic and financial decisions*", G. Giorgi, F. Rossi (eds.), Pitagora Editrice, Bologna, 1999, 179–219.

[35] M. A. Hanson: On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **80**, 1981, 545–550.

[36] P. Harker, J.-S. Pang: Finite-dimensional vatiational inequality and nonlinear complementarity problems. A survey of theory, algorithms and applications. *Math. Programming.*, **48**, 1990, 161–220.

[37] J.-B. Hiriart-Urruty: A new set-valued second-order derivative for convex functions. In: J.-B. Hiriart-Urruty (Ed.), *Fermat Days: Mathematics for Optimization*, Proc. Toulouse (France), May 6–10, 1985, *Math. Study Series* 129, North Holland, Amsterdam 1986, 157–182.

[38] L. R. Huang, K. F. Ng: On some relations between Chaney's generalized second-order directional derivative and that of Ben-Tal and Zowe. *SIAM J. Control Optim.*, **34**, 1996, No 4, 1220–1234.

[39] L. R. Huang, K. F. Ng: On lower bounds of the second-order directional derivatives of Ben-Tal, Zowe, and Chaney, *Math. Oper. Res.*, **22**, 1997, 747–753.

[40] V. I. Ivanov: First order characterizations of pseudoconvex functions. *Serdica Math. J.*, **27**, 2001, 203–218.

[41] V. I. Ivanov: Necessary and sufficient condition for pseudoconvexity of a function. *Mathemathics and Education in Mathematics*, Proceedings of Thirtieth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, April 8-11, 2001, 155–156.

[42] V. I. Ivanov: Bisection method for solving a game with locally Lipschitz payoff. *Mathemathics and Education in Mathematics*,

Proceedings of Thirty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, April 3-6, 2002, 151–154.

[43] V. I. Ivanov: Characterizations of the solution sets of generalized convex minimization problems *Serdica Math. J.*, **29**, No 1, 2003 (приета за печат).

[44] V. I. Ivanov: On lower bounds of the second-order Dini directional derivatives. *Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski"*, **96** (приета за печат).

[45] J. L. W. V. Jensen: Om konvexe functioner og uligheder mellem middelvaerdier. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, **16B**, 1905, 49–69.

[46] J. L. W. V. Jensen: Sur le fonctions convexes et les integalites entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, **30**, 1906, 175–193.

[47] V. Jeyakumar, X. Q. Yang: On characterizing the solution sets of pseudolinear programs. *J. Optimization Theory Appl.*, **87**, 1995, No 3, 747-755.

[48] V. Jeyakumar, X. Q. Yang: Convex composite minimization with $C^{1,1}$ functions. *J. Optimization Theory Appl.*, **86**, 1995, No 3, 631–648.

[49] S. Karamardian: Strictly quasiconvex functions and duality in nonlinear programming. *J. Math. Anal. Appl.*, **20**, 1967, No 2, 344–358.

[50] S. Karamardian: Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps. *J. Optimization Theory Appl.*, **18**, 1976, No 4, 445–454.

[51] S. Komlósi: Some properties of nondifferentiable pseudoconvex functions. *Math. Programming*, **26**, 1983, 232-237.

[52] S. Komlósi: First and second order characterizations of pseudolinear functions. *European J. Oper. Research*, **67**, 1993, 278–286.

[53] S. Komlósi: Generalized monotonicity in nonsmooth analysis. In "*Generalized convexity*", S. Komlósi, T. Rapcsák, and S. Schaible (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1994, 263–275.

[54] S. Komlósi: Generalized monotonicity and generalized convexity. *J. Optimization Theory Appl.*, **84**, 1995, No 2, 361–376.

[55] O. L. Mangasarian: Pseudo-convex functions. *SIAM J. Control*, **3**, 1965, 281–290.

[56] O. L. Mangasarian: *Nonlinear programming.* Repr. of the orig. 1969, Classics in Applied Mathematics. 10. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[57] O. L. Mangasarian: A simple characterization of solution sets of convex programs. *Oper. Res. Lett.*, **7**, 1988, 21–26.

[58] B. Martos: *Nonlinear programming. Theory and methods.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

[59] B. Martos: Subdefinite matrices and quadratic forms. *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 1969, 1215–1233.

[60] B. Martos: Quadratic Programming with quasi-convex objective function. *Operations Res.*, **19** (1971), 87–97.

[61] Ph. Michel, J.-P. Penot: Calcul sous-differentiel pour des fonctiens lipschitziennes et non lipschitziennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **298**, 1984, 269–272.

[62] Ph. Michel, J.-P. Penot: Dérivées secondes modérées des fonctions non dérivables. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316**, 1993, 995–998.

[63] Ph. Michel, J.-P. Penot: Second-order moderate derivatives. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **22**, 1994, No 7, 809–821.

[64] R. Mifflin: Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization. *SIAM J. Control and Optimization*, **15**, 1977, No 6, 959–972.

[65] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt: *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables.* Academic Press, New York, 1970.

[66] F. Oustry: Vertical developments of a convex functions. *Journal of Convex Analysis*, **5**, 1998, No 1, 153–170.

[67] D. Pallaschke, P. Recht, R. Urbański: Generalized derivatives for non-smooth functions. *Ann. Soc. Math. Polon.*, **31**, 1991, 1–18.

[68] J.-P. Penot: Generalized higher order derivatives and higher order optimality conditions, Universite de Pau, 1985.

[69] J.-P. Penot: Second order generalized derivatives: comparison of two types of epi-derivatives. In: W. Oettli, D. Pallaschke (Eds.), *Advances in Optimization*, Proc. 6th French-German Colloq., Lambrecht (Germany) 1991, Springer Verlag, Berlin 1992, 52–76.

[70] J.-P. Penot, P. H. Quang: Generalized convexity of functions and generalized monotonicity of set-valued maps. *J. Optimization Theory Appl.*, **92**, 1997, No 2, 343–356.

[71] R. Poliquin, L. Qi: Subderivatives and iterative schemes in nonsmooth optimization. Applied Mathematics Preprint AM92/2, School of Mathematics, University of New South Wales, 1992.

[72] A. W. Roberts, D. E. Warberg: Another proof that convex functions are locally Lipschitz. *Am. Math. Mon.*, **81**, 1974, 1014–1016.

[73] R. T. Rockafellar: *Convex analysis.* Repr. of the orig. 1970, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1997.

[74] R. T. Rockafellar: Second-order optimality conditions in nonlinear programming obtained by the way of epi-derivatives. *Math. Oper. Res.*, **14**, 1989, No 3, 462–484.

[75] S. Shiraishi: On connections between approximate second-order directional derivative and second-order Dini derivative for convex functions. *Math. Programming*, **58**, 1993, 257–262.

[76] M. Sion: On general minimax theorems. *Pacific J. Math.*, **8**, 1958, 171–176.

[77] M. Studniarski: Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions. *SIAM J. Control Optim.*, **24**, 1986, No 5, 1044–1049.

[78] M. Studniarski: Second-order necessary conditions for optimality in nonsmooth nonlinear programming. *J. Math. Anal. Appl.*, **154**, 1991, 303–317.

[79] Y. Tanaka: Note on generalized convex functions. *J. Optimization Theory Appl.*, **66**, 1990, No 2, 345–349.

[80] H. Tuy: Sur les inégalites linéaires. *Colloq. Math.*, **13**, 1964, 107–123.

[81] D. Ward: Convex derivatives in optimization. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Berlin, Springer-Verlag, **345**, 1990, 36–51.

[82] D. Ward: Calculus for parabolic second-order derivatives. *Set Valued Analysis.*, **1**, 1993, 213–246.

[83] T. Weir: On strong pseudoconvexity in nonlinear programming duality. *Opsearch*, **27**, 1990, No 2, 117–121.

[84] X. Q. Yang, V. Jeyakumar: Generalized second-order directional derivatives and optimization with $C^{1,1}$ functions. *Optimization*, **26**, 1992, 165–185.

[85] X. Q. Yang: Generalized second-order characterizations of convex functions. *J. Optimization Theory Appl.*, **82**, 1994, No 1, 173–180.

[86] Н. Н. Воробьев: *Бескоалиционные игры*. Москва, Наука, 1984.

[87] Д. Т Дочев, В. И. Иванов: Итеративен метод за решаване на една минимаксна задача. *Известия - списание на ИУ - Варна*, № 4, 1997, 3–7.

[88] Ю. Е. Нестеров: *Эффективные методы в нелинейном программировании*. Радио и Связь, Москва, 1989.

[89] Б. Т. Поляк: Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений. *Докл. АН СССР*, **166**, 2, 1966, 287–290.

[90] Б. Н. Пшеничный: *Необходимые условия экстремума.* Издание второе, Наука, Москва, 1982.

[91] М. А. Садыгов: Необходимые условия экстремума высокого порядка в негладких задачах минимизации *Экономика и математические методы*, **30**, 1994, вып. 1, 148–160.