ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА С ИЗЧИСЛИТЕЛЕН ЦЕНТЪР
INSTITUTE OF MATHEMATICS WITH COMPUTER CENTER

Нелокальные операционные исчисления

Иван Христов Димовски

No. 8
Август 1993

Секция Комплексного анализа

Нелокальные операционные исчисления

И. Х. Димовски

Академику В. С. Владимирову к его семидесятилетию

1. Введение. Классическое операционное исчисление Хевисайда - Микусинского [1] локально в том смысле, что порождено простейшей локальной краевой задачей для оператора дифференцирования. Наша задача здесь показать возможность конструктивного построения операционных исчислении для всех линейных краевых задач для оператора дифферецирования. Единственный образец операционного исчисления для нелокальной краевой задачи - операционное исчисление для периодической задаче, построенное по схеме Микусинского в статье Боме и Уайджента [2]. Этот образец, однако, не является типическим из-за случайного обстоятельства, что $\lambda = 0$ является собственным значением периодической краевой задачи для оператора дифференцирования. Это можно "поправить" разными способами, но этим периодическую задачу трудно сделать типическим представителем нелокальных краевых задач. Достаточно сослаться на отсуствие присоединенных функции, наличие которых является типическим для большинства нелокальных краевых задач. Общая линейная нелокальная задача для оператора дифференцирования рассматривалась многими авторами с разных позиций. Первым, повидимому, был знаменитый французский математик Ж. Дельсарт, организатор группы Бурбаки, который в 1937 году обобщил классическую формулу Тейлора для общей нелокальной задачи. Соответствующий результат, как и следовало бы ожидать, включен в трактате Бурбаки (см. [3], стр. 344 - 374). Теория периодических в среднем функций, созданная тоже Ж. Дельсартом [4], стр. 239 - 289 и продолженную Л. Шварцом [5], Л. Еренпрайсом, Ж.П. Каханом, К. Беренстейном, А.Ф. Леонтьевым и др. по существу тоже часть теории общей нелокальной задачи для оператора дифференцирования. В явном виде общая нелокальная спектральная задача для оператора дифференцирования рассматривалась А.П. Хромовым [6] и Б.С. Павловым [7]. Детальному изучению развитии по собственным и присоединенным функциям этой задачи как в действительной, так и в комплексной области посвящены две монографии А.Ф. Леонтьева (см. [8] и [9]).

Здесь мы рассматриваем общую нелокальную задачу для оператора дифференцирования с позиции построения операционных исчислении и поиска соответствующих интегральных преобразовании. Такой подход является новым из-за того, что по сути дела до недавнего времени были известны только два примера операционных исчислении для оператора дифференцирования: операционное исчисление Хевисайда - Микусинского [1] и периодическое операционное исчисление [10] и [2]. В основе операционного исчисления Микусинского положена свертка Дюамеля

$$(1) \qquad (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

а в основе периодического операционного исчисления - так называемая периодическая свертка

$$(2) \qquad (f * g)(t) = \int_0^1 f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

которую, записанную в виде

$$(2') \qquad (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_t^1 f(1+t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

можно применять и на конечном интервале $[0,1]$. Неудачные попытки нахождения сверток для общих нелокальных задач для оператора дифференцирования делал еще в 30-х годах уже упомянутый Ж. Дельсарт ([4], стр. 386, 388, 416). Все предложенные им в качестве сверток билинейные и коммутативные операции неассоциативны. Впервые ассоциативные свертки для нелокальных краевых задач для оператора дифференцирования предложены автором (см. [11] и [12]) и Л. Бергом [13]. Ими показано, что операция

$$(3) \qquad (f * g)(t) = \Phi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t+\tau-\sigma)g(\sigma)\,d\tau \right\}$$

с произвольным линейном функционалом Φ на $C[0,1]$ является билинейной, коммутативной и ассоциативной на $C[0,1]$. Эта свертка положена в основании всех дальнейших рассмотрении. В книге Божинова [15] свертка (3) изучается в различных функциональных пространствах.

2. Общая нелокальная спектральная задача для оператора дифференцирования. Для того чтобы охватить все частные случаи единной схемой будем рассматривать произвольный интервал Δ действительной прямой. В дальнейшем мы будем выделять два случая: компактный и некомпактный интервал Δ. В первом случае, без ограничения общности можно взять $\Delta = [0,1]$. Для целей построения операционных исчислении можно ограничиться пространством $C(\Delta)$ комплекснозначных непрерывных на Δ функций с топологией равномерной или почти-равномерной сходимости.

Пусть Φ произвольный ненулевой линейный функционал на $C(\Delta)$. Из хорошо известной теоремы Рисса - Маркова следует существование единственной комплексной меры Радона μ, для которой

$$(4) \qquad \Phi\{f\} = \int_\alpha^\beta f(t)\,d\mu(t),$$

где $[\alpha, \beta] \subset \Delta$. Без ограничения общности можно предполагать, что α и β принадлежат носителю функционала Φ, т.е. что они являются точками роста меры $\mu(t)$. В качестве простейшей краевой задачи для оператора дифференцирования рассмотрим

$$y' - \lambda y = f(t), \qquad \Phi y = 0. \tag{5}$$

Ее решение $y = L_\lambda f$ определят резольвентный оператор L_λ. Спектр задачи (5) либо пуст, либо дискретный. Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда носитель функционала Φ состоит из одной точки. Во всех остальных случаев существует бесконечная последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$. Все они корни целой функции экспоненциального типа

$$E(\lambda) = \Phi_\tau\{e^{\lambda\tau}\} = \int_\alpha^\beta e^{\lambda\tau}\, d\mu(\tau), \tag{6}$$

называемую *и н д и к а т р и с с о й* функционала Φ. Соответствующие кратности $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n, \ldots$ нулей $E(\lambda)$ называются кратностями собственных значении задачи (5). И так, нелокальный случай имеет место, когда носитель функционала Φ состоит хотя бы из двух точек. Здесь мы будем рассматривать преимущественно нелокальный случай, хотя не будем исключать и локального случая.

Теорема 1. *Операция*

$$(f * g)(t) = \Phi_\tau\left\{\int_\tau^t f(t+\tau-\sigma)g(\sigma)\, d\tau\right\} \tag{7}$$

билинейная, коммутативная и ассоциативная на $C(\Delta)$. Резольвентный оператор L_λ представляется в виде сверточного оператора

$$L_\lambda f = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} * f. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (См. [14], стр. 52). Нетривиальным моментом является доказательство ассоциативности. Сначала докажем ассоциативность для трех экспонент $f(t) = e^{\lambda t}, g(t) = e^{\mu t}$ и $h(t) = e^{\nu t}$ с разными λ, μ и ν. Для $\nu \neq \mu$ имеем

$$\{e^{\lambda t}\} * \{e^{\mu t}\} = \left\{\frac{E(\lambda)e^{\mu t} - E(\mu)e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}\right\}.$$

Если $\lambda \neq \mu, \mu \neq \nu$ и $\nu \neq \lambda$, получаем

$$(e^{\lambda t} * e^{\mu t}) * e^{\nu t} = \left\{\frac{E(\mu)E(\nu)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}e^{\lambda t} + \frac{E(\nu)E(\lambda)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}e^{\mu t} + \frac{E(\lambda)E(\mu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}e^{\nu t}\right\}.$$

Из симметричности этого выражения относительно λ, μ и ν следует, что

$$(e^{\lambda t} * e^{\mu t}) * e^{\nu t} = e^{\lambda t} * (e^{\mu t} * e^{\nu t}),$$

т.е. ассоциативность для экспонент. Дифференцированием этого равенства по параметрам λ, μ и ν соответственно l, m и n раз получаем

$$\left(\{t^l e^{\lambda t}\} * \{t^m e^{\mu t}\}\right) * \{t^n e^{\nu t}\} = \{t^l e^{\lambda t}\} * \left(\{t^m e^{\mu t}\} * \{t^n e^{\nu t}\}\right).$$

Граничным переходом $\lambda, \mu, \nu \to 0$ находим

$$(t^l * t^m) * t^n = t^l * (t^m * t^n)$$

для $l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$. Из билинейности (7) следует соотношение асоциативности

$$(9) \qquad (f * g) * h = f * (g * h)$$

для произвольных многочленов f, g и h. Для доказательства (9) для произвольных $f, g, h \in C(\Delta)$ остается применить аппроксимационную теорему Вейерштрасса. Так как мы рассматриваем комплекснозначные функции f, g и h, нужно аппроксимировать действительные и мнимые части этих функции. Очевидные детали опускаем. Равенство (8) проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\lambda \in C$ и $E(\lambda) \neq 0$, тогда функция $e^{\lambda t}$ не является делителем нуля алгебры $[C(\Delta), *]$.

Действительно, из (8) следует, что $e^{\lambda t} * f = E(\lambda) L_\lambda f$. Равенство $e^{\lambda t} * f = 0$ равносильно равенству $L_\lambda f = 0$, откуда следует $f = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Для всех $f, g \in C(\Delta)$ выполняется равенство*

$$(10) \qquad \Phi\{f * g\} = 0,$$

т.е. свертка $f * g$ принадлежит ядру функционала Φ.

Доказательство. Действительно

$$\Phi\{f * g\} = \Phi_t \Phi_\tau \left\{ \int_\tau^t f(t + \tau - \sigma) g(\sigma)\, d\sigma \right\} = \Phi_\tau \Phi_t \left\{ \int_t^\tau f(\tau + t - \sigma) g(\sigma)\, d\sigma \right\},$$

так как переменные t и τ "немые". Так как

$$\int_t^\tau f(\tau + t - \sigma) g(\sigma)\, d\sigma = -\int_\tau^t f(t + \tau - \sigma) g(\sigma)\, d\sigma,$$

то, применяя теорему Фубинни: $\Phi_\tau \Phi_t\{h(t, \tau)\} = \Phi_t \Phi_\tau\{h(t, \tau)\}$, получаем $\Phi\{f * g\} = -\Phi\{f * g\}$, откуда $\Phi\{f * g\} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $[C(\Delta), *]$ является алгеброй без единицы. Действительно, если бы $e \in C(\Delta)$ было единицей, тогда из равенства $e * f = f$ для всех $f \in C(\Delta)$ следовало бы, что $\Phi\{e * f\} = \Phi\{f\}$. Применяя равенство (10), получили бы, что $\Phi f = 0$ для всех $f \in C(\Delta)$, что противоречит ненулевости функционала Φ.

Определение. Пусть $\lambda_n, n = 1, 2, \ldots$ произвольное собственное значение задачи (5), а Γ_n простой контур в комплексной плоскости, содержащий λ_n и никакое другое из собственных значении. Оператор

$$\Lambda_n f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} L_\lambda f \, d\lambda \tag{11}$$

называем проектором Леонтьева для собственного значения λ_n. Отметим, что Λ_n частный случай известного в спектральной теории проектора Рисса.

Теорема 3. *Проектор Леонтьева Λ_n отображает пространство $C(\Delta)$ на подпространство $\Pi_{\varkappa_n}$ квазимногочленов вида*

$$\left(a_{n,0}t^{\varkappa_n - 1} + a_{n,1}t^{\varkappa_n - 2} + \cdots + a_{n,\varkappa_n - 1}\right)e^{\lambda_n t},$$

где $\varkappa_n$ кратность собственного значения λ_n. Он имеет сверточное представление вида

$$\Lambda_n f = \varphi_n * f, \tag{12}$$

где

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\, d\lambda. \tag{13}$$

Доказательство. Сначала докажем представление (12). Интегрированием равенства (8) по контуру Γ_n получаем

$$\Lambda_n f = \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\, d\lambda\right\} * f,$$

что равносильно (12). Из (12) легко следует первое утверждение теоремы.

Следствие. Если λ_n простое собственное значение, т.е. $\varkappa_n = 1$, то $\varphi_n(t) = -e^{\lambda_n t}/E'(\lambda_n)$ и

$$(\Lambda_n f)(t) = \frac{e^{\lambda_n t}}{E'(\lambda_n)}\Phi_\tau\left\{\int_\alpha^\tau e^{\lambda_n(\tau - \sigma)} f(\sigma)\, d\sigma\right\}. \tag{14}$$

Замечание. В этом частном случае "проектор Леонтьева" (14) ввел Ж. Дельсарт ([4], стр. 264). Придерживаемся названием для проекторов (11), связанным с именем А.Ф. Леонтьева, так как им они изучены с наибольшей полнотой (см. [8] и [9]).

3. Случай компактного интервала Δ. Конечное интегральное преобразование Леонтьева. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ и предположим, что α и β принадлежат носителю функционала. В этом случае выполнена т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и, принадлежащая Л. Шварцу [5] и А.Ф. Леонтьеву [8], стр. 435 - 447:

Если $\Lambda_n f = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $f = 0$.

Теорема Шварца - Леонтьева дает основание смотреть на систему проекторов $\Lambda_1 f, \Lambda_2 f, \ldots, \Lambda_n f, \ldots$ как на конечное интегральное преобразование, которое обобщает конечное интегральное преобразование Фурье

$$F_n f = \int_0^1 e^{-2\pi int} f(t)\,dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{15}$$

Легко показать, что если $\Delta = [0,1]$ и $\Phi\{f\} = f(1) - f(0)$, то собственные значения задачи (5) в этом случае равны $\lambda_n = 2\pi in, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а проектор Леонтьева $\Lambda_n f$ отличается от $F_n f$ только множителем $e^{2\pi int}$, т.е.

$$\Lambda_n f = \left\{ \int_0^1 e^{-2\pi in\tau} f(\tau)\,d\tau \right\} e^{2\pi int}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{16}$$

Так как наша цель предложить обобщение конечного преобразования Фурье, охватывающее и случаи кратных собственных значений, таким обобщением следует считать саму последовательность проекторов Леонтьева (см. [16], стр. 90).

Определение. Соответствие

$$f \longmapsto \Lambda_n f, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

называется конечным интегральным преобразованием Леонтьева.

Основные свойства преобразования Леонтьева напоминают основные свойства знакомых конечных интегральных преобразований, только в некотором видоизмененном виде.

Теорема 4. *Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются равенства:*

i) *правило дифференцирования:*

$$\Lambda_n f' = (\Lambda_n f)' - \Phi\{f\}\varphi_n; \tag{18}$$

ii) *правило свертки:*

$$\Lambda_n (f * g) = (\Lambda_n f) * (\Lambda_n g). \tag{19}$$

Для доказательства см. [16], стр. 91.

Еще проще выглядит "правило интегрирования"

$$\Lambda_n (L_\lambda f) = L_\lambda (\Lambda_n f), \tag{20}$$

которое выражает очевидную коммутируемость операторов Λ_n и L_λ. Обозначим через $\Pi_{\varkappa_n}$ пространство квазимногочленов вида

$$(a_{n,0}t^{\varkappa_n-1}+a_{n,1}t^{\varkappa_n-2}+\cdots+a_{n,\varkappa_n-1})e^{\lambda_n t}. \tag{21}$$

В качестве базиса в $\Pi_{\varkappa_n}$ можно взять функции

$$\varphi_{n,k}(t)=\left(\frac{d}{dt}-\lambda_n\right)^k\varphi_n(t),\quad k=0,1,2,\dots,\varkappa_n-1. \tag{22}$$

Лемма 1. Для квазимногочленов $\varphi_{n,k}(t), k=0,1,2,\dots,\varkappa_n-1$, выполняются соотношения

$$\varphi_{n,k}*\varphi_{n,l}=\begin{cases}\varphi_{n,k+l} & \text{когда } k+l<\varkappa_n\\ 0 & \text{когда } k+l\geq\varkappa_n.\end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Так как все функции $\varphi_{n,k}, k=0,1,2,\dots,\varkappa_n-1$ принадлежат ядру Φ, то из (18) следует

$$\varphi_{n,k}*\varphi_{n,l}=\left(\frac{d}{dt}-\lambda_n\right)^{k+l}\varphi_n, \tag{24}$$

что дает сразу (23).

Как показано в [15], стр. 58, структура спектральных проекторов типа Λ_n хорошо выявляется при помощи матричных представлении жордановыми клетками.

Лемма 2. Пусть $f(t)=\sum_{k=0}^{\varkappa_n=1}C_{n,k}(f)\varphi_{n,k}(t)$ произвольный елемент $\Pi_{\varkappa_n}$. Соответствие

$$f\longmapsto F=\begin{pmatrix}C_{n,0}(f) & C_{n,1}(f) & \dots & C_{n,\varkappa_n-1}(f)\\ 0 & C_{n,0}(f) & \dots & C_{n,\varkappa_n-2}(f)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & C_{n,0}(f)\end{pmatrix} \tag{25}$$

является изоморфизмом алгебр $[\Pi_{\varkappa_n},*]$ и треугольных матриц рассматриваемого вида.

Доказательство следует очевидным образом из (23).

Лемма 3. Квазимногочлен

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\varkappa_n-1}C_{n,k}(f)\varphi_{n,k}(t)$$

является делителем нуля сверткки (7) в алгебре $\Pi_{\varkappa_n}$ тогда и только тогда, когда $C_{n,0}(f)=0$.

Доказательство. Пусть $C_{n,0}(f) = 0$. Тогда, согласно (24), если взять $g(t) = \varphi_{n,\varkappa_n - 1}(t)$, получим $f * g = 0$. Следовательно f делитель нуля в $\Pi_{\varkappa_n}$. Для доказательства необходимости условия $C_{n,0}(f) = 0$, достаточно проверить мультипликативность

$$C_{n,0}(f * g) = C_{n,0}(f)\, C_{n,0}(g)$$

функционала $C_{n,0}$. Это легко следует из представления (25).

Теорема 5. *Функция $f \in C[\alpha, \beta]$ не является делителем нуля свертки* (7) *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi_\tau \left\{ \int_\alpha^\tau e^{\lambda_n(\tau-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma \right\} \neq 0 \tag{26}$$

для $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Покажем, что

$$f * e^{\lambda_n t} = -\Phi_\tau \left\{ \int_\alpha^\tau e^{\lambda_n(\tau-\sigma)} f(\sigma) \right\} e^{\lambda_n t}. \tag{27}$$

Действительно, из (7) получаем

$$f * e^{\lambda_n t} = \Phi_\tau \left\{ \int_\tau^t e^{\lambda_n(t+\tau-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma \right\}.$$

Представив внутренний интеграл в виде $\int_\tau^t = \int_\alpha^t - \int_\alpha^\tau$, получим

$$f * e^{\lambda_n t} = e^{\lambda_n t} \Phi_\tau \{e^{\lambda_n \tau}\} \int_\alpha^t e^{-\lambda_n \sigma} f(\sigma)\, d\sigma - e^{\lambda_n t} \Phi_\tau \left\{ \int_\alpha^\tau e^{\lambda_n(\tau-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma \right\}.$$

Так как $\Phi_\tau \left\{ e^{\lambda_n \tau} \right\} = 0$, равенство (27) доказано. Этим необходимость (25) доказана. Пусть выполнены условия (25). Покажем, что $\Lambda_n f$, $n = 1, 2, \ldots$ не является делителем нуля в $\Pi_{\varkappa_n}$. Согласно Леммы 3, это равносильно утверждению, что функционал $C_{n,0}(f)$ в представлении

$$(\Lambda_n f)(t) = \sum_{k=0}^{\varkappa_n - 1} C_{n,k}(f) \varphi_{n,k}(t)$$

отличен от 0. Но $(\Lambda_n f) * e^{\lambda_n t} = -C_{n,0}(f) e^{\lambda_n t}$, так как

$$(\Lambda_n f) * e^{\lambda_n t} = (\varphi_n * f) * e^{\lambda_n t} = f * e^{\lambda_n t}.$$

Если бы для некоторого n квазимногочлен $\Lambda_n f$ был бы делителем нуля в $\Pi_{\varkappa_n}$, то имели бы $C_{n,0}(f) = 0$, т.е. $(\Lambda_n f) * e^{\lambda_n t} = 0$ и значит f было бы делителем нуля в $C(\Delta)$.

В случае, когда $[\alpha, \beta] \neq \Delta$, условия (26) только необходимые для того, чтобы функция $f \in C(\Delta)$ не была делителем нуля свертки (7).

4. Кольцо сверточных частных. Рассматриваем случай произвольного интервала Δ. Для краткости, будем обозначать $C = C(\Delta)$. Пусть D обозначает подмножество C, состоящее из всех *ненулевых* неделителей нуля свертки (7). Согласно следствию из Теоремы 1, множество D непусто, так как $f * \{e^{\lambda t}\} \neq 0$ для $\lambda \in \mathbb{C}, E(\lambda) \neq 0$. Теорема 5 дает полное описание D в случае, когда $\Delta = [\alpha, \beta]$. Дальше будем следовать схему [2].

Определяем отношение эквивалентности в $C \times D$ знакомым образом:

$$(f, g) \sim (f_1, g_1), \quad f, f_1 \in C; \quad g, g_1 \in D$$

тогда и только тогда, когда $f * g_1 = g * f_1$. Тогда сверточное частное $\dfrac{f}{g}$ определятся как класс эквивалентности $[(f, g)]$ в $C \times D$, содержащий пару (f, g). При помощи определении

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{f * k + g * h}{g * k}$$

и

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{f * h}{g * k},$$

множество M сверточных частных превращается в кольцо. Как и у Микусинского [1], в кольцо сверточных частных M можно вложит как пространство C, так и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Действительно, пусть g произвольный элемент D. Легко показать, что отображения $\eta_g : C \to M$ и $\chi_g : \mathbb{C} \to M$, определенные соответственно равенствами

$$\eta_g(f) = \frac{f * g}{g} \tag{28}$$

и

$$\chi_g(\lambda) = \frac{\lambda g}{g}, \tag{29}$$

вложения колец.

В случае, когда $\Delta = [\alpha, \beta]$ компактный интервал, концы которого принадлежат носителю функционала Φ, сверточные частные для свертки (7) можно рассматривать и как формальные ряды экспонент в смысле А. Ф. Леонтьева [8]. В случае функционала $\Phi f = f(1) - f(0)$ в [2] сверточные частные интерпретируются как формальные ряды Фурье. Наши рассмотрения полностью соответствуют рассмотрениям в [2] только в случае когда все собственные значения задачи (5) простые, т.е. когда пространства квазимногочленов $\Pi_{\varkappa_n}$ едномерные. Поэтому ограничимся общим случаем.

Пусть $f \in C$ и $g \in D$. Функциям f и g сопоставляем формальные ряды экспонент

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n f \quad \text{и} \quad g \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n g.$$

Из предположения $g \in D$ следует (Теорема 5), что квазимногочлены $\Lambda_n g$, $n = 1, 2, \ldots$, не являются делителями нуля свертки (7) в соответствующих подалгебрах $[\Pi_{\varkappa_n}, *]$.

Лемма 4. Сверточное частное $\dfrac{\Lambda_n f}{g}$ – квазимногочлен из $\Pi_{\varkappa_n}$.

Доказательство. Применим представление (25) для $f \in C$ и представление

$$g \longmapsto G = \begin{pmatrix} C_{n,0}(g), & C_{n,1}(g), & \ldots, & C_{n,\varkappa_n-1}(g) \\ 0, & C_{n,0}(g), & \ldots, & C_{n,\varkappa_n-2}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & C_{n,0}(g) \end{pmatrix}$$

для $g \in D$. Из Теоремы 5 следует, что $C_{n,0}(g) \neq 0$. Это означает, что матрица G обратима. Легко видеть, что обратная матрица G^{-1} имеет такой же треугольный вид. Такой вид имеет и произведение FG^{-1}. Матрице $H = FG^{-1}$ соответствует квазимногочлен h_n, для которого

$$\frac{\Lambda_n f}{g} = h_n.$$

Действительно, $g * h_n = (\Lambda_n g) * h_n \in \Pi_{\varkappa_n}$. Матрица $H * G$ является матрицей элемента $h_n * g$,т.е. $h_n * g = \Lambda_n f$.

Определение. Формальный ряд по экспонентам, соответствущим задаче (5) называем любой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n,0}\varphi_{n,0}(t) + a_{n,1}\varphi_{n,1}(t) + \cdots + a_{n,\varkappa_n-1}\varphi_{n,\varkappa_n-1}(t)\right], \tag{30}$$

где функции $\varphi_{n,k}(t)$ определены (22).

Дальше, для краткости, будем опускать упоминание задачи (5). Множество всех рядов по експонентам будем обозначать буквой $\mathfrak{M}$.

Лемма 5. Множество $\mathfrak{M}$ формальных рядов по экспонентам является кольцом относительно операциям

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(2)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n^{(t)}(t) + h_n^{(2)}(t)\right] \tag{31}$$

и

$$(32)\qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)}(t)\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(2)}(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(h_n^{(1)} * h_n^{(2)})(t),$$

где $h_n^{(1)}$ и $h_n^{(2)}$ произвольные квазимногочлены $\Pi_{\varkappa_n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство очевидно.

Не столь очевидно утверждение следующей теоремы.

Теорема 6. *Соответствие*

$$(33)\qquad \frac{f}{g} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n f}{g}$$

изоморфизм кольца сверточных частных M и кольца $\mathfrak{M}$ формальных рядов по экспонентам.

Доказательство. Очевидно, определенное (33) соответствие является хомоморфизмом кольца M в кольцо $\mathfrak{M}$. Покажем, что оно обратимое. Действительно, если $\dfrac{\Lambda_n f}{g} = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $\Lambda_n f = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно $f = 0$. Остается показать, что это отображение является сюрективным. Действительно, пусть (30) произвольный формальный ряд по экспонентам $e^{\lambda_n t}, n = 1, 2, \ldots$ с соответствущими фиксированными кратностями $\varkappa_n$. Обозначим

$$e_n = 1 + \max_{k=0,1,\ldots,\varkappa_n-1} |a_{n,k}|$$

и

$$d_n = \max_{\alpha\le t\le\beta}\left(|\varphi_{n,0}(t)| + |\varphi_{n,1}(t)| + \cdots + |\varphi_{n,\varkappa_n-1}|\right),$$

$n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функции

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n e_n n^2}\left[a_{n,0}\varphi_{n,0}(t) + \cdots + a_{n,\varkappa_n-1}\varphi_{n,\varkappa_n-1}(t)\right],$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,0}(t)}{d_n e_n n^2}.$$

Так как ряды равномерно сходятся на сегменте $[\alpha, \beta]$, то $f \in C$ и $g \in C$. Более того, $g \in D$ из Теоремы 5.

Очевидно

$$\frac{f}{g} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n,0}\varphi_{n,0}(t) + a_{n,1}\varphi_{n,1}(t) + \cdots + a_{n,\varphi_n-1}\varphi_{n,\varphi_n-1}(t)\right]$$

и следовательно соответствие (33) является изоморфизм колец M и $\mathfrak{M}$.

Определение. Последовательность $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)$ сверточных частных сходится к сверточному частному $\frac{f}{g}$, когда последовательности (f_n) и (g_n) числителей и знаменателей сходятся равномерно соответственно к числителю и знаменателю сверточного частного.

Замечание: Сходимость типа II не утвердилась в операционном исчислении Микусинского не только из-за того, что она нетопологическая, а больше из-за того, что пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть так называемую "основную теорему интегрального исчисления" при най-более естественном определении понятия производной параметрической функции $h(\mu) = \{f(t,\mu)\} \,/\, \{g(t,\mu)\}$:

$$h'(\mu) = \frac{\{f'_\mu(t,\mu) * g(t,\mu) - f(t,\mu) * g'_\mu(t,\mu)\}}{\{g(t,\mu) * g(t,\mu)\}}.$$

Тем более примечательно, что это удается сделать во всей общности в рассматримаемом случае компактного интервала (см. п. 6).

5. Построение операционного исчисления в случае, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5). Почти полный аналог операционного исчисления Микусинского получается в случае, когда $E(0) \neq 0$, т.е. когда $\Phi\{1\} \neq 0$. Это равносильно предположению, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5). Тогда, без ограничения общности, можно положить $E(0) = 1$, т.е. нормировать функционал Φ так, чтобы $\Phi\{1\} = 1$. Этим получается некоторая стандартизация соответствующего операционного исчисления. Теперь удобно вместо резольвентного оператора L_λ ограничится только оператором $L_0 = L$:

$$Lf(t) = \int_\alpha^t f(\tau)\,d\tau - \Phi_\tau\left\{\int_\alpha^\tau f(\sigma)\,d\sigma\right\}. \tag{34}$$

Оператор L совпадает со сверточным оператором $\{1\}*$, т.е.

$$Lf = \{1\} * f$$

и его можно рассматриватть как елемент кольца M сверточных частных. Его обратный елемент L^{-1} в M обозначим через S:

$$S = \frac{1}{L}. \tag{36}$$

Теорема 7. *Если $f \in C^N(\Delta)$, тогда выполняется равенство*

$$f^{(N)} = S^N f - S^{N-1}\Phi\{f\} - S^{N-2}\Phi\{f'\} - \cdots - \Phi\{f^{(N-1)}\}. \tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно обощенной формулы Тейлора, принадлежащей Ж. Дельсарту (см. [4], стр. 250), имеем

$$f(t) = \Phi\{f\} + \Phi\{f'\}A_1(t) + \cdots + \Phi\{f^{(N-1)}\}A_N(t) + L^N f^{(N)}, \tag{38}$$

где $A_k(t) = L^k\{1\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ так называемая система многочленов Аппелля, соответствующая задаче (5). Формулу (39) можно записать в кольце M как алгебрическое тождество

$$f = \Phi\{f\}L + \Phi\{f'\}L^2 + \cdots + \Phi\{f^{(N-1)}\}L^N + L^N f^{(N)}.$$

Умножением обоих сторон последнего равенства на S, получаем (37).

Замечание. Как и в операционном исчислении Микусинского, формулу (37) уместно называть основной формулой соответствующего операционного исчисления.

Следствие. Если $f \in C^1(\Delta)$, то

$$f' = Sf - \Phi\{f\}. \tag{39}$$

В частном случае операционного исчисления Микусинского имеем $\Phi\{f\} = f(0)$.

Теорема 8. *Пусть $\lambda \in C$ не является собственным значением задачи (5). Тогда*

$$\frac{1}{S-\lambda} = \left\{\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right\} \tag{40}$$

и

$$\frac{1}{(S-\lambda)^k} = \left\{\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\left(\frac{e^{\lambda t}}{E(\lambda)}\right)\right\} \quad \text{для } k > 1. \tag{41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (39) получаем

$$\left\{(e^{\lambda t})'\right\} = S\left\{e^{\lambda t}\right\} - \Phi\left\{e^{\lambda t}\right\},$$

т.е.

$$\lambda\left\{e^{\lambda t}\right\} = S\left\{e^{\lambda t}\right\} - E(\lambda).$$

Это равенство, записанное в виде

$$(S-\lambda)\left\{e^{\lambda t}\right\} = E(\lambda),$$

равносильно (40). Доказательство (41) можно провести индукцией.

Теорема 8 лежит в основу алгоритма Хевисайда для решенвия краевых задач вида

(42) $$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f, \quad \Phi\left\{y^{(k)}\right\} = \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \deg P - 1,$$

где P – многочлен, а Φ – заданный линейный функционал. При помощи основной формулы операционного исчисления (37) задача (42) сводится к алгебраическому уравнению первой степени

(43) $$P(S)y = f + Q(S)$$

относительно искомой функции. Здесь $Q(S)$ многочлен S степени ниже степени $P(S)$. Как показано в [14], стр. 39, в случае, когда ни один из корней многочлена $P(\lambda)$ не является собственным значением задачи (5), $P(S)$ не является делителем нуля в кольце M сверточных частных и решением (43) является

(44) $$y = \frac{1}{P(S)}f + \frac{Q(S)}{P(S)}.$$

Из Теоремы 8 следует, что (44) является не только формальным но и настоящим решением краевой задачи (42). В важном частном случае, когда некоторые из корней многочлена $P(\lambda)$ являются собственными значениями задачи (3) применима общая схема С. Гроздева [17].

6. Дифференцируемые функции числовой переменной со значениями в кольце сверточных частных. Пусть I интервал числовой прямой R. Любая функция $h : I \to M$ можно представить в виде

(45) $$h(\mu) = \frac{f(\mu)}{g(\mu)} = \frac{\{f(t,\mu)\}}{\{g(t,\mu)\}},$$

где функции $f(t,\mu)$ и $g(t,\mu)$ определены в области $[\alpha, \beta] \times I$. Кроме того, предполагается, что $g(\mu) \in D$ для любого $\mu \in I$.

Определение. Функция $h : I \to M$ называется дифференцируемой в точке $\mu = \mu_0 \in I$, когда для любой последовательности $(\mu_n) \to \mu_0, \mu_n \in I, \mu_n \neq \mu_0$ существует предел

(46) $$f'(\mu_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\mu_n) - f(\mu_0)}{\mu_n - \mu_0},$$

где сходимость понимается в смысле п.4.

Лемма 5. Если функции $f(t,\mu)$ и $g(t,\mu)$ имеют непрерывные частные производные $f'_\mu(t,\mu)$ и $g'_\mu(t,\mu)$ в области $[\alpha, \beta] \times I$, функция (45) дифференцируемая в интервале I и

(47) $$h'(\mu) = \frac{\{f'_\mu(t,\mu) * g(t,\mu) - f(t,\mu) * g'_\mu(t,\mu)\}}{\{g(t,\mu)\}^{*2}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (47) следует из представления

$$\frac{h(\mu_n)-h(\mu_0)}{\mu_n-\mu_0}=\frac{\left\{\dfrac{f(t,\mu_n)-f(t,\mu_0)}{\mu_n-\mu_0}*g(t,\mu_0)-\dfrac{g(t,\mu_n)-g(t,\mu_0)}{\mu_n-\mu_0}*f(t,\mu_0)\right\}}{\{g(t,\mu_n)*g(t,\mu_0)\}}.$$

Возможен и другой подход: просто принять (47) как определение производной, не интересуясь типом сходимости. Второй подход более сответствует духу операционного исчисления.

Теорема 9. *Пусть $h: I\to M$ определена (45), где $f(t,\mu)$ и $g(t,\mu)$ имеют непрерывные частные производные $f'_\mu(t,\mu)$ и $g'_\mu(t,\mu)$. Если $h'(\mu)=0$ для всех $\mu\in I$ при определении производной формулой (47), то $h(\mu)$ - постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (47) видно, что $h'(\mu)=0$ равносильно функциональному уравнению

$$f'_\mu(t,\mu)*g(t,\mu)-f(t,\mu)*g'_\mu(t,\mu)=0. \tag{48}$$

Применим преобразование Леонтьева Λ_n к (48):

$$(\Lambda_n f(\mu))'*\Lambda_n g(\mu)-(\Lambda_n f(\mu))*(\Lambda_n g(\mu))'=0.$$

Дальше, воспользуемся представлением (25) квазимногочленов $\Pi_{\varkappa_n}$ треугольными $\varkappa_n\times\varkappa_n$-матрицами. Дальнейшие рассуждения будем проводить для произвольного фиксированного n. Для упрощения означении соответствующие матрицы, отвечающие функциям $\Lambda_n f(\mu)$ и $\Lambda_n g(\mu)$ будем обозначать соответственно $F_n(\mu)$ и $G_n(\mu)$. При этом соглашении, равенство (49) принимает вид

$$F'_n(\mu)G_n(\mu)-F_n(\mu)G'_n(\mu)=0 \text{ для } \mu\in I. \tag{50}$$

Это матричное тождество можно записать в виде

$$\frac{d}{d\mu}\left[F_n(\mu)G_n^{-1}(\mu)\right]=0 \text{ для } \mu\in I. \tag{51}$$

Так как $F_n(\mu)G_n^{-1}(\mu)$ треугольная матрица вида (25), последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $F_n(\mu)G_n^{-1}(\mu)$ постоянная матрица, т.е.

$$F_n(\mu)G_n^{-1}(\mu)=H_n,$$

где H_n постоянная матрица рассматриваемого треугольного вида. Записав последнее тождество в виде

$$F_n(\mu)=H_n.G_n(\mu)$$

и возвращаясь к функциональным обозначениям, получаем

$$\Lambda_n f(\mu)=h_n*(\Lambda_n g(\mu)), \tag{52}$$

где h_n елемент $\Pi_{\varkappa_n}$. Из теоремы 6 следует, что сверточному частному $\frac{f(\mu)}{g(\mu)}$ отвечает постоянный формальный ряд по экспонентам

$$\frac{f(\mu)}{g(\mu)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n f(\mu)}{g(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Так как ряду $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ отвечает фиксированное $h_0 \in M$, то

$$h(\mu) = \frac{f(\mu)}{g(\mu)} = h_0,$$

т.е. функция $h(\mu)$ является константой. Этим теорема доказана. Вопрос о справедливости утверждения в случае, когда не выполняются условия теоремы единственности Шварца - Леонтьева, т.е. когда $\Delta \neq [\alpha, \beta], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{supp}\Phi$, является открытым, включительно и для операционного исчисления Микусинского.

Это исследование частично субсидированно фондацией "Научние исследования" МОН Болгарии по контракту ММ 65/92.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микусинский Я. *Операторное исчисление.* М., ИЛ, 1956.
2. Boehme T.K and Wygant G. *Generalized functions on the unit circle.* Amer. Math. Monthly, **82** (1975), 256–261.
3. Н. Бурбаки. *Элементы математики: Функции действительного переменного.* М., "Наука", 1965.
4. Oeuvres de Jean Delsarte, t. I, CNRS, Paris, 1971.
5. Schwartz L. *Théorie générale des fonctions moyennes périodiques.* Ann. of Math., **48** (1947), 857–929.
6. Хромов А.П. *Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле.* Матем. заметки, **6** (1969), 759–766.
7. Павлов Б.С. *Спектральный анализ дифференциального оператора с "размазанным" граничным условием.* Сб. "Проблемы матем. физики", ЛГУ, **6** (1973), 101–119.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М., "Наука", 1976.
9. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М., "Наука", 1980.
10. Kaplan W. *Operational methods for linear systems.* N.Y., 1962.
11. Dimovski I. H. *On an operational calculus for vector-valued functions.* Math. Balkanica, **4** (1974), 129–135.
12. Dimovski I. H. *Convolutions for the right inverse operators of the general linear differential operator of the first order.* Serdica. Bulg. Math. Publ., **2**, (1976), 1, 82–86.
13. Berg L. *Generalized convolutions.* Math. Nachrichten, **72** (1976), 239–245.
14. Dimovski I. H. *Convolutional calculus.* Dodrecht, Kluwer, 1990.
15. Bozhinov N. *Convolutional representations of commutants aned multipliers.* Sofia, Publ. House of BAS, 1988.

16. Dimovski I. H. and Petrova R. I. *Finite integral transforms for non-local boundary value problems.* In "Generalized functions and convergence", Eds. P. Antosik and A. Kaminski. Singapore, World Scientific, 1990.
17. Grozdev S.I. *A convolutional approach to inital value problems for equations with right invertible operators.* Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **33** (1980), 1, 35–38.

Болгарская Академия Наук
Институт Математики
ул. Акад. Г. Бончев, блок 8
1113 София, Болгария