МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

МАЙСТЕР ПЕНКА ИВАНОВА

ВЕТВЯЩИЕСЯ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

(01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: проф. Б.А.Севастьянов

Москва 1974

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ВВЕДЕНИЕ I

ГЛАВА I. Определение процесса и основные уравнения 9

§ I. Описание модели 9

§ 2. Случайные меры η_y и μ_{xn} и их производящие функционалы II

§ 3. Факториальные моменты мер η_y и μ_{xn} I8

ГЛАВА II. Вероятность вырождения 23

§ I. Асимптотика математического ожидания 23

§ 2. Асимптотика второго факториального момента . 27

§ 3. Вероятность вырождения 33

ГЛАВА III. Предельные теоремы 42

§ I. Предварительные замечания 42

§ 2. Докритический процесс 45

§ 3. Критический процесс 53

§ 4. Надкритический процесс 68

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА 73

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{X}$ – ограниченная открытая область N -мерного пространства. Ветвящиеся диффузионные процессы являются математической моделью системы популяции частиц, которые блуждают внутри области $\mathcal{X}$ независимо друг от друга по траекториям некоторого диффузионного процесса X_t^0 и имеют случайное время жизни, зависящее только от траектории соответствующей частицы. При этом каждая частица в конце своей жизни производит некоторое случайное число новых частиц, начальные положения которых распределены каким-либо случайным образом. Каждая новая частица, независимо от других частиц, эволюционирует аналогичным образом. Первоначальная частица составляет нулевое поколение. Все частицы, получившиеся в конце жизни частицы нулевого поколения, составляют первое поколение и т.д. Состояние системы популяции определяется количеством частиц и их положением внутри области $\mathcal{X}$. Основными характеристиками системы являются условные случайные меры η_y, $\mu_{x,n}$, μ_{xt} где для любого множества $U \subset \mathcal{X}$ случайная величина:

$\eta_y(U)$ равна числу частиц-потомков в множестве U в момент превращения, если частица-предок в момент превращения находилась в точке $y \in \mathcal{X}$.

$\mu_{xn}(U)$ равна числу частиц n-го поколения в множестве U, если в начальный момент времени была одна частица и она находилась в точке $x \in \mathcal{X}$.

$\mu_{xt}(U)$ равна числу частиц всех поколений в множестве U в момент времени t, если в начальный момент была одна частица и она находилась в точке $x \in \mathcal{X}$.

В связи с тем, что номер n поколения частицы можно рассматривать как временной параметр, принимающий только натуральные значения, принята следующая терминология: ветвящиеся диффузионные процессы с дискретным временем изучают свойства меры μ_{xn}, ветвящиеся диффузионные процессы с непрерывным временем изучают свойства меры μ_{xt}.

Определением и конструктивным построением общего марковского ветвящегося процесса, в частности, ветвящегося диффузионного процесса с непрерывным временем, занимались японские авторы Ikeda N., Nagasawa M, Watanabe S. В работе [4] показано, что ветвящийся диффузионный процесс с непрерывным временем есть непрерывный справа строго марковский процесс X_t в некотором расширенном фазовом пространстве $\tilde{\mathcal{X}}$, полугруппа которого удовлетворяет свойству I, [4], стр. 233. Пространство $\tilde{\mathcal{X}}$ строится следующим образом. Пусть $\mathcal{X}$ — сепарабельное локально компактное Хаусдорфовое пространство. Тогда обозначим $\tilde{\mathcal{X}}_m$ — m-кратное симметризованное произведение пространства $\mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{X}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{X}}_m + \{\Delta_0\} + \{\Delta_\infty\}$ где Δ_0 есть изолированная точка, Δ_∞ есть компактное расширение пространства $\bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{X}}_m + \{\Delta_0\}$. Процесс $\tilde{X}_t$ находится в состоянии $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots x_m)$, если в момент времени t в области $\mathcal{X}$ имеется m частиц и они разместились по одной в точках $x_1, x_2, \dots, x_m$, т.е.

$$\mu_{xt}(U) = \chi_U(x_1) + \chi_U(x_2) + \dots \chi_U(x_m),$$

где $\chi_U(\cdot)$ есть индикатор множества U.

Если в области $\mathcal{X}$ в момент времени t имеется бесконечно много частиц, то процесс $\tilde{X}_t$ находится в состоянии Δ_∞ а если в момент времени t в области $\mathcal{X}$ нет частиц, то процесс $\tilde{X}_t$ находится в состоянии Δ_0. Полугруппа $\tilde{T}_t$ процесса $\tilde{X}_t$ действует в пространстве функции $\hat{\tilde{S}}_B$, где $\hat{s}(\cdot) \in \hat{S}_B$ если

$$\hat{s}(\tilde{x}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m} s(x_j), & \text{при } \tilde{x} = (x_1, x_2, \dots x_m) \in \tilde{\mathcal{X}}_m, \\ 1, & \text{при } \tilde{x} = \Delta_0, \\ 0, & \text{при } \tilde{x} = \Delta_\infty, \end{cases}$$

и $s(\cdot) \in S_B$, т.е. является ограниченной измеримой функцией на $\mathcal{X}$ с $|s(x)| \leq 1$. С другой стороны, функция $s(\cdot)$ рассматривается как сужение функции $\hat{s}(\cdot)$ на $\mathcal{X}$ и обозначается

$$s(\cdot) = \hat{s}(\cdot)\Big|_{\mathcal{X}}.$$

Полугруппа $\tilde{T}_t$ определяется как

$$E_{\tilde{x}}\, \hat{s}(\tilde{X}_t) = (\tilde{T}\, \hat{s}(\cdot))(\tilde{x}).$$

Свойство I [4], стр.233, имеет вид

$$(\tilde{T}_t\, \hat{s}(\cdot))(\tilde{x}) = \widehat{(\tilde{T}_t\, \hat{s}(\cdot))\Big|_{\mathcal{X}}}(\tilde{x}).$$

Это свойство полугруппы выражает независимость эволюции отдельных частиц. Например, если $\tilde{x}=(x_1, x_2, \dots x_m)$, то

$$\left(\tilde{T}_t \hat{s}(\cdot)\right)(\tilde{x}) = E_{\tilde{x}}\, \hat{s}(\tilde{X}_t) =$$

$$= E_{x_1} \hat{s}(\tilde{X}_t)\, E_{x_2} \hat{s}(\tilde{X}_t) \dots E_{x_m} \hat{s}(\tilde{X}_t) = \widehat{\left(\tilde{T}\,\hat{s}(\cdot)\right)\Big|_{X}}(\tilde{x}).$$

Кроме того, оно показывает, что существует взаимно однозначное соответствие между полугруппой $\tilde{T}_t$ на $\tilde{S}_B$ и некоторым преобразованием F_t на S_B:

$$\left(F_t s(\cdot)\right)(x) = E_x \hat{s}(\tilde{X}_t), \quad \left(\tilde{T}_t \hat{s}(\cdot)\right)(\tilde{x}) = \widehat{\left(F_t s(\cdot)\right)}(\tilde{x}).$$

Очевидно, $\left(F_t s(\cdot)\right)(x)$ является производящим функционалом случайной меры μ_{xt}

$$\left(F_t s(\cdot)\right)(x) = E \exp\left\{\int_X \log s(z)\, \mu_{xt}(dz)\right\}.$$

Из полугруппового свойства $\tilde{T}_t$ следует, что

$$F_{t+\tau} s(\cdot) = F_t\left(F_\tau s(\cdot)\right).$$

В работе [4] выведены два основных уравнения - для $\hat{u}(t,\tilde{x}) = \left(\tilde{T}_t \hat{s}(\cdot)\right)(\tilde{x})$ и для $u(t,x) = \left(F_t s(\cdot)\right)(x)$. Уравнение для $u(t,x)$ есть нелинейное интегральное уравнение типа Урысона в пространстве $\mathcal{X}$, а уравнение для $\hat{u}(t,\tilde{x})$ есть линейное уравнение в пространстве $\tilde{\mathcal{X}}$. Доказано, что существуют два независимых пути исследования ветвящегося диффузионного процесса: с помощью линейного уравнения для $u(t,\tilde{x})$ или нелинейного уравнения для $u(t,x)$.

Ветвящиеся процессы с непрерывным временем с однородной во времени и пространстве диффузией, в случае, когда мера η_y сосредоточена в точке y и её производящий функционал не зависит от y, рассматривались Б.А.Севастьяновым и S. Watanabe. Б.А.Севастьяновым в работах [5] и [6] доказано, что для того, чтобы процесс был вырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы математическое ожидание числа частиц в момент времени t в области $\mathcal{X}$ росло медленнее любой показательной функции $e^{\gamma t}$, $\gamma>0$. Связь вероятности вырождения с математическим ожиданием точно такая же, как в случае без поглощения на границе $\partial\mathcal{X}$. S. Watanabe в работе [7] рассмотрел асимптотические свойства надкритического ветвящегося процесса в модели Б.А.Севастьянова. Доказано, что число частиц, находящихся в момент времени t в множестве $\mathcal{U}$, нормированное нужным образом, сходится в среднем квадратическом к некоторой случайной величине W, независящей от $\mathcal{U}$. Случайная величина W положительна почти всюду, если процесс невырождается.

Из этих исследований видно, что асимптотические свойства надкритического ветвящегося диффузионного процесса аналогичны асимптотическим свойствам надкритического ветвящегося процесса с конечным числом типов частиц. В диссертации показано, что такая аналогия имеет место для всех основных характеристик ветвящегося диффузионного процесса в ограниченной области с поглощающей границей (в модели с дискретным временем). Основным аппаратом исследований является производящий функционал меры μ_{xn}. Существенную роль играют результаты М.А. Красносельского о спектральных свойствах u_0-положительных линейных операторов и о существовании единственного решения у нелинейного уравнения $s(\cdot) = \mathcal{F} s(\cdot)$ с u_0-вогнутым оператором $\mathcal{F}$.

В первой главе диссертации дано описание модели и введены основные понятия, нужные для исследования. Выведено рекурентное соотношение (I.2.9), выражающее свойство независимости эволюции отдельных частиц и основную зависимость между мерами η_y, μ_{xn}, временем жизни частицы и переходной плотностью диффузионного процесса X°_t. Доказано, что плотность $K(x,y)$ точки y, в которой происходит превращение частицы начинающей свое блуждание из точки x, является функцией Грина задачи Дирихле (I.2.I2). В силу этого оператор F_n, определенный в (I.2.I4) посредством производящего функционала меры μ_{xn}, компактен. Кроме того, оператор F_n является аналитической векторной функцией векторного аргумента. Его вариации $\delta^m F_n(1; z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots z_m(\cdot))$ являются ограниченными m-линейными операторами тогда и только тогда, когда конечен m-ый факториальный момент меры μ_{xn}, равномерно по $x \in \mathcal{X}$. В силу ограниченности линейного интегрального оператора $\mathcal{K}$ с ядром $K(x,y)$ из равенств (I.2.I5), (I.2.I6) следует, что конечность m-го факториального момента меры η_y достаточна для конечности m-го факториального момента меры μ_{xn}, $n<\infty$.

Во второй главе сначала рассмотрено асимптотическое поведение математического ожидания. Доказано, что оператор $Ms(\cdot)=\delta F(1;s(\cdot))$ вполне непрерывен и u_0 -положителен. Из теорем 2.5, стр.68, и 2.10-2.13, стр.78 [2], следует, что оператор M и его сопряженный M^* обладают спектральными свойствами I, II, III. В частности, спектральный радиус λ оператора M является простым собственным значением и превосходит по модулю всякое другое собственное значение оператора M. В силу этого, для любого $U\subset X$

$$E\mu_{xn}(U)=\lambda^n\omega(x)\omega^*(\chi_U(\cdot))+o(\lambda_1^n),$$

где $\lambda_1<\lambda$, $\omega(\cdot)$ и ω^* - позитивные собственные векторы операторов M и M^* (см.теорему 2.I.2). Асимптотические свойства второго факториального момента меры μ_{xn} тоже аналогичны асимптотическим свойствам второго факториального момента для ветвящихся процессов с конечным числом типов частиц. Параграф 3 гл.II посвящен проблеме вырождения. Доказано, что вероятность вырождения $q(\cdot)$ есть минимальное решение уравнения $s(\cdot)=F(\cdot,s(\cdot))$. Процесс вырождается тогда и только тогда, когда он докритический или критический. Для надкритического процесса уравнение $s(\cdot)=F(\cdot,s(\cdot))$ имеет единственное нетривиальное решение.

Предельные свойства меры μ_{xn} рассмотрены в главе III. Из теоремы Витали (см. 3.18.I [3], стр.127) о сходимости аналитических векторых функций векторного аргумента следует, что конечномерные распределения случайной меры μ_{xn} сходятся, если сходится последовательность $F_n s(\cdot)$, для всех $s(\cdot)$

внутри некоторой сферы. Следует заметить отличие от ветвящихся процессов с конечным числом типов частиц, где для сходимости конечномерных распределений, достаточна сходимость производящих функций на множестве точек обладающей предельной точкой. Для докритического процесса доказано, что если конечен второй факториальный момент меры η_y, то конечномерные распределения условной случайной меры μ_{xn} при условии, $\mu_{xn}(\mathcal{X})>0$, сходятся к конечномерным распределениям фиксированной случайной меры μ^*. Производящий функционал меры μ^* является единственным решением уравнения (3.2.II) Для критического процесса получен явный вид предельного распределения. Если процесс надкритический и второй факториальный момент меры η_y конечен, то для любого $x \in \mathcal{X}$ и множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ случайные величины

$$\frac{\mu_{xn}(\mathcal{U})}{\lambda^n \omega^*(\chi_{\mathcal{U}}^{(\cdot)})}$$

сходятся в среднем квадратическом при $n \to \infty$ к некоторой случайной величине, независящей от $\mathcal{U}$.

Результаты диссертации опубликованы в [8].

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Б.А. Севастьянова за обсуждение работы и ценные замечания.

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕССА И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ I. Описание модели.

Пусть $\mathcal{X}$ - ограниченная открытая область N -мерного пространства с гладкой границей $\partial\mathcal{X}$. Рассмотрим однородный во времени диффузионный процесс X_t° и предположим, что плотность вероятности $p(t,x,y)$ положения частицы в момент времени t в точке y, если она начинает свое блуждание в момент времени 0 в точке x, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L_x p \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{I}$$

$$x, y \in \mathcal{X}, \quad t \in (0,\infty);$$

$$p(t,x,y)\Big|_{x\in\partial\mathcal{X}} = 0, \quad p(0+,x,y) = \delta(x-y),$$

где $x=(x^1,x^2,\dots x^N)$, $y=(y^1,y^2,\dots y^N)$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$,

причем для любых $\xi^1,\xi^2,\dots\xi^N$

$$\sum_{j,i=1}^{N} a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \geqslant c\sum_{i=1}^{N}(\xi^i)^2, \quad c>0, \quad x\in\mathcal{X}.$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют всем необходимым условиям для существования и единственности решения.

Из этого диффузионного процесса X_t° получим новый процесс, сократив время жизни каждой частицы. Предположим, что каждая из частиц независимо от своего положения внутри области $\mathcal{X}$, происхождения, возраста и других частиц за время $\Delta t \to 0$ с вероятностью $k \Delta t + o(\Delta t)$ превращается в совокупность других частиц или исчезает. Таким образом, время жизни частицы, начинающей свое блуждание из точки $x \in \mathcal{X}$, равно $\tau_x = \min\{\tau_x^*, \tau\}$, где случайные величины τ_x^* и τ независимы, причем τ имеет плотность $k e^{-kt}$, $t \geq 0$, τ_x^* есть время блуждания частицы из точки $x \in \mathcal{X}$ до поглощения на границе $\partial \mathcal{X}$ в процессе X_t°. Каждая частица в конце своей жизни производит некоторое случайное число новых частиц, начальные положения которых распределены каким-либо случайным образом по области $\mathcal{X}$. Количество и положения этих частиц зависят только от положения частицы-предка в момент превращения. В дальнейшем, каждая новая частица, независимо от других частиц, эволюционирует аналогичным образом. Первоначальная частица составляет нулевое поколение. Все частицы, получившиеся в конце жизни частицы нулевого поколения, составляют первое поколение и т.д.

§ 2. Случайные меры η_y и μ_{xn} и их производящие функционалы.

Обозначим σ - алгебру борелевских множеств области $\mathcal{X}$ через Σ. Пусть μ_{xn} -условная случайная мера (определение случайной меры см. § 1, гл. XII, [1]), такая что $\mu_{xn}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}\in\Sigma$, равно числу частиц n -го поколения, находящихся в множестве $\mathcal{U}$, если в начальный момент времени была одна частица и она находилась в точке $x\in\mathcal{X}$. Через η_y обозначим такую условную случайную меру, значение которой $\eta_y(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}\in\Sigma$, равно числу частиц - потомков в множестве $\mathcal{U}$ в момент превращения, если частица-предок в момент превращения находилась в точке $y\in\mathcal{X}$. Обозначим производящие функционалы целочисленных случайных мер η_y и μ_{xn} через H и F_n, т.е.

$$H(y,s(\cdot)) = E\exp\int_{\mathcal{X}}\log s(z)\,\eta_y(dz), \tag{1}$$

$$F_n(x,s(\cdot)) = E\exp\int_{\mathcal{X}}\log s(z)\,\mu_{xn}(dz). \tag{2}$$

Для удобства F_1 будем обозначать F. Известно, что производящий функционал любой целочисленной случайной меры существует для любой измеримой функции $s(\cdot)$ с $|s(x)|\leq 1$. Значения производящего функционала на простых функциях $0\leq s(x)\leq 1$ однозначно определяют распределения вероятностей соответствующей меры. Например, если

$$s(z) = \sum_{k=1}^{m} s_k\,\chi_{\mathcal{U}_k}(z)$$

$$s(z) = \sum_{j=1}^{m} s_j \xi_{U_j}(z),$$

то $$\log s(z) = \sum_{j=1}^{m} \log s_j \xi_{U_j}(z)$$

и $$H(y, s(\cdot)) = E\, s_1^{\xi_y(U_1)} s_2^{\xi_y(U_2)} \dots s_m^{\xi_y(U_m)}, \qquad (3)$$

т.е. $H(y, s(\cdot))$ является производящей функцией целочисленного неотрицательного вектора

$$(\xi_y(U_1), \xi_y(U_2), \dots \xi_y(U_m)).$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что мера ξ_y удовлетворяет следующим условиям:

$H(y, s(\cdot))$ является Σ - измеримой функцией y ; (4)

$E\xi_y(X) \le c < \infty$ для всех $y \in X$; (5)

$P\{\xi_y(X) < \infty\} = 1$ для всех $y \in X$; (6)

для любой замкнутой подобласти U области X

$P\{\xi_y(U) > 0\} > 0$ для всех $y \in U$. (7)

Предположение (7) означает, что с положительной вероятностью потомство частицы расположено вокруг точки превращения, т.е. исключает возможности существования окрестности точки превращения в которой с вероятностью 1 число частиц-потомков равно 0. В частности, $P\{\eta_y(\mathcal{X})>0\}>0$ для всех $y\in\mathcal{X}$. Обозначим плотность точки $y\in\mathcal{X}$, в которой происходит превращение частицы, находившейся в момент своего рождения в точке $x\in\mathcal{X}$, через $K(x,y)$. Очевидно, что для рассматриваемой нами модели

$$K(x,y)=\int_0^\infty \kappa e^{-\kappa t} p(t,x,y)\,dt, \tag{8}$$

где $p(t,x,y)$ есть переходная плотность диффузионного процесса X_t^0, т.е. $p(t,x,y)$ является решением уравнения (1).

<u>Теорема I.</u> Производящие функционалы H и F_n связаны реккурентным соотношением

$$F_n(x,s(\cdot))=1-\int_{\mathcal{X}}K(x,y)dy+\int_{\mathcal{X}}K(x,y)H(y,F_{n-1}(\cdot,s(\cdot))). \tag{9}$$

<u>Доказательство.</u> Предположение о независимости эволюции отдельных частиц означает, что при различных x_1, x_2, ... $x_j\in\mathcal{X}$ случайные меры $\mu_{x_1 n}$, $\mu_{x_2 n}$ ... , $\mu_{x_j n}$ независимы. Соотношение (9) получается, если в (2) при вычислении математического ожидания сначала вычислить условное математическое ожидание, зафиксировав место, в котором частица испытала первое превращение. Пусть

$$\eta_y(U)=\xi_U(x_1)+\xi_U(x_2)+\cdots\xi_U(x_j), \quad U\in\Sigma,$$

т.е. после первого превращения получились j частиц и они разместились в точках x_1, $x_2, \dots x_j$, принадлежащих $\mathcal{X}$. Тогда

$$\mu_{xn} = \mu_{x_1 n-1} + \mu_{x_2 n-1} + \dots \mu_{x_j n-1}$$

и производящий функционал меры μ_{xn} равен

$$F_{n-1}(x_1, s(\cdot))\, F_{n-1}(x_2, s(\cdot)) \dots F_{n-1}(x_j, s(\cdot)) \qquad (10)$$

или, что то же самое

$$\exp \int_{\mathcal{X}} \log \{ F_{n-1}(z, s(\cdot)) \} \,\zeta_y(dz). \qquad (11)$$

Беря от выражения (11) математическое ожидание, имеем $H(y, F_{n-1}(\cdot, s(\cdot)))$. Осредняя затем по мере $K(x,y)$, получаем в (9) третье слагаемое. Если первоначальная частица поглотилась на границе $\partial\mathcal{X}$, не успев испытать превращение внутри области $\mathcal{X}$, то производящий функционал меры μ_{xn} равен 1, а вероятность этого события равна $1 - \int_{\mathcal{X}} K(x,y)\,dy$.

<u>Лемма 1.</u> Ядро $K(x,y)$ есть функция Грина задачи Дирихле

$$L_{1x} u = \kappa u - \kappa f, \qquad (12)$$

$$u(x)\big|_{x \in \partial\mathcal{X}} = 0,$$

где дифференциальное выражение L_x определено в уравнении (I.I), f - произвольная непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем на $\mathcal{X}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$u(x)=\int_{\mathcal{X}} K(x,y) f(y)\, dy.$$

Тогда $L_x u(x)=\int_{\mathcal{X}} L_x K(x,y) f(y) dy =$

$$=\int_{\mathcal{X}}\int_0^\infty k e^{-kt} L_x p(t,x,y) f(y)\, dt\, dy = \int_{\mathcal{X}} f(y) \int_0^\infty k e^{-kt} \frac{\partial p}{\partial t}\, dt\, dy =$$

$$=\int_{\mathcal{X}} f(y) \left\{ k e^{-kt} p(t,x,y)\Big|_{t=0}^{\infty} + k\int_0^\infty p(t,x,y) k e^{-kt} dt \right\} dy =$$

$$= -k\int_{\mathcal{X}} f(y)\delta(x-y)\, dy + k\int_{\mathcal{X}} f(y) K(x,y)\, dy =$$

$$= -k f(x) + k u(x).$$

Очевидно $u(x)\big|_{x\in\partial\mathcal{X}}=0$, так как $K(x,y)\big|_{x\in\partial\mathcal{X}}=0$ для всех $y\in\mathcal{X}$.

Рассмотрим пространство $B(\mathcal{X})(C(\mathcal{X}))$ - определенных на $\mathcal{X}$, ограниченных измеримых (непрерывных) функций с нормой

$$\|s(\cdot)\| = \sup_{x\in\mathcal{X}} |s(x)| .$$

Пусть $S_B(S_C)$ - единичный шар пространства $B(\mathcal{X})(C(\mathcal{X}))$. Обозначим $K_B(K_C)$ - конус неотрицательных функций пространствам $B(\mathcal{X})(C(\mathcal{X}))$ и введем полуупорядоченность, полагая

$$s(\cdot) \leq t(\cdot) \quad \text{, если} \quad t(\cdot) - s(\cdot) \in K_B(K_C) ;$$

$$s(\cdot) \ll t(\cdot) \quad \text{, если} \quad t(x) - s(x) > 0$$

для всех $x \in \mathcal{X}$.

Пусть 1 есть функция тождественно равная 1, $o(1)\ (O(1))$ при $n \to \infty$ - функция, стремящаяся к нулю (ограниченная) по норме при $n \to \infty$.

Введем операторы H, F_n, $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathcal{K} s(\cdot)(x) = \int_{\mathcal{X}} K(x,y)\, s(y)\, dy , \tag{13}$$

$$H s(\cdot)(y) = H(y, s(\cdot)) \ , \ F_n s(\cdot)(x) = F_n(x, s(\cdot)) . \tag{14}$$

Тогда рекуррентное соотношение (9) можно записать в виде

$$F_{s(\cdot)} = 1 - \mathcal{K}(1 - H_{s(\cdot)}), \tag{15}$$

$$F_n s(\cdot) = F(\cdot, F_{n-1}(\cdot, s(\cdot))). \tag{16}$$

Из леммы I следует, что оператор $\mathcal{K}$ является оператором типа потенциала с показателем $\vartheta = N-2$, т.е. действует из L_p, $p > N/2$, в $C(\mathcal{X})$ и вполне непрерывен. Следовательно, оператор F действует из $\overline{S}_B$ в $\overline{S}_C$ и компактен. Кроме того, из определений (I), (2) и (I4) следует, что операторы H и F_n являются аналитическими в S_B и непрерывными в $\overline{S}_B$ векторными функциями векторного аргумента (см. § I, гл.III, [3]).

В силу предположения (6) для всех $y \in \mathcal{X}$

$$H(y,1) = \lim_{\theta \uparrow 1} H(y, \theta^{\nu x^{(\cdot)}}) = P\{\tau_y(\mathcal{X}) < \infty\} = 1$$

т.е. $H1 = 1$. Из (I5), (I6) и непрерывности оператора $\mathcal{K}$ следует, что

$$F1 = 1, \quad F_n 1 = 1. \tag{17}$$

Таким образом видно, что полная конечность меры η_y и положительность времени жизни частицы обеспечивают полную конечность меры μ_{xn}, $n<\infty$.

§ 3. Факториальные моменты мер η_y и μ_{xn}.

Для любой случайной меры μ в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{X},\Sigma)$ функция множеств $E\mu(U)$, $U\in\Sigma$, является мерой на $(\mathcal{X},\Sigma)$, а функция множеств

$$E\mu(U_1)\mu(U_2)\ldots\mu(U_k),\ U_1,U_2,\ldots U_k\in\Sigma, \tag{1}$$

является k-вариантной мерой. Функция множеств $E\mu(U)$ называется математическим ожиданием меры μ, а функция множеств (1) – k-м моментом меры μ. Приведем определение факториального момента $\varphi_m(U_1,U_2,\ldots U_m)$ для случая, когда m-й момент меры μ конечен.

Определение 1. Первый факториальный момент φ_1 случайной меры μ определим как $E\mu(U)$:

$$\varphi_1(U)=E\mu(U),\ U\in\Sigma. \tag{2}$$

Пусть уже определены k-е факториальные моменты

$$\varphi_k(U_1,U_2,\ldots U_k),\ U_i\in\Sigma,\ i=1,2,\ldots k,\ 1\le k<m.$$

Тогда m -й факториальный момент $\varphi_m(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_m)$ определяется из равенств

$$E\mu(\mathcal{U}_1)\mu(\mathcal{U}_2)\dots\mu(\mathcal{U}_m) =$$

$$= \varphi_m(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\alpha_k} \varphi_k(B_{J_1}, \dots B_{J_k}), \tag{3}$$

где $J_1, J_2, \dots J_k$ – подмножества, на которые разбивается множество индексов $\{1, 2, \dots m\}$ (т.е. $J_l \subset \{1, 2, \dots m\}$, $J_l \neq 0$ и $\bigcup_{l=1}^{k} J_l = \{1, 2, \dots m\}$, $J_l \cap J_k = \phi$ при $l \neq k$), $B_J = \bigcap_{i \in J} \mathcal{U}_i$, суммирование $\sum_{\alpha_k}$ распространяется на всевозможные разбиения $J_1, J_2, \dots J_k$ множестве $\{1, 2, \dots m\}$ (разбиения, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми).

Например,

$$\varphi_2(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = E\mu(\mathcal{U}_1)\mu(\mathcal{U}_2) - E\mu(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2),$$

$$\varphi_3(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3) = E\mu(\mathcal{U}_1)\mu(\mathcal{U}_2)\mu(\mathcal{U}_3) - E\mu(\mathcal{U}_1)\mu(\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3) -$$

$$- E\mu(\mathcal{U}_2)\mu(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) - E\mu(\mathcal{U}_3)\mu(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) + 2E\mu(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3).$$

В параграфе 3 гл. XII [I] дано определение факториального момента и для случая, когда m -й момент меры неограничен. Доказано, что это определение коректно и что, если целочисленная случайная мера μ имеет при $k \leq j$ конечные факториальные моменты $\varphi_k(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_k)$, то производящий функционал $F_\mu s(\cdot)$ этой меры представим в виде

$$F_\mu s(\cdot) = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int \dots \int [1 - s(z_1)] \dots [1 - s(z_k)] \varphi_k(dz_1 \dots dz_k) + R_j, \quad (4)$$

где

$$0 \leq R_j (-1)^j \leq \frac{1}{j!} \int \dots \int [1 - s(z_1)] \dots [1 - s(z_j)] \varphi_j(dz_1 \dots dz_j), \quad (5)$$

если $0 \leq s(\cdot) \leq 1$, и

$$|R_j| \leq \frac{1}{j!} \int \dots \int |1 - s(z_1)| \dots |1 - s(z_j)| \varphi_j(dz_1 \dots dz_j), \quad (6)$$

если $|s(\cdot)| \leq 1$. (см. теорему 12.4.8 [I], стр. 127). Следовательно, j -ые факториальные моменты мер ζ_y и μ_{xn} конечны тогда и только тогда, когда вариации

$\delta^j H(1; s_1(\cdot), \dots s_j(\cdot))$ и $\delta^j F_n(1; s_1(\cdot), \dots s_j(\cdot))$

являются ограниченными j -линейными операторами. В силу ограниченности оператора $\mathcal{K}^j$ из равенств (2.15) и (2.16) следует, что ограниченность конечность j-го факториального момента меры ζ_y, равномерно по $y \in \mathcal{X}$, достаточна для ограниченности конечности j-го факториального момента меры μ_{xn}, $n < \infty$, равномерно по $x \in \mathcal{X}$. Обозначим

$$a(y;\mathcal{U}) = E\zeta_y(\mathcal{U}),\quad m_k(x;\mathcal{U}) = E\mu_{xk}(\mathcal{U}),\ \mathcal{U} \in \Sigma,\ k<\infty; \tag{7}$$

$$b(y;\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2) = E\zeta_y(\mathcal{U}_1)\zeta_y(\mathcal{U}_2) - E\zeta_y(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2),\ \mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2 \in \Sigma; \tag{8}$$

$$n_k(x;\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2) = E\mu_{xk}(\mathcal{U}_1)\mu_{xk}(\mathcal{U}_2) - E\mu_{xk}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2). \tag{9}$$

Введем линейные и билинейные операторы

$$A s(\cdot)(y) = \int_{\mathcal{X}} s(z)\, a(y;dz),\quad M_k s(\cdot)(x) = \int_{\mathcal{X}} s(z)\, m_k(x;dz);$$

$$B(s(\cdot),t(\cdot))(y) = \int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} s(z_1)\,t(z_2)\, b(y;dz_1\,dz_2),\ = b(y;dy,dy)$$

$$\mathcal{N}_k(s(\cdot),t(\cdot))(x) = \int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} s(z_1)\,t(z_2)\, n_k(x;dz_1\,dz_2). \tag{10}$$

Для удобства M_1 и $\mathcal{N}_1$ будем обозначать M и $\mathcal{N}$. Очевидно

$$M_n s(\cdot) = \delta F_n(1;s(\cdot)),$$

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot),t(\cdot)) = \delta^2 F_n(1; s(\cdot), t(\cdot)).$$

Дифференцируя равенства (2.10) и (2.11), находим, что

$$M = \mathcal{K}A\ , \quad M_n = M^n,$$

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot),t(\cdot)) = M(\mathcal{N}_{n-1}(s(\cdot),t(\cdot))) + \mathcal{N}(M^{n-1}s(\cdot), M^{n-1}t(\cdot)), \qquad (11)$$

где $M^0 s(\cdot) = s(\cdot)$.

$\mathcal{N}_0 = ?$ $\mathcal{N} = ?$

ГЛАВА II.

ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫРОЖДЕНИЙ.

§ I. Асимптотика математического ожидания.

Определение I. Оператор M называется u_0 -положительным ($u_0(\cdot)$ - фиксированный ненулевой элемент из конуса), если для каждого ненулевого $s(\cdot)$ из конуса можно указать такое натуральное $\ell=\ell(s)$ и такие положительные числа $\alpha=\alpha(s)$ и $\beta=\beta(s)$, что

$$\alpha u_0(\cdot) \leq M^{\ell} s(\cdot) \leq \beta u_0(\cdot).$$

Теорема I. Оператор $M=\mathcal{K}A$, действующий из $B(\mathcal{X})$ в $C(\mathcal{X})$ оставляет инвариантными одновременно оба конуса K_B и K_C ($K_C \subset K_B$), вполне непрерывен и $u_0(\cdot)$ -положителен относительно конуса K_C , где

$$u_0(x) = \int_{\mathcal{X}} K(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Инвариантность конусов K_C и K_B очевидна (мера $a(y,dz)$ и ядро $K(x,y)$ неотрицательны). Оператор A ограничен, так как

$$\|A\| = \sup_{s(\cdot)\in \bar{S}_B} \|As(\cdot)\| = \sup_{y\in\mathcal{X}} |a(y,\mathcal{X})| \leq const$$

в силу предположения (I.2.5). Оператор $\mathcal{K}$ вполне непрерывен.

Следовательно, оператор M тоже вполне непрерывен.

В силу неравенства Чебышева и предположения (I.2.7) для любой замкнутой подобласти $\mathcal{U}$ области $\mathcal{X}$ $a(y,\mathcal{U})>0$ для всех $y\in\mathcal{U}$. Выберем постоянную $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\mathcal{U})$ и замкнутую область $V\subset\mathcal{U}$, такие, что $a(y;\mathcal{U})>\varepsilon_1$ для всех $y\in\mathcal{U}$.

Пусть теперь $s(\cdot)\in K_c$, $s(\cdot)\neq 0$. Тогда существует замкнутая область $\mathcal{U}\subset\mathcal{X}$ и постоянная $\varepsilon_2=\varepsilon_2(s)>0$ такие, что $s(x)>\varepsilon_2$ для всех $x\in\mathcal{U}$. В силу того, что ядро $K(x,y)$ является функцией Грина, по лемме 7.9 [2], стр. 275, для любой замкнутой области $V\subset\mathcal{X}$ существует $\varepsilon_3=\varepsilon_3(V)$:

$$\int_V K(x,y)\,dy \geqslant \varepsilon_3\int_{\mathcal{X}} K(x,y)\,dy\,, \quad x\in\mathcal{X}.$$

Поэтому для всех $x\in\mathcal{X}$

$$M s(\cdot)(x)=\int_{\mathcal{X}} K(x,y)\int_{\mathcal{X}} s(z)\,a(y;dz)\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_2\int_{\mathcal{X}} K(x,y)\int_{\mathcal{U}} a(y,dz)\,dy=\varepsilon_2\int_{\mathcal{X}} K(x,y)\,a(y;\mathcal{U})\,dy\geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_2\varepsilon_1\int_V K(x,y)\,dy\geqslant \varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_3\int_{\mathcal{X}} K(x,y)\,dy.$$

С другой стороны

$$M s(\cdot)(x) \leqslant \|s(\cdot)\| \, \|A\| \int_X K(x,y)\,dy.$$

Из теорем 2.5, стр.68, и 2.10-2.13, стр.78-83, [2], следует, что оператор M и его сопряженный M^* обладают следующими спектральными свойствами.

I. Оператор M имеет в конусе K_c единственный собственный вектор $\omega(\cdot)$:

$$M\omega(\cdot) = \lambda\omega(\cdot), \quad \|\omega(\cdot)\| = 1.$$

II. Оператор M^* имеет в конусе K_c^* единственный собственный вектор ω^* :

$$M^*\omega^* = \lambda\omega^*, \quad \omega^*(\omega(\cdot)) = 1,$$

ω^* - строго положительный функционал (относительно K_c).

III. Спектральный радиус оператора M равен

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|M^n\|}$$

и является простым собственным значением, превосходящим по модулю всякое другое собственное значение оператора M .

<u>Следствие I.</u> Оператор M^n представим в виде

$$M^n = \lambda^n P + Q^n, \qquad (1)$$

где $\quad P_{s(\cdot)} = \omega(\cdot)\,\omega^*(s(\cdot))$,

(2)

$$PQ_{s(\cdot)} = QP_{s(\cdot)} = 0. \tag{3}$$

для любого $s(\cdot) \in B(\mathcal{X})$. Существуют $\lambda_0 < \lambda$ и $n_0 < \infty$ такие, что для всех $n > n_0$

$$\|Q^n\| \leq \lambda_0^n \tag{4}$$

<u>Доказательство.</u> В силу компактности оператора M и свойств I - III

$$M = \lambda P + Q,$$

где операторы P и Q удовлетворяют (2), (3) и спектральный радиус оператора Q равный

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|Q^n\|} = \rho < \lambda \tag{5}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$

$$\rho - \varepsilon \leq \sqrt[n]{\|Q^n\|} \leq \rho + \varepsilon .$$

Возьмем ε_0 таким, чтобы $\lambda_0 = \rho + \varepsilon_0 < \lambda$ и по нему выберем n_0 . Тогда для любого $n > n_0$ имеет место (4).

Теорема 2.

$$M^n_{s(\cdot)} = \lambda^n \omega^*(s)\,\omega(\cdot) + \bar{\bar{o}}(\lambda_1^n), \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda. \tag{6}$$

В частности,

$$E\mu_{xn}(\mathcal{U}) = M^n \chi_{\mathcal{U}}^{(\cdot)}(x) = \lambda^n \omega(x)\,\omega^*(\chi_{\mathcal{U}}^{(\cdot)}) + o(\lambda_1^n). \tag{7}$$

Доказательство следует непосредственно из (I), (2) и (4).

Равенство (7) показывает, что среднее число частиц n-го поколения, находящихся в множестве $\mathcal{U}$, стремится к нулю при $n \to \infty$, если $\lambda < 1$, и неограниченно возрастает при $n \to \infty$, если $\lambda > 1$. В связи с этим ветвящийся процесс с диффузией называется докритическим, если позитивное собственное значение λ оператора M строго меньше 1; критическим, если $\lambda = 1$ и надкритическим, если $\lambda > 1$.

§ 2. Асимптотика второго факториального момента.

Теорема I. Если второй факториальный момент $b(y;\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ меры η_y конечен равномерно по $y \in X$, то $\mathcal{N}_n(s(\cdot),t(\cdot))$ при $n \to \infty$ имеет следующее асимптотическое поведение:

в докритическом случае

$\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = \lambda^n \, O(\|s(\cdot)\| \, \|t(\cdot)\|) \; ; \tag{I}$$

в критическом случае

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = n\, \omega^*(s(\cdot))\, \omega^*(t(\cdot))\, \omega^*(\mathcal{N}(\omega, \omega)) \left[\omega(\cdot) + o(1)\right] \; ; \tag{2}$$

в надкритическом случае

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = \lambda^{2n} \omega^*(s(\cdot))\, \omega^*(t(\cdot)) \left[c(\cdot) + o(1)\right] \; ; \tag{3}$$

где функция $c(\cdot)$ не зависит от $s(\cdot)$ и $t(\cdot)$ и является решением уравнения

$$\lambda^2 c(\cdot) = M\, c(\cdot) + \mathcal{N}(\omega, \omega).$$

Доказательство. В силу рекуррентного соотношения (I.3.II)

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = \sum_{j=0}^{n-1} M^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)) \, , \tag{4}$$

где $M^0 s(\cdot) = s(\cdot)$. Подставим в (4) разложение (I.I) оператора M^n :

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = \sum_{j=0}^{n-1} Q^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} \omega(\cdot) \lambda^{2j} \omega^* \left[\mathcal{N}\left(\frac{M^j s(\cdot)}{\lambda^j}, \frac{M^j t(\cdot)}{\lambda^j} \right) \right].$$

В силу билинейности оператора $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}\left(\frac{M^j s(\cdot)}{\lambda^j}, \frac{M^j t(\cdot)}{\lambda^j} \right) = \omega^*(s) \omega^*(t) \mathcal{N}(\omega, \omega) +$$

$$+ \omega^*(s) \mathcal{N}\left(\omega(\cdot), \frac{Q^j t(\cdot)}{\lambda^j}\right) + \omega^*(t) \mathcal{N}\left(\omega, \frac{Q^j s(\cdot)}{\lambda^j}\right) + \mathcal{N}\left(\frac{Q^j s(\cdot)}{\lambda^j}, \frac{Q^j t(\cdot)}{\lambda^j} \right).$$

Обозначим временно $u_j(\cdot) = \omega^*(s) \mathcal{N}\left(\omega, \frac{Q^j t(\cdot)}{\lambda^j}\right)$,

$$v_j(\cdot) = \omega^*(t) \mathcal{N}\left(\omega, \frac{Q^j s(\cdot)}{\lambda^j}\right), \quad w_j(\cdot) = \mathcal{N}\left(\frac{Q^j s(\cdot)}{\lambda^j}, \frac{Q^j t(\cdot)}{\lambda^j} \right).$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot)) = \lambda^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \omega(\cdot) \omega^*(s) \omega^*(t) \omega^*(\mathcal{N}(\omega, \omega)) +$$

$$+ \lambda^{n-1} \omega(\cdot) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \omega^* \left[u_j(\cdot) + v_j(\cdot) + w_j(\cdot) \right] + \qquad (5)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} Q^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)).$$

В силу (I.4)

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n(\cdot) + V_n(\cdot) + W_n(\cdot) \| = 0 \tag{6}$$

и для всех $n < \infty$

$$\left\| \frac{M^n}{\lambda^n} \right\| \leqslant \|\omega^*\| + \max\left\{1, \left\|\frac{Q}{\lambda}\right\|, \dots \left\|\frac{Q^{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right\|\right\}. \tag{7}$$

Пусть $\lambda < 1$. Тогда в силу (6)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \omega^* [u_j(\cdot) + V_j(\cdot) + W_j(\cdot)] = O(1). \tag{8}$$

Покажем, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} Q^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)) = \lambda^{n-1} o(1). \tag{9}$$

В силу (7) имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \| Q^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)) \| =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{Q^{n-1-j}}{\lambda^{n-1-j}} \left[\mathcal{N}\left(\frac{M^j s(\cdot)}{\lambda^j}, M^j t(\cdot) \right) \right] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1-n_0} \frac{\lambda_0^{n-1-j}}{\lambda^{n-1-j}} \|M^j\| + \mathrm{const} \sum_{j=n-1-n_0}^{n-1} \|M^j\| \right\} \to 0$$

при $n\to\infty$, так как ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\|M^j\|$ сходится (спектральный радиус $\lambda<1$). Равенства (5),(8),(9) доказывают (1).

Если $\lambda=1$, то в силу (6) и (7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^*[u_j(\cdot)+V_j(\cdot)+W_j(\cdot)]=\lim_{n\to\infty}\omega^*[u_n(\cdot)+V_n(\cdot)+W_n(\cdot)]=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\|\sum_{j=0}^{n-1}Q^{n-1-j}\mathcal{N}(M^j s(\cdot),M^j t(\cdot))\|\leq$$

$$\leq c\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\|Q^{n-1-j}\|=c\lim_{n\to\infty}\|Q^n\|=0,$$

т.е. из (5) следует (2).

Пусть $\lambda>1$. Тогда по лемме Тёплица (см. [9], стр. 252) о том, что если числовые последовательности b_n, x_n: $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\uparrow\infty$, $x_n\to x$ при $n\to\infty$, то $\sum_{k=1}^{n}a_k x_k/\sum_{k=1}^{n}a_k\to x$ при $n\to\infty$, имеем в силу (7):

$$\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j\omega^*[u_j(\cdot)+V_j(\cdot)+W_j(\cdot)]=o(\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j).\qquad(10)$$

Очевидно a_k соответствует λ^k, $b_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda^k$,

$x_k=\omega^*(u_k(\cdot)+V_k(\cdot)+W_k(\cdot))\to 0$ при $k\to\infty$.

Так как из (7) следует, что для всех $n<\infty$

$$\sum_{j=0} \lambda^j \left\| \frac{\alpha}{\lambda^{n-1-j}} \left[\mathcal{N}\left(\frac{\Pi s(\cdot)}{\lambda^j}, \frac{\Pi s(\cdot)}{\lambda^j}\right)\right]\right\| \leq \text{const} \sum_{j=0} \lambda$$

то

$$\sum_{j=0}^{n-1} Q^{n-1-j} \mathcal{N}(M^j s(\cdot), M^j t(\cdot)) = \lambda^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \; O(1) . \qquad (11)$$

Равенства (10), (11) и (5) доказывают (3), где $c(\cdot)$ некоторая фиксированная функция, принадлежащая K_c . Для её определения подставим главный член асимптотического разложения $\mathcal{N}_n(s(\cdot), t(\cdot))$ и $M^n s(\cdot)$ при $\lambda > 1$ в рекуррентное соотношение (1.3.11) и получим, что $c(\cdot)$ должна удовлетворять уравнению

$$\lambda^{2n} \omega^*(s) \omega^*(t) c(\cdot) = M[\lambda^{2(n-1)} \omega^*(s) \omega^*(t) c(\cdot)] +$$

$$+ \mathcal{N}[\lambda^{n-1} \omega^*(s) \omega(\cdot), \lambda^{n-1} \omega^*(t) \omega(\cdot)]$$

или, что то же самое

$$\lambda^2 c(\cdot) = M c(\cdot) + \mathcal{N}(\omega(\cdot), \omega(\cdot)) .$$

В дальнейшем исследовании для нас существенным будет только то, что $c(\cdot)$ не зависит от $s(\cdot)$ и $t(\cdot)$.

§ 3. Вероятность вырождения.

Определение I. Мы будем говорить, что ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы из точки x, выродился на n -ом поколении, если случайная величина

$$\mu_{xn}(\mathcal{X}) = 0.$$

Определение 2. Вероятностью вырождения назовем функцию $q(x)$ равную

$$P\{\mu_{xn}(\mathcal{X}) = 0 \text{ для некоторого } n < \infty\}.$$

Определение 3. Ветвящийся процесс называется вырождающимся, если $q(x) = 1$ для всех $x \in \mathcal{X}$. Если хотя бы при одном x вероятность вырождения $q(x) < 1$, то процесс будем называть невырождающимся.

Лемма I. Вероятность вырождения $q(\cdot)$ равна

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\cdot, 0) = q(\cdot) \tag{I}$$

(предел по норме пространства $C(\mathcal{X})$).

Доказательство. По определению 2 событие, означающее вырождение ветвящегося процесса, начинающегося с одной частицы из точки x, есть сумма событий $\{\mu_{xn}(\mathcal{X})^{t} = 0\}$, $n \geq 1$.

Очевидно, эти события вложены

$$\{\mu_{xn}(\mathcal{X})=0\} \subset \{\mu_{x\,n+1}(\mathcal{X})=0\}.$$

Поэтому для любого фиксированного $x \in \mathcal{X}$

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\mu_{xn}(\mathcal{X})=0\} = \lim_{n\to\infty} F_n(x,0).$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\cdot,0)$ по норме пространства $C(\mathcal{X})$ существует, так как последовательность функций $F_n(\cdot,0)$ монотона, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна ($0 \le F(\cdot,0)$, оператор F монотонен и компактен).

<u>Лемма 2.</u> Вероятность вырождения $q(\cdot)$ есть минимальное решение уравнения

$$F(\cdot, s(\cdot)) = s(\cdot). \tag{2}$$

<u>Доказательство.</u> В силу рекуррентного соотношения (I.2.I6) и непрерывности оператора F

$$q(\cdot) = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}(\cdot,0) = F(\cdot, \lim_{n\to\infty} F_n(\cdot,0)) = F(\cdot, q(\cdot)),$$

т.е. $q(\cdot)$ является решением уравнения (2).

Пусть $z(\cdot)$ произвольное неотрицательное решение уравнения (2). Тогда

$$z(\cdot) = F_n(\cdot, z(\cdot)), \quad n < \infty.$$

Кроме того, для любого $n < \infty$ и неотрицательного $z(\cdot) \in S_B$

$$F_n(\cdot,0) \leqslant F_n(\cdot, z(\cdot)) = z(\cdot)$$

Следовательно,

$$q(\cdot) = \lim_{n\to\infty} F_n(\cdot,0) \leqslant z(\cdot),$$

т.е. $q(\cdot)$ есть минимальное неотрицательное решение уравнения (2).

Мы уже отмечали в § 2, гл.I, что 1 является решением уравнения (2) (в силу полной конечности меры ζ_y и непрерывности оператора $\mathcal{K}$). Если в конусном отрезке $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$ других решений нет, то из леммы 2 вытекает, что $q(\cdot) = 1$, т. е. ветвящийся процесс является вырождающимся. Если в области $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$ существуют решения отличные от 1 , то процесс является невырождающимся.

<u>Лемма 3.</u> Если оператор H линеен, то ветвящийся процесс вырождается.

<u>Доказательство.</u> В силу ограниченности оператора A

$$|1 - H(\cdot, s(\cdot))| \leqslant A(|1 - s(\cdot)|), \quad s(\cdot) \in \bar{S}_B. \tag{3}$$

Действительно, для любого $s(\cdot) \in \bar{S}_B$ имеем

$$1 - H(\cdot, s(\cdot)) = H(\cdot, 1) - H(\cdot, s(\cdot)) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \delta^m H(0; 1, \dots 1) - \delta^m H(0; s(\cdot), \dots s(\cdot)) \right\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m} \delta^m H\left(0; 1^{j-1}, 1 - s(\cdot), [s(\cdot)]^{m-j}\right).$$

Следовательно,

$$|1 - H(\cdot, s(\cdot))| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m} |s(\cdot)|^{m-j} \delta^m H(0; 1^{m-1}, |1 - s(\cdot)|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \delta^m H(0; 1^{m-1}, |1 - s(\cdot)|) = \delta H(1; |1 - s(\cdot)|).$$

Равенство в (3) имеет место тогда и только тогда, когда H линеен.

Итак, пусть $1 - H(\cdot, s(\cdot)) = A(1 - s(\cdot))$. Так как $H(\cdot, 0) \geqslant 0$, то $A1 \leqslant 1$. В силу этого

$$M1 = \mathcal{K}A1 \leqslant \mathcal{K}1 \ll 1$$

т.е. $\|M\| \leqslant \sup_{x \in \mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} K(x, y) dy = \varepsilon < 1$.

Следовательно, спектральный радиус λ оператора M строго меньше I. Это означает, что уравнение

$$Mz(\cdot) = z(\cdot)$$

имеет единственное решение $z(\cdot)=0$. Осталось сослаться на Лемму 2, заметив, что, если H линеен, уравнение (2) имеет вид

$$1-s(\cdot)=1-F(\cdot,s(\cdot))=M(1-s(\cdot)).$$

Теперь рассмотрим случай, когда H нелинеен и выясним, как связаны свойства критичности и вырождаемости ветвящегося процесса.

<u>Теорема I.</u> Если $\lambda\leq 1$, то уравнение (2) имеет единственное решение $q(\cdot)=1$. Если $\lambda>1$, то уравнение (2) имеет единственное нетривиальное решение $q(\cdot)$: $0\ll q(\cdot)\leq 1$, $q(\cdot)\neq 1$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\lambda\leq 1$. Допустим, что уравнение (2) имеет неотрицательное решение $z(\cdot)\neq 1$. Тогда

$$1-z(\cdot)=1-F(\cdot,z(\cdot))\leq M(1-z(\cdot)).$$

Применим к этому неравенству строго положительный функционал ω^* и получим противоречие. Именно

$$\omega^*(1-z(\cdot))<\omega^*M(1-z(\cdot))=\lambda\,\omega^*(1-z(\cdot)),$$

$\left(\omega^*(1-z(\cdot))\neq 0\right.$ так как $\left.z(\cdot)\neq 1\right)$.

Пусть $\lambda > 1$. Методом последовательных приближений построим нетривиальное решение уравнения (2). Для этого выберем начальное приближение $z_0(\cdot)$ так, чтобы последовательные приближения $z_n(\cdot)$ образовывали монотонную последовательность.

В силу непрерывности и монотонности вариации $\delta F(s(\cdot); z(\cdot))$ как функций $s(\cdot)$ в $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$, для любого $\alpha \in (0,1)$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место неравенство

$$\delta F(1 - \varepsilon s(\cdot); z(\cdot)) \geqslant \alpha M z(\cdot)$$

Положим $z_0(\cdot) = 1 - \varepsilon \omega(\cdot)$, $z_n(\cdot) = F(\cdot, z_{n-1}(\cdot))$, $n \geqslant 1$,

где $\omega(\cdot)$ - позитивный собственный вектор оператора M. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Легко заметить, что $z_1(\cdot) \leqslant z_0(\cdot)$. Действительно,

$$1 - F(\cdot, z_0(\cdot)) = \delta F(s_0(\cdot); 1 - z_0(\cdot)),$$

где $z_0(\cdot) \leqslant s_0(\cdot) \leqslant 1$. Поэтому

$$1 - F(\cdot, z_0(\cdot)) \geqslant \delta F(1 - \varepsilon\omega(\cdot); \varepsilon\omega(\cdot)) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha M(\varepsilon\omega(\cdot)) = \alpha \lambda \varepsilon \omega(\cdot).$$

Достаточно взять $\alpha \in (\frac{1}{\lambda}, 1)$, по нему выбрать ε_0, чтобы получить неравенство

$$z_1(\cdot) = F(\cdot, z_0(\cdot)) \leq 1 - \lambda\alpha\varepsilon\omega(\cdot) \leq 1 - \varepsilon\omega(\cdot) = z_0(\cdot).$$

В силу монотонности и компактности оператора F последовательность $z_n(\cdot)$ сходится по норме пространства $C(\mathfrak{X})$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(\cdot) = z(\cdot)$. Тогда

$$z(\cdot) = F(\cdot, z(\cdot)) = 1 - \mathcal{K}1 + \mathcal{K}H(\cdot, z(\cdot)) \geq 1 - \mathcal{K}1 \gg 0,$$

т.е. $0 \ll z(\cdot) \leq 1 - \varepsilon\omega(\cdot)$.

Осталось доказать единственность нетривиального решения. Очевидно уравнение $s(\cdot) = F(\cdot, s(\cdot))$ эквивалентно уравнению $s(\cdot) = 1 - F(\cdot, 1 - s(\cdot))$. Обозначим $\mathcal{F}s(\cdot) = 1 - F(\cdot, 1 - s(\cdot))$, т.е.

$$\mathcal{F}s(\cdot) = \mathcal{K}\left[1 - H(\cdot, 1 - s(\cdot))\right]. \tag{4}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{F}$ u_0-вогнут, т.е. для любого ненулевого $s(\cdot) \in K_c$ существуют α, $\beta > 0$ такие, что

$$\alpha u_0(\cdot) \leq \mathcal{F}s(\cdot) \leq \beta u_0(\cdot) \tag{5}$$

и для любого $\varepsilon \in (0,1)$ при $\alpha_1 u_0(\cdot) \leqslant s(\cdot) \leqslant \beta_1 u_0(\cdot)$ можно указать такое $\gamma = \gamma(s,\varepsilon) > 0$, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon s(\cdot)) \geqslant (1+\gamma)\,\varepsilon\, \mathcal{F} s(\cdot). \tag{6}$$

Неравенство (5) доказывается с помощью предположения (I.2.7) и леммы I.2.I так же, как в теореме 2.I.I. Неравенство (6) есть следствие вогнутости голоморфной функции $f(\zeta) = \mathcal{F}(\zeta s(\cdot))$.

В силу теорем 6.3 и 6.6 [2], стр.200, уравнение (2) имеет единственное нетривиальное решение в конусе. Последовательные приближения сходятся по норме к нетривиальному решению, какое бы не было начальное приближение, отличное от тривиального.

Следовательно, если $\lambda > 1$ минимальное решение $q(\cdot) = \lim_{n\to\infty} F_n(\cdot, 0)$ есть единственное нетривиальное решение уравнения (2).

<u>Следствие I.</u> Ветвящийся процесс вырождается тогда и только тогда, когда он докритический или критический.

<u>Следствие 2.</u> Если $\lambda \leqslant 1$, то $F_n(\cdot, s(\cdot)) \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно в $\bar{S}_B$. Если $\lambda > 1$, то $F_n(\cdot, s(\cdot)) \to q(\cdot)$ при $n \to \infty$ равномерно в области $|s(\cdot)| \leqslant \tau(\cdot) \leqslant 1$, $\tau(\cdot) \neq 1$.

Очевидно, равномерность сходимости следует из неравенств

$$F_n(\cdot, 0) \leqslant F_n(\cdot, s(\cdot)) \leqslant F_n(\cdot, \tau(\cdot)),$$

если $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant \tau(\cdot)$,

$$|F_n(\cdot, s(\cdot)) - q(\cdot)| \leqslant F_n(\cdot, |s(\cdot)|) - q(\cdot), \quad s(\cdot) \in S_B,$$

так как $q(\cdot) \in K_c$.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ I. Предварительные замечания.

В первой главе диссертации было отмечено, что значения производящего функционала $F_n(x, s(\cdot))$ на простых функциях $0 \leq s(\cdot) \leq 1$ однозначно определяют распределение вероятностей случайной меры μ_{xn}. Рассмотрим вопрос о сходимости конечномерных распределений. Пусть

$$F_n(x, s(\cdot)) = E \exp\left\{ \int_X \log\left[\sum_{j=1}^{m} s_j \chi_{U_j}(z)\right] \mu_{xn}(dz) \right\} =$$

$$= E\, s_1^{\mu_{xn}(U_1)} s_2^{\mu_{xn}(U_2)} \ldots s_m^{\mu_{xn}(U_m)} =$$

$$= \sum_{\alpha} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_m^{\alpha_m} P\left\{ \mu_{xn}(U_1) = \alpha_1, \ldots \mu_{xn}(U_m) = \alpha_m \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$. Обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_m$. Вычислим вариацию порядка $|\alpha|$ от векторной функции F_n в точке 0 (см. теорему 3.16.1 [3], стр.124)

$$\delta^{|\alpha|} F_n\Big(0; \underbrace{s_1 \chi_{U_1}(\cdot), \ldots s_1 \chi_{U_1}(\cdot)}_{\alpha_1 \text{ раз}}, s_2 \chi_{U_2}(\cdot), \ldots s_2 \chi_{U_2}(\cdot), \ldots \underbrace{s_m \chi_{U_m}(\cdot), \ldots s_m \chi_{U_m}(\cdot)}_{\alpha_m \text{ раз}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \zeta_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \zeta_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial \zeta_m^{\alpha_m}} F_n\Big(x, \sum_{j=1}^{m} \zeta_j s_j \chi_{U_j}(\cdot)\Big)\Big|_{\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0, \ldots \zeta_m = 0} =$$

$$\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \zeta_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial \zeta_m^{\alpha_m}}\sum_{\beta}(\zeta_1 s_1)^{\beta_1}(\zeta_2 s_2)^{\beta_2}\ldots(\zeta_m s_m)^{\beta_m}P\{\mu_{xn}(U_1)=\beta_1,\ldots\mu_{xn}(U_m)=\beta_m\}\Big|_{\zeta_1=0,\,\zeta_2=0,\ldots\zeta_m=0}$$

$$= s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\ldots s_m^{\alpha_m} P\{\mu_{xn}(U_1)=\alpha_1,\ldots \mu_{xn}(U_m)=\alpha_m\}.$$

Следовательно, для любых $U_1, U_2, \ldots U_m \in \Sigma$

$$P\{\mu_{xn}(U_1)=\alpha_1,\ \mu_{xn}(U_2)=\alpha_2,\ldots \mu_{xn}(U_m)=\alpha_m\}=$$

$$=\delta^{|\alpha|}F_n(0;\, s_1\chi_{U_1}(\cdot),\ldots s_1\chi_{U_1}(\cdot),\ldots s_m\chi_{U_m}(\cdot)\ldots s_m\chi_{U_m}(\cdot))\Big|_{s_1=1,\ldots s_m=1}.$$

Это показывает, что для доказательства сходимости конечномерных распределений меры μ_{xn} достаточно доказать сходимость вариации производящего функционала $F_n(x, s(\cdot))$. Связь сходимости последовательности вариаций аналитических векторных функций со сходимостью последовательности самих векторных функций выражена в теореме Витали.

<u>Теорема Витали</u> (см. 3.18.1 [3], стр.127). Пусть $\{f_k s(\cdot)\}$ - последовательность векторных функций векторного аргумента, аналитических и локально равномерно ограниченных на фиксированной области $\mathcal{D}$. Если внутри некоторой

сферы $\sigma \subset \mathcal{D}$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_k\, s(\cdot)$, то этот предел $f s(\cdot)$ существует на $\mathcal{D}$ всюду и представляет собой аналитическую функцию. При этом

$$\delta^j f(s(\cdot); h(\cdot), h(\cdot), \dots h(\cdot)) = \lim_{k\to\infty} \delta^j f_k (s(\cdot); h(\cdot), \dots h(\cdot))$$

для всех j и для всех $s(\cdot) \in \mathcal{D}$.

Указанная теорема отличается от классической теоремы Витали о сходимости голоморфных функций одной комплексной переменной тем, что здесь предполагается сходимость последовательности $f_k\, s(\cdot)$ внутри некоторой сферы, а не только на множестве точек, обладающих предельной точкой, и не дается никаких сведений о равномерности сходимости.

Например, последовательность функционалов

$$\varepsilon_n^*(s(\cdot)) = \frac{\omega^*[1 - F_n(\cdot, s(\cdot))]}{\lambda^n}$$

равномерно ограничена и монотона при $s(\cdot) \in S_B \cap K_B$: для любого $s(\cdot) \in S_B$ в силу (2.1.4) существует $n_0 < \infty$ такое, что

$$|\varepsilon_n^*(s(\cdot))| = \left| \frac{\omega^*(1 - F_n(\cdot, s(\cdot)))}{\lambda^n} \right| \leqslant \frac{\omega^* M^n(\|1 - s(\cdot)\|)}{\lambda^n} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{1, \omega^*(1), \frac{\|Q\|}{\lambda}, \dots \frac{\|Q^{n_0}\|}{\lambda^{n_0}}\right\} \|1 - s(\cdot)\|;$$

для любого $s(\cdot) \in S_B \cap K_B$

$$\varepsilon_n^*(s) \leqslant \frac{\omega^*[M(1-F_{n-1}(\cdot, s(\cdot)))]}{\lambda^n} = \varepsilon_{n-1}^*(s(\cdot)).$$

Следовательно, последовательность $\varepsilon_n^*(s(\cdot))$ сходится при $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$, но без дополнительных условий нельзя утверждать, что последовательность $\varepsilon_n^*(s(\cdot))$ сходится для всех $s(\cdot) \in S_B$ и ее предел является аналитической функцией.

§ 2. Докритический процесс.

Теорема I. Если $\lambda < 1$ и второй факториальный момент $b(y; X, X) \leqslant c < \infty, \forall y \in X$, то для любого $s(\cdot) \in S_B$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-F_n(\cdot, s(\cdot))}{\lambda^n} = \varphi^*(s(\cdot))\,\omega(\cdot), \tag{I}$$

где

$$\varphi^*(s(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^*[1-F_n(\cdot, s(\cdot))]}{\lambda^n}. \tag{2}$$

$\varphi^*(s(\cdot))$ является аналитическим в S_B функционалом, удовлетворяющим

$$\varphi^*(F(\cdot, s(\cdot))) = \lambda \varphi^*(s(\cdot)), \tag{3}$$

$$\varphi^*(0) > 0. \tag{4}$$

<u>Доказательство.</u> Обозначим

$$\Phi_n(\cdot, s(\cdot)) = \frac{1 - F_n(\cdot, s(\cdot))}{\lambda^n} . \tag{5}$$

По теореме 8.4.12 [1], стр.421, из конечности второго факториального момента меры γ_y и непрерывности оператора $\mathcal{K}$ следует, что для любого $s(\cdot) \in S_B$

$$|1 - F s(\cdot)| = M(1 - s(\cdot)) + O(\|1 - s(\cdot)\|^2), \tag{6}$$

$$|1 - F(\cdot, s(\cdot))| \leqslant M(|1 - s(\cdot)|) \tag{7}$$

и при $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$

$$M^n(1 - s(\cdot)) - \mathcal{N}_n(1 - s(\cdot)) \leqslant 1 - F_n s(\cdot) \leqslant M^n(1 - s(\cdot)) . \tag{8}$$

С помощью (6), (7), рекуррентного соотношения (1.2.16) и оценки (2.1.4) покажем, что последовательность (5) равномерно ограничена и фундаментальна: ~~в силу (2.1.4)~~

$$\|\Phi_n(\cdot, s(\cdot))\| \leqslant \left\| \frac{M^n(1 - s(\cdot))}{\lambda^n} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{ \omega^*(1), 1, \frac{\|Q\|}{\lambda}, \dots \frac{\|Q^{n_0}\|}{\lambda^{n_0}} \right\} \|1 - s(\cdot)\| ,$$

равномерно по m при $n \to \infty$ имеет место:

$$\Phi_{n+m}(\cdot, \varsigma(\cdot)) = \frac{M}{\lambda}\left(\Phi_{n+m-1}(\cdot,\varsigma(\cdot))\right) + \lambda^{n+m-2} O\left(\|\Phi_{n+m-1}(\cdot,\varsigma(\cdot))\|^2\right) =$$

$$= \frac{M}{\lambda}\left(\Phi_{n+m-1}(\cdot,\varsigma(\cdot))\right) + O\left(\lambda^{n+m-2}\right) = \ldots$$

$$= \frac{M^m}{\lambda^m}\left(\Phi_n(\cdot,\varsigma(\cdot))\right) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{M^j}{\lambda^j}\left(O\left(\lambda^{m+n-1-j}\right)\right) =$$

$$= \frac{M^m}{\lambda^m}\left(\Phi_n(\cdot,\varsigma(\cdot))\right) + O\left(\lambda^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^{m-j}\right) =$$

$$= \frac{M^m}{\lambda^m}\left(\Phi_n(\cdot,\varsigma(\cdot))\right) + O\left(\lambda^{n-1}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n,\ell,m\to\infty} \|\Phi_{n+m}(\cdot,\varsigma(\cdot)) - \Phi_{n+\ell}(\cdot,\varsigma(\cdot))\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n,\ell,m\to\infty}\left\{\left\|\frac{M^m 1}{\lambda^m} - \frac{M^\ell 1}{\lambda^\ell}\right\| \|\Phi_n(\cdot,\varsigma(\cdot))\| + \|O(\lambda^{n-1})\|\right\} = 0.$$

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\cdot, s(\cdot)) = \Phi(\cdot, s(\cdot)).$$

Из непрерывности оператора M и неравенства (7) следует для $s(\cdot) \in S_B \cap K_B$

$$\Phi_n(\cdot, s(\cdot)) \leqslant \frac{M}{\lambda}\left(\Phi_{n-1}(\cdot, s(\cdot))\right),$$

$$\lambda \Phi(\cdot, s(\cdot)) \leqslant M\left(\Phi(\cdot, s(\cdot))\right). \tag{9}$$

В силу u_0 - положительности оператора M по теореме 2.I8 [2], стр.95, неравенство (9) означает, что

$$\Phi(\cdot, s(\cdot)) = const\ \omega(\cdot). \tag{I0}$$

Из сходимости последовательности $\Phi_n(\cdot, s(\cdot))$ по норме следует её слабая сходимость, т.е. сходимость последовательности (2). Очевидно, постоянная (зависящая от $s(\cdot)$) в (I0) равна $\varphi^*(s(\cdot))$. По теореме Витали (см. 3.I8.I [3], стр.I27) предел последовательности аналитических функций векторного аргумента является аналитической функцией. Равенство (3) следует, в сущности, из рекуррентного соотношения (I.2.I6):

$$\frac{\omega^*\left[1 - F_{n+1}(\cdot, s(\cdot))\right]}{\lambda^{n+1}} = \frac{\omega^*\left[1 - F_n(\cdot, F(\cdot, s(\cdot)))\right]}{\lambda\ \lambda^n}.$$

Осталось доказать неравенство (4) В силу (8) и монотонности оператора F_n имеем при $0 \leqslant s(\cdot) \leqslant 1$

$$\omega^*[1 - F_n(\cdot,0)] \geqslant \omega^*[1 - F_n(\cdot, s(\cdot))] \geqslant$$

$$\geqslant \omega^*\left(M^n(1 - s(\cdot)) - \omega^* \mathcal{N}_n(1-s(\cdot), 1-s(\cdot))\right) =$$

$$= \lambda^n \omega^*(1 - s(\cdot)) - \lambda^n O(\|1 - s(\cdot)\|^2).$$

(см. 2.2.1. - асимптотика второго факториального момента при $\lambda < 1$). Выберем $s(\cdot)$ настолько близким к 1 ,чтобы

$$\psi^*(0) \geqslant \omega^*(1 - s(\cdot)) - O(\|1 - s(\cdot)\|^2) > 0.$$

<u>Теорема 2.</u> Если $\lambda < 1$ и второй факториальный момент $b(y;\mathcal{X},\mathcal{X}) \leq c < \infty, \forall y \in \mathcal{X}$, то конечномерные распределения условной случайной меры μ_{xn} при условии, что $\mu_{xn}(\mathcal{X}) > 0$ сходятся к конечномерным распределениям фиксированной случайной меры μ^*, чей производящий функционал $\psi_\lambda^*(s(\cdot))$ есть единственное решение уравнения

$$1 - \psi^*(F(\cdot, s(\cdot))) = \lambda[1 - \psi^*(s(\cdot))], \tag{11}$$

$$\psi^*(0) = 0,$$

в классе аналитических в S_B векторных функций векторного аргумента с ограниченной вариацией в 1. Мера μ^* имеет конечное математическое ожидание

$$E\mu^*(U) = \frac{\omega^*(\chi_U(\cdot))}{\varphi^*(0)}, \quad U \in \Sigma, \tag{12}$$

$$\delta\psi^*(1; h(\cdot)) = \omega^*(h(\cdot)) / \varphi^*(0). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть в начальный момент времени в точках x_j было по r_j частиц, $j = 1, 2, \dots m$. Тогда производящий функционал условной случайной меры μ_{xn} при условии, что $\mu_{xn}(X) > 0$, равен

$$\psi_n^*(s(\cdot)) = \frac{\prod_{j=1}^{m} [F_n(x_j, s(\cdot))]^{r_j} - \prod_{j=1}^{m} [F_n(x_j, 0)]^{r_j}}{1 - \prod_{j=1}^{m} [F_n(x_j, 0)]^{r_j}}.$$

По теореме I

$$F_n(x_j, s(\cdot)) = 1 - \lambda^n [\omega(x_j)\varphi^*(s(\cdot)) + \varepsilon_n(x_j)],$$

где последовательность функций $\varepsilon_n(\cdot) \to 0$ при $n \to \infty$.
Поэтому

$$\prod_{j=1}^{m}\left(F_n(x_j, s(\cdot))\right)^{\tau_j} = \prod_{j=1}^{m}\left\{1-\lambda^n\left[\omega(x_j)\varphi^*(s(\cdot)) + \varepsilon_n(x_j(\cdot))\right]\right\}^{\tau_j} =$$

$$= 1-\lambda^n\sum_{j=1}^{m}\tau_j\left[\omega(x_j)\varphi^*(s(\cdot)) + \varepsilon_n(x_j)\right] + c_1 O(\lambda^n),$$

где c_1 – постоянная, зависящая от $\omega(\cdot), x_1, x_2, \dots x_m$. Тогда

$$\Psi_n^*(s(\cdot)) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m}\tau_j\left[\omega(x_j)\varphi^*(s(\cdot)) + \varepsilon_n(x_j)\right] + c_1 O(\lambda^n)/\lambda^n}{\sum_{j=1}^{m}\tau_j\left[\omega(x_j)\varphi^*(0) + \varepsilon_n(x_j)\right] + c_1 O(\lambda^n)/\lambda^n}.$$

Следовательно, для любого $s(\cdot)\in S_B$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n^*(s(\cdot)) = \Psi^*(s(\cdot)) = 1-\varphi^*(s(\cdot))/\varphi^*(0).$$

Очевидно, $\Psi^*(s(\cdot))$ удовлетворяет уравнению (II), так как $\varphi^*(s(\cdot))$ удовлетворяет соотношению (3). В силу теоремы Витали (теорема 3.I8.I [3], стр.I27) функция $\Psi^*(s(\cdot))$ аналитична в S_B и вариация

$$\delta\Psi^*(1; h(\cdot)) = \lim_{n\to\infty}\delta\Psi_n^*(1; h(\cdot)) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{m}\tau_j M^n h(\cdot)(x_j)}{1-\prod_{j=1}^{m}\left[F_n(x_j, 0)\right]^{\tau_j}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \tau_j\left[\lambda^n \omega(x_j)\omega^*(h(\cdot)) + o(\lambda^n)\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m} \tau_j \lambda^n\left[\omega(x_j)\varphi^*(0) + \varepsilon_n(x_j)\right] + c_1 o(\lambda^n)} = \frac{\omega^*(h(\cdot))}{\varphi^*(0)} .$$

$$E\mu^*(\mathcal{U}) = \delta\psi^*(1; \chi_{\mathcal{U}}(\cdot)) = \omega^*(\chi_{\mathcal{U}}(\cdot)) / \varphi^*(0).$$

Теперь докажем, что $\psi^*(s(\cdot))$ есть единственное решение уравнения (II). Пусть $f^*(s(\cdot))$ - произвольное решение уравнения (II) в классе аналитических векторных функций с ограниченной вариацией в 1. Тогда итерация уравнения (II) дает:

$$1 - f^*(F_n(\cdot, s(\cdot))) = \lambda^n(1 - f^*(s(\cdot))).$$

Следовательно, для любого n

$$1 - f^*(s(\cdot)) = \delta f^*\left(z_n(\cdot); \frac{1 - F_n(\cdot, s(\cdot))}{\lambda^n}\right),$$

где $|F_n(\cdot, s(\cdot))| \leqslant |z_n(\cdot)| \leqslant 1$.

В силу следствия 2.3.2 при $\lambda < 1$ и $n \to \infty$

$$F_n(\cdot, s(\cdot)) \to 1, \quad z_n(\cdot) \to 1.$$

Так как $\delta f^*(z(\cdot); h(\cdot))$ есть непрерывная функция $z(\cdot)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \delta f^*\left(z_n(\cdot); \frac{1 - F_n(\cdot, s(\cdot))}{\lambda^n}\right) = \delta f^*(1; \varphi^*(s(\cdot))\omega(\cdot)).$$

Поэтому

$$1 - f^*(s(\cdot)) = \varphi^*(s(\cdot))\delta f^*(1; \omega(\cdot)).$$

Условие $f^*(0) = 0$ показывает, что

$$\varphi^*(0)\delta f^*(1; \omega(\cdot)) = 1$$

Следовательно, $1 - f^*(s(\cdot)) = \varphi^*(s(\cdot))/\varphi^*(0)$, т.е.

$$f^*(s(\cdot)) = \psi^*(s(\cdot)).$$

По ходу доказательства видно, что сходимость конечномерных распределений условной случайной меры μ_{xn} при условии, $\mu_{xn}(\mathcal{X}) > 0$, не зависит от начального распределения меры μ_{x0}.

§ 3. Критический процесс.

Лемма I. Если $\lambda = 1$ и $b(y; \mathcal{X}, \mathcal{X}) \le const < \infty$ для всех $y \in \mathcal{X}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_n(\cdot, 0)}{\omega^*[1 - F_n(\cdot, 0)]} = \omega(\cdot). \tag{I}$$

<u>Доказательство.</u> Заметим, что при $s(\cdot) \in K_c$

$$\mathcal{K} s(\cdot) = 0 \iff s(\cdot) = 0$$

Кроме того, в силу предположения (I.2.7), если $s(\cdot) \in K_c$, то

$$H(\cdot, s(\cdot)) = 1 \iff s(\cdot) = 1 .$$

Поэтому, из рекуррентного соотношения

$$1 - F_n(\cdot, 0) = \mathcal{K}\left[1 - H(\cdot, F_{n-1}(\cdot, 0))\right]$$

следует, что $1 - F_n(\cdot, 0) \neq 0$ для любого $n < \infty$. В силу строгой положительности функционала ω^*, знаменатель в (I) отличен от нуля для любого $n < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ образ замкнутой единичной сферы $\bar{S}_B$ при компактном отображении $\mathcal{K}$. Пусть

$$\min_{\substack{s(\cdot) \in \mathcal{D} \\ \|s(\cdot)\| = 1}} \omega^*(s(\cdot)) = \varepsilon .$$

Так как минимум на компакте достигается, то $\varepsilon > 0$.

Поэтому

$$\frac{1}{\|\omega^*\|} \leqslant \frac{\|1 - F_n(\cdot, 0)\|}{\omega^*(1 - F_n(\cdot, 0))} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} .$$

Следовательно, последовательность

$$f_n(\cdot) = \frac{1 - F_n(\cdot,0)}{\omega^*(1 - F_n(\cdot,0))}$$

имеет хотя бы одну предельную точку. Докажем, что предельная точка единственна, т.е. предел любой сходящейся подпоследовательности не зависит от выбора подпоследовательности и равен $\omega(\cdot)$. Пусть $\lim\limits_{n_1\to\infty} f_{n_1}(\cdot) = f_1(\cdot)$. В силу ограниченности оператора $\mathcal{N}$

$$1 - F_{n_1}(\cdot,0) \geqslant 1 - F_{n_1+1}(\cdot,0) \geqslant M(1 - F_{n_1}(\cdot,0)) - \mathcal{N}(1 - F_{n_1}(\cdot,0), 1 - F_{n_1}(\cdot,0))$$

т.е.

$$f_{n_1}(\cdot) \geqslant M f_{n_1}(\cdot) - \omega^*(1 - F_{n_1}(\cdot,0))\,\mathcal{N}(f_{n_1}(\cdot), f_{n_1}(\cdot)). \qquad (2)$$

Так как критический процесс вырождается с вероятностью 1 и функционал ω^* непрерывен,

$$\lim_{n\to\infty} \omega^*(1 - F_n(\cdot,0)) = 0. \qquad (3)$$

Перейдем в (2) к пределу при $n_1 \to \infty$. Из (2) и (3) следует, что

$$f_1(\cdot) \geqslant M f_1(\cdot). \qquad (4)$$

Из неравенства (4) по теореме 2.18 [2], стр. 95, следует, что $f_1(\cdot) = \omega(\cdot)$.

Лемма 2. Если $\lambda = 1$, $\omega^*(\mathcal{N}(\omega,\omega)) > 0$, третий факториальный момент меры ξ_y равномерно ограничен по $y \in X$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\,\omega^*(1 - F_n(\cdot,0)) = 1/\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega).$$

Доказательство. В силу конечности третьего факториального момента меры ξ_y

$$1 - F_n(\cdot,0) = M(1 - F_{n-1}(\cdot,0)) - \mathcal{N}(1 - F_{n-1}(\cdot,0)) + O(\|1 - F_{n-1}\|^3). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\omega^*(1 - F_n 0) = \omega^*(1 - F_{n-1} 0) - \omega^*\mathcal{N}(1 - F_{n-1}) + O(\|1 - F_{n-1}\|^3), \quad (6)$$

$$\frac{\omega^*(1 - F_n)}{\omega^*(1 - F_{n-1})} = 1 - \frac{\omega^*\mathcal{N}(1 - F_{n-1})}{\omega^*(1 - F_{n-1})} + \frac{O(\|1 - F_{n-1}\|^3)}{\omega^*(1 - F_{n-1})}. \quad (7)$$

Обозначим временно $1 - F_{n-1}(\cdot,0) = \Delta_n$. Из (6) следует, что

$$\frac{1}{\omega^*\Delta_{n-1}}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_n}{\omega^*\Delta_{n-1}}\right] = \frac{\omega^*\mathcal{N}\Delta_{n-1}}{[\omega^*\Delta_{n-1}]^2} - \frac{O(\|\Delta_{n-1}\|^3)}{[\omega^*\Delta_{n-1}]^2}. \quad (8)$$

В силу (3) и ограниченности квадратичного оператора $\mathcal{N}$ из (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega^*(\Delta_n)}{\omega^*(\Delta_{n-1})} = 1. \tag{9}$$

В силу леммы I и ограниченности квадратичного оператора $\mathcal{N}$ из (8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\omega^*\Delta_n}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_n}{\omega^*\Delta_{n-1}}\right] = \omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega). \tag{10}$$

Теперь рассмотрим тождество

$$\frac{1}{\omega^*\Delta_{j+1}} = \frac{1}{\omega^*\Delta_j} + \frac{1}{\omega^*\Delta_j}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_{j+1}}{\omega^*\Delta_j}\right]\frac{\omega^*\Delta_j}{\omega^*\Delta_{j+1}}. \tag{11}$$

Суммируя обе части по j от 1 до $n-1$, получим

$$\frac{1}{\omega^*\Delta_n} = \frac{1}{\omega^*\Delta_1} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\omega^*\Delta_j}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_{j+1}}{\omega^*\Delta_j}\right]\frac{\omega^*\Delta_j}{\omega^*\Delta_{j+1}}. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\omega^*\Delta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\omega^*(\Delta_1)} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\omega^*\Delta_j}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_{j+1}}{\omega^*\Delta_j}\right]\frac{\omega^*\Delta_j}{\omega^*\Delta_{j+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega^*\Delta_n}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_{n+1}}{\omega^*\Delta_n}\right]\lim_{n\to\infty}\frac{\omega^*\Delta_n}{\omega^*\Delta_{n+1}} = \omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega).$$

Теорема I. Если $\lambda=1$, $\omega^* \mathcal{N}(\omega,\omega)>0$ и третий факториальный момент η_y ограничен равномерно по $y\in\mathcal{X}$, то

$$\lim_{n\to\infty} n[1-F_n(\cdot,0)] = \omega(\cdot)/\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega).$$

Доказательство следует из лемм I и 2.

Теорема 2. Если $\lambda=1$, $\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)>0$ и третий факториальный момент меры η_y ограничен равномерно по $y\in\mathcal{X}$, то для любого множества $\mathcal{U}\in\Sigma$ такого, что $mes(\mathcal{U})>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} E\{\mu_{xn}(\mathcal{U})/\mu_{xn}(\mathcal{X})>0\} = \omega^*(\chi_{\mathcal{U}}(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega). \quad (13)$$

равномерно по $x\in\overline{\mathcal{X}}$.

Доказательство следует из теорем I и 2.I.2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} E\{\mu_{xn}(\mathcal{U})/\mu_{xn}(\mathcal{X})>0\} = \lim_{n\to\infty}\frac{M^n(\chi_{\mathcal{U}}(\cdot))(x)}{n[1-F_n(x,0)]} =$$

$$= \frac{\omega(x)\,\omega^*(\chi_{\mathcal{U}}(\cdot))}{\omega(x)/\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)} = \omega^*(\chi_{\mathcal{U}}(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega).$$

Пределы в теоремах I и 2.I.2 существуют по норме пространства $C(\mathcal{X})$. В силу этого сходимость в (13) равномерна по $x\in\overline{\mathcal{X}}$.

Замечание. Так как переходная вероятность диффузионного процесса X_t° абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то для любого множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ нулевой лебеговой меры $E\mu_{xn}(\mathcal{U}) = 0$, а следовательно, и

$$E\{\mu_{xn}(\mathcal{U}) / \mu_{xn}(\mathcal{X}) > 0\} = 0.$$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{U}_j$, $\mathcal{U}_j \in \Sigma$, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i = \phi$.

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ вектор с комплексными координатами, $Re(\zeta_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots m$, $p(\cdot)$ - произвольная неотрицательная функция пространства $B(\mathcal{X})$. Обозначим

$$p_j(\cdot) = p(\cdot)\chi_{\mathcal{U}_j}(\cdot),$$

$$s_n(x) = \exp\left\{-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \zeta_j\, p_j(x)\right\}.$$

Тогда, если $\lambda = 1$ и третий факториальный момент меры ξ_y ограничен равномерно по $y \in \mathcal{X}$, то равномерно на каждом компактном подмножестве области $Re(\zeta_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots m$ существует предел по норме пространства $B(\mathcal{X})$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 - F_n(\cdot, s_n(\cdot))\right] = \frac{\omega(\cdot)\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,\omega^*(p_j(\cdot))}{1 + \omega^* N(\omega,\omega)\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,\omega^*(p_j(\cdot))}.$$

<u>Доказательство.</u> Если $p(\cdot)\equiv 0$, то утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим $p(\cdot)\not\equiv 0$. Обозначим произвольное компактное подмножество области $\mathrm{Re}\,\zeta_j > 0$ через D (рис. I)

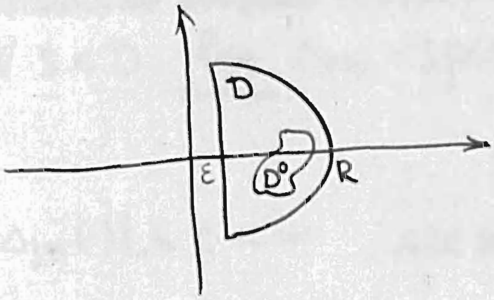

Рис. I

Пусть $D=\{\zeta:\ 0<\varepsilon\le \mathrm{Re}(\zeta_j),\ j=1,2,\dots m;\ |\zeta_j|\le R\}$,

$$D^{\circ}=\{\zeta:\ \zeta\in D,\ \omega^{+}\mathcal{N}(\omega,\omega)\,\omega^{+}\Big(\sum_{j=1}^{m}\zeta_j p_j(\cdot)\Big)<1\}.$$

Для удобства $\sum_{j=1}^{m}\zeta_j p_j(\cdot)$ будем обозначать $\zeta p(\cdot)$.

Пусть

$$\Delta_{0n}=n\,[\,1-g_n(\cdot)\,],$$

$$\Delta_{jn}=n\,[\,1-F_j(\cdot,g_n(\cdot))\,].$$

Очевидно, Δ_{jn} - векторнозначные голоморфные функции m комплексных переменных $\zeta_1,\zeta_2,\dots\zeta_m$. Покажем, что семейство голоморфных функций Δ_{jn} равномерно ограничено при $\zeta\in D$, а при $\zeta\in D^{\circ}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_{jn}$ для всех $j=1,2,\dots n$. Тогда из классической теоремы Витали (теорема 3.14.1 [3], стр.118) будет следовать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_{nn}$ существует равномерно по $\zeta\in D$.

Доказательство теоремы состоит из следующих пунктов:

п.1 $\forall\,\zeta\in D\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\Delta_{0n}=\zeta p(\cdot)\,,\ \Delta_{0n}\leqslant\zeta p(\cdot)\,,\ n>0.$

п.2 $\|\Delta_{jn}(\cdot)\|\leqslant c<\infty$ для всех $n>0\,,\ j=1,2,\dots n.$

п.3 $\omega^*(\Delta_{jn}(\cdot))\geqslant\gamma>0$ для всех $n>n_1\,,\ \zeta\in D^\circ,\ j=1,\dots n.$

п.4 $\dfrac{\Delta_{jn}}{\omega^*(\Delta_{jn})}=\omega(\cdot)+O(\alpha^j)+O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, где $\alpha\in(0,1)$

для всех $n>n_1\,,\ j=1,2,\dots n.$

п.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\omega^*(\Delta_{nn})}=\dfrac{1}{\omega^*(\zeta p(\cdot))}+\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega).$

Очевидно п.1 следует из определения $s_n(\cdot)$. Пункт 2 следует из п.1 и оценки 2.1.4:

$$\|\Delta_{jn}\|=\|n[1-F_j(\cdot,s_n(\cdot))]\|\leqslant\|nM^j(1-s_n(\cdot))\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\zeta p(\cdot)\|\,\|M^j\|\leqslant const<\infty,$$

так как $p(\cdot)$ фиксированная ограниченная функция и $|\zeta| < R$.

Теперь докажем п.3. В силу ограниченности и квадратичности оператора $\mathcal{N}$

$$\Delta_{jn} = n\left[1 - F_j(\cdot, s_n(\cdot))\right] \geqslant$$

$$\geqslant n M\left[1 - F_{j-1}(\cdot, s_n(\cdot))\right] - n\mathcal{N}\left[1 - F_{j-1}(\cdot, s_n(\cdot))\right] \geqslant \cdots$$

$$\geqslant n M\left[1 - F_{j-1}(\cdot, s_n(\cdot))\right] - n\mathcal{N} M^{j-1}(1 - s_n(\cdot)).$$

Следовательно,

$$\Delta_{j,n} \geqslant M \Delta_{j-1,n} - \frac{1}{n} \mathcal{N} M^{j-1} \Delta_{0n} \geqslant \cdots$$

$$\geqslant M^j \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} M^\ell \mathcal{N} M^{j-1-\ell} \Delta_{0n}.$$

Для любого $j = 1, 2, \ldots n$

$$\Delta_{jn} \geqslant M^j \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} M^\ell \mathcal{N} M^{n-1-\ell} \Delta_{0n},$$

$$\omega^* \Delta_{jn} \geqslant \omega^* \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^* \mathcal{N} M^\ell \Delta_{0n}.$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \omega^* \Delta_{jn} \geq \lim_{n\to\infty} \omega^* \Delta_{0n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^* \mathcal{N} M^{\ell} \Delta_{0n} =$$

$$= \omega^*(\zeta p(\cdot)) - \lim_{n\to\infty} \omega^* \mathcal{N} M^{n} \Delta_{0n} =$$

$$= \omega^*(\zeta p(\cdot)) - [\omega^*(\zeta p(\cdot))]^2 \omega^* \mathcal{N}(\omega,\omega) = \gamma > 0$$

так как $\zeta \in D^0$.

Далее, в силу конечности третьего факториального момента меры ζ_y

$$1 - F_j s_n(\cdot) = M(1 - F_{j-1} s_n(\cdot)) - \mathcal{N}(1 - F_{j-1} s_n(\cdot)) + O(\| 1 - F_{j-1}(\cdot, s_n(\cdot)) \|^3)$$

Поэтому

$$\Delta_{jn} = M \Delta_{j-1,n} - \frac{1}{n} \mathcal{N} \Delta_{j-1,n} + \frac{1}{n^2} O(\| \Delta_{j-1,n} \|^3). \qquad (14)$$

Применяя равенство (14) к Δ_{jn} j раз, получим

$$\Delta_{jn} = M^j \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} M^{\ell} \left[\mathcal{N} \Delta_{j-1-\ell,n} - \frac{1}{n} O(\| \Delta_{j-1-\ell,n} \|^3) \right] =$$

$$= P \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} P \left[\mathcal{N} \Delta_{j-1-\ell,n} - \frac{1}{n} O(\| \Delta_{j-1-\ell,n} \|^3) \right] +$$

$$+ Q^j \Delta_{0n} - \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} Q^{j-1-\ell} \left[\mathcal{N} \Delta_{\ell,n} - \frac{1}{n} O(\| \Delta_{\ell n} \|^3) \right].$$

Следовательно, при $\zeta \in D^{\circ}$

$$\| \Delta_{jn} - \omega^{*}(\Delta_{jn})\,\omega(\cdot) \| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \lambda_0^{j} \| \Delta_{0n} \| + \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} C_1 \lambda_0^{j-1-\ell} \left[\| \Delta_{\ell n} \|^2 \| \mathcal{N} 1 \| + \frac{1}{n} \| \Delta_{\ell n} \|^3 \right].$$

В силу п.I и п.2 для всех $j = 1, 2, \ldots n$

$$\| \Delta_{jn} - \omega^{*}(\Delta_{jn})\,\omega(\cdot) \| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \lambda_0^{j} R \| p(\cdot) \| + \frac{1}{n} C_1 C^2 \left[\| \mathcal{N} 1 \| + \frac{1}{n} C \right] \sum_{\ell=0}^{j} \lambda_0^{\ell}. \qquad (I5)$$

Из п.3 и (I5) следует, что

$$\frac{\Delta_{jn}}{\omega^{*}\Delta_{jn}} = \omega(\cdot) + O(\lambda_0^{j}) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В конце рассмотрим тождество

$$\frac{1}{\omega^{*}\Delta_{jn}} = \frac{1}{\omega^{*}\Delta_{j-1,n}} + \frac{1}{\omega^{*}\Delta_{j-1,n}} \left[1 - \frac{\omega^{*}\Delta_{jn}}{\omega^{*}\Delta_{j-1,n}} \right] \frac{\omega^{*}\Delta_{j-1,n}}{\omega^{*}\Delta_{jn}}. \qquad (I6)$$

Обозначим

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{\omega^*\Delta_{j-1,n}}\left[1 - \frac{\omega^*\Delta_{jn}}{\omega^*\Delta_{j-1,n}}\right]\frac{\omega^*\Delta_{j-1,n}}{\omega^*\Delta_{jn}} .$$

В силу (I4) и равномерной ограниченности Δ_{jn} (п. 2, п. 3)

$$\frac{\omega^*\Delta_{j-1,n}}{\omega^*\Delta_{jn}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{I7}$$

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{n}\omega^*\left\{\mathcal{N}\left[\omega(\cdot) + O(\lambda_0^j) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{I8}$$

Просуммируем обе части тождества (I6) по j от 1 до $n-1$

$$\frac{1}{\omega^*\Delta_{nn}} = \frac{1}{\omega^*\Delta_{0n}} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{jn}$$

Из (I7) и (I8) окончательно следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega^*\Delta_{nn}} = \frac{1}{\omega^*(\mathfrak{J}p(\cdot))} + \omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega),$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\omega^*[1 - F_n(\cdot, s_n(\cdot))] = \frac{\omega^*(\mathfrak{J}p(\cdot))}{1 + \omega^*(\mathfrak{J}p(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)} .$$

Теорема 4. Пусть $\mathcal{X}=\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{U}_j$, $\mathcal{U}_j\in\Sigma$, $\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_i=\phi$.

Если $\lambda=1$, $\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)>0$, третий факториальный момент меры η_y ограничен равномерно по $y\in\mathcal{X}$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\mu_{xn}(\mathcal{U}_j)}{n\,\omega^*(f_{\mathcal{U}_j}(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)} < t_j;\ j=1,\dots m \Big/ \mu_{xn}(\mathcal{X})>0 \right\} =$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{, если некоторое } t_j<0, \\ 1-e^{-t} & \text{, если все } t_j\geqslant 0, \end{cases}$$

где $t=\min\limits_{j\le m}(t_j)$.

Доказательство. Пусть $p(\cdot)$ произвольная неотрицательная функция пространства $B(\mathcal{X})$, $\zeta=(\zeta_1,\dots\zeta_m)$ вектор с комплексными координатами. Обозначим

$$p_j(\cdot)=\frac{p(\cdot)\,f_{\mathcal{U}_j}(\cdot)}{\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)\ \omega^*(f_{\mathcal{U}_j}(\cdot))},\quad Z_n s(\cdot)(x)=\int_{\mathcal{X}} s(z)\,\mu_{xn}(dz),$$

$$\zeta p(\cdot)=\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,p_j(\cdot),\qquad s_n(x)=\exp\left\{-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,p_j(x)\right\}.$$

Рассмотрим неотрицательную случайную функцию

$$W_n(x,p(\cdot))=\left(\frac{Z_n(x,p_1(\cdot))}{n},\ \dots\ \frac{Z_n(x,p_m(\cdot))}{n}\right).$$

Вычислим ее преобразование Лапласа, предполагая, что в начальный момент времени было по τ_j частиц соответственно в точках $x_j \in \mathcal{X}$, $j = 1, 2, \dots \ell$.

$$E e^{-W_n(\zeta p(\cdot))} = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} \left[F_n(x_j, s_n(\cdot))\right]^{\tau_j} - \prod_{j=1}^{\ell} \left[F_n(x_j, 0)\right]^{\tau_j}}{1 - \prod_{j=1}^{\ell} \left[F_n(x_j, 0)\right]^{\tau_j}} \tag{19}$$

В силу теорем I и 3

$$F_n(x_j, 0) = 1 - \frac{\omega(x_j)}{n\, \omega^* \mathcal{N}(\omega, \omega)} - \frac{\varepsilon_n(x_j)}{n}, \tag{20}$$

$$F_n(x_j, s_n(\cdot)) = 1 - \frac{\omega(x_j)}{n\left[\omega^* \mathcal{N}(\omega, \omega) + 1/\omega^*(\zeta p(\cdot))\right]} - \frac{\gamma_n(x_j)}{n}, \tag{21}$$

где $\varepsilon_n(\cdot)$ и $\gamma_n(\cdot)$ ограниченные непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{\ell} \left[F_n(x_j, 0)\right]^{\tau_j} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{\ell} \tau_j \omega(x_j)}{n\, \omega^* \mathcal{N}(\omega, \omega)} - \frac{\sum_{j=1}^{\ell} \tau_j \varepsilon_n(x_j)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{22}$$

$$\prod_{j=1}^{\ell} \left[F_n(x_j, s_n(\cdot))\right]^{\tau_j} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{\ell} \tau_j \omega(x_j)}{n\left[\omega^* \mathcal{N}(\omega, \omega) + 1/\omega^*(\zeta p(\cdot))\right]} - \tag{23}$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{\ell} \tau_j \gamma_n(x_j)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставим (22) и (23) в (19) и перейдем к пределу при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} E e^{-W_n(\zeta p(\cdot))} = \frac{1}{1+\omega^*(\zeta p(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)} .$$

Остается заметить, что если $p(\cdot)=1$, то

$$W_n(x,1)=\left\{\frac{\mu_{xn}(U_1)}{n\,\omega^*(f_{U_1}(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)},\dots,\frac{\mu_{xn}(U_m)}{n\,\omega^*(f_{U_m}(\cdot))\,\omega^*\mathcal{N}(\omega,\omega)}\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty} E e^{-W_n(\zeta 1)} = \frac{1}{1+\zeta_1+\zeta_2+\dots\zeta_m} .$$

§ 4. Ветвящийся процесс.

Теорема I. Пусть

$$Z_n(x,s(\cdot)) = \int_{\mathcal{X}} s(z)\,\mu_{xn}(dz). \qquad (I)$$

Если $\lambda>1$ и второй факториальный момент $b(y;\mathcal{X},\mathcal{X}) \le const < \infty$ для всех $y\in\mathcal{X}$, то для любого фиксированного $x\in\mathcal{X}$ случайные величины

$$\frac{Z_n(x,s(\cdot))}{\lambda^n\,\omega^*(s(\cdot))} \longrightarrow Z(x)$$

сходятся в среднем квадратическом при $n \to \infty$ к некоторой предельной случайной величине $Z(x)$, независящей от $s(\cdot)$.

<u>Доказательство.</u> Посмотрим сначала как связаны $E(Z_n(x,s(\cdot))Z_n(x,t(\cdot)))$ и оператор $\mathcal{N}_n(s(\cdot),t(\cdot))$.

По определению (I.3.IO)

$$\mathcal{N}_n(s(\cdot),t(\cdot)) = \int_X\int_X s(z_1)t(z_2)\{E\mu_{xn}(dz_1)\mu_{xn}(dz_2) - E\mu_{xn}(dz_1 \cap dz_2)\}$$

$$= E(Z_n(x,s(\cdot))Z_n(x,t(\cdot))) - \int_X\int_X s(z_1)t(z_2)E\mu_{xn}(dz_1 \cap dz_2).$$

Пусть $s(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} s_j \chi_{U_j}(\cdot)$, $t(\cdot) = \sum_{\ell=1}^{m} t_\ell \chi_{U_\ell}(\cdot)$,

где $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_j$, $U_j \cap U_\ell = \phi$ если $j \neq \ell$. Тогда

$$\int_X\int_X s(z_1)t(z_2)E\mu_{xn}(dz_1 \cap dz_2) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} s_j t_\ell E\mu_{xn}(U_j \cap U_\ell) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} s_j t_j E\mu_{xn}(U_j) = M^n(x, s(\cdot)t(\cdot)). \qquad (2)$$

Очевидно, равенство (2) не зависит от разбиения $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_j$. Поэтому, для любых $s(\cdot)$ и $t(\cdot) \in S_B$

$$E Z_n(x, s(\cdot)) Z_n(x, t(\cdot)) = N_n(s(\cdot), t(\cdot))(x) + M^n(x, s(\cdot) t(\cdot)). \qquad (3)$$

Теперь вычислим условное математическое ожидание

$$E \{ Z_n(x, s(\cdot)) Z_{n+m}(x, t(\cdot)) / \mu_{xn}(X) \}.$$

Пусть число частиц n -го поколения равно j. Предположим, что они разместились в точках $x_1, x_2, \dots x_j$. Тогда, в силу независимости эволюции отдельных частиц,

$$\mu_{x, n+m}(U) = \mu_{x_1 m}(U) + \mu_{x_2 m}(U) + \cdots \mu_{x_j m}(U).$$

Следовательно, математическое ожидание $E\{Z_{n+m}(x, t(\cdot)) / \mu_{xn}(X)\}$ при фиксированном μ_{xn}, равно

$$\int_X t(z) \left[E\mu_{x_1 m}(dz) + E\mu_{x_2 m}(dz) + \cdots E\mu_{x_j m}(dz) \right] =$$

$$= M^m(x_1, t(\cdot)) + M^m(x_2, t(\cdot)) + \cdots M^m(x_j, t(\cdot)).$$

Таким образом видно, что

$$E\left\{Z_n(x,s(\cdot))\,Z_{n+m}(x,t(\cdot))\,/\,\mu_{xn}(X)\right\} = Z_n(x,s(\cdot))\,Z_n(x,M^m t(\cdot)) \qquad (4)$$

и

$$E\left\{Z_n(x,s(\cdot))\,Z_{n+m}(x,t(\cdot))\right\} = E\left\{Z_n(x,s(\cdot))\,Z_n(x,M^m t(\cdot))\right\}. \qquad (5)$$

В силу (3), (5), асимптотического равенства (2.2.3) и теоремы 2.I.2

$$E\left\{Z_n(x,s(\cdot))\,Z_n(x,t(\cdot))\right\} =$$

$$= \lambda^{2n}\omega^*(s(\cdot))\,\omega^*(t(\cdot))\left[c(x)+o(1)\right] + \lambda^n\omega(x)\,\omega^*(s(\cdot)t(\cdot)) =$$

$$= \lambda^{2n}\omega^*(s(\cdot))\,\omega^*(t(\cdot))\left[c(x)+o(1)\right]; \qquad (6)$$

$$E\left\{Z_n(x,s(\cdot))\,Z_{n+m}(x,t(\cdot))\right\} =$$

$$= \lambda^{2n}\omega^*(s(\cdot))\,\omega^*(M^m t(\cdot))\left[c(x)+o(1)\right] +$$

$$+ \lambda^n\omega(x)\,\omega^*(s(\cdot)M^m t(\cdot)) + o(\lambda_1^n),$$

(7)

где $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda$. Выделяя в равенстве (7) главные члены асимптотического разложения находим, что при $n \to \infty$

$$E\{Z_n(x, s(\cdot)) Z_{n+m}(x, t(\cdot))\} = \lambda^{2n+m} \omega^*(s)\omega^*(t)[c(x) + o(1)]. \qquad (8)$$

Следовательно, при $n \to \infty$ равномерно по m , для любого фиксированного $x \in \mathcal{X}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\frac{Z_n(x,s(\cdot))}{\lambda^n \omega^*(s(\cdot))} - \frac{Z_{n+m}(x,s(\cdot))}{\lambda^{n+m}\omega^*(s(\cdot))}\right]^2\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{c(x) + o(1) - 2[c(x) + o(1)] + c(x) + o(1)\} = 0 \qquad (9)$$

Аналогично, в силу (6) и (8)

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\frac{Z_n(x,s(\cdot))}{\lambda^n \omega^*(s(\cdot))} - \frac{Z_n(x,t(\cdot))}{\lambda^n\omega^*(t(\cdot))}\right]^2\right\} = 0 \qquad (10)$$

Равенство (10) показывает, что предельная случайная величина $Z(x)$ почти наверное независит от $s(\cdot)$. Представляет интерес частный случай, когда $s(\cdot) = f_u(\cdot)$. В силу теоремы I для любого $U \in \Sigma$ и любого фиксированного $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{xn}(U)}{\lambda^n \omega^*(f_u(\cdot))} \overset{\text{п.н.}}{=} Z(x) \qquad (11)$$

Очевидно, (11) совпадает с результатом Watanabe (см. [1]) для ~~из~~ модели Б.А. Севастьянова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А.Севастьянов, Ветвящиеся процессы, М., изд-во "Наука", 1971.
2. М.А.Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962.
3. Е.Хилл, Р.Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
4. Ikeda N., Nagasawa M., Watanabe S., Branching Markov processes I, II, III, J.Math. Kyoto Univ. v.8, No.2, 233-278, 355-385; v.9, No.1, 85-125.
5. Б.А.Севастьянов, Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающей границей, Теория вероятностей и ее применения, 1958, т.3, № 2, стр.121.
6. Б.А.Севастьянов, Условия вырождения ветвящихся процессов с диффузией, Теория вероятностей и ее применения, 1961, т.6, № 3, стр.276.
7. Watanabe S., On the branching process for brownian particles with an absorbing boundary, J. Math. Kyoto Univ. v.4, No.2 (1964), 385-398.
8. П.И.Майстер, Ветвящиеся процессы с диффузией в ограниченной области с поглощающей границей, Теория вероятностей и её применения, 1974, т. 19, № 3, стр. 589-596.
9. М. Лоэв, Теория вероятностей, ~~из-во И.Л., М. 1962 г.~~ М., ИЛ, 1962.