КОМИТЕТ ЗА НАУКА, ТЕХНИЧЕСКИ ПРОГРЕС И ВИСШЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Ц е н т ъ р з а п р и л о ж н а м а т е м а т и к а

ВЛАДИМИР ВЛ. ТОПЕНЧАРОВ

ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯТА НА n-АРНИТЕ КАТЕГОРИИ

С о ф и я

1975

В Ъ В Е Д Е Н И Е

Цел на това изследване са основните елементи от теорията на един клас частични n -арни алгебрични структури, които са в известен смисъл обобщение на категориите в n -арния случай.

Първи завършен опит в това направление е въвеждането и изследването на n -арните категории в [62] , [63] , [64] , [65] .

Приложението на тези структури в теорията на n -арните отношения в категориите (вж. [69] , [70] , [71]) както и анализа на самите n -категории (вж. [64] , [65]) показаха, че обобщението на категориите в n -арния случай може да се извърши по различни и нееквивалентни начини. Това ни доведе до нови подходи и до още две класи от n -арни структури: n -категороидите [73] и полиадичните категории [66] , [67] , [68] .

В този ръкопис е предложена системно изградена теория на n -арните обобщения на категориите.

ж

ж ж

Алгебрични структури определени чрез един вътрешен навсякъде определен тернерен композиционен закон са известни отдавна. За нуждите на изследвания в теорията на абелевите групи П.Прюффер [51] въвежда тернерен композиционен закон, със свойства които са аналог на бинерните асоциативност и комутативност. А.Шефер [59] изследва самостоятелно тернерни композиционни закони и въвежда понятието груда (куп), за което доказва някои съществени резултати. Особено място в поредицата от случайни опити да се изследват алгебрични структури дефинирани от n -арни композиционни закони заема направеното от В.Дьорнте [12] , систематично n -арно "обобщение" на групите. Тези резултати са развити от Е.Л.Пост [50] , чиято заслуга е не толкова в най-подробното и педантично изследване на n -групите (наричани от него полиадични групи), колкото доказателството на изключително важната теорема за съществуване на покриваща бинерна група за всяка n-група (ко-сет-теорема).

Групите и свързаните с тях проблеми са подробно изследвани за нуждите на алгебричните основи на диференциалната геометрия от В.В.Вагнер (Саратов, СССР) и неговите ученици. Непосредствено свързани с теорията на координатните атласи се оказват композициите на бинерни отношения: за да се построи навсякъде определен композиционен закон в множеството от двучленните отношения над наредената двойка от нееднакви множества ((A,B), A ≠ B), се строи теренен композиционен закон в множеството от двучленните отношения и се стига до понятията обобщена груда и обобщена група (вж. [83] , [84] , [85]). На същите въпроси са посветени изследвания на В.М.Шаин [55] , [56] и други (над 200 статии главно от съветски автори; публикациите на други математици - японски, френски и главно американски - са с друга терминология, но подхода е същия). С развитието обаче на теорията на категориите и нейните общи методи значението на изследванията върху грудите, полугрудите и грудоидите [86] , [87] , чийто дълбок смисъл е да не се използуват частично определени двучленни композиционни закони, намаля. Това пролича при направените изследвания върху някои типове структурирани категории и тяхната еквивалентност с грудите и с други структури (вж. [25] , [41] , [75]).

Като следват подхода на В.Дьорнте и Е.Л.Пост голяма група математици извършва "обобщения" на някои алгебрични структури възникнали относително късно: квазигрупите, полугрупите, лупите. В това направление В.Д.Белоусов, М.Д.Сандик, Р.С.Бауер, М.Хоссу, Е.И.Соколов, Г. Чупона, Ф.Радо и др. изследват подробно n -квазигрупите, техните специални свойства и връзките им с някои други n -арни или бинерни. Подробна, но далеч не пълна библиография е дадена в [1] . Извън нея са останали например статиите на Д.Монк и Ф.Сиосон [48] и на Ж.Монк и Ф.Сиосон [49] посветени на n-групите, които имат с упоменатите по-горе резултати общи източници в [12] , [29] и [50] . На n-лупите са посветели статии М.Д.Сандик [60] , [61] и В.Д.Белоусов [3] , [4] ; от голямо значение за изследванията върху n -квазигрупите са някои примери, свързани с алгебрическата интерпретация на n -мерните мрежи (вж. В.Д.Белоусов [3] и Ф.Радо [54]). В по-сложна обстановка Н.Хион [34] , [35] изследва Ω -пръстените, структури които обобщават известното класическо понятие за пръстен при n-арния случай. Значението на тази серия от изследвания е в натрупването на конкретен материал по n -арни структури. Що се отнася до изследователската техника, то известни резерви се налагат: тя е силно повлияна от класическите методи на алгебрата и е трудно да се посочат специфичните за n -арните структури подходи. Тук трябва да се търси причината за слабото им влияние върху главните направления в развитието на алгебрата и тяхната относителна затвореност в себе си.

Своеобразна историческа подготовка на общоалгебрическия етап в разработката на n -арните структури са изследванията върху свойствата на самите n -арни закони в абстрактен аспект. Първи опит, свързан с проблемите на многоместните функции, е по всичко изглежда статията на К.Менгер [46] . В същото направление са резултатите на Т. Еванс [27] , В.Трпеновски [76] , [77] , Х.А.Трохименко [78] , [79] , Х.А. Търстон [80] , [81] , [82] , Г.Чупона [93] , [94] , [95] , [96] . От особено методологическо и съдържателно значение са изследванията на Л.М. Глускин [39] , [30] , [31] и [32] , където редица проблеми за вложение и представяне на n - оперативи са поставени и решени в стила на универсалните обекти (вж. [42] , [44]) и съдържат неявно мощните теоретико-категорни методи на спрегнатите функтори.

В контекста на теорията на универсалните алгебри n -арните структури се виждат в нова светлина. Те загубват своята самостоятелност и се изследват в най-общ план [7] , [24] , [40] , [41] , [45] . Заедно с големия прогрес в методите, особено в [11] , със системното прилагане на теоретико-категорния подход, намалява значително конкретността. Като се установява верността при тях на някои дълбоки теореми (за конгруенциите, за изоморфизмите, за нормалните и композиционните редове, за главните редове и пълните разложения), изчезват в общността специфичните черти на различните n-арни структури, между които теоремите за представяне, за покритие и други. От гледна точка на индивидуализацията на универсалните алгебри с n-арни композиционни закони интересни са изследванията на Ж. Бенабу [7], [8] върху типа на една структура и свързаните с това категории с умножение, продължаващи резултатите на П.Хигинс върху групите с мултиоператори [37] и алгебрите със схеми от оператори [38].

Изследванията, за които стана дума до тук са посветени на n-арни структури с навсякъде определени композиционни закони: ако A е множеството - носител на структурата A^n е неговата n-та степен, то на всяка n-редица $(a) \in A^n$ е съпоставен един и само един елемент $a \in A$. Това стеснява както постановката на проблема, така и приложимостта на резултатите.

За първи път Ш.Ересман през 1962 г. въвежда двойните и n-кратните категории (вж. [20]) алгебрични структури с частични композиционни закони с арност по-висока от 2. Постановката обаче е ограничена и се свежда до "суперпозиция" на категории (примерно к на брой) върху едно и също множество-носител, така че $n = 2^k$. Значителните приложения на двойните категории, привличат вниманието на широк кръг изследователи върху техните общи и специални проблеми. Сходен опит през 1966-72 години прави В.В.Вагнер с въвеждането на грудоидите [86], [87].

Към въпроса за n -арните композиционни закони в светлината на теорията на универсалните алгебри пристъпват почти едновременно Ф.Сиоссон [57] и Г.Грецер със сътрудници [98], [99], [100]. Получените резултати обаче са малко и възможностите за тяхното разширяване изглеждат ограничени (теорията на частичните универсални алгебри е засега бедна откъм теореми). Значението на тези изследвания е в това, че дават механизма по който е възможно да се извършат обобщения и да се преминава от навсякъде определен към частично определен композиционен закон.

Направеният преглед на публикациите и резултатите по n -арни алгебрични структури е съвършено бегъл. Целта му е само да очертае мястото на n -арните категорни структури в системата от алгебрични теории.

*

* *

Съобщените тук резултати са разпределени в пет глави.

В глава 1 са дадени някои подготвителни въпроси: полюси, $\{n\}$ -графи и техните свойства, n -оперативи, както и някои специални морфизми и редици от морфизми в $\{n\}$ -графите и n -оперативите. Макар че понятията и резултатите са нови, тяхното значение не е самостоятелно.

Глава 2 е посветена на определенията на четири типа n -арни категорни структури, които са свързани с общо изискване: в бинерния случай да се редуцират на класическата категория; сравнение на аксиомите е дадено в таблицата в края на 2.1; изследвани са основните свойства на $\{n\}$-категориите; от особено значение са резултатите за проективността на $\{n\}$-категориите (2.2.6) и класификационната теорема (2.3.1).

Глава 3 съдържа основни теореми за $\{n\}$-категориите. Най-напред, в 3.1 са дадени резултати отнасящи се до подструктурите и факторструктурите на $\{n\}$-категориите, като е спазена възприетата в съвременната алгебра практика [44] ; много от тях са дадени без доказателство: въпреки че са нови и че формалното им доказателство не е просто, ние не считаме, че те са особен успех, тъй като техни аналози съществуват в други класи от алгебрични структури. В 3.2 са развити аналозите на три теореми за изоморфизмите (Е.Ньотер), като на един "образец" е показан начина по който се извършва доказателството. Параграф 3.3 третира трудния проблем за свободните структури при $\{n\}$-категориите; приложена е силна универсална техника от общата теория на категориите, получени са експлицитни конструкции на свободна структура от типа на $\{n\}$-категориите и важните теореми (3.3.5) и (3.3.8). Направен е опит в 3.4 да се построи аналог на ко-сет теоремата на Е.Л. Пост при $\{n\}$-категориите; оказва се, че за $\{n\} = (n)$ и n това не е възможно (вж. (3.4.1) и следствията (3.4.2) и (3.4.3)), но че за полиадичните категории поставената задача допуска решение дадено в (3.4.4); аналогично се оказва положението и с теоремата на Глускин-Хоссу, чийто аналог тук е (3.4.17). Последният параграф от тази глава е посветен на характеризацията на $\{n\}$-категориите; цялостно решение на въпроса е дадено само за полиадичните категории (вж. (3.5.1), (3.5.3), (3.5.5)), при които аналогията с обикновените категории е ярко изразена за по-специфичния случай $\{n\} = (n)$ и n , задачата намира само частично решение, като установена "стандартна" $\{n\}$-категория, а именно $\{n\}$- категорията на n-отношенията $\mathcal{R}_n$ над $\mathcal{M}_0$.

В глава 4 са разгледани свойствата на категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ от $\{n\}$-функторите и на забравящия функтор $p^n_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}^{\{n\}} \longrightarrow \mathcal{M}$; изяснен е въпроса за границите в $\mathcal{U}^{\{n\}}$, за свойствата на $p^n_{\mathcal{U}}$ във взаимоотношенията му с границите и някои специфични особености на категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ с оглед на особеностите на обектите й (локални и резидуални свойства, съществуване на образи и кообрази и т.н.); проблема за структуризиране на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е само загатнат, тъй като общата теория (вж. [16] , [18] , [20]) е в сила при $\mathcal{U}^{\{n\}}$. Резултатите от тази глава са съществени за изграждане на теорията на $\{n\}$-категориите, обаче самостоятелната ценност на теоремите е относително ограничена, тъй като аналогични свойства са известни при категории на други алгебрични структури, в частност при категорията на функторите.

Последната глава 5 е посветена на приложението на изградената теория при $\{n\} = (n)$, n върху алгебрата на n-отношенията. В 5.1 е развита теорията на n-отношенията в произволна категория $H^{\bullet}$; построено е ново определение за отношение, което съдържа всички познати(на Мак-Лейн [43] , на Д.Пуппе [53] , на Х.Б.Бринкман [9] , на М.Ш.Цаленко [89] и Д.Хилтон [97])като частни случаи и чиято гъвкавост го прави удобна конструкция в категориите; установени са необходимите и достатъчни условия за да бъде множеството от n-отношенията n-категория, както и ред други свойства. Като частен случай е показан първия съдържателен пример за n-категория от [62] , когато $H^{\bullet} = \mathcal{M}^{\bullet}$.

В параграф 5.2 са построени и изследвани някои алгебрични системи породени от операторите на композиция, сечение, обединение, обръщане и допълнение в множеството от n -отношенията построени в една категория; някои теореми отнасящи се до техните свойства са доказани. Изложението тук е сбито и подробностите са избегнати, тъй като целия въпрос за отношенията е обект на самостоятелна монография. Накрая е дадена една класификация на отношенията в произволна категория, без обаче въпросът да е задълбочен.

Цитираната в края на ръкописа литература се отнася строго до третирания въпрос. Най-често сме се позовавали на статии с обобщаващи резултати и на монографии, поради което не е търсена формална пълнота на библиографията. Обхванати са обаче всички основни направления на изследванията по n -арни структури.

В целия ръкопис е използувана систематично теорията на категориите и като изследователско средство и като образец. За основа е възприет варианта на Ш.Ересман [14], [15], но в модификацията от [74]; нейната единствена особеност е да направи "по-четивен" варианта на Ш.Ересман и да избегне "особнячествата" на неговата терминология и означенията, там където това е целесъобразно и възможно. За съдържателната страна на теорията ние сме се ползували главно от забележителните монографии по теория на категориите [42] и [91], а също така и на ред други автори (Б.Парежис Б.Митчел, П.Фред, М.Хассе и Л.Михлер, Х.Шуберт, А.Гротендик и др.), отразени в библиографията към [74].

За удобство на читателя са дадени Указател на означенията и Указател на понятията с точни препратки към [14] , [15] , [42] , [91] или [74] и към текста. Номерацията е десетична; така (7.8.9) означава твърдение (определение, предложение, лема, теорема, следствие) от параграф 8 на глава 7. Края на всяко доказателство е означено с $\triangle$, а когато резултата се обобщава без доказателство, този знак е поставен след изказаното твърдение.

1. НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ n-АРНИ АЛГЕБРИЧНИ СТРУКТУРИ

Алгебричната структура категория е основана на по-простите и по-бедни структури ориентиран граф [8], [29] и частичен бинерен оператив [49], наричан също така мултипликативен клас [10] и мултипликативна система [9]. В тази глава са построени и изследвани -арните аналози на ориентираните графи и на мултипликативните класи.

1.1. Полярни алгебри. $\{n\}$-графи

Нека $C \in \mathcal{M}_0$; да означим с $\mathcal{M}_C = C.\mathcal{M}.C$ множеството от изображенията на C в C и да положим $I = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Нека е дадено изображението $\vartheta : A \longrightarrow \mathcal{M}_C$, $A \in \mathcal{P}(I^K)$, $K \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{P}$ = функтор на частите за множествата), което на всяка редица от индекси $p = (p_1, p_2, \ldots, p_K) \in A$ съпоставя един елемент от $\mathcal{M}_C$, т.е. $\vartheta(p) = u_p \in \mathcal{M}_C$; за краткост ще пишем

$$\vartheta(A) = (u_p ; p \in A) = V.$$

С терминологията на универсалните алгебри имаме:

(1.1.1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ако в Ω-алгебра (C, Ω), $\Omega = V$, ще казваме, че $(C, V) = C^V$ е полярна алгебра. Редицата от K елемента от C, съпоставена на $f \in C$ чрез V, такава че $V(f) = (u_p(f); p \in A)$ ще наричаме полярна редица за $f \in C$ в C_V; елемент $e \in C$, който принадлежи на полярна редица в C_V ще наричаме полюс; $C^V_V = \bigcup_{p \in A} u_p(C) \subset C$ ще наричаме множество на полюсите за C^V.

Това определение е твърде общо за да бъде полезно при изграждане на n-арни аналози на категориите. Свойствата на полярните алгебри като алгебрични структури и на тяхната категория над $\mathfrak{M}_o$ са бедни и нямат самостоятелно значение.

Ще въведем няколко по-малко общи елементарни алгебрични структури по подобие на (1.1.1) и свързани с интуитивните основи на n-арните аналози на категориите.

Нека $I \times I$ е множеството на двойките индекси, съпоставено еднозначно на $I \in \mathfrak{M}_o$; да разгледаме изображенията $\vartheta_{I\times I} : I\times I \longrightarrow \mathfrak{M}_c$ и $\vartheta_I : I \longrightarrow \mathfrak{M}_c$, такива че

$$\vartheta_{I\times I}(i, j) = u_i^j \in \mathfrak{M}_c \quad \text{и} \quad \vartheta_I(i) = u_i \in \mathfrak{M}_c;$$

полагаме $\vartheta_{I\times I}(I\times I) = V_{I\times I} = V_{(n)}$ и $\vartheta_I(I) = V_I = V_n$. Тогава:

(1.1.2) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще наричаме n-граф универсалната алгебра (C, Ω), в която $\Omega = V_I$ и са удовлетворени условията

$$u_i = u_j u_i \qquad i, j \leqslant n .$$

Ще наричаме (n)-граф универсалната алгебра (C, Ω), в която $\Omega = V_{I\times I} = V_{(n)}$ и са удовлетворени следните условия

$$u_i^j = u_r^s u_i^j \qquad i, j, r, s \leqslant n .$$

Елементите на всяко множество Ω от n-граф и (n)-граф са ретракции, т.е. изображения, чиито рестрикции върху $C_o^V = C_o \in \mathfrak{M}_o$ съвпадат с идентичното изображение на C_o.

Структурите въведени в (1.1.2) могат да бъдат трактувани и в друга форма, като се има предвид, че една полярна редица или, както е в (n)-графа, n полярни редици съпоставени на елемент $f \in C$, имат смисъл само заедно с f. Да разгледаме тогава матрицата $\| u_i^j \|$, където $u_i^j \in \mathfrak{M}_c$; различаваме следните случаи:

$- u_i^i = \mathrm{I}d_{C}, \quad u_i^j = u_s^r u_i^j, \; i, j, r, s \leqslant n, \; i \neq j$: наредената двойка (C, Ω) е идентична на един (n)-граф, тъй като

$(\| u_j^i \| (f))_s = (u_s^1(f), u_s^2(f), \ldots, u_s^{s-1}(f), f, u_s^{s+1}(f), \ldots, u_s^n(f)), \; s \leqslant n$;

$- u_i^i = \mathrm{I}d_{C}, \quad u_i^j = u_i, \; i \leqslant n$ и $u_i = u_j u_i$,

$i, j \leqslant n$: наредената двойка $(\dot{C}, \Omega)$ е идентична на един n-граф, тъй като

$(\| u_i^j \| (f))_s = (u_1(f), \ldots, u_{s-1}(f), f, u_{s+1}(f), \ldots, u_n(f)), \; s \leqslant n$;

$- u_i^i = \mathrm{I}d_{C}, \; d^{\perp_s} = u^{2к+1}_{2к}, \; \beta^{\perp_s} = u^{2к-1}_{2к+1},$

$u_i^j = u_\emptyset, \; s = 2к - 1, \; к \leqslant \frac{n}{2}, \; i, j \leqslant n$: наредената двойка (C, Ω) е идентична на $[n]$-граф, т.е. на един n-кратен граф в смисъла на [15].

При този подход към полярните алгебри всички обобщения на ориентираните графи се строят по еднакъв начин и са части случаи на $\{n\}$-графа. За практическото изграждане на интересуващите ни алгебрични структури този път е по-малко удобен, но позволява да се търсят връзките между различните случаи. Имаме:

(1.1.3) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Всеки (n)-граф в който $u_i^j = u_i, \; j \leqslant n$, е идентичен на n-граф. $\triangle$

(1.1.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Различните типове $\{n\}$-графи са проективни алгебрични структури (в смисъла на [16]). $\triangle$

Предвид построението на $\{n\}$-графите, имаме:

(1.1.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ако $n = 2$, трите типа $\{n\}$-графи се редуцират на ориентиран граф [C] в смисъла на [9] и [29]. $\triangle$

Както при класическите алгебрични структури (вж. [7] , [24] , [31]), дефинираме $\{n\}$-подграфи на даден $\{n\}$-граф и $\{n\}$-факторграфи. За нуждите на последните ще казваме, че отношението на еквивалентност r върху C е n -съвместимо със структурата $[C]^{\{n\}}$, ако са изпълнени тъждествата

$$u_j^i \tilde{r} = \tilde{r} u_j^i \quad , \; i , j \leq n , \; i \neq j ,$$

където $\tilde{r}$ е каноничното изображение съпоставено на r .

Нека $\mathcal{G}_0^{V}$ е едно от следните множества: $\mathcal{G}_0^{(n)}$ - множество на (n)-графите построени над $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{G}^n_0$ - множество на n -графите над $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{G}_{n\,0}^{[n]}$ - множество на n -кратните графи над $\mathcal{M}_0$, при к = 2^n. Нека са дадени два $\{n\}$ -графа $\{C\}$ и $\{\overline{C}\}$.

(1.1.6) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че изображението $H : C \longrightarrow \overline{C}$ дефинира хомоморфизъм от $\{C\}$ към $\{\overline{C}\}$, ако

$$H u_i^j = \bar{u}_j^i H , \qquad i , j \leq n .$$

Ще записваме $H : \{C\} \longrightarrow \{\overline{C}\}$ или $H = (\{C\} , H, \{\overline{C}\})$.

За трите случая на $\{n\}$-графи дефинирани в (1.1.2), понятието въведено в (1.1.6) се прецизира по очевиден начин.

Нека означим с $\mathcal{G}^{V}$ множеството на хомоморфизмите между $\{n\}$ -графите построени над $\mathcal{M}_0$; множествата на хомоморфизмите между (n)-графи, n -графи и n -кратни графи, ще означаваме съответно с $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{G}^n$ и $\mathcal{G}^{[n]}$, а хомоморфизмите между полярни алгебри в смисъла на (1.1.1) - с $\mathcal{P}^n$. Тогава:

(1.1.7) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множеството $\mathcal{G}^{V}(= \mathcal{P}^n, \mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{G}^n$, $\mathcal{G}^{[n]}$) е относно обичайния композиционен закон на хомоморфизми категория, множеството от единиците на която се идентифицира с $\mathcal{G}_0^{V}$ (= $\mathcal{P}^n_0$, $\mathcal{G}_0^{(n)}$, $\mathcal{G}^n_0$ $\mathcal{G}_0^{[n]}$). Δ

За построените в (1.1.7) категории е в сила следното:

(1.1.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категориите $\mathcal{P}^n$, $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{G}^{[n]}$ и $\mathcal{G}^n$ удовлетворяват следната диаграма

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{G}^{n} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathcal{P}^{n} & \mathcal{G}^{(n)} \arrow[l] & \\
 & & \mathcal{G}^{[n]} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Всяка категория-източник на една от стрелките в диаграмата е пълна подкатегория на категорията-цел за същата стрелка. $\triangle$

Като имаме предвид (1.1.5) получаваме:

(1.1.9) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{G}^V (= \mathcal{P}^n, \mathcal{G}^{(n)}, \mathcal{G}^n, \mathcal{G}^{[n]})$ е:

а) регулярна;

б) затворена относно хомоморфните образи;

в) крайни граници;

г) локална и резидуална;

д) с крайни суми. Δ

Нека е даден функтора на забрава на структура $P^V : \mathcal{G}^V \longrightarrow \mathcal{M}$; имаме:

(1.1.10) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функторът P^V е:

а) съвместим с границите и кограниците;

б) точен и съвсем точен;

в)с лявспрегнат функтор;

г) на хомоморфизми и наситен;

д) изброимо пораждащ за категорията $\mathcal{M}$. Δ

От (1.1.10) получаваме по стандартен начин:

(1.1.11) СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{G}^V$ е със свободни структури . Δ

1.2. n-арен композиционен закон; n-оперативи

Ще казваме, че върху $C \in \mathfrak{M}_0$ е зададен n-арен композиционен закон, ако е построено върху C изображението

$$к = к_n : C^n \longrightarrow C .$$

(1.2.1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Наредената двойка $(C, к_n)$ ще наричаме n-оператив, ако $C \in \mathfrak{M}_0$ и $к_n$ е n-арен композиционен закон върху C, за който множеството от композируемите n-редици съвпада с C^n. Ако $к_n$ е частично определено изображение върху C^n, ще казваме, че $к_n$ е частичен n-арен композиционен закон и наредената двойка $(C, к_n')$ е частичен n-оператив, или кратко n-клас.

Множеството от n-редиците за които $к_n'$ е определен ще наричаме множество на композируемите n-редици $\overset{n}{\ast} C \subset C^n = \overset{n}{X} C$.

Нека са дадени два n-оператива (респ. две n-класи). Като използуваме стандартните методи [44] строим следното:

(1.2.2) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че изображението $H : C \longrightarrow \overline{C}$ дефинира хомоморфизъм между n-оперативите $(C, к)$ и $(\overline{C}, \overline{к})$, ако е удовлетворено условието

$$H(к(x_1, \ldots, x_n)) = \overline{к}\,(H(x_1), \ldots, H(x_n)).$$

Ако $(C, к')$ и $(\overline{C}, \overline{к}')$ са n-класи, H дефинира морфизъм на n-класи, ако са изпълнени условията

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \overset{n}{\ast}\, C \Longrightarrow (H(x_1), \ldots, H(x_n)) \in \overset{n}{\ast}\, \overline{C} \text{ и}$$

$$H(к(x_1, \ldots, x_n)) = \overline{к}\,(H(x_1), \ldots, H(x_n)) .$$

Множеството от всички n-оперативи построено над елементите на $\mathfrak{M}_0$ ще бележим с $\mathcal{N}_0^{\overline{n}}$, а множеството на n-класите над $\mathfrak{M}_0$ – с $\mathcal{N}_0^n$; очевидно $\mathcal{N}_0^{\overline{n}} \subset \mathcal{N}_0^n$. Множеството от морфизмите между n-класи, ще бележим с $\mathcal{N}_1^n$, а множеството на хомоморфизмите между n- оперативи, подмножество на $\mathcal{N}^n$ ще означаваме с $\mathcal{N}^{\overline{n}}$.

(1.2.3) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Относно обикновения композиционен закон за хомоморфизмите, множеството $\mathcal{N}^n$ е категория, класът от единиците на която се идентифицира на множеството $\mathcal{N}^n_0$ от n -класите над $\mathfrak{M}_0$. Подмножеството $\mathcal{N}^{\overline{n}}$ на хомоморфизмите между n -оперативите над $\mathfrak{M}_0$ е пълна подкатегория на $\mathcal{N}^n$.

Аналогично се дефинират различните типове морфизми между n -класи (вж. за подробности например [29] и [63]).

В съответствие с класическите построения, за n -класовете се дефинират <u>под-n-клас</u>, <u>фактор-n-клас</u>, <u>отношение на еквивалентност съвместимо с композиционния закон</u> κ'_n и др.

За дефиниране на по-богати алгебрични структури са от значение n-арните разширения на класическата асоциативност. Имаме:

(1.2.4) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че частичния n-арен композиционен закон κ'_n е <u>(i,j)-асоциативен</u>, ако за всички композируеми $(2n-1)$- редици от елементи на C в n -класът (C,κ')

$$[(e_1,\ldots,\ (e_k;i\leq k\leq i+n-1)],\ e_{i+n},\ldots,\ e_{2n-1})] = [(e_1,\ \ldots,\ [(e_p\ ;j\leq p\leq j+n-1)],\ e_{j+n},\ldots,e_{2n-1})]\ ,$$

където i и j са фиксирани индекси $1\leq i\ ,j\leq n,\quad i\neq j$.

Ако условието от (1.2.4) е изпълнено за всички двойки (i,j) имаме класическата n-арна асоциативност по Дьорнте [12] , а при $n=2$ се получава познатата бинерна асоциа - тивност [6] . Съществуват различни усложнени форми на асоциативност, възникнали от разнообразни изследвания [7] , [59] , [92] , но ние няма да се занимаваме с тях.

Основен въпрос за n -оперативите и n -класите е представянето на n -арния композиционен закон чрез суперпозиция на няколко закона с арност по-ниска от n .За целта дефинираме:

(1.2.5) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че n -оперативът (респективно n -класът) $(C, к_n)$ е получен чрез суперпозиция на оперативите (респ. класовете) $(C, \bar{к}_p)$ и $(C, \bar{\bar{к}}_q)$ с арност съответно p и q , ако е изпълнено следното равенство $к_n(x_1,\dots,x_n) = \bar{к}_p(x_1,\dots,x_i,\bar{\bar{к}}_q(x_{i+1},\dots,x_{i+q}), x_{i+q+1},\dots,x_{p+q-1})$, като за арностите на трите композиционни закона е в сила зависимостта: $n = p+q-1$. - n -оперативът (респ. n -класът) $(C, к_n)$ ще наричаме приводим ако съществуват два (или повече) n -оперативи (респ. n -класи), така че $(C, к_n)$ да бъде получен чрез тяхната суперпозиция. Ако един n -оператив (респ. n -клас) не може да бъде получен чрез суперпозиция на оперативи (респ. класи) с по-малка арност, ще казваме, че той е неприводим.

Система от необходими и достатъчни условия или поне на критерий за приводимост не са познати в литературата, при положение, че n -оперативът (респ. n -класът) е от най-общ вид. При допълнителни условия (асоциативност и др.) въпросът е третиран с успех в [1] , [29] и др. В частност имаме още:

(1.2.6) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че един n -оператив е просто приводим ако може да бъде построена бинерна операция $\divideontimes$ и семейство от бижекции ψ_i на C, така че за кои да е $x_i \in C$:

$$к_n(x_1,\dots,x_n) = (\dots((\psi_1 x_1 \divideontimes \psi_2 x_2) \divideontimes \psi_3 x_3) \divideontimes \dots) \divideontimes \psi_n x_n.$$

Забележка към (1.2.5) е в сила и за (1.2.6).

Нека добавим във връзка с (1.2.6) и направените забележки, че Търстън [80] е формулирал следното твърдение:

за всеки n-оператив съществува универсална алгебра, чиито операции са с арност най-много 2 и в която дадения n оператив може да бъде вложен (т.е. съществува представяне на n-арния композиционен закон чрез бинарни, унарни и нулярни закони). Доказателството обаче не е публикувано. Аналогичен въпрос за вложение е разгледан от П.Кон [11], но при имплицитно предположение за асоциативност. При всички тези случаи се прави предположението, че композиционните закони са навсякъде определени.

За категорията $\mathcal{N}^n$ на n-класите са в сила няколко съществени резултата:

(1.2.7) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Всеки n-клас е проективна алгебрична структура (в смисъла на [16]). $\triangle$

(1.2.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{N}^n$ на n-класите е:

а) регулярна;

б) затворена относно хомоморфните образи;

в) с крайни граници;

г) с крайни суми;

д) с терминален (финален) обект. $\triangle$

(1.2.9) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{N}^{\overline{n}}$ е пълна подкатегория на категорията $\mathcal{N}^n$ на n-класите. $\mathcal{N}^n$ е с $\mathcal{N}^{\overline{n}}$-проектори (в смисъла на [10]). $\triangle$

Нека е даден функторът $p^n_{\mathcal{N}}$ на забрава на алгебричната структура от категорията $\mathcal{N}^n$ към категорията $\mathcal{M}$ на изображенията $p^n_{\mathcal{N}} : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathcal{M}$; имаме:

(1.2.10) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функторът $p^n_{\mathcal{N}}$ е:

а) съвместим с проективните и индуктивни граници при произволна категория;

б) точен и съвсем точен;

в) с десен спрегнат функтор;

г) на хомоморфизми и наситен;

д) разстилащ над $\mathcal{M}$. $\triangle$

От твърдението (1.2.10) получаваме две следствия, чието доказателство се извършва по методите развити в [19] и [24].

(1.2.11) СЛЕДСТВИЕ. Функторът $p^n_{\mathcal{N}}$ е пораждащ и изброимо пораждащ за $\mathcal{M}$.

(1.2.12) СЛЕДСТВИЕ. Категорията $\mathcal{N}^n$ е със свободни структури над универсуума $\mathcal{M}_o$.

Могат да бъдат формулирани и доказани редица други свойства на категорията $\mathcal{N}^n$ и на функтора $p^n_{\mathcal{N}}$. Ние обаче няма да правим това тук, тъй като за нуждите на нашето изследване те няма да бъдат необходими, а казаното до тук е достатъчно за да характеризира построените по-горе обекти. Освен това ще отбележим, че n -класите са твърде бедни алгебрични структури и техните свойства не са от особен интерес сами по себе си, а доказателствата са твърде близки до тези на сродни свойства, установени макар и в по-друга форма, при n -оперативите.

1.3. <u>Специални елементи и редици в n -класи</u>

По подобие на теорията на n-оперативите (вж. [1], [11], [29], [40] и [49]) ще дефинираме някои специални елементи и n -редици в n-класите, чрез решение на уравнения построени в дадения n -клас. При условията на частичен n -арен композиционен закон задачата се усложнява.

Нека е даден един n -клас $C^{\cdot} = (C, к_n')$.

(1.3.1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че една n -редица е <u>к-единична</u>, ако е в сила зависимостта

$$(e_1,\dots,e_{к-1},x,e_{к+1},\dots,e_n)\in \overset{n}{\ast} C^{\cdot} \Longrightarrow [(e_1,\dots,x,\dots,e_n)] = $$
$$= x.$$

n -редицата ще наричаме <u>единична</u>, ако е к-единична за всяко $к \leqslant n$.

Разликата с класическия случай е в изискването за композируемост на частта от редицата и елемента $x \in C$. От (1.3.1) при $n = 3$ се получават ляво-, дясно- и би-унитарните елементи [83].

В допълнение на (1.3.1) имаме:

(1.3.2) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че един елемент $e \in C$ е <u>единичен</u> в $C^{\cdot}$ ако n-редицата $(e_1,\dots,e_n; e_к = e, к \leqslant n)$ е единична редица за $C^{\cdot}$.

В частност, единиците на една категория са единични елементи за подлежащия на категорията мултипликативен клас.

(1.3.3) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че един елемент $\bar{x} \in C$ е <u>к-напречен</u>, ако са изпълнени условията

$$(x,\dots,x,\bar{x},x,\dots,x)\in \overset{n}{\ast} C^{\cdot} \Longrightarrow [(x,\dots,x,\bar{x},x,\dots,x)] = x.$$

При $n = 2$ к-напречен елемент е единица (лява или дясна в зависимост от това дали $к = 1$ или $к = 2$); това понятие е едно от възможните обобщения на единичния елемент при бинарните композиционни закони.

Класическото понятие за обратимост на даден елемент от един мултипликативен клас [12] има няколко нееквивалентни аналога при n -класите.

Нека $e \in C$ е единичен елемент в смисъла на (1.3.2) нека x, $\bar{x}$ са елементи от C и нека i, j, $к \leqslant n$ са индекси. Тогава:

(1.3.4) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че $x \in C$ е (i,j) -<u>обратен</u> на $\bar{x} \in C$ в n-класът $C^{\cdot}$, ако са изпълнени условията

$(e,\ldots,e,x,e,\ldots,e,\bar{x},e,\ldots,e) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}$ и $[(e,\ldots,e,x,e,\ldots,e,\bar{x},e,\ldots,e)] = e$ където x и $\bar{x}$ са съответно в i-то и j-то място в композируемата n-редица; $x \in C$ е (i,j)-обратен на $\bar{x}$ и (по аналогия с [1] ще пишем $\bar{x} = J_{ij}\,x$.- Ще казваме, че $x \in C$ е <u>к-обратен</u> на $a \in C$ в $C^{\cdot}$, ако съществува n-редица $(y_p; p \leqslant n) \in C^{n}$, такава че

$(y_1,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y_n) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}$ и $[(y_1,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y_n)] = a$.

Ще казваме, че n-редицата $(y_p; p \leqslant n)$ е (к,е)-<u>обратна</u> за $x \in C$ в $C^{\cdot}$, ако са изпълнени условията

$(y_1,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y_n) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}$ и $(y_1,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y) = e$.

<u>Пример</u>. Във всяка n-квазигрупа [2] елементите са обратими в смисъла на (1.3.4), при $k \leqslant n$.

(1.3.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множеството от обратимите елементи на n-класът $C^{\cdot}$ е n-клас.$\triangle$

Разбира се тук се предполага че въпросното множество не е празно. Аналогично твърдение не е вярно за специалните видове обратимост указани в (1.3.4).

Като се спазват основните принципи за прехода от бинерен към n-арен случай и от навсякъде определен към частично определен композиционен закон, получаваме следното разширение при n-арния случай на понятието за комутативност.

(1.3.6) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че два елемента $x,\bar{x} \in C$ са (к,р)-<u>комутативни</u> в n-класът $C^{\cdot}$, ако за композируемата n-орка $(y_1,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y_{p-1},\bar{x},y_{p+1},\ldots,y) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}$ са в сила зависимостите:

$$(y_1,\dots,y_{k-1},\bar{x},y_{k+1},\dots,y_{p-1},x,y_{p+1},\dots,y\quad) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot} \text{ и}$$

$$[(y_1,\dots,y_{k-1},x,y_{k+1},\dots,y_{p-1},\bar{x},y_{p+1},\dots,y_n)] =$$

$$[(y_1,\dots,y_{k-1},\bar{x},y_{k+1},\dots,y_{p-1},x,y_{p+1},\dots, y_n)] .$$

Ще казваме, че два елемента $x,\bar{x} \in C$ са (k,p,θ,θ'') – комутативни, където $\theta, \theta'': C \longrightarrow C$ са бижекции, ако са изпълнени следните условия:

$$(y_1,\dots,y_{k-1},x,y_{k+1},\dots,y_{p-1},\bar{x},y_{p+1},\dots,y_n) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot},$$

$$(y_1,\dots,y_{k-1},\theta(x),y_{k+1},\dots,y_{p-1},\theta''(\bar{x}),y_{p+1},\dots,y_n) \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot},$$

$$[(y_1,\dots,y_{k-1},x,y_{k+1},\dots,y_{p-1},\bar{x},y_{p+1},\dots, y_n)] =$$

$$[(y_1,\dots,y_{k-1},\theta(x),y_{k+1},\dots,y_{p-1},\theta''(\bar{x}),y_{p+1},\dots,y_n)] .$$

Очевидно два елемента, които са (k,p,θ,θ'') – комутативни при $\theta = \theta'' = Id_C$ = идентично изображение на C върху себе си, са (k,p)–комутативни. В частност обикновената комутативност и бинерната "обобщена комутативност" се получават от (k,p)–комутативността и от (k,p,θ,θ'')–комутативността при $n = 2$.

2. n-АРНИ КАТЕГОРНИ СТРУКТУРИ

С помощта на въведение в 1. определения за $\{n\}$-граф и n-арен композиционен закон, ще изградим възможните обобщения на категориите в n-арния случай. Използуван е най-удобния за случая вариант на теорията на категориите, развит в [14] при необичайна терминология; в нашите лекции [74] той е преработен при съгласуване на замисъла с простата и широко разпространена терминология от [42] .

2.1. Определения и примери

Нека припомним, че една категория $C^{\cdot}$ е универсална алгебра от вида $(C, \beta, \alpha, \kappa')$, подчинена на система от аксиоми; β и α са ретракции на C върху $C_o \subset C$ и κ' е частично определен композиционен закон. Чрез системна замяна на подлежащите на $C^{\cdot}$ мултипликативен клас (C, κ') и ориентиран граф (C, β, α) с техните n-арни аналози, дефинираме такива n-арни структури, които при $n = 2$ се редуцират на категория.

Нека $C \in \mathcal{M}_o$ и нека са дадени изображенията

$$[\ldots] = \kappa'_n : \overset{n}{\times} C \longrightarrow C \text{ и } \quad u^j_i : C \longrightarrow C, i \leq n, j \leq n, \; i \neq j .$$

Ще казваме, че κ'_n е n-асоциативен ако е изпълнена следната аксиома за n-арна асоциативност:

(K.5) Ако е дадена $(2n-1)$-редицата $(f_r; r \leq 2n-1)$ от елементи на C, ако за всяко $p \leq n$ подредицата $(f_p, \ldots, f_{p+n-1})$ е композируема относно κ'_n и ако n-редицата $(f_1, \ldots, f_{p-1}, [(f_p, \ldots, f_{p+n-1})], f_{p+n}, \ldots, f_{2n-1})$ е композируема относно κ'_n, то за всяко $p \leq n$

$$[(f_1,\ldots,f_{n-1},[(f_n,\ldots,f_{2n-1})])] = [(f_1,\ldots,f_{p-1},$$
$$[(f_p,\ldots,f_{p+n-1})], f_{p+n},\ldots,f_{2n-1})].$$

Тази форма на асоциативност при n-арните композиционни закони е предложена от В.Дерите [12] и е най-"естествената". Редица други аксиоми за асоциативност са въведени по-късно (вж. [1], [29], [46], [92]), но не са намерили широко приложение и ние няма да ги използуваме.

(2.1.1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че универсалната алгебра $(C, \kappa_n', V_{(n)})$ е <u>(n)-категория</u> и ще я означаваме с $C^{\cdot}_{(n)}$, ако са удовлетворени следните аксиоми:

(К.1) Двойката (C, κ_n') е n-клас; двойката $(C, V_{(n)})$ е (n)-граф.

(К.2) Ако $v_j = \text{пр}_j \mid \overset{n}{\times} C^{\cdot}$, тогава $u_i^j \kappa_n = u_i^j v_i$ за всички $i \leq n$, $j \leq n$.

(К.3) $\overset{n}{\times} C^{\cdot}_{(n)} = \{(f_i; i \leq n); f_i \in C, u_i^j(f_i) = u_j^i(f_r), i, j, r \leq n, i \neq r\} \subset C^n$.

(К.4) $[(V_{(n)}(f))_\kappa] = f$, $\kappa \leq n$, където за простота сме положили $(V_{(n)}(f))_\kappa = (u'_\kappa(f),\ldots,u_\kappa^{\kappa-1}(f), f, u_\kappa^{\kappa+1}(f), \ldots, u_\kappa^n(f))$.

(К.5) Аксиома за n-арната асоциативност.

<u>Примери</u>.- 1. Ако $n=2$, всяка (n)-категория е категория (вж. [14], [42], [74]), като $u_2^1 = \beta$ и $u_1^2 = \alpha$.

2. Нека $\overset{n}{\times} C^{\cdot}_{(n)} = C^n$; (n)-категории за които това е в сила са n-полугрупи с неутрален елемент съгласно [1].

3. Нека $M \in \mathcal{M}_0$; елементите на множеството $C = \overset{n}{M} \in \mathcal{M}_0$ ще наричаме <u>n-симплекси</u> върху M; нека разглеждаме n-арния композиционен закон K_n^M над C, построен както следва

$$K_n^M(((a_i^j; j \leq n); i \leq n)) = (a_i^i; i \leq n),$$

като $((a_i^j; i \leq n); j \leq n) \in \overset{n}{\ast} C$ тогава и само тогава, когато всеки два n -симплекса от n -редицата имат общ (n - 1)-симплекс, т.е. n -симплекс с двойна точка (вж. фиг. 2.1 при случая n = 3). Чрез непосредствена проверка на аксиомите (К) се установява, че относно K_n^M множеството $C = M^n$ е (n)-категория.

Нека $K^\cdot$ е категория, в която единиците (обектите) образуват множеството

$K_0^\cdot = \{\{i, j, к\}, (i, j); (i, j) \in I \times I, \{i, j, к\} \in \mathcal{P}_3(I), i \neq j \neq к\}$, а множеството от морфизмите е образувано както следва

$K - K_0^\cdot = \{(\{i, j, к\}, (i, j)); i, j, к \leq n, i \neq j, к \neq i, j\}$;

тук сме положили $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $\mathcal{P}_3(I)$ е множеството от триелементните подмножества на I; един морфизъм $(\{i, j, к\}, (i, j))$ е наредена двойка, елемент от $\mathcal{P}_3(I) \times (I \times I)$. Нека е зададен функтора $\Phi_V : K^\cdot \longrightarrow \mathcal{m}$ чрез следното изображени

$\Phi_V((i, j)) = C$, $\Phi_V(\{i, j, к\}) = C^\cdot_{(n)\,0}$, $\Phi_V((\{i, j, к\}, (i, j))) = u_i^j$.

Имаме следното твърдение:

(2.1.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. За функтора Φ_V е в сила равенството

$$\underleftarrow{\lim}\, \Phi_V = \overset{n}{\ast}\, C^\cdot_{(n)}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека разглеждаме n -редицата $(f_i; i \leq n) \in \overset{n}{\ast} C^\cdot_{(n)}$; тогава от аксиомата (К.3) следва, че $u_i^j(f_i) = u_j^i(f_r)$, $i, j, r \leq n$, $r \neq i$ и като се има предвид, че $f_s = пр_s (f_i; i \leq n)$, $s \leq n$, получаваме $(f_i; i \leq n) \in \underleftarrow{\lim}\, \Phi_V$. Нека сега $(f_i; i \leq n) \in \underleftarrow{\lim}\, \Phi_V \subset C^n$; тогава $пр_{s|\underleftarrow{\lim}\, \Phi_V}(f_i; i \leq n) = f_s$ и $u_i^j(f_i) = u_j^i(f_r)$, от което следва, че $(f_i; i \leq n) \in \overset{n}{\ast} C^\cdot_{(n)}$, така че $\overset{n}{\ast} C^\cdot_{(n)} \subset \underleftarrow{\lim}\, \Phi_V$. $\triangle$

Чрез пренебрегване на някои от аксиомите от системата (К) от (2.1.1) се получават по-общи, но по-малко богати структури, наричани по-нататък присъединени структури на (n)-категориите, определени както следва:

-неасоциативни n -категороиди: (К.1, К.2, К.3, К.4);

- n-квази-категороиди: (К.1, К.2, К.3, К.5);

-неасоциативни n -квази-категороиди: (К.1, К.2, К.3);

-мултипликативни n -графоиди: (К.1, К.2, К.3', К.4);

-мултипликативни n-квази-графоиди: (К.1, К.2).

Тук (К.3') е аксиомата $\overset{n}{\times} C_{(\dot{n})} \subset \varprojlim \Phi_V$, по-слаба от (К.3).

Множествата от присъединени структури, построени над елементите на $\mathcal{M}$ ще означаваме както следва: на (n)-категориите - с $\mathcal{F}_0^{(n)}$, на неасоциативните (n)-категории - с $\mathcal{F}'^{(n)}_0$, на n -квази-категориите - с $\mathcal{F}''^{(n)}_0$, на неасоциативните n -квази-категории - с $\mathcal{F}^{\#(n)}_0$, на мултипликативните n-графи - с $\mathcal{N}'^{(n)}_0$, на мултипликативните n -квази - графи - с $\mathcal{N}''^{(n)}_0$. Едно кое да е от тях бележим с $\mathcal{U}^{(n)}_0$.

По стандартния начин (вж. [14] , [42] , [44]), като се има предвид определението на хомоморфизъм между универсални алгебри от един и същи тип, строим следното

(2.1.3) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че наредената тройка $\Phi = (H_{(\dot{n})}, \underline{\Phi}, C_{(\dot{n})})$, $H_{(\dot{n})}$, $C_{(\dot{n})} \in \mathcal{F}^{(n)}_0$ е (n)-функтор, ако е зададено изображението Φ: $C \longrightarrow H \in \mathcal{M}$ и са изпълнени условията

(Ф.1) $\Phi([(f_i ; i \leq n)]) = [(\Phi(f_i); i \leq n)]$.

(Ф.2) $V^H_j . \Phi(f) = \overset{n}{\Phi}(V^C_j \quad (f))$, за всяко $f \in C$.

Чрез замяна на (n)-категориите с двойки от присъединени структури от един и същи тип, се получават на базата на (2.1.3) определенията на неасоциативните (n)-функтори,

<u>(n)-квази функтори</u>, <u>неасоциативните (n)-квази-функтори</u>, <u>(n)-неофункторите</u>, <u>(n)-квази-неофункторите</u>; начина на означение е идентичен.

Множествата от съответните хомоморфизми между присъединени структури над $\mathfrak{M}_0$, дефинирани по-горе ще бележим както следва: на (n)-функторите – с $\mathcal{F}^{(n)}$, на неасоциативните (n)-функтори – с $\mathcal{F}'^{(n)}$, на (n)-квази-функторите – с $\mathcal{F}''^{(n)}$, на неасоциативните (n)-квази-функтори – с $\mathcal{F}^{\#(n)}$, на (n)-неофункторите – с $\mathcal{N}'^{(n)}$, на нео-квази-(n)-функторите – с $\mathcal{N}''^{(n)}$. Едно кое да е от тези множества ще означаваме с $\mathcal{U}^{(n)}$.

(2.1.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Относно композиционен закон за хомоморфизми между алгебрични структури, множеството $\mathcal{U}^{(n)}$ е категория, чието множество от единици идентифицираме с $\mathcal{U}^{(n)}_0$. В сила е следната диаграма за включване като подкатегории

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{N}''^{(n)} \arrow[dl] & \mathcal{F}^{\#(n)} \arrow[l] & \mathcal{F}'^{(n)} \arrow[l] \\
\mathcal{N}^{(n)} & \mathcal{N}'^{(n)} \arrow[l] & \mathcal{F}''^{(n)} \arrow[l] \arrow[u] & \mathcal{F}^{(n)} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad . \ \Delta$$

Като заменим в универсалната частична алгебра от (2.1.1), ориентирания (n)-граф с ориентиран n-граф, получаваме нова алгебрична структура както следва:

(2.1.5) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че частичната универсална алгебра (C, k'_n, V_n) е <u>n-категория</u> и ще я означаваме с $C^{\cdot}_n$, ако са удовлетворени следните аксиоми:

$(\overline{K.1})$ Наредената двойка (C, k'_n) е n-клас; наредената двойка (C, V_n) е n-граф;

$(\overline{K.2})$ Ако $v_j = \mathrm{пр}_j \overset{n}{\times} C$, тогава $u_i k'_n = u_i v_i$ за всички $i \leq n$

$(\overline{K.3})$ $\overset{n}{\times} C^{\cdot}_n = \{(f_i ; i \leq n) ; f_i \in C, \ u_i(f_j) = u_j(f_i)\}$;

$(\overline{K.4})$ $[(V_n(f))_к] = f$, $к \leq n$, където за простота сме положили: $(V_n(f))_к = (u_1(f),\dots,u_{к-1}(f), f,$

$u_{к+1}(f),\dots, u_n(f))$;

$(\overline{K.5})$ Аксиомата за n-арната асоциативност (= (К.5)).

Аналогията между (2.1.5) и (2.1.1) е очевидна; разликата произтича от различията между (n)-графите и n-графите.

(2.1.6) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Необходимото и достатъчно условие за да бъде една (n)-категория n-категория е за елементите от подлежащия (n)-граф да бъдат изпълнени условията

$$u_i^j = u_i \quad \text{за всяко } j \leq n \, .$$

Д о к а з а т е л с т в о. К.2 се идентифицира с $\overline{К.2}$. Чрез полагане $u_i^j = u_i$, К.3 се идентифицира с $\overline{К.3}$. При указаното условие $(V(f))_{(к)}$ се свежда до $(V_n(f))_к$, от което следва, че К.4 се идентифицира с $\overline{К.4}$. Но при положение, че са изпълнени условията на предложението, един (n)-граф е по същество идентичен на един n-граф (действието на операторите от $V_{(n)}$ и V_n върху един елемент $f \in C$ е едно и също), т.е. К.1 и $\overline{К.1}$ изразят едно и също свойство. В двете определения аксиомата К.5 е една и съща. $\triangle$

<u>Примери</u>.- 1. Ако $n = 2$, всяка n-категория е категория в класическия смисъл, където $u_1 = \beta$ и $u_2 = \alpha$.

2. Нека $\ast C^{\cdot\, n}_n = C^n$; n-категориите за които това условие е удовлетворено са n-полугрупите с единица (вж. [2]).

3. Нека разгледаме отново множеството C от n-симплексите върху $M \in \mathcal{M}_0$; да дефинираме сега композиционния закон за n-симплексите $\bar{K}^M_n : C^n \longrightarrow C$ по следния начин

$$\bar{K}^M_n(((a_i^j\ ; j \leq n); i \leq n)) = (a_i^i\ ; i \leq n),$$

тогава и само тогава, когато $a_i^j = a_j^i$ за всяка двойка (i,j). Тройката $(C, \bar{K}^M_n, V^c_n)$ е n-категория; V^c_n е образувано както следва

$$V^c_n = \{u_i\ ; i \leq n\},\ u_i\colon C \longrightarrow C_0,\ u_i((a_i^j\ ; j \leq n)) =$$

$$(a_i^i, \ldots, a_i^i) = \bar{a}^i,\ \text{където } C_0 = \{\bar{e}; e \in M\} = \triangle_C,$$

при полагане $\bar{e} = (e, e, \ldots, e)$ (вж. фиг.2.2 при $n = 3$, откъдето личи разликата с Пример 3 от (2.1.1)). Ако $n = 2$, категорията на 2-симплексите съвпада с групоида на наредените двойки съпоставени на M.

4. Нека M е множеството от n-мерните матрици (или n-матриците, т.е. матрици, всеки елемент от които е индексиран с n-редица индекси от $\mathbb{N}$) над полето K. Относно n-арния композиционен закон на n-матрици дефиниран по следния начин

$$a_{i_1^1 i_2^2 \ldots i_n^n} = \sum_{l_j=1}^{m_j} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{i_1^s i_2^s \ldots i_n^s} \right),\ j \leq n$$

M е n-категория, в която n-графът е определен от изображенията

$$u_j(a_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \triangle_j$$

При $n = 2$ очевидно получаваме категорията на бинерните матрици.

Най-богатия пример за n-категории, предложен от композицията на n-отношенията над m_0 ще бъде изследван в гл. 5.

За да построим предложение сходно на (2.1.2) нека разгледаме категорията $\bar{K}^{\cdot}$, в която единиците образуват множеството

$$\bar{K}^{\cdot}_0 = \{\{i\}, \{i, j\}\ ; i \leq n, j \leq n, \quad i \neq j\}$$

и морфизмите на която (наредени двойки) са:

$$\bar{K} - \bar{K}^{\cdot}_0 = \{(\{i, j\}, \{i\}); i \leq n, j \leq n, \quad i \neq j\} \quad ;$$

за единиците на морфизма $(\{i,j\}, \{i\})$ имаме

$\alpha((\{i,j\},\{i\})) = \{i\}$ и $\beta((\{i,j\},\{i\})) = \{i,j\}$;

нека построим функтора $\Phi_{\overline{V}} = (\mathscr{M}, \Phi_{\overline{V}}, \overline{K}^{\cdot})$ дефиниран от изображението

$$\Phi_{\overline{V}}(\{i\}) = C,\quad \Phi_{\overline{V}}(\{i,j\}) = C_0,\quad \Phi_{\overline{V}} = ((\{i,j\},\{i\})) = u_j,\ i \leq n,\ j \leq n.$$

(2.1.7) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. За $\Phi_{\overline{V}} \in \mathscr{F}$ е в сила равенството

$$\Phi_{\overline{V}} = \overset{n}{\rtimes} C^{\cdot}\ . \triangle$$

И тук както при (n)-категориите се дефинират присъединените структури (в скоби след всеки термин е дадено неговото означение): неасоциативни n-категории $(\mathscr{F}'^{n}_{0})$, n-квази-категории $(\mathscr{F}''^{n}_{0})$, неасоциативни n-квази-категории, $(\mathscr{F}^{\#n}_{0})$, мултипликативни n-графи $(\mathscr{N}'^{n}_{0})$, мултипликативни n-квази-графи $(\mathscr{N}''^{n}_{0})$, а също така техните хомоморфизми: n-функтори $(\mathscr{F}^{n})$, неасоциативни n-функтори $(\mathscr{F}'^{n})$, n-квази функтори $(\mathscr{F}''^{n})$, неасоциативни n-квази-функтори $(\mathscr{F}^{\#n})$, n-неофунктори $(\mathscr{N}'^{n})$, n-нео-квази-функтори $(\mathscr{N}''^{n})$. Нека $\mathscr{U}^{n}$ е едно кое да е от така построените множества от хомоморфизми. Имаме:

(2.1.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Относно композиционния закон за хомоморфизми, множеството $\mathscr{U}^{n}$ е категория, за която $\mathscr{U}^{n}_{0}$ е клас от единици. В сила е следната диаграма за включване:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{N}''^{n} \arrow[dl] & \mathscr{F}^{\#n} \arrow[l] & \mathscr{F}'^{n} \arrow[l] \\
\mathscr{N}'' & \mathscr{N}'^{n} \arrow[l] \arrow[u] & \mathscr{F}''^{n} \arrow[l] \arrow[u] & \mathscr{F}^{n} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}\ . \triangle$$

Така построените (n)-категории и n-категории се характеризират с това, че в частичната универсална алгебра заменяме едновременно мултипликативния клас и мултипликативния граф с техни n-арни обобщения (n-клас, (n)-граф или n-граф). Сега ще пристъпим към построение на структура, при което само мултипликативният клас ще бъде заменен със своето n -арно обобщение.

Нека $[C] = (C, \beta, \alpha)$ е ориентиран граф. Всяка редица $h = (f_i; i \leq n), f_i \in C$, за която $\alpha(f_i) = \beta(f_{i+1})$, $i \leq n-1$, ще наричаме път в $[C]$. Най-голям $n \in \mathbb{N}$ индекс в редицата - път ще наричаме дължина на пътя; често ще говорим за n -път. Множеството от пътищата съпоставени на $[C]$ ще бележим с $\mathsf{L}[C]$. Ще казваме, че един пътезатворен над $e \in [C]_0$, ако $\alpha(f_n) = \beta(f_1) = e$; два пътя от $\mathsf{L}[C]$ ще наричаме еквивалентни ако са затворени над един и същи връх от $[C]$. Понятието "еквивалентни пътища" дефинира релация на еквивалентност γ_F в множеството $\mathsf{L}'_F[C]$ на $(n-1)$-пътищата, затворени над елементите на $[C]_0^F$; нека положим $\mathsf{L}'_F[C]/\gamma_F = \mathsf{L}_0$. Нека построим двете унарни изображения $\hat{\beta}, \hat{\alpha}: C \longrightarrow \mathsf{L}_0$, чрезкоито на всекиелемент $f \in C$ съпоставяме затворените $(n-1)$-пътища над $\alpha(f)$ и $\beta(f)$ съответно, представители на класите на еквивалентност от L_0 над $\alpha(f)$ и $\beta(\ )$; като представители могат да бъдат избрани пътищата (e,...,e) и (e",...,e"), където $e = \alpha(f)$ и $e" = \beta(f)$ и чрез полагането $(e,\dots,e) \simeq e$ L_0 се идентифицира с $[C]_0$. Нека разгледаме също така композиционния закон $\hat{\kappa}'_n$

$$\hat{\kappa}'_n : C \overset{n}{\rtimes} C \longrightarrow C, \quad [(f_i; i \leq n)] = f \in C;$$

тук $C \overset{n}{\rtimes} C \subset C^n$ е множеството от n-редиците композируеми относно $\hat{\kappa}'_n$.

(2.1.9) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че частичната универсална алгебра $(C, \hat{\kappa}'_n, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ е полиадична категория (от ред n) и ще означаваме $C^{\cdot}_{[n]}$, ако са удовлетворени аксиомите:

$(\widehat{K}.1)$ Наредената двойка (C, κ'_n) е n-клас; наредената тройка $(C, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})$ е ориентиран граф;

$(\widehat{K}.2)$ Ако $v_j = \text{пр}_j | C \overset{n}{\ast} C$, $j = 1, n$, то $\widehat{\beta}.\widehat{\kappa}'_n = \widehat{\beta}.v_1$ и $\widehat{\alpha}\kappa'_n = \widehat{\alpha}v_n$;

$(\widehat{K}.3)$ $C \overset{n}{\ast} C = \{(f_i; i \leq n); \widehat{\alpha}(f_i) = \widehat{\beta}(f_{i+1}), i \leq n-1\} \subset C^n$;

$(\widehat{K}.4)$ $(\widehat{\beta}(f), f) \in C \overset{n}{\ast} C$ и $[\widehat{\beta}(f), f)] = f$; $(f, \widehat{\alpha}(f)) \in C \overset{n}{\ast} C$ и $[(f, \widehat{\alpha}(f))] = f$;

$(\widehat{K}.5)$ Аксиомата за n-арната асоциативност.

Множеството от полиадичните категории построени над елементите на $\mathcal{M}_0$ ще означаваме с $\mathcal{F}^{[n]}_0$.

Примери. - 1. Ако $n = 2$ полиадичната (ще казваме тогава диадична) категория е категория в обичайния смисъл.

2. Всяка n-полугрупа (полиадична полугрупа, по [37]) е полиадична категория от ред n, в която имаме $C \overset{n}{\ast} C = C^n$.

Като отслабваме системата аксиоми $(\widehat{K})$ за полиадичните категории, получаваме структурите присъединени на полиадичните категории и техните множества съпоставени на $\mathcal{M}_0$. Имаме: неасоциативни полиадични категории $(\mathcal{F}'^{[n]}_0)$, полиадични квази-категории $(\mathcal{F}''^{[n]}_0)$, неасоциативни полиадични квази-категории $(\mathcal{F}^{\#[n]}_0)$, полиадични мултипликативни графи $(\mathcal{N}'^{[n]}_0)$, полиадични мултипликативни квази-графи $(\mathcal{N}''^{[n]}_0)$; навсякъде при това изброяване се подразбират думи "от ред n".

(2.1.10) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. На всяка категория $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ може да бъде съпоставена поне една полиадична категория (от ред n) означена $C^{\cdot}_{[n]}$. Ако означим с $\text{пр}_{(i,j)}$ диагоналната (i, j)-проекция на C^n, имаме

$$\text{пр}_{(j,i)}(C \overset{n}{\ast} C) = C^{\cdot} \ast C^{\cdot} \quad . \triangle$$

За нуждите на общата теория е полезно да представим множеството от композируемите n-редици на една полиадична категория $C_{[n]}^{\cdot}$ като проективна граница на един функтор, аналогично на (2.1.2) и (2.1.7). Нека за тази цел разглеждаме категорията $\overline{\overline{K}}^{\cdot}$:

– множеството от единиците $\overline{\overline{K}}_0^{\cdot}$ на $\overline{\overline{K}}^{\cdot}$ е образувано от естествените числа $i \leq n$ и от наредените двойки $(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, където $j = i + 1$ и $i \leq n - 1$;

– множеството $\overline{\overline{K}} - \overline{\overline{K}}_0^{\cdot}$ от морфизмите на $\overline{\overline{K}}^{\cdot}$ е образувано от всички наредени двойки от вида $((i,j), i)$ и $((i,j), j)$, където $j = i + 1$ и $i \leq n - 1$.

На всяка тройка $(C, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ е съпоставен функтор

$$\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]} = (\mathcal{M}, \underline{\Phi}_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}, \overline{\overline{K}}^{\cdot}) \in \mathcal{F},$$

от категорията $\overline{\overline{K}}^{\cdot}$ към категорията $\mathcal{M}$ на изображенията над $\mathcal{M}_0$, дефиниран добре от изображението $\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}$, построено по следния начин:

$$\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}(e) = C, \ \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}((i, j)) = L_0, \ \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}(((i, j), j)) = \hat{\alpha}, \quad \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}(((i, j), j)) = \hat{\beta}.$$

Тогава имаме следния резултат:

(2.1.11) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функторът $\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]} \in \mathcal{F}$ удовлетворява следната зависимост

$$\underleftarrow{\lim}\, \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]} = \{(f^i; i \leq n); f^i \in C, \ \hat{\alpha}(f^i) = \hat{\beta}(f^{i+1}), i \leq n - 1\} = C \overset{n}{\ast} C$$

Д о к а з а т е л с т в о. Обектът $\underleftarrow{\lim}\, \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}$, проективна граница на функтор с източник в една диаграма с n върха (вж.фиг.2.3) е подмножество на C^n. Нека вземем една n-редица $(g^i; i \leq n) \in \underleftarrow{\lim}\, \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}$; имаме тогава (фиг. 2.4) зависимостите $\hat{\alpha}(g^i) = \hat{\beta}(g^{i+1})$, тъй като $t^s((g^i; i \leq n)) = g^s$, където t^s е s-тата проекция на проективната граница; това очевидно ни дава: $\underleftarrow{\lim}\, \Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]} \subset C \overset{n}{\ast} C$. Нека обратно $(m^i; i \leq n)$

$\in C \overset{n}{\rightarrowtail} C$; тогава имаме $\hat{\alpha}(m^i) = \hat{\beta}(m^{i+1})$ за всяко $i \leq n$ в съответствие с $(\widehat{K.2})$ но в този случай $(m^i; i \leq n) \in \underleftarrow{lim}\,\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}$, от където следва $C \overset{n}{\rightarrowtail} C \subset \underleftarrow{lim}\,\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]}$.

(2.1.12). СЛЕДСТВИЕ. Ако $n = 2$, то $\overset{=}{K}{}^{\cdot} = \{1, 2, (1, 2), (1, (1, 2)), (2, (1, 2))\}$, $\hat{\beta} = \beta$, $\hat{\alpha} = \alpha$ и за $\Phi_{[\hat{\beta}, \hat{\alpha}]} = \Phi_{[\beta, \alpha]}$ имаме

$$\underleftarrow{lim}\,\Phi_{[\beta, \alpha]} = C^{\cdot} \overset{n}{\rightarrowtail} C^{\cdot} = \beta \vee \alpha = \text{разслоено произведение на } (\beta, \alpha).$$

Нека са дадени две полиадични категории $C^{\cdot}_{[n]}$ и $H^{\cdot}_{[n]}$ от ред n; както за частичните универсални алгебри от най-общ вид дефинираме хомоморфизъм от $C^{\cdot}_{[n]}$ към $H^{\cdot}_{[n]}$, съвместим с единиците, който ще наричаме <u>полиадичен функтор</u>, означаван с наредената тройка $\Phi_{[n]} = (H^{\cdot}_{[n]}, \underline{\Phi}_{[n]}, C^{\cdot}_{[n]})$; множеството на полиадичните функтори съпоставени на множеството $\mathcal{F}^{[n]}_{o}$ от полиадичните категории над m_o ще бележим с $\mathcal{F}^{[n]}$. По аналогия дефинираме <u>неасоциативните полиадични функтори</u> ($\mathcal{F}'^{[n]}$) <u>полиадичните квази-функтори</u> ($\mathcal{F}''^{[n]}$), <u>неасоциативните полиадични квази-функтори</u> ($\mathcal{F}^{\#[n]}$), <u>полиадичните неофунктори</u> ($\mathcal{N}'^{[n]}$) и <u>полиадичните квази-неофунктори</u> ($\mathcal{N}''^{[n]}$); едно кое да е от тези множества ще означаваме с $\mathcal{U}^{[n]}$. В сила е следното твърдение:

(2.1.13) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Относно композиционния закон за хомоморфизмите между алгебрични структури от един и същи тип, множеството $\mathcal{U}^{[n]}$ е категория, чието множество от единици идентифицираме с $\mathcal{U}^{[n]}_{o}$. В сила е диаграмата за включване

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{N}''^{[n]} \arrow[dl] & \mathcal{F}^{\#[n]} \arrow[l] & \mathcal{F}'^{[n]} \arrow[l] \\
\mathcal{N}^{[n]} & \mathcal{N}'^{[n]} \arrow[l] \arrow[u] & \mathcal{F}''^{[n]} \arrow[l] \arrow[u] & \mathcal{F}^{[n]} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad . \ \triangle$$

Ще припомним определението за n-кратна категория; изложението следва по принцип [15], [17] и [20].

Нека $C^{\perp i}$, $i \leq n$ са категории при които $C \in m_o$.

(2.1.14) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че n -орката $(C^{\perp i}; i \leq n)$ е <u>n -кратна категория</u>, ако са изпълнени следните условия:

(1) $(C^{\perp j}, \underline{\alpha}^i, C^{\perp i})$ и $(C^{\perp j}, \underline{\beta}^i, C^{\perp i})$ са функтори за всички $i \leq n, j \leq n, i \neq j$;

(2) Ако композициите

$(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f)$ и $(g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f)$

са дефинирани при всички $i \leq n$, $j \leq n$, тогава

$$(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f) = (g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f).$$

Множеството от n -кратните категории над $\mathfrak{M}_o$ ще бележим с $\mathcal{F}_o^{\langle n \rangle}$, а съответните хомоморфизми (<u>n-кратни функтори</u>) - с $\mathcal{F}^{\langle n \rangle}$.

Във всяка n -кратна категория е дефиниран един 2^n -арен частично определен, асоциативен композиционен закон. Обаче кратните категории се отличават принципно от n-арните (в съответствие с (2.1.1), (2.1.7) и (2.1.9), тъй като имат не един подлежащ ориентиран граф или негово n-арно обобщение, а n слабо свързани помежду си ориентирани графи.

<u>Примери</u>. - 1. Нека $\mathbb{K}$ е множеството от наредени четворки асоциирано на $C \in \mathfrak{M}_o$.

$$\mathbb{K} = \{(A, B, X, Y);\ A, B, X, Y \in C\} \subset C^4;$$

за композиционните закони

$$(A, B, X, Y) \boxminus\!\!\!\!\shortmid\ (A'', B'', X'', Y'') = (A, B'', X'', Y)$$

тогава и само тогава, когато B = A" и Y" = C, и

$$(A, B, X, Y) \boxminus (A'', B'', X'', Y'') = (A, B, X'', Y'')$$

тогава и само тогава, когато X = B" и Y = A",

множеството $\mathbb{K}$ е категория, а $(\mathbb{K}, \boxminus\!\!\!\!\shortmid, \boxminus)$ е двойна категория. В частност, ако е дадено множеството $\mathscr{C}$ от наредените двойки на C, двойната категория се изражда в категорията на двойките $(\mathscr{C}, \circ)$, в която композиционния закон е:

$(A, B) \circ (X, Y) = (A, Y)$ тогава и само тогава когато $B = X$.

2. Нека е даден един $(n-p)$-кратен функтор на n-кратната категория $(C^{\perp_i}; i \le n)$ в себе си означаван $\lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_p}$ и такъв че за всяко $j \le p$, при $j \ne j'$ имаме

$1 \le i_j \le n$ и $\lambda^{i_j} = \alpha^{i_j}$ или $\beta^{i_j} = \lambda^{i_j}$;

тогава образът на $f \in C$ чрез $\lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_p}$ ще наричаме <u>$(n-p)$фасета</u>; една 0-фасета е <u>връх</u> на $f \in C$ в n-кратната категория, а всяка 1-фасета е <u>ръб</u> на $f \in C$ в n-кратната категория. Ако в частност се разглежда тройната категория на правоъгълните паралелепипеди в $\mathbb{R}^3$ всяка 0-фасета е връх, всяка 1-фасета е ръб и всяка 2-фасета е стена на паралелепипеда; множеството на паралелепипедите $\mathbb{P}$ в $\mathbb{R}^3$ е тройна категория, в която композициите са дефинирани тогава и само тогава когато два паралелепипеда от $\mathbb{P}$ имат две идентични стени. В този случай е породен един 8-орен $(2^3 = 8)$ композиционен закон в $\mathbb{P}$.

3. Нека е дадено едно крайно семейство от $(\Gamma_i; i \le n)$ еднофунктори на $C^{\perp_i}$, такива, че $\Gamma_i = \alpha^i, \beta^i$ или Id, като $\Gamma_i = Id$ точно за p индекса от редицата; за всяко $f \in C$ ще казваме, че n-редицата $(\Gamma_1(f), \dots, \Gamma_n(f)) = c_{n-p}(f)$ е една $(n-p)$-рамка за $f \in C$; множеството от всички рамки съпоставени на $C^{\perp_i}$ и при произволно изменение на индекса p (от 0 до n) не се описва с прости двучленни композиционни закони, но ако $p = 1$, множеството от $(n-1)$-рамките на $C^{\perp_i}$ относно композиционните закони между $(n-1)$-рамки определени със следното равенство:

$$c_{n-1}(f') \perp_i c_{n-1}(f) = c_{n-1}(f' \perp_i f),$$

тогава и само тогава когато $(f', f) \in C^{\perp_i} * C^{\perp_i}$, е n-крат на категория (на $(n-1)$-рамките); категорията на $(n-1)$-рамките съпоставена на n-кратната категория $(C^{\perp_i}; i \le n)$ е нейна n-кратна фактор-категория. Също така, ако $C^{\perp}$ е категория, можем да построим чрез добре дефиниран рекурентен процес една n-кратна категория означена с $((C^{[n]})^{\perp i}; i \leq n)$, в която всеки морфизъм е идентифициран със своята 1-рамка и за която

$$(C^{[1]})^{\perp 1} = C, \quad C^{[n]} = \square((C^{[n-1]})^{\perp 1}, (C^{[n-1]})^{\perp 1}).$$

По аналогия с останалите n-арни аналози на категориите, можем за n-кратните категории да построим присъединените алгебрични структури; но в този случай се получават голям брой варианти, което произлиза от факта, че всяка една от n-те категории в n-кратната категория може да бъде заменена с всяка една от присъединените структури на категория. Това голямо разнообразие обаче не представлява интерес.

Ние няма да се спираме в това изследване на редица подробности отнасящи се до n-кратните категории. Читателят ще намери много нетривиални резултати и някои техни интересни приложения в [7], [15], [17] и [20].

Във връзка с нашата обща задача ще отбележим обаче, че една p-кратна категория не може да бъде идентифицирана с една n-категория ($n = 2^p$), тъй като аксиомите за единичните елементи $(\overline{K.4})$ и условията за композируемост по $(\overline{K.3})$ не могат да бъдат удовлетворени при p-кратните категории. Това положение се вижда ясно при двойната категория на комутативните квадрати (диаграми от четири елемента), когато я сравняваме с 4-категорията на 4-симплексите (вж.стр. 20, Пример 3).

Дълбокото сродство и основните различия между построените в този параграф структури, n-арни обобщения на категориите се виждат в Табл. 1 на аксиомите.

№	n -категория $C^{\cdot}_{(n)}$	n -категория $C^{\cdot}_{n}$	полиадична категория $C^{\cdot}_{[n]}$	к-кратна категория $(C^{\perp_i}; i \le к)$
1	$(C, к'_n) \in \mathcal{N}^n_0, (C, U_{(n)}) \in \mathcal{G}^{(n)}_0$	$(C, к'_n) \in \mathcal{N}^n_0$ $(C, U_n) \in \mathcal{G}^{n}_{0}$	$(C, к'_n) \in \mathcal{N}^n_0$ $(C, U) \in \mathcal{G}_0$	$(C, к'_{(i)}) \in \mathcal{N}^n_0, (C, \beta_i, \alpha_i) \in \mathcal{G}_0, \; i \le к$
2	$u^j_i к'_n = u^j_i v_j$ $i \le n, \; j \le n, \; i \ne j$	$u_j к'_n = u_j v_j$ $j \le n$	$\beta к'_n = \beta v_1$ $\alpha к'_n = \alpha v_n$	$\beta_i к'_{(i)} = \beta_i v_{i1}$ $\alpha_i к'_{(i)} = \alpha_i v_{i2}$
3	$\overset{n}{\ast} C^{\cdot}_{(n)} =$ $\{(f_i; i \le n); u^j_i(f_i) = u^i_j(f_r), \; i, j, r \le n, \; i \ne r\} \subset C^n$	$\overset{n}{\ast} C^{\cdot} =$ $\{(f_i; i \le n); u_i(f_j) = u_j(f_i), \; i \ne j\}$	$C \overset{n}{\ast} C =$ $[(f_i; i \le n); \alpha(f_i) = \beta(f_{i+1}), i \le n-1\}$	$\overset{n}{\ast} C = \bigcup_{i \le к} C \ast_{U_i} C$
4	$(U_{(n)}(f), f)_j \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}_{(n)}$ $\Rightarrow [(U_{(n)}(f), f)_j = f$	$(U_n(f), f)_j \in \overset{n}{\ast} C^{\cdot}$ $\Rightarrow f = [(U_n(f), f)_j]$	$[(\hat\beta(f), f)] = f$ & $[(f, \hat\alpha(f))] = f$	$[(\beta_i(f), f)] = f$, $[(f, \alpha_i(f))] = f$,
5	n-арна асоциативност съгласно аксиомата (К.5)			дистрибутивност на $(\perp_i, \perp_j)$ за всички $i, j \le к, \; i \ne j$ и асоциативност на $\perp_i$ за $i \le к$.

2.2. Основни свойства на n-арните категорни структури

В този параграф ние ще покажем някои еквивалентни форми на определението на полиадичните категории от ред n и ще установим съществения за характеризацията на n-арните категорни структури резултат (2.2.6).

За всяко от определенията (2.1.1), (2.1.5), (2.1.9) и (2.1.14) могат да бъдат построени еквивалентни, но интересни сами по себе си форми. Ние ще се занимаем само със случая на полиадичните категории, без при това да целим изчерпване на въпроса за възможните еквивалентни определения.

Като използуваме означенията въведени в 2.1, нека формулираме следните допълнителни аксиоми към системата $(\hat{K})$:

$(\hat{K}.6)$ За всяко $f \in C$ съществуват $(n-1)$-редиците $\hat{A}$ и $\hat{B}$ от елементи на C, такива че $(\hat{A}, f) \in C \overset{n}{\ast} C$, $[(\hat{A}, f)] = f$ и $(f, \hat{B}) \in C \ast C$, $[(f, \hat{B})] = f$.

$(\hat{K}.7)$ Ако $(f_i; i \leq n) \in C \overset{n}{\ast} C$ и $(f_j; n+1 \leq j \leq 2n-1) \in C \ast C$, тогава $(f_{\bar{i}}; \bar{i} \leq 2n-1) \in C \overset{n}{\ast} C$, $\bar{i} = i \leq n$, $\bar{i} = j$, $n+1 \leq 2n-1$

$(\hat{K}.8)$ Ако $f = [(f_i; i \leq n)]$, то $\hat{\alpha}(f) = \hat{\alpha}(f_n)$ и $\hat{\beta}(f) = \hat{\beta}(f_1)$.

$(\hat{K}.9)$ Ако за всяко $p \leq n$ са в сила зависимостите $(f_k; p \leq k \leq p+n-1) \in C \overset{n}{\ast} C$, $(f_1, \dots, f_{p-1}, [(f_k; p \leq k \leq p+n-1)], f_{p+n}, \dots, f_{2n-1}) \in C \overset{n}{\ast} C$,

тогава всички композиции от вида

$$[(f_1, \dots, f_{p-1}, [(f_k; p \leq k \leq p+n-1)], f_{p+n}, \dots, f_{2n-1})]$$

са равни помежду си при всички $p \leq n$.

В сила е следното твърдение:

(2.2.1) ТЕОРЕМА. За универсалната алгебра $(C, \hat{k}'_n, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$, следните системи от аксиоми са еквивалентни и дефинират над C полиадична категория

(а) $\widehat{К.1}$, $\widehat{К.2}$, $\widehat{К.3}$, $\widehat{К.4}$, $\widehat{К.5}$ (или $\widehat{К.9}$);
(в) $\widehat{К.1}$, $\widehat{К.6}$, $\widehat{К.7}$, $\widehat{К.5}$ (или $\widehat{К.9}$);
(с) $\widehat{К.1}$, $\widehat{К.3}$, $\widehat{К.7}$, $\widehat{К.8}$, $\widehat{К.5}$ (или $\widehat{К.9}$). $\triangle$

Аналогични твърдения могат да бъдат формулирани за останалите n-арни категорни структури от 2.1. Разнообразните форми на определенията имат спомагателно значение във връзка с някои приложения и не съдържат нищо принципно ново.

За да достигнем до основната теорема за проективност на n-арните категорни структури ще построим най-напред техните структурни скици. Определението на това понятие и свързаните с него конструкции са дадени в [16], [17], [18] и [21].

Нека е даден ориентирания граф, който има четири върха

$$V''_0 = \{e_0, e, \bar{e}, \bar{\bar{e}}\}$$

и чиито стрелки (морфизми) са следните (фиг. 2.3):

$$a_i : e \longrightarrow e_0,\ i \le n; \quad I : e_0 \longrightarrow e;$$
$$к: \bar{e} \longrightarrow e;\ v_i : \bar{e} \longrightarrow e,\ i \le n;\ u_i : e \longrightarrow \bar{e},\ i \le n;$$
$$w_i : \bar{\bar{e}} \longrightarrow \bar{e},\ i \le n; \quad к_i : \bar{\bar{e}} \longrightarrow \bar{e},\ i \le n.$$

Нека $V''^{\,n}_{\mathcal{F}}$ е мултипликативния граф, който съдържа стрелките на ориентирания граф V" и още $\frac{n}{2}(3n + 5)$ стрелки, така че $e_0 = a_i . I$, $i \le n$;

$g^{к}_1 = a_j . v_i = a_i . v_j,\ i \le n,\ j \le n,\ i \ne j$; $g^{i}_2 = a_i\ v_i = a_i к$;

$g^{i}_3 = к . к_i,\ i \le n$; $g^{i}_4 = I . a_i = v_i . u_i,\ i \le n$;

$e = к . v_i,\ i \le n$; $e = v_i . u_j = v_j . u_i,\ i \le n,\ j \le n,\ i \ne j$;

$g^{i}_5 = к . w_i = v_i . к_i,\ i \le n$; $g^{к}_6 = v_i . w_j = v_j . w_i,\ i, j \le n,\ i \ne j$;

$g^{к}_7 = v_i . w_i = v_i . к_j,\ i, j \le n,\ i \ne j$.

Идея за така построения мултипликативен граф $V''^{\,n}_{\mathcal{F}}$ дава фиг. 2.4. Нека сега положим:

$\zeta_0 = \{(a_i, v_j);\ i, j \leq n\},\ i \neq j\ ,\ \zeta = \{(a_i, v_i . w_i); i \leq n\}\ ,$

$\zeta' = \{(a_i . \kappa\ , w_i);\ i \leq n\}\ .$

Наредената двойка $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}} = (V''^n_{\mathcal{F}}, (\{I\}\ ,\ \{\zeta_0, \zeta, \zeta'\}))$ е структурна скица в смисъла на [16] и ще я наричаме структурна скица на n-категория. Имаме следните резултати:

(2.2.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Образът на $V''^n_{\mathcal{F}}$ чрез функтора Ф от $V''^n_{\mathcal{F}}$ към $\mathcal{M}$, съвместим със скицата $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$, (реализиращ функтор или просто реализация на $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$ по [11]) е n-категория. Δ

(2.2.3) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множеството от реализиращите функтори на $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$ в $\mathcal{M}$ е изоморфно на $\mathcal{F}^n_0$.- Множеството от естествените трансформации между реализиращи функтори от $V''^n_{\mathcal{F}}$ към $\mathcal{M}$, е категория, изоморфна на $\mathcal{F}^n$.

Доказателствата на тези две твърдения се извършват по методите указани в [16] и не са никак тривиални, но за нас са помощни и няма да се спираме на подробностите.

По аналогичен начин, като се тръгва от известната структурна скица за категория в нейния вариант от [21] се строят структурните скици $\mathcal{M}^{(n)}_{\mathcal{F}}$ за (n)-категориите, $\mathcal{M}^{[n]}_{\mathcal{F}}$ за полиадичните категории от ред n и $\mathcal{M}^{\langle n\rangle}_{\mathcal{F}}$ за n-кратните категории; от тях следват резултати сходни на тези от (2.2.2.) и (2.2.3); подробностите не са интересни сами по себе си, а конструкциите са твърде близки до тези за $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$.

Чрез структурните скици, структурите дефинирани в 2.1. могат да бъдат причислени към един клас от алгебрични структури, за които са в сила някои общи теореми.

Нека $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$ е множество от категории; нека означаваме с $\bar{e} \in \mathcal{F}$ константния функтор върху даден обект означаван с е и нека $(\hat{N}, \hat{\nu})$ е натурализирания каноничен функтор $\hat{N} : \hat{\eta}' \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}\ ,\ \hat{\nu} : \hat{\eta}'_0 \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}$. С тези означения и като следвахе подхода от [18] , въвеждаме следното определение:

(2.2.4) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще наричаме n-проективна алгебрична скица всяка наредена тройка

$$\sigma = (V^{\cdot}, M, (A_{K^{\cdot}}; K^{\cdot} \in J)),$$

за която са удовлетворени следните условия (аксиоми):

1^{0}. $V^{\cdot}$ е мултипликативен граф и $\hat{\nu}(V^{\cdot})$ е инжективен функтор;

2^{0}. M е множество от мономорфизми в графа $V^{\cdot}$;

3^{0}. $A_{K^{\cdot}}$ е семейство от естествени трансформации от константен функтор, към функтори от $V^{\cdot}.\mathcal{F}$. $K^{\cdot} \in \mathcal{F}$ и такива, че ако $(\Phi, \Psi, \bar{e}) \in A_{K^{\cdot}}$, функтора $\boxminus\hat{\nu}(V^{\cdot}).\Psi$ дефинира $\hat{\nu}(V^{\cdot})(e)$ като проективна граница на $\hat{\nu}(V^{\cdot}).\Phi \in \mathcal{F}$.

Всяка алгебрична n-проективна структурна скица е частен случай на скица на математическа структура по [16] .

Като допълнение към (2.2.4) имаме

(2.2.5) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще наричаме n-проективна алгебрична структура всеки неофуктор Φ от $V^{\cdot}$ за който е в сила условията

$$\Phi(M) \subset R_{g}(\mathcal{M}) \quad \text{и} \quad \boxminus\Phi.\Psi \in \mathcal{H}_{K^{\cdot}}(\mathcal{M}), \quad K^{\cdot} \in J,$$

където $\boxminus\Phi: \boxminus V^{\cdot} \longrightarrow \boxminus\mathcal{M}$ е разширението на Φ върху категориите $\boxminus V^{\cdot}$ и $\boxminus\mathcal{M}$ от комутативни квадрати над $V^{\cdot}$ и $\mathcal{M}$.

Ще докажем следното важно твърдение:

(2.2.6) ТЕОРЕМА. Елементите на множеството $\mathcal{V}_{0}$ ($\mathcal{V} = \mathcal{U}^{n}, \mathcal{U}^{(n)}, \mathcal{U}^{\langle n\rangle}, \mathcal{U}^{[n]}$) са проективни алгебрични структури.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека припомним, че всеки функтор от коя да е малка категория към $\mathcal{M}$ допуска проективна граница в $\mathcal{M}$. Както се вижда от структурните скици $\mathcal{M}^{n}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{M}^{(n)}_{\mathcal{F}}$, , $\mathcal{M}^{[n]}_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{M}^{\langle n\rangle}_{\mathcal{F}}$ на n-арните категорни структури, множеството M съвпада с $\{\zeta_{0}, \zeta, \zeta'\}$ за $\mathcal{M}^{n}_{\mathcal{F}}$ и има сходно съдържание за останалите структурни скици; множеството се състои от едноелементните и двуелементни категории, които дефинират $e_0, e, \bar{e}$, и $\bar{\bar{e}}$, последните две като проективни граници от типа на призведенията; накрая $V^{\cdot}_{\mathcal{F}}$ е по построение мултипликативен граф; естествените трансформации, които са определени за функторите към $V^{\cdot}_{\mathcal{F}}$ очевидно удовлетворяват изискването да бъдат насочени към константен функтор; заедно с допълнителното положение, че $\bar{e}$ и $\bar{\bar{e}}$ са проективни граници (произведения във $V^{\cdot}_{\mathcal{F}}$) условие 3^0 от (2.2.4) е удовлетворено. Заключаваме, че структурната скица $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$ е проективна алгебрична структурна скица за $\mathcal{I} = \{0, 1, 2\}$ съгласно (2.2.4). Всяка реализация на структурната скица дефинирана съгласно (2.2.5) трансформира M в множество от мономорфизми; но съгласно (2.2.2) последното свойство е удовлетворено за реализациите на $\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}$ като n-категории, следователно n-категориите са проективни алгебрични структури. Аналогично е положението за структурите дефинирани от скиците $\mathcal{M}^{(n)}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{M}^{[n]}_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{M}^{\langle n\rangle}_{\mathcal{F}}$.

Като следваме терминологията и означенията от [18], наричаме тип $T(\mathcal{M}^n_{\mathcal{U}})$ на $\mathcal{M}^n_{\mathcal{U}}$, свободната категория съпоставена на $\mathcal{M}^n_{\mathcal{U}}$, т.е. свободната категория над подлежащия ориентиран граф за $V^{\cdot n}_{\mathcal{U}}$, в сила е следното важно твърдение:

(2.2.7) ТЕОРЕМА. За $T(\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}})$, $T(\mathcal{M}^{(n)}_{\mathcal{F}})$, $T(\mathcal{M}^{[n]}_{\mathcal{F}})$ и $T(\mathcal{M}^{\langle n\rangle}_{\mathcal{F}})$ е в сила следната диаграма на включване като подкатегории

$$\begin{tikzcd}
 & & T(\mathcal{M}^{[n]}_{\mathcal{F}}) \arrow[dl] & \\
T(\mathcal{M}^{(n)}_{\mathcal{F}}) & T(\mathcal{M}^n_{\mathcal{F}}) \arrow[l] & & T(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & T(\mathcal{M}^{\langle n\rangle}_{\mathcal{F}}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

За да построим доказателството на (2.2.7) ще припомним едно определение и ще докажем една лема.

Нека $H^{\cdot}$ и $K^{\cdot}$ са категории, нека е даден функтора $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$; ако $g \in K$ полагаме $e = \alpha(g^{\cdot})$.

(2.2.8) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че $s \in H_0^\cdot$ е *свободна р-структура* за $e \in K_0^\cdot$, ако $p(s) = \beta(g)$ и ако е удовлетворено следното условие:

за всяко $s' \in H_0^\cdot$ и всяко $g' \in p(s').K.\alpha(g)$ съществува единствен морфизъм $h \in s'.H.s$, такъв че $p(h).g = g'$.

Така даденото определение е илюстрирано на фиг. 2.5.

С означенията от (2.2.8) имаме следната:

(2.2.9) ЛЕМА. Нека за $e'', e \in K_0^\cdot$ съществува мономорфизъм $j : e'' \longrightarrow e \in \mathcal{R}g(K^\cdot)$; нека още $\bar{s} \in H_0^\cdot$ е свободна р-структура за $e'' \in K_0^\cdot$ и $s \in H_0^\cdot$ е свободна р-структура за $e \in K_0^\cdot$ относно $g \in K$. Съществува $f \in s . \mathcal{R}g(H^\cdot) . \bar{s}$. △

Д о к а з а т е л с т в о на (2.2.7). По построение

$$\begin{tikzcd}
 & & (V_{\mathcal{F}}^{[n]})^\cdot \arrow[dl] & \\
(V_{\mathcal{F}}^{(n)})^\cdot & (V_{\mathcal{F}}^{n})^\cdot \arrow[l] & & V_{\mathcal{F}}^\cdot \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & (V_{\mathcal{F}}^{\langle n\rangle})^\cdot \arrow[ul] &
\end{tikzcd} ;$$

в съответствие с (2.2.9) и тъй като всички посочени в диаграмата по-горе функтори са инжективни, за свободните р-структури на $V_{\mathcal{F}}^\cdot, \dots, (V_{\mathcal{F}}^{(n)})^\cdot$ имаме

$$\begin{tikzcd}
 & & T(V_{\mathcal{F}}^{[n]}) \arrow[dl] & \\
T(V_{\mathcal{F}}^{(n)}) & T(V_{\mathcal{F}}^{(n)}) \arrow[l] & & T(V_{\mathcal{F}}^\cdot) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & T(V_{\mathcal{F}}^{\langle n\rangle}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd} ,$$

като всички функтори и в тази диаграма са инжективни. △

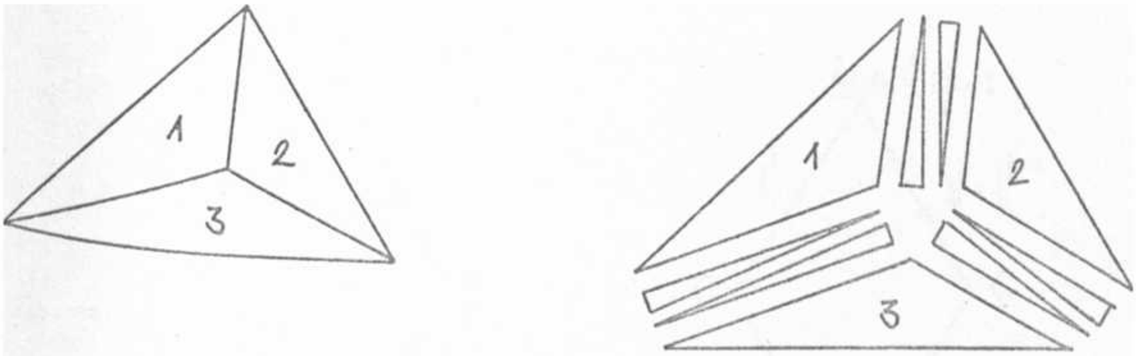
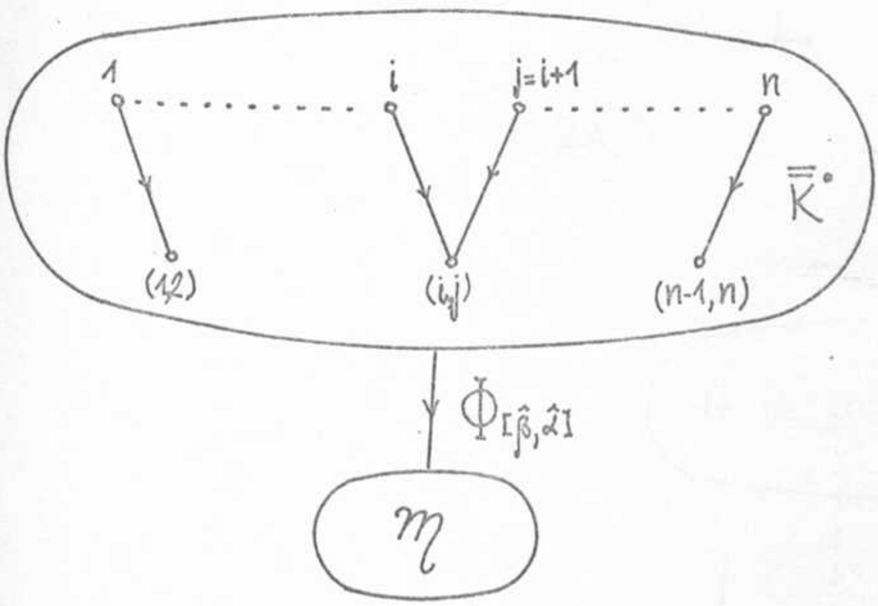

1
2
3
1
2
3

fig. 2.1


1
i
j=i+1
n
(1,2)
(i,j)
(n-1,n)
$\overline{\overline{K}}^{\circ}$
$\Phi_{[\hat{\beta},\hat{\alpha}]}$
$\mathfrak{M}$

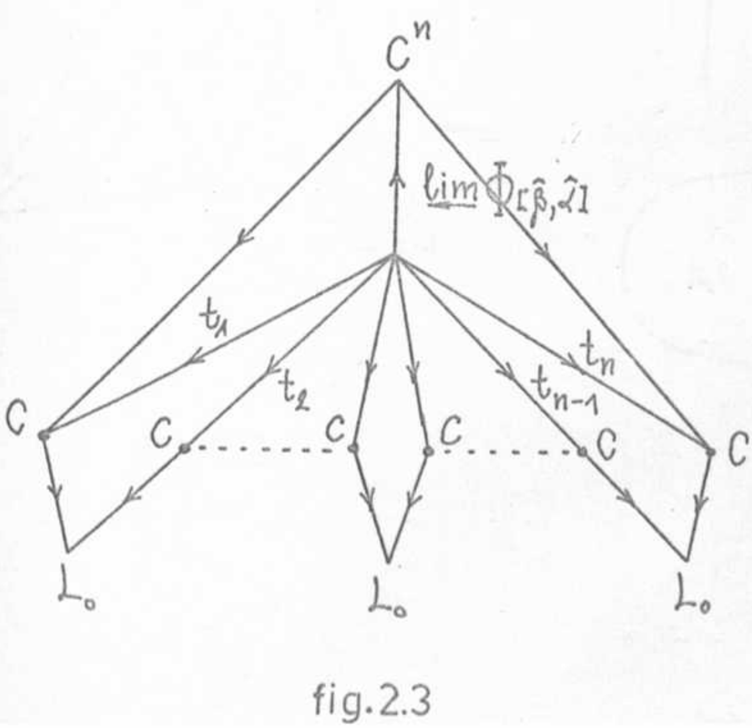

C^n
$\underline{\lim}\,\Phi_{[\hat{\beta},\hat{\alpha}]}$
t_1
t_2
t_n
t_{n-1}
C
C
C
C
C
C
L_0
L_0
L_0

fig.2.3

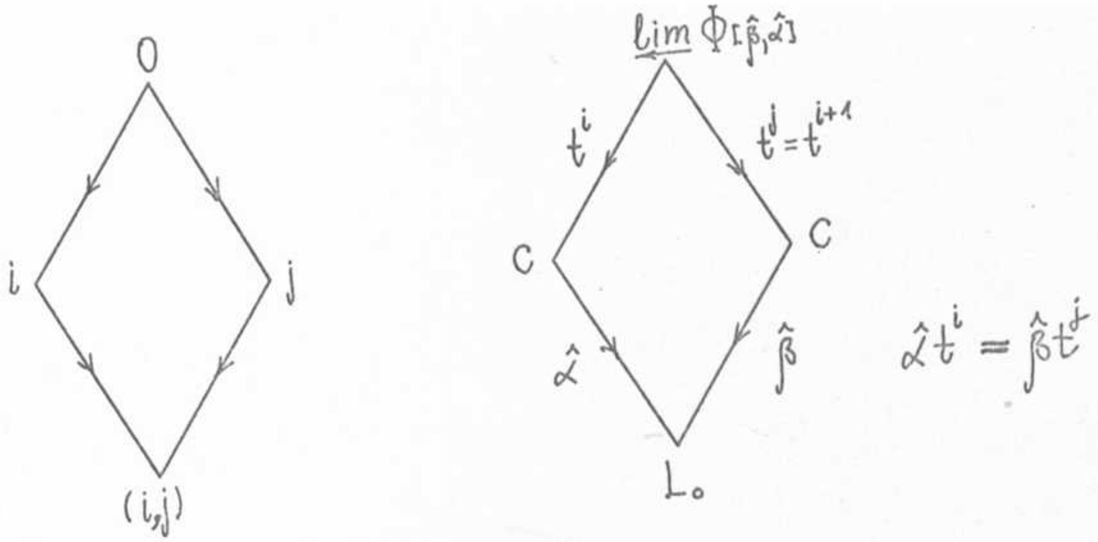


fig. 2.4

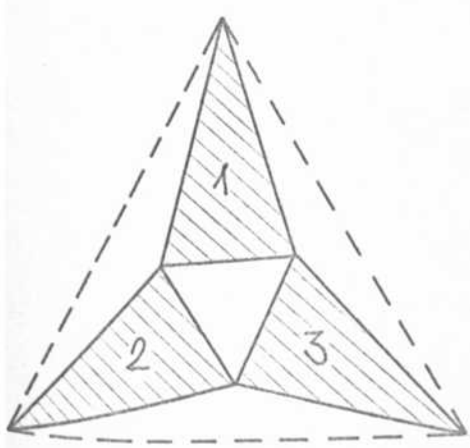


fig. 2.2

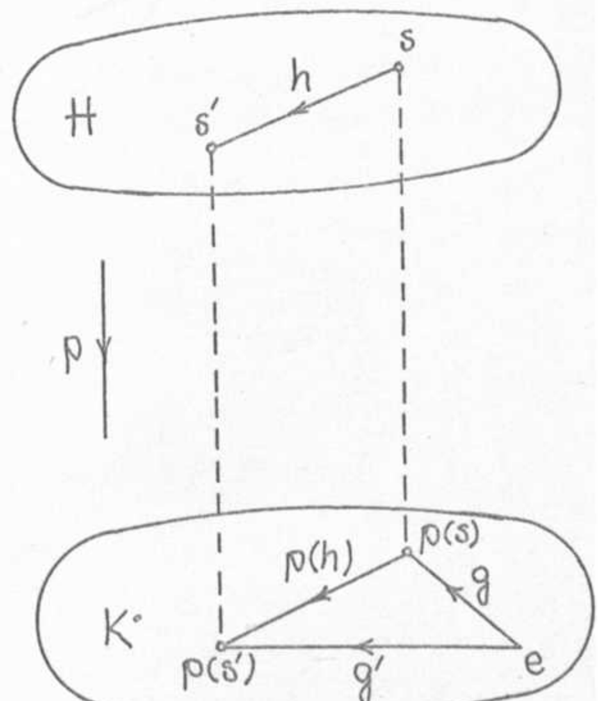


fig. 2.5

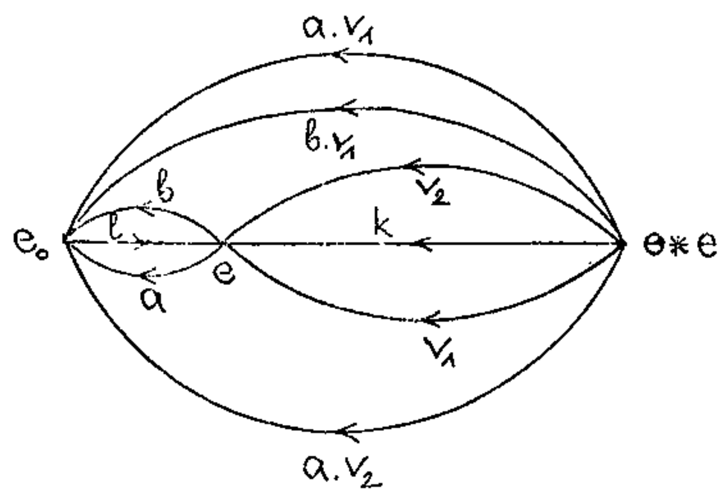


fig. 2.6

2.3. Класификационна теорема

В параграф 2.1. дефинирахме четири типа $\{n\}$-категории. Възниква естествения въпрос: съществуват ли други n-арни обобщения на категориите, различни от вече дефинираните?

Този въпрос очевидно изисква прецизиране. Една n-арна категорна структура се характеризира с няколко черти: n-арен композиционен закон, полюси съпоставени на всеки елемент от носителя и свързани с арността на основния композиционен закон, условия за композируемост, основани на обобщение на класическата катенарност (идентификация на два от полюсите на два елемента). В този смисъл асоциативността и единиците не са съществени характеристики за n-арните категорни структури. Нека отбележим също така, че за всяка "категорна структура" се предполага "диагонална симетрия" на подлежащия ориентиран граф ((n)-граф, n-граф, полиадичен ориентиран граф или класически ориентиран граф)). Оттук следва, че проективната граница в $\mathcal{M}$, чрез която е дефинирано множеството от композируемите двойки или n-орки е също така "симетрича" в указания смисъл.

Ще докажем следното твърдение:

(2.3.1) ТЕОРЕМА. Всички видове n-арни категории се изчерпват с дефинираните в (2.1.1), (2.1.5), (2.1.9) и (2.1.14) n-арни алгебрични структури.

Д о к а з а т е л с т в о. Въпросите на асоциативността и на единичните редици са второстепенни, тъй като не засягат n-арния композиционен закон и неговото дефиниционно множество; поради това ще се ограничим до неасоциативните $\{n\}$-квази-категории. Нека разгледаме структурната скица $\mathcal{M}''_{\mathcal{F}}$ на неасоциативната квази-категория, чиято база е показана на фиг. 2.6; нека заменим закона κ' със закона κ_n', т.е. да преминем към n-арен композиционен закон, първи белег на n-аризацията и към ориентиран граф, дефиниран от една матрица от изображения $u_i^j : C \longrightarrow C_0$, които определят полюсите на $x \in C$, композируеми по условие с елемента x при определен начин на подбиране.

За указаните четири типа обобщения на категориите при n-арния случай всички условия на теоремата и свързаните с тях уточнявания на понятията са очевидно удовлетворени (структурите действително обобщават скицата на категория и са дефинирани като алгебрични проективни структури).

Нека допуснем, че е дадена n-арна категорна структура с носител C и че нейния основен n-арен композиционен закон е неприводим (вж. (1.2.5)); нека допуснем, че на всеки елемент $x \in C$ са съпоставени точно p полюса, които да бъдат различни или не. Тогава една композируема в структурата n-орка има точно $n.p$ полюса и следователно броят на уравненията, чрез които е построена катенарността, а оттам и условията за композируемост е точно $\frac{1}{2}(n-1).p$ (ясно е, че това налага едно първо ограничение за четност поне на един от множителите, което впрочем малко по-късно ще загуби смисъл). По определение изследваните структури трябва да бъдат проективни, т.е. уравненията за катенарността да дават канонична конструкция на функтор, чиято граница в $\mathcal{M}$ да бъде подмножество на C^n. Това обаче е възможно (на подробностите по това утвърждение няма да се спираме, вж. [16], [18], [19], [26] (само при $p = n$ или $p = n(n-1)$. Тогава попадаме на случаите на n-категория (ако $p = n$) и на (n)-категория (ако $p = n(n-1)$). В частност, ако при втория случай имаме още идентификация на всички $u_i^j(x) = e$ за $i < j$ и $u_i^j(x) = e''$ за $j < i$, получаваме след подходящо идентифициране на изображенията u_i^j случая на полиадичните категории. Други случаи от класът на неприводимите n-арни алгебрични категорни структури няма.

Нека сега допуснем, че подлежащия n-арен оператив (n-оператив) е приводим (в смисъла на (1.2.5)). Възможни са два различни по същество случаи:

I. n-арния композиционен закон се представя чрез семейство от к на брой двучленни частично определени композиционни закони, които в общия случай са различни; очевидно $n = 2^к$; възможен е единствен случай, при който всяка "елементарна" структура е категория, а n-арната структура е κ-кратна категория, чиято арност ще бъде очевидно n. Тогава непресекателната сума от проективни граници, която образува множеството от композируемите n-орки е също така проективна граница, а подлежащия κ-кратен ориентиран граф е очевидно симетричен, тъй като е съставен от симетрични двучленни ориентирани графи.

II. Нека сега n-арния композиционен закон е приводим на семейство от композиционни закони $(к_p; p \leq r)$, чиято арност е такава, че $\bigcup_{p \leq r} A(к_p) = n$, като има поне един с арност $A(к_p) \neq 2$. Тогава имаме, че всеки оператив дефиниран от един от посочените композиционни закони от представящото семейство има структурата на категория или на едно от нейните три обобщения; за да бъде суперпозицията n-арна категорна структура е необходимо композиционните закони да удовлетворяват условието за комутативност в смисъла на (4.5.1) (за да не прекъсваме изложението тук с въпросите на структуризирането на "тежки" алгебрични структури, ние препращаме към глава 4; понятието комутативност в случая е по-общо от възприетото в алгебрата); но следователно нещата се свеждат до неприводимите случаи и до условия за "суперпозиция" на структурите. Δ

Привеждането на подробното (твърде дълго) доказателство на това твърдение е практически невъзможно. Единственият интересен тук въпрос е свързан с възможностите за построяване на категория и на функтор към $\mathcal{M}$, канонично съпоставени на подлежащия граф, така че да се получи проективна граница подмножество на C, но той произтича (макар и далеч не непосредствено) от общата теория.

Напълно възможно е (вж. в края на този параграф, коментара след (2.3.2)) да се построи частична универсална алгебра с един n-арен композиционен закон и с подлежащ $\{n\}$-граф която да не бъде в посочената тук класификация, но тя няма да бъде проективна алгебрична структура. Изследването на тези случаи обаче не е лишено от интерес, въпреки че ние не разполагаме с убедителни примери свързани с тях, нито с теореми които ги характеризират алгебрически.

Ние се ограничихме в (2.3.1) само до неасоциативните квази-$\{n\}$-категории. Оправдание за това дава следният не особено съществен сам по себе си резултат, развит по-нататък само за случая на n-категориите.

Нека $C^{\cdot}$ е квази-n-категория, $C \in \mathcal{M}_0$ и $\hat{C} = C \cup C_0$; идентифицираме C на една част от $\hat{C}$ и полагаме $\hat{e} = (C, e)$. Нека изображението $\gamma : \hat{C} \longrightarrow C$ е дефинирано както следва:

$$f \longmapsto f \quad \text{ако} \quad f \in C \quad \text{и} \quad \hat{e} \longmapsto e \; ;$$

нека още положим, $U = (\hat{u}_i \, ; i \leq n)$, където имаме

$$\hat{u}_i(f) = \widehat{u_i(f)} \text{ ако } f \in C \quad \text{и} \quad \hat{u}_i(e) = \hat{e} \text{ ако } e \in C_0 .$$

С тези означения имаме:

(2.3.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Наредената двойка $(\hat{C}, \hat{U})$ е n-граф.-Наредената тройка $(C, \hat{U}, \hat{K}'_n)$, относно композиционния закон $\hat{K}'_n$ определен така че да имаме

$$\hat{K}'_n(\hat{m}) = \hat{K}'_n(m) \text{ ако } \gamma^n(\hat{m}) = m \in \overset{n}{\times} C^{\cdot} \text{ и } \hat{m} \neq (\hat{U}(f), f)_j ,\ j \leq n ;$$

$$\hat{K}'_n(\hat{m}) = f \text{ ако } \hat{m} = (U(f), f)_j \ , \ \gamma^n(\hat{m}) \in \overset{n}{\times} C^{\cdot}_n \cap \prod_{i=1}^{n} C_i \ ,$$

където $C_i = C_0$ ако $i \neq j$ и $C_j = C$ е n-категория.

Д о к а з а т е л с т в о. Първата част следва от определенията.- Съгласно конструкцията, $\hat{K}_n'$ е частично определен вътрешен n-арен композиционен закон, така че $(\hat{C}, K_n')$ е n-клас и аксиомата $(\overline{K.1})$ е удовлетворена. По аналогични съображения е удовлетворена аксиомата $(\overline{K.2})$. Очевидно е, че тъй като рестрикцията на $\hat{K}_n'$ към елементи от вида $\hat{m} \neq (\hat{U}(f), f)$ е композиционния закон за n-квази-категорията, аксиомата $(\overline{K.3})$ е също удовлетворена за множеството от композируемите n-орки. Второто дефиниционно равенство за $\hat{K}_n'$ е по същество аксиомата за единичност на редицата $\hat{U}(f)$, тъй като $f^n(\hat{m}) \in \overset{n}{\ast} C_n^{\bullet} \cap \prod_{i=1}^{n} C_i$ означава че елементите на $\hat{U}(f)$ са елементи от множеството C_0, а всяка n-редица $(U(f), f)_j$, $j \leq n$, е композируема в n-квази-категорията $C_n^{\bullet}$, т.е. аксиомата $(\overline{K.4})$ е удовлетворена. Въпросът за n-арната асоциативност е решен автоматично от факта че $C_n^{\bullet}$ е квази-n- категория, т.е. асоциативна n-арна категорна структура. $\triangle$

Нека отбележим, че тук проличава разликата между случаите $n = 2$ и $n > 2$. В една n-категория например, κ_n може да бъде продължен до композиционен закон K_n', като положим:

$$K_n'(m) = K_n'(m) \qquad \text{ако } m = (f_i; i \leq n) \in \overset{n}{\ast} C,$$

$$K_n'(U(f), f)_j = f, \; j \leq n, \qquad \text{ако } f \in C.$$

Това построение означава усилване на (К.4). Обаче ако $n > 2$, дефиниционното множество $\alpha(K_n')$ на K_n' в общия случай не е проективна граница на един функтор и наредената тройка (C, U, K_n') е n-категория тогава и само тогава, когато

$$u_i = u \qquad \text{за всяко } i \leq n.$$

3. СВОЙСТВА НА n -АРНИТЕ КАТЕГОРНИ СТРУКТУРИ

Обект на тази глава са някои от класическите въпроси за въведените n -арни категории структури; следван е по принцип пътя, посочен в [11] , [40] , [44] . Най-напред се изучават особеностите на подструктурите и факторструктурите. Доказани са някои класически резултати за хомоморфизмите и изоморфизмите на алгебричните структури, които в общия случай на частичните универсални алгебри не са изследвани или не са в сила. Особено внимание е обърнато на някои страни от теорията на свободните n -арни категорни алгебрични структури, като е дадена също така универсална експлицитна конструкция на свободна n -арна категорна структура. Краят на тази глава е посветен на специфичния за n -арните алгебрични структури проблем за покриващите бинарни структури и представимостта им; този въпрос, известен за n -групите [1] , [50] и някои класи от n -оперативи [29] , [36] , [48] , намира естествено развитие.

3.1. Подструктури и фактор-структури на n -арните категорструктури. Основни свойства и теореми

Понятието за подструктури на една n -арна категорна структура се въвежда по стандартен начин:

(3.1.1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че $\bar{C}^{\cdot}_{(n)}$ е под-(n)-категория на (n)-категорията $C^{\cdot}_{(n)}$, ако са изпълнени следните условия:

/а/ $\overline{C}^{\cdot}_{(n)}$ е (n)-категория, относно индуцирания композиционен закон;

/б/ $\overline{u}^{j}_{i} \in V \left([C^{\cdot}_{(n)}]\right)$ за $i, j \leq n$ е рестрикция на $u^{j}_{i} \in V \left([C^{\cdot}_{(n)}]\right)$. Ако от $(e^{j}_{i};\ j, i \leq n) \in \left(C^{\cdot}_{(n)}\right)_{o}^{n(n-1)}$ следва, че всяко $f \in C$ такова че $u^{j}_{i}(f) = e^{j}_{i},\ i, j \leq n$ принадлежи на $\overline{C}$, тогава под-(n)-категорията ще наричаме <u>пълна.</u> Ще наричаме <u>под-(n)-категория на $C^{\cdot}_{(n)}$, породена от $B \subset C$</u> най-малката под-(n)-категория, която съдържа B.

По същия начин се дефинират под-n-категориите, под-n-кратните категории и полиадичните подкатегории от ред $n \in \mathbb{N}$.

В сила са следните резултати, формулирани за под-(n)-категориите, но в сила за всички n-арни категорни структури.

(3.1.2.) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $B \subset C$ дефинира под-(n)-категория на $C^{\cdot}_{(n)} \in \mathcal{F}^{(n)}_{o}$ тогава и само тогава, когато са изпълнени условията:

/а/ B е устойчиво в $C^{\cdot}_{(n)}$ относно K'_{n};

/б/ $u^{j}_{i}(B) \subset B$ за всички $i, j \leq n,\ i \neq j$. $\triangle$

(3.1.3). ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ако Г е семейство от под-(n)-категории на $C^{\cdot}_{(n)} \in \mathcal{F}^{(n)}_{o}$, сечението $\cap Г = B$ е под-(n)-категория. Ако Г е образувано от пълни под-(n)-категории на $C^{\cdot}_{(n)}$, тогава $\cap Г$ е също така пълна под-категория на $C^{\cdot}_{(n)}$.

(3.1.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Под-(n)-категорията $B^{\cdot}_{(n)}$

на $C^{\cdot}_{(n)}$, породена от Н се състои от всички композиции с дължина к $(n-1)+1$, $k \in \mathbb{N}$, на композируеми редици от елементи на множеството

$$H \cup \{ \bigcup_{i,j \leq n} u_i^j (H) \}. \triangle$$

Нека е даден забравящият функтор $p_{\mathcal{V}} = (\mathcal{M}, P_{\mathcal{V}}, \mathcal{V})$ от категорията $\mathcal{V}$ /за означението вж. 2.2., началото/ към категорията на изображенията $\mathcal{M}$. С означенията от [74], имаме:

(3.1.5). ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Всеки мономорфизъм на $\mathcal{V}$ е $P_{\mathcal{V}}$ -мономорфизъм. Ако $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{F}_0^{\{n\}}$ и ако $\emptyset \neq B \subset C$, то В дефинира $p_{\mathcal{V}}$ - подструктура на $C^{\cdot}_{\{n\}}$, тогава и само тогава когато

/1/ В е устойчиво в $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно n-арния частичен композиционен закон;

/2/ $V(B) \subset B. \triangle$

Аналогията с (3.1.2) е очевидна, но (3.1.5) е по-богат резултат, свързан с функтора $p_{\mathcal{V}}$.

Нека сега $P^{\{n\}}_{\mathcal{N}''} = (\mathcal{M}, P^{\{n\}}_{\mathcal{N}''}, \mathcal{N}'')$ е функтор на забрава от $\mathcal{N}''$ към $\mathcal{M}$.

(3.1.6) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ако $H^{\cdot}_{(n)} \in \mathcal{F}_0^{\{n\}}$ и ако r е отношение на еквивалентност върху $H \in \mathcal{M}_0$, тогава съществува $(\mathcal{U}^{\{n\}}, P^{\{n\}}_{\mathcal{N}''})$ - квази-фактор-структура на $H^{\cdot}_{\{n\}}$ относно $r. \triangle$

Използуваното тук понятие за квази-фактор структура е по [24]. Доказателството на (3.1.6) произтича от теоремата за съществуване на квази-фактор структури относно даден функтор, тъй като се доказва /вж. 4.2/, че

$P_{\hat{U}}^{\{n\}} = (\hat{\mathcal{M}}, P_{\hat{U}}^{\{n\}}, \hat{U}^{\{n\}}) \in \hat{\mathcal{F}}$, асоцииран на един универсуум $\hat{\mathcal{M}}_0$ такъв че $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ и $\mathcal{M}_0 \subset \hat{\mathcal{M}}_0$ е изброимопораждащ, разрешаващ от дясно и с $\hat{\mathcal{M}}_0$-произведения.

Нека $H^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$

(3.1.7) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че отношението на еквивалентност r върху $H \in \mathcal{M}_0$ е <u>съвместимо върху</u> $H^{\cdot}_{\{n\}}$, ако u_i^j е съвместимо с r за всички $i, j \in n, i \neq j$ и ако от условията

$$\xi \in \mathcal{L}(K'n),\ \xi' \in \mathcal{L}(K'n),\ g_i \sim g_i' \bmod r,\ i \in n$$

$g_i \in \xi, g_i' \in \xi'$, следва $K_n'(\xi) \sim K_n'(\xi') \bmod r$. – Ако $\bar{r}$ е отношение над $H \in \mathcal{M}_0$ сечението на всички съвместими над $H^{\cdot}_{\{n\}}$ отношения на еквивалентност, които съдържат $\bar{r}$ ще наричаме <u>отношение на еквивалетност съвместимо над</u> $H^{\cdot}_{\{n\}}$ <u>и породено от</u> $\bar{r}$.

В сила са следните резултати, свързани с (3.1.7):

(3.1.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Сечението на семейство от отношения на еквивалентност над $H \in \mathcal{M}_0$, съвместими върху $H^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$ е отношение на еквивалентност съвместимо върху $H^{\cdot}_{\{n\}}$. $\triangle$

(3.1.9) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Необходимото и достатъчно условие, за да съществува $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$-фактор-структура $H_{\{n\}}/r$ на $H^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$ относно отношението на еквивалентност r над $H \in \mathcal{M}_0$ е r да бъде съвместимо с $H^{\cdot}_{\{n\}}$ отношение на еквивалентност.

Д о к а з а т е л с т в о. Без да ограничаваме общността, ще допуснем, че $\{n\} = (n)$; случая $\{n\} = n$ се получава съгласно (2.1.6), а случаите $n = [n]$, $\langle n \rangle$ елементарни. Нека допуснем, че отношението r е съвместимо с $H^{\cdot}_{(n)}$ и нека $\tilde{r}: f \longrightarrow f \bmod r$ е изображение на H върху H/r ; очевидно е, че $H^{\cdot}_{(n)}/r$ е n-клас и следователно $p^{(n)}_{\mathcal{N}}$ - фактор-структура на n-класът $H^{\cdot}_{(n)}$ относно r ; ако $f \in H$ и тъй като $((u^j_i(f);\ i, j \leq n,\ i \neq j),\ f)_j$ е композируема n-редица, то и редицата $(\tilde{r}(u^j_i(f);\ i, j \leq n,\ i \neq j),\ \tilde{r}(f)_j)$ е композируема и имаме $[((\tilde{r}(u^j_i);\ i, j \leq n,\ i \neq j,\ \tilde{r}(f)_j)] = \tilde{r}(f)$; от тук без трудности /вземат се елементи от класите на еквивалентност на полюсите $u^j_i(f)$ / се установява, че $u^j_i(f)$ са единични елементи, че съответните n-редици са единични редици за елемента $f \in H$ и че те са единствени единични редици в $H^{\cdot}_{(n)}/r$; следователно $H^{\cdot}_{(n)}/r$ е фактор-структура на $H^{\cdot}_{(n)}$ и тъй като $\mathcal{N}'^{n}$ е нейна пълна подкатегория, $H^{\cdot}_{(n)}/r$ е $p'^{n}_{\mathcal{F}}$-фактор-структура на $H^{\cdot}_{(n)}$ относно r .-Нека обратно, допуснем, че $\bar{H}^{\cdot}_{(n)}$ е $p^{(n)}_{\mathcal{F}}$-фактор-структура на $H^{\cdot}_{(n)}$ относно r ; тогава отношението $(\bar{H}^{\cdot}_{(n)},\ \tilde{r},\ H^{\cdot}_{(n)}) \in \mathcal{F}^{(n)}$ означава, че r е съвместимо върху $H^{\cdot}_{(n)}$ и съгласно началото на доказателството $H^{\cdot}_{(n)}/r$ е $p^{(n)}_{\mathcal{N}}$-фактор-структура на $H^{\cdot}_{(n)}$ относно r ; от тук непосредствено следва, че $\bar{H}^{\cdot}_{(n)} = H^{\cdot}_{(n)}/r$. △

(3.1.10) СЛЕДСТВИЕ. Ако $H^{\cdot}_{(n)} \in \mathcal{U}^{(n)}_{o}$ и ако r е отношение на еквивалентност над $H \in \mathcal{M}_o$ съвместимо върху $H^{\cdot}$, породено от отношението (H, A, H), такова че

$$e,\ e'' \in \left(H^{\cdot}_{(n)}\right) \text{ и } (e,\ e'') \in A \Longrightarrow e = e'',$$

съществува $p^{(n)}_{\mathcal{U}}$-фактор-структура $H^{\cdot}_{(n)}/\bar{r}$ на $H^{\cdot}_{(n)}$ относно $\bar{r}$, за която

$$(H^{\cdot}_{(n)}/\bar{r})_0 = (H^{\cdot}_{(n)})_0 . \triangle$$

(3.1.11) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}^{\{n\}}_o$ и нека r е отношение на еквивалентност над $C \in \mathcal{M}_o$, съвместимо върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$. Структурата $C^{\cdot}_{\{n\}}/r$ е мултипликативен $\{n\}$-граф. – $\nu(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$ е фактор- $\{n\}$ -категория, ако $\hat{\nu}(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$ е суржекция на $C^{\cdot}_{\{n\}}/r$ върху обекта $\nu(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$. $\triangle$

Нека по повод на (3.1.11) припомним, че наредената двойка $(\nu, \hat{\nu})$ е натурализиран функтор в $\mathcal{N}^{\{n\}}$ съгласно [10] .

(3.1.12) ТЕОРЕМА. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{F}_0^{\{n\}}$ и нека r е отношение на еквивалентност над $C \in \mathcal{M}_0$. За да бъде $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{F}_0^{\{n\}}$ фактор-структура на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r, е необходимо и достатъчно r да бъде съвместимо върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и $\hat{\nu}(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$ да бъде бижекция на $C^{\cdot}_{\{n\}}/r$ върху $\nu(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$. Ако такъв случай е налице, то $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е еквивалентна на $\nu(C^{\cdot}_{\{n\}}/r)$. $\triangle$

Както при категориите в класически смисъл, от това че $(\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}, \underline{\Phi}, C^{\cdot}_{\{n\}})$ е $p^{\{n\}}_{\mathcal{F}}$ -суржекция не следва, че същата е и $p^{\{n\}}_{\mathcal{N}'}$ -суржекция. Това дава основание за следното:

(3.1.13) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е <u>точна фактор-$\{n\}$-категория</u> на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно съвместимото отношение на еквивалентност r ако $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е фактор- $\{n\}$ -категория на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r и ако $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е $p^{\{n\}}_{\mathcal{N}'}$ -фактор-структура на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r .

(3.1.14) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}}$ е $\{n\}$-категория и нека r е отношение на еквивалентност върху $C \in \mathcal{M}_0$. За да съществува точна фактор- $\{n\}$ -категория $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r е необходимо и достатъчно r да бъде съвместимо върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и да имаме $(C^{\cdot}_{\{n\}}/r, \tilde{r}, C^{\cdot}_{\{n\}}) \in \mathcal{F}^{\{n\}}$ където $\tilde{r}(f) = f \bmod r$ за всяко $f \in C$. В този последен случай имаме

$$\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} = C^{\cdot}_{\{n\}}/r \,. \triangle$$

(3.1.15) СЛЕДСТВИЕ. Една $\{n\}$-категория $C^{\cdot}_{\{n\}}$ допуска точна фактор-$\{n\}$-категория относно отношението на еквивалентност r тогава и само тогава, когато отношението r е съвместимо върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и $C^{\cdot}_{\{n\}}/r$ е $\{n\}$-категория. $\triangle$

Чрез фактор-структурите се строи един интересен резултат за проекциите, в смисъла на [15], на неасоциативни квази-$\{n\}$-категории. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}}=(C,\ V,\ \kappa'_n) \in (\mathcal{N}''_n)_0$; и нека е дадено отношението $r^{\{n\}}_{\mathcal{F}'} =(C,\ A_{\mathcal{F}'\{n\}},C)$, където $A_{\mathcal{F}'\{n\}}$ е множеството от двойките (h,h'), удовлетворяващи условията:

съществуват елементи $f_j \in C$ за всички $j \leq 2n-1$, и $i' \leq n,\ i'' \leq n$, такива че $f^i=(f_j;\ i \leq j < i+n) \in \times C^{\cdot}_{\{n\}}$ за $i \leq n$ и $h=\kappa'_n(g^{i'}_i;\ i \leq n)$ и $h'=\kappa'_n(g^{i''}_i;\ i \leq n)$;

тук за $m=i,\ i''$ сме положили

$$g^m_i=h \quad \text{ако } i<m,\quad g^m_m=\kappa'_n(f^m),\ g^m_i=f_{i+n-1} \text{ ако } m<i\leq n.$$

Нека $\bar{\bar{r}}^n_{\mathcal{U}}$ е отношение на еквивалентност съвместимо над $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и породено от $r_{\mathcal{U}}$. Тогава:

(3.1.16) ТЕОРЕМА. $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}^{\{n\}}_0$ допуска за $(\mathcal{U}^{\{n\}},\ \mathcal{N}''_{\{n\}})$ - проекция $p^{\{n\}}_{\mathcal{N}''}$ -фактор-структурата на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно $\bar{\bar{r}}_{\mathcal{U}}$ ако $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{F}^{\#}_{\{n\}0}$ и $\mathcal{U}^{\{n\}} \subset \mathcal{F}^{\#}_{\{n\}}$. $\triangle$

За фактор-структурите при частични n-арни композиционни закони могат да бъдат доказани още много резултати. Но за това изследване те не представляват самостоятелен интерес.

Нека $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}^{\{n\}}_0$ и нека $\mathcal{B}_{\{n\}}(C)$ е множеството от под-$\{n\}$-категориите на $C^{\cdot}_{\{n\}}$. Като използуваме терминологията от [11] и [97] и адаптираме означенията, получаваме:

(3.1.17) ТЕОРЕМА. Системата $\mathcal{B}_{\{n\}}(C)$ е алгебрически затворена и следователно е пълна решетка от вида ($\mathcal{B}_{\{n\}}(C), \leq$). $\triangle$

Подобна теорема е в сила за универсалните алгебри; за частичните алгебри в общия случай не е вярна. Това твърдение при универсалните алгебри допуска "обръщане", но при частичните алгебри и в частност при $\{n\}$-категориите обръщане не може да се получи.

Нека означим с $\mathcal{E}_{\{n\}}(C)$ множеството от всички конгруенции, т.е. съвместимите над $C^{\cdot}_{\{n\}}$ отношения на еквивалентност над $C \in \mathcal{M}_o$. Имаме следното твърдение:

(3.1.18). ТЕОРЕМА. Множеството от конгруенциите $\mathcal{E}_{\{n\}}(C)$ на $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ е алгебрически затворена система. $\triangle$

В сила са няколко интересни следствия:

(3.1.19) СЛЕДСТВИЕ 1. $\mathcal{E}_{\{n\}}(C)$ за $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ е пълна решетка. $\triangle$

(3.1.20) СЛЕДСТВИЕ 2. Ако Г е отношение над $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$, а r е конгруенция над $C^{\cdot}_{\{n\}}$, тогава съществува най-малка конгруенция $\bar{r}$ над $C^{\cdot}_{\{n\}}$, удовлетворяваща условията

$$\bar{r} \supseteq r, \qquad \bar{r} \cap \Gamma = r \cap \Gamma$$

(3.1.21) СЛЕДСТВИЕ 3. Ако $\mathcal{R}^e(C)$ е решетката на отношенията на еквивалентност над $C \in \mathcal{M}_o$ и $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$, то $\mathcal{E}_{\{n\}}(C)$ е под решетка на $\mathcal{R}^e(C)$. $\triangle$

3.2. Теореми за изоморфизмите при $\{n\}$-категориите

Основните теореми за изображенията /вж. [5] / се пренасят върху универсалните алгебри /вж. [11] , [40]/ Опит за тяхното прилагане върху частичните универсални алгебри е направен от Г. Грецер [97] при силни ограничения. Тук са формулирани и доказани някои аналози за $\{n\}$-категориите на част от теоремите на Е. Ньотер за изоморфизмите.

Този параграф не съдържа принципиално нови резултати. Въпросът за пренасянето на теоремите на Е.Ньотер за изоморфизмите е подробно разгледан за универсалните алгебри в [7] и [27], а за частичните универсални алгебри, към които спадат и $\{n\}$-категориите, макар и в много непълна форма и при твърде сложни и неелегантни доказателства, в [24] и [40]. Тук извършваме известно прецизиране на резултатите на $\{n\}$-категориите, като заедно с това използуваме друга доказателствена техника, свързана с особеностите на условията за композируемост при въведените за $\{n\}$-категориите n-арни частични композиционни закони.

Нека r е конгруенция над $\dot{C}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$, т.е. отношение на еквивалентност съвместимо с композиционните закони в $\{n\}$-категориите, индуцирана от суржективния $\{n\}$-функтор Φ: $\dot{C}_{\{n\}} \to \dot{H}_{\{n\}} \in \mathcal{U}^{\{n\}}$. Тогава:

(3.2.1). ТЕОРЕМА, Фактор-$\{n\}$-категорията $\dot{C}_{\{n\}}/r$ е изоморфна на $\{n\}$-категорията $\dot{H}_{\{n\}}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Съществуването на фактор-$\{n\}$-категория е осигурено, тъй като тук са изпълнени условията на (3.1.14). Нека разгледаме каноничното изображение $\bar{\Phi}$: $C \longrightarrow C/r$, което съпоставя на всеки елемент $x \in C$ неговия клас на еквивалентност $[x]$ относно отношението на еквивалентност r; от композицията на класовете на еквивалентност в съответствие с индуцирания композиционен закон на $\dot{C}_{\{n\}}$, следва че $\bar{\bar{\Phi}}$ дефинира $\{n\}$-функтор $\bar{\bar{\Phi}} = (C^{\cdot}_{\{n\}}/r, \underline{\Phi}, C^{\cdot}_{\{n\}}) \in \mathcal{U}^{\{n\}}$ (каноничен $\{n\}$-функтор). Съгласно построението на r всички прообрази на $y \in H^{\cdot}_{\{n\}}$ относно Φ образуват клас на еквивалентност в $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r, което установява бижективно съответствие между H и C/r; от друга страна условията за композируемост в C/r са идентични с тези от $H^{\cdot}_{\{n\}}$, така че бижективното изображение дефинира единствен и обратим $\{n\}$-функтор $\bar{\Phi}$: $H^{\cdot}_{\{n\}} \longrightarrow C^{\cdot}_{\{n\}}/r$; от тук следва $\bar{\bar{\Phi}} = \bar{\Phi}.\Phi$, т.е. комутативност на диаграма от функтори. △

Ще имаме нужда от следните две леми:

(3.2.2) ЛЕМА. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}}$, $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ и $\bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}}$ са $\{n\}$-категории или еднотипни по-слаби структури, за $\{n\} = (n)$, n, $[n]$, $\langle n \rangle$, $H^{\cdot}_{\{n\}}$ – под-$\{n\}$-категория на $C^{\cdot}_{\{n\}}$, а Φ и $\bar{\Phi}$ – под-$\{n\}$-категории на $C^{\cdot}_{\{n\}} \times \bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ и $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \times \bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}}$. Тогава $\Phi.H^{\cdot}_{\{n\}}$, Φ^{-1} и $\Phi \circ \bar{\Phi}$ са под-$\{n\}$-категории на $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$, $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \times C^{\cdot}_{\{n\}}$ и $C^{\cdot}_{\{n\}} \times \bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}}$ съответно. △

Доказателството се строи чрез изследване на затвореността на Φ^{-1}, $\Phi \circ \bar{\Phi}$ и $\Phi.H^{\cdot}_{\{n\}}$ относно основния n-арен композиционен закон и унарните операции.

(3.2.3) ЛЕМА. Ако един епиморфизъм от категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е взаимно-еднозначен, той е изоморфизъм.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека Φ: $C^{\cdot}_{\{n\}} \longrightarrow \bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е взаимноеднозначен епиморфизъм в $\mathcal{U}^{\{n\}}$; очевидно подлежащото изображение и бижекция и следователно Φ^{-1}: $\bar{C} \longrightarrow C$ е също така изображение; в съответствие с (3.2.2) е ясно, че Φ^{-1}: $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \longrightarrow C^{\cdot}_{\{n\}}$ е също така $\{n\}$-функтор; следователно Φ е изоморфизъм. △

Нека припомним, че <u>ядро</u> на един $\{n\}$-функтор по аналогия с ядро на хомоморфизъм между универсални алгебри /вж. [11, 97] / ще наричаме под-$\{n\}$-категорията $\Phi \circ \Phi^{-1}$, която в съответствие с (3.2.2) и (3.2.3) е добре определена. Доказва се, че всяко ядро на $\{n\}$-функтор е конгруенция над $\{n\}$-категорията - източник на Φ.

В сила е следната форма на първата теорема на Е. Ньотер за изоморфизмите.

(3.2.4) ТЕОРЕМА. Нека $\Phi: C^{\cdot}_{\{n\}} \longrightarrow H^{\cdot}_{\{n\}}$ е произволен $\{n\}$-функтор и нека неговото ядро е γ_{Φ}. $\{n\}$-функторът Φ е разложим в следната канонична форма

$$\Phi = P_{\gamma_{\Phi}} \circ \Phi' \circ j$$

където $P_{\gamma_\Phi}: C^{\cdot}_{\{n\}} \longrightarrow C^{\cdot}_{\{n\}}/\gamma_{\Phi}$ е естествения сурјективен $\{n\}$-функтор, $j: \Phi\,(C^{\cdot}_{\{n\}}) \longrightarrow H^{\cdot}_{\{n\}}$ е каноничното вложение, а

$$\Phi' : C^{\cdot}_{\{n\}}/\gamma_{\Phi} \longrightarrow \Phi\,(C^{\cdot}_{\{n\}})$$

е изоморфизъм на $\{n\}$-категории.

Д о к а з а т е л с т в о. Съгласно основната теорема за разлагането на изображения /вж. [5] / представянето на Φ като изображение в указания вид съществува. Че P_{γ_Φ} е $\{n\}$-функтор следва от (3.1.14), където е установен и видът му /канонична сурјекция/; що се отнася до каноничната инжекция, твърдението е очевидно. Изображението Φ' дефинира $\{n\}$-функтор, което се проверява непосредствено както и фактът, че Φ' като $\{n\}$-функтор е епиморфизъм в $\mathcal{U}^{\{n\}}$; като имаме пред вид, че изображението Φ' е бижекция, от (3.2.3) следва, че Φ' е изоморфизъм. $\triangle$

(3.2.5) СЛЕДСТВИЕ. Нека са дадени $\{n\}$-функторът $\Phi: C^{\cdot}_{\{n\}} \to H^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ и конгруенцията $r \subset \Phi \circ \Phi^{-1}$. Съществува единствен $\{n\}$-функтор $\bar{\Phi} : C^{\cdot}_{\{n\}}/r \to H^{\cdot}_{\{n\}}$ такъв че $\Phi = \bar{\Phi} \circ P_r$ /комутативност на диаграмата от фиг. 3.1/.$\triangle$

Твърдението произтича от аналогичен резултат за изображенията /вж. [5] и от (3.2.4)/.

Без да се впускаме в подробности ще формулираме няколко важни твърдения за изоморфизмите в $\{n\}$-категориите.

(3.2.6) ТЕОРЕМА /втора теорема за изоморфизмите/. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$, $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е под-$\{n\}$-категория на $C^{\cdot}_{\{n\}}$, r е конгруенция върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и $\bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}}$ е множеството от всички r-класове пресекателни с $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ Тогава:

1. $\bar{\bar{C}}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ и е под-$\{n\}$-категория на $C^{\cdot}_{\{n\}}$;
2. $\bar{r} = r \cap (\bar{C}_{\{n\}} \times \bar{C}^{\cdot}_{\{n\}})$ е конгруенция върху $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$;
3. $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} / \bar{r} = \bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}} / r$.$\triangle$

(3.2.7) СЛЕДСТВИЕ. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}}$, $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$, $\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}$ е под-$\{n\}$-категория на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ и r е конгруенция, такава че $r \cap (\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \times \bar{C}^{\cdot}_{\{n\}}) = \triangle_{\bar{C}}$. Тогава:

$$\bar{C}^{\cdot}_{\{n\}} \cong \bar{\bar{C}}_{\{n\}}/r$$

където $\bar{\bar{C}}^{\cdot}_{\{n\}}$ е съгласно (3.2.6).

(3.2,8) ТЕОРЕМА /трета теорема за изоморфизмите/. Нека $C^{\cdot}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ и нека r, $\bar{r}$ са такива конгруенции върху $C^{\cdot}_{\{n\}}$, че $r \subseteq \bar{r}$. Съществува единствен хоморфизъм $\theta: C^{\cdot}_{\{n\}}/r \longrightarrow C^{\cdot}_{\{n\}}/\bar{r}$ такъв че

$$\theta \circ \Phi_r = \Phi_{\bar{r}}.\triangle$$

3.3. Свободни структури за $\{n\}$-категориите

Известно е [5], че всеки моноид M е фактор-моноид на един свободен моноид; аналогично всяка група е фактор-група на една свободна група [39], а всяка категория H' е фактор-категория на свободната категория канонично съпоставена на подлежащия на H ориентиран граф $L[H]$ /вж. [15], [42] /. За n-категориите от (2.1.5) проблемът е поставен и частично решен /без доказателства и без яснота в конструкцията) в [23].

В този параграф са поставени и решени следните задачи:

- да се построи чрез рекурентен процес свободна $\{n\}$-категория над дадена $\{n\}$-категория, за $\{n\} = n$, (n), $[n]$, $\langle n \rangle$;

- да се докаже съществуването на спрегнат функтор за функтора на забравата $P^{\{n\}}_{\mathcal{U}\mathcal{G}} : \mathcal{U}^{\{n\}} \longrightarrow \mathcal{G}^{\{n\}}$;

- да се изследва съществуването и свойствата на някои класи проектори /в смисъла на [15] /, както и на свързаните с тях фактор-структури и квази-фактор-структури.

Нека е даден $\{n\}$-графът $\{C\}$, $C \in \mathcal{M}_0$. Нека построим един $\{n\}$-граф $\{\Gamma_\kappa\} = (\Gamma_\kappa, V^\kappa)$, където $\kappa \in \mathbb{N}$, $V^\kappa = \{v_i^{\kappa j};\ i, j \le n,\ i \ne j\}$, при което сме положили:

$$\{\Gamma_1\} = \{C\};\quad \Gamma_{\kappa+1} = \Gamma_\kappa \cup V^\kappa\{\Gamma_\kappa\};$$

$$V^{\kappa+1}(x) = V^\kappa(x) \quad \text{ако } x \in \Gamma_\kappa;$$

$$v^{\kappa+1}\,{}^{i}_{j}(x_s;\ s \le n) = v^{\kappa}\,{}^{i}_{j}(x_j) \quad \text{ако } (x_s;\ s \le n) \in V^\kappa\{\Gamma_\kappa\}$$

за всички $j \le n$. Нека притези означения построим обединението на множествата-носители от редицата на рекурентно построените $\{n\}$-графи:

$$\Gamma = \bigcup_{\kappa \in \mathbb{N}} \Gamma_{\kappa}$$

Като имаме пред вид конструкцията на частично определения n-арен композиционен закон, чието множество от композируеми n-редици е $\xleftarrow{\lim} \Phi_V$ /вж. (2.1.2), (2.1.7), (2.1.11)/ и като положим още

$$V\ (x) = V^{\kappa}\ (x) \quad \text{ако } x \in \Gamma_{\kappa},$$

имаме композиционния закон

$$K(x_i\ ;\ i \leq n) = (x_i\ ;\ i \leq n) \quad \text{ако } (x_i\ ;\ i \leq n) \in (\Gamma, V),$$

който е също така n-арен и частично определен.

Чрез непосредствена проверка на аксиомите получаваме:

(3.3.1) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Наредената тройка $(\Gamma,\ K,\ V)$ е неасоциативна квази- $\{n\}$-категория. $\triangle$

Въвеждането на единиците се извършва чрез налагане на ограничения върху множеството на композируемите n-редици. Нека за целта повторим рекурентния процес в $\{C\} \in \mathcal{G}_0^{\{n\}}$ и нека построим нов $\{n\}$-граф $\{\bar{\Gamma}_{\kappa}\} = (\bar{\Gamma}_{\kappa},\ \bar{V}^{\kappa})$ по следната процедура:

$$\{\bar{\Gamma}_1\} = \{C\}\ ,\quad \bar{\Gamma}_{\kappa+1} = \bar{\Gamma} \cup M_{\kappa},\quad \bar{V}^{\kappa} = V_{\kappa}/\Gamma_{\kappa}\ ,\ \kappa \in \mathbb{N}$$

където е предположено, че множеството $M_{\kappa} \subset \ltimes_V \{\bar{\Gamma}_{\kappa}\}$ е образувано от n-редиците, в които, освен условието за $\{n\}$-катенарност се изисква още поне два елемента да не принадлежат на множеството $\{\bar{\Gamma}_{\kappa}\}_0$ на полюсите на $\{\bar{\Gamma}_{\kappa}\}$.
Нека сега образуваме множеството

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{\kappa \in \mathbb{N}} \bar{\Gamma}_{\kappa}\ ;$$

получаваме наредената тройка $(\bar{\Gamma},\ \bar{K},\ \bar{V})$, където сме положили

$\bar{V} = V_{|\bar{\Gamma}}$; $\bar{K}(X) = x$ ако $X = (x, x, \ldots, x)$ и

$\bar{K}(X) = X$ при всеки друг случай, т.е. когато $X = (x_i ; i \leq n)$

и $x_i \neq x$ поне за едно $i \leq n$; разбира се $X \in \divideontimes(\bar{\Gamma}, \bar{V})$. Тогава е в сила следния резултат:

(3.3.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Наредената тройка $(\bar{\Gamma}, \bar{K}, \bar{V})$ е неасоциативна $\{n\}$ -категория. $\triangle$

За удобство в означенията ще положим $(\Gamma, K, V) = \Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{F}^{\#}}$ и още $(\bar{\Gamma}, \bar{K}, \bar{V}) = \Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{F}^{\#}}$. По аналогичен начин се строят $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{F}'}$, $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{F}}$, $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{N}''}$ и $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{N}'}$ (полагаме $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$: $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}^{\#}$, $\mathcal{N}''$, $\mathcal{N}'$).

(3.3.3) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебричната структура $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$ ще наричаме свободна неасоциативна квази- $\{n\}$ -категория /респ. неасоциативна $\{n\}$ -категория, квази- $\{n\}$ -категория, $\{n\}$ -категория/ на дедалиите на $\{C\}$, ако $\mathcal{U} = \mathcal{F}^{\#}$ /респ. $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$/.

В сила е следния резултат (доказва се без принципиални трудности чрез Теор. 10, гл. III, § 2 от [15]).

(3.3.4) ТЕОРЕМА. Структурата $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$ е $(\mathcal{F}'_{\{n\}}, \mathcal{N}'_{\{n\}})$ -проекция на $\Gamma^{\{n\}}_{\mathcal{V}}$ за наредените двойки $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (\mathcal{F}', \mathcal{F}^{\#})$ и $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. $\triangle$

Нека е даден функтора $\mathcal{Q}^{\{n\}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}^{\{n\}} \longrightarrow \mathcal{G}^{\{n\}}$, който на наредената тройка $(C, K, V) \in \mathcal{U}^{\{n\}}_{o}$ съпоставя наредената двойка $(C, V) \in \mathcal{G}^{\{n\}}_{o}$ В сила е следния резултат:

(3.3.5) ТЕОРЕМА. Функтора $\mathcal{Q}^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$ допуска спрегнат от ляво, който ще означаваме с $P^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$. Ако $\{C\} \in \mathcal{G}^{\{n\}}_{o}$, то $\{P_{\mathcal{U}}^{\{n\}}\{C\}\}\in \mathcal{G}_o^{\{n\}}$, подлежащ $\{n\}$-граф на $\{n\}$-структурата $P^{\{n\}}_{\mathcal{U}}\{C\}\in \mathcal{U}_o^{\{n\}}$ има $\{C\}$ за под-$\{n\}$-граф, за който $\{P_{\mathcal{U}}^{\{n\}}\{C\}\}_o^{\mathcal{U}} = \{C\}_o$.

За да докажем (3.3.5) ще използуваме (3.3.6), чието доказателство не е елементарно, но тъй като е странично за нашето изследване, няма да го привеждаме тук.

(3.3.6) ЛЕМА. Нека са дадени категориите $C^\cdot$, $K^\cdot$, $H^\cdot$ и функторите $\Phi = (K^\cdot, \underline{\Phi}, C^\cdot)$, $\Phi' = (H^\cdot, \underline{\Phi}', K^\cdot)$ и $\Phi'' = \Phi'.\Phi = (H^\cdot, \underline{\Phi}'', C^\cdot)$. Ако Φ е сюржективен и ако Φ'' и Φ' допускат за спрегнати от ляво функторите $\bar{\Phi}''$ и $\bar{\Phi}'$, тогава Φ допуска $\bar{\Phi}$ за ляв спрегнат функтор, така че е удовлетворена следната зависимост: $\bar{\Phi}'' = \bar{\Phi}.\bar{\Phi}'$. $\triangle$

Д о к а з а т е л с т в о на (3.3.5). Нека допуснем, че $\{n\} = [n]$; да разгледаме функторите $p_{\mathcal{U}}^{[n]} = (\mathcal{M}, P_{\mathcal{U}}^{[n]}, \mathcal{U}^{[n]})$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{U}}^{[n]} = (\mathcal{G}^{[n]}, \mathcal{Q}_{\mathcal{U}}^{[n]}, \mathcal{U}^{[n]})$ и $p_\Gamma = (\mathcal{M}, p_\Gamma, \mathcal{G})$, където $\mathcal{G}$ е категорията на хомоморфизмите между ориентираните графи над $\mathcal{M}_o$; от факта, че $\mathsf{L}_o = [C]_o$ можем да идентифицираме $(C, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ и (C, β, α); тогава $p_{\mathcal{U}}^{[n]} = p_\Gamma . \mathcal{Q}_{\mathcal{U}}^{[n]}$; от друга страна, тъй като $p_{\mathcal{U}}^{[n]}$ удовлетворява редица силни условия /вж. 4.2/, той допуска спрегнат от ляво въз основа на общите теореми за съществуване на спрегнати функтори; аналогично е положението за p_Γ, който [14] има спрегнат от ляво; накрая $\mathcal{Q}_{\mathcal{U}}^{[n]}$ е очевидно сюржективен; при тези условия твърдението следва от (3.3.6). – Случая $\{n\} = \langle n \rangle$ е аналогичен, тъй като на всеки кратен граф може да бъде канонично съпоставен един ориентиран граф. – Нека сега $\{n\} = (n)$; тогава разглеждаме още функтора $p_\Gamma^{\{n\}} = (\mathcal{M}, p_\Gamma^{(n)}, \mathcal{G}^{(n)})$ и имаме зависимостта $p_{\mathcal{U}}^{(n)} = p_\Gamma^{(n)} . \mathcal{Q}_{\mathcal{U}}^{(n)}$;

тъй като $Q_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е очевидно суржективен, $P_{\Gamma}^{(n)}$ допуска ляв спрегнат функтор съгласно (1.1.10) и $P_{\mathcal{U}}^{(n)}$ допуска ляв спрегнат функтор съгласно 4.2., то в съответствие с (3.3.6) имаме резултата на (3.3.5).–Случаят $\{n\}=n$ в съответствие с (2.1.6) е частен спрямо $\{n\}=(n)$. $\triangle$

Твърдение (3.3.5) допуска и директно доказателство, несвързано с използуване на теореми за съществуване на спрегнати функтори; то има и това предимство, че позволява да се конструира свободната структура. Случаят $\{n\}=[n]$ е подробно разгледан в [67]. Тук ще се спрем на директното доказателство на (3.3.5) при $\{n\}=\langle n\rangle$ като при това допуснем за простота, че $n=2$.

Ако $(C^{\cdot}, C^{\perp})$ е неасоциативна двойна категория, то $([C^{\cdot}], [C^{\perp}])$ е двоен ориентиран граф, означаван $[[C^{\cdot}, C^{\perp}]]$. Суржекцията

$$((H^{\cdot}, H^{\perp}), \Phi, (C^{\cdot}, C^{\perp})) \to ([[H^{\cdot}, H^{\perp}]]\ \Phi, [[C^{\cdot}, C^{\perp}]])$$

от $\mathcal{F}''^{\langle 2\rangle}$ към $\mathcal{G}^{\langle 2\rangle}$ дефинира точен функтор на забрава $P_{\Gamma}^{\langle 2\rangle}$. Нека сега е даден двойния граф $([M]^{\cdot}, [M]^{\perp}) = [[M]]$, където

$$[M]^{\cdot} = (M, \beta^{\cdot}, \alpha^{\cdot}) \quad \text{и} \quad [M]^{\perp} = (M, \beta^{\perp}, \alpha^{\perp}), \quad M \in \mathcal{M}_0$$

ще построим елемент от $\mathcal{F}_0''^{\langle 2\rangle}$, свободна $P_{\Gamma}^{\langle 2\rangle}$ – структура над $[[M]]$. Нека $\mathsf{L}[M]$ е категорията на пътищата над ориентирания граф $[M]^{\cdot}$ и нека нейния подлежащ ориентиран граф е $[\mathsf{L}[M]^{\cdot}]$; тъй като $([M]^{\cdot}, \alpha^{\perp}, [M]^{\cdot})$ е хомоморфизъм между ориентирани графи, съществува единствен функтор, който продължава $(\mathsf{L}[M]^{\cdot}, \bar{\alpha}^{\perp}, \mathsf{L}[M]^{\cdot})$; аналогично от $\beta^{\perp}, \alpha^{\cdot}, \beta^{\cdot}$ получаваме функторите-продължения $\bar{\beta}^{\perp}, \bar{\alpha}^{\cdot}, \bar{\beta}^{\cdot}$; ясно е, че $[\mathsf{L}[M]]^{\perp} = (\mathsf{L}[M]; \bar{\beta}^{\perp}, \bar{\alpha}^{\perp})$ и $(\mathsf{L}[M]^{\perp}, \bar{\beta}^{\cdot}, \bar{\alpha}^{\cdot}) = [\mathsf{L}[M]]^{\cdot}$, а $([\mathsf{L}[M]]; [\mathsf{L}[M]]^{\perp})^{\cdot}$ е двоен граф. Да построим сега неасоциативната свободна категория на дедалиите над $[L[M]]^{\perp} = [E]$; за целта дефинираме рекурентно ориентирания граф $[\Pi_к] = (\Pi_к, \beta^к, \alpha^к)$ за всяко $к \in \mathbb{N}$ като

$$[\Pi_1] = [E] \quad , \Pi_{к+1} = \Pi_к \cup K_к, \quad к \in \mathbb{N}$$

където за множеството $K_к$ сме положили

$$K_к = \{(f_2, f_1) \; ; \; (f_2, f_1) \in \Pi_к \times \Pi_к, \alpha^к(f_2) = \beta^к(f_1)\};$$

изображенията $\alpha^{к+1}$ и $\beta^{к+1}$ са дефинирани както следва:

$$\alpha^{к+1}(f) = \alpha^к(f) \quad \text{за} \quad f \in \Pi_к, \quad \beta^{к+1}(f) = \beta^к(f),$$

$$\alpha^{к+1}(f_2, f_1) = \alpha^к(f_1) \quad \text{и} \quad \beta^{к+1}(f_2, f_1) = \beta^к(f_2)$$

$$\text{за} \quad (f_2, f_1) \in K_к - \Pi_к;$$

тъй като по построение $\alpha^к$ и $\beta^к$ са ретракции върху $[E]_0$ за всички $к \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{M}_0$ е по предложение универсуум, то $[\Pi_к]$ е ориентиран граф, подграф на $[\Pi_{к+1}]$. Получена е следователно редицата $([\Pi_к]; к \in \mathbb{N}, [\Pi_к] \in \mathcal{G}_0)$ и можем да положим както по-горе

$$\bar{\Pi} = \bigcup_{к \in \mathbb{N}} \Pi_к;$$

показва се /чрез конструкция на едно специално изображение, което тук няма да даваме, че $(\bar{\Pi}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \in \mathcal{G}_0$, където $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$ са ретракции на $\bar{\Pi}$ върху $[E]_0$, т.е. $\bar{\alpha}(e) = \alpha(e) = e$ и $\bar{\beta}(e) = \beta(e) = e$ за всяко $e \in [E]_0$. Нека сега $\bar{\Pi} * \bar{\Pi} \subset \bar{\Pi} \times \bar{\Pi}$ е образувано от двойките (f'', f) такива че $\bar{\alpha}(f'') = \bar{\beta}(f)$. Ако $(f'', f) \in \bar{\Pi} * \bar{\Pi}$, съществуват p", $p \in \mathbb{N}$, за които $f \in \Pi_p$ и $f'' \in \Pi_{p''}$; ако сега $к = \sup(p, p'')$, то

$(f'', f) \in П_к \times П_к$, $\alpha^к(f'') = \bar{\alpha}(f)$ и $\beta^к(f) = \bar{\beta}(f)$;
следователно $\alpha^к(f'') = \beta^к(f)$; от тук $(f'', f) \in К_к \subset П_{к+1}$ така че $(f'', f) \in \bar{П}$. Тогава полагаме $(f'', f) = f''\bullet f$ и нека $\bar{П}^\bullet$ е мултипликативния клас над $\bar{П}$ дефиниран от закона $\bullet$. Лесно се вижда, че $(\bar{П}, {}^\bullet\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ е неасоциативна квази-категория над $\bar{П}$, свободна $\theta_{\mathcal{J}\#}$-структура, породена от $[E]$. За случая с единици, нека построим $[П''_к]$, подграф на $[П_к]$, чрез рекурентен процес:

$$[П_1''] = [E], \quad П''_{к+1} = П_к'' \cup М_к, \quad М_к \subset К_к, \quad к \in \mathbb{N},$$

където сме положили
$М_к = \{(f'', f);\ (f'', f) \in П_к \times П_к,\ \alpha^к(f'') = \beta^к(f).\ f''.f \notin [E]_0\}$;
очевидно $[П''_к]$ е подграф на $[П_к]$. Ще положим още $\bar{П}'' = \bigcup_{к \in \mathbb{N}} П''_к$, ще отбележим с $\bar{\alpha}''$ и $\bar{\beta}''$ рестрикциите на $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ върху $\bar{П}''$ и като имаме пред вид, че $(\bar{П}'', \bar{\beta}'', \bar{\alpha}'') \in \mathcal{G}_0$ ще построим върху $\bar{П}''$ двучленния композиционен закон както следва

$$f\bullet\bar{\alpha}''(f) = f, \quad \bar{\beta}''(f)\bullet f = f, \quad f''\bullet f = (f'', f) \quad \text{ако } f'', f \notin [E]_0 .$$

$(\bar{П}'', \bullet, \bar{\beta}'', \bar{\alpha}'') = \Pi_{\mathcal{F}''}[E]$ е неасоциативна категория, която ще наричаме <u>неасоциативна свободна категория на дедалиите</u> на $[E]$. Това е оправдано название, тъй като каноничния функтор от $[E]$ към $[\bar{П}'']$ дефинира $\llcorner[E] = \bar{П}''^\bullet$ като свободна $Q^{\{n\}}_{\mathcal{F}''}$-структура над $[E]$

От тук, като вземем пред вид, че съществуването на свободни структури е еквивалентно на съществуването на спрегнат функтор (вж. [14], [15], [19], [42]) следва твърдението на (3.3.5), което оправдава определение (3.3.3).

(3.3.7) СЛЕДСТВИЕ. На всеки $\{n\}$-граф е асоциирана една свободна $Q^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$-структура. Ако $C^\bullet_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$, то съществува една и само една подалгебра $\{\bar{C}\}$ на $\{C^{\cdot}_{\{n\}}\}$, такава че $C_{\{n\}}$ е свободна $\mathcal{Q}_{u}^{\{n\}}$-структура над $\{\bar{C}\}\in \xi_{0}^{\{n\}}$. $\triangle$

От принципно значение за общата теория на $\{n\}$-категориите и техните присъединени структури е следната теорема, известна за категориите /$n = 2$/ и за други алгебрични структури.

(3.3.8) ТЕОРЕМА. Всяка $\{n\}$-категория $H^{\cdot}_{\{n\}}$ е точна фактор-$\{n\}$-категория на свободната $\{n\}$-категория $P_{\mathcal{F}}^{\{n\}}\{H^{\cdot}_{\{n\}}\}$ относно отношението на еквивалентност $\bar{r}$ съвместимо с $P_{\mathcal{F}}^{\{n\}}\{H^{\cdot}_{\{n\}}\}$, породено от $r = (H, A, H)$ с представящо множество

$$A = \{(g'', g)\,;\, g'' = [(f_i^{p}\,;\, i \leq n)], g = [(f_i^{q}\,;\, i \leq n)]\}$$

където сме положили $f_i^{p} = h_i$; ако $i \leq p$, $f_i^{p} = h_{i+n-1}$ ако $p < i \leq n$ и $f_p^{p} = [(h_s\,;\, p \leq s < p+n)]$ при $(h_s\,;\, p\leq s < p+n) \in *_{\vee} C^{\cdot}_{\{n\}}$.

Доказателство. Нека Г е суржекцията

$$(h_n, h_{n-1}, \ldots h_1) \longrightarrow [(h_i\,;\, i \leq n)],$$

като предполагаме, че $(h_i\,;\, i \leq n) \in *_{\vee} C^{\cdot}_{\{n\}}$; отношението на еквивалентност $\bar{r}$ е съвместимо с композиционния закон на структурата и следователно се съдържа в r_{Γ}, отношение на еквивалентност, канонично съпоставено на Г; за $(g'', g) \in A$, имаме

$$\Gamma(g'') = [(\Gamma(h_i)\,;\, i \leq n)] = \Gamma\,([(h_i\,;\, i \leq n)]);$$

чрез рекурентност върху дедалиите на $\{C^{\cdot}_{\{n\}}\}$ се установява, че

$$g \sim \Gamma(g) \text{ мод } \bar{r}$$

следователно r_{Γ} се съдържа в $\bar{r}$. От тук следва, че $r_{\Gamma} = \bar{r}$; теоремата следва от (3.1.15). $\triangle$

От (3.3.8) получаваме основно следствие за класическите n-арни структури:

(3.3.9) СЛЕДСТВИЕ. Всяка n-група C /респ. n-квази-група, респ. n-полугрупа/ е фактор- n-група/ респ.-квази-група, респ. -полугрупа /на свободната n-група /респ.-квази-група, -респ. полугрупа/, построена над множеството-носител $C \in \mathfrak{M}_o$. $\triangle$

3.4. Теореми за покриващи структури и представимост

В теорията е известна теоремата на Е.Л.Пост [50] за каноничното влагане на една полиадична група като подгрупа на /бинерна/ група върху носител, който в общия случай е надмножество за носителя на поиадичната група /косет теорема/. Решен е също така за широк кръг от n-оперативи с навсякъде определен композиционен закон и въпроса за представяне на n-арната композиция чрез един ендоморфизъм на оператива и един бинерен /групов/ композиционен закон (теорема на Глускин [29] и Хоссу [36]).

Този параграф е посветен на следните две задачи:

- съществува ли категория, в която дадена n-арна категорна структура може да бъде канонично вложена като подкатегория /обобщение на теоремата на Пост/;

- съществува ли представяне на композицията в една $\{n\}$-категория чрез последователни композиции в една категория /теоремата на Глускин-Хоссу за $\{n\}$-категориите/.

Нека разгледаме най-напред случая $\{n\} = n$ или (n).

(3.1.4) ТЕОРЕМА. Произволна n-категория $C^{\bullet}_{n}$ не може да бъде еднозначно представена чрез една или повече m_i-категории, $i \leq$ к, к$\in N$, с арност по-малка от n /$m_i < n$/.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека допуснем, че такова еднозначно представяне съществува; тогава $C^{\bullet}_{m_i}$,

$i \leq$ к, е m_i-категория и в съответствие на всеки елемент $f \in$ С са поставени точно m_i на брой САЕ; но тъй като от друга страна $C^{\bullet}_n$ е n-категория, всеки елемент $f \in$ С има точно n на брой САЕ; следователно при композицията в $C^{\bullet}_{m_i}$ се получава "дефект" по отношение на САЕ от размерност $\delta = n - m_i$, $i \leq k$; при това положение са следователно възможни следните случаи:

А. Конструкциите на композициите в $C^{\bullet}_{m_i}$ не са определени по единствен начин, но тогава съществува нееквивалентност на представянията, които са въобще равноправни помежду си и не съществува канонична конструкция на представянето;

В. В конструкциите се извършва идентификация на достатъчен брой САЕ, така че дефектът на композицията да стане нула; но в този случай върху категорията $C^{\bullet}_n$ е наложено силно ограничение и не може да се извърши във всяка n-категория. △

Аналогично е положението с (n)-категориите, където композиционния закон е построен чрез друга форма на катенарност.

От тук следва резултат, който дава отговор на първия от поставените по-горе въпроси за n-категориите.

(3.4.2) СЛЕДСТВИЕ 1. Една произволна n-категория /респ. (n)-категория/ не може да бъде канонично вложена в категория. △

Наистина, ако n-категорията е канонически вложима в категория, n-арната композиция би била представима чрез бинерна, а това противоречи на (3.4.1).

(3.4.3) СЛЕДСТВИЕ 2. Не съществува представяне на n-арен частично определен чрез n-катенарност композиционен закон чрез бинерни композиции и автоморфизъм на бинерната структура. $\triangle$

Този резултат е верен и при малко по-обща постановка, като във формулировката на (3.4.3) се замени думата " n -катенарност" с израза "p-катенарност за всяко $p \geq 2$"; по този начин в аналогично на (3.4.3) твърдение се обхващат и някои класи от алгебрични структури с арност по-висока от 2, които не са от изследвания клас.

Положението е различно при полиадичните категории от ред n. Причината е във възможността да се идентифицира всяка лява /респ. дясна/ унитарна или полярна n' -редица с лява /респ. дясна/ единица или полюс на кой да е морфизъм от категорията.

Ще докажем най-напред следния резултат:

(3.4.4) ТЕОРЕМА. За всяка полиадична категория $C^{\cdot}_{[n]}$ е съществува поне една покриваща категория $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_o$ т.е. такава категория, в която $C^{\cdot}_{[n]}$ е канонически вложена

$$(x_i ; i \leq n) \in C \overset{n}{\ast} C \implies [(x_i ; i \leq n)] = x_1 . x_2 \ldots x_n \in C$$

За да построим доказателството на теоремата, ще докажем най-напред няколко леми, които са свързани с така наречените <u>удължени произведения</u> /или композиции/, т.е. композиции в $C^{\cdot}_{[n]}$ на редици, където $m > n$, $m = k(n-1) + 1$, $k \in \mathbb{N}$ и с условие за композируемост от типа на катенарността /всяка m-редица е m-път в подлежащия граф $[C^{\cdot}_{[n]}]$; множеството на удължените композируеми редици ще бележим със C_+, $C_+ \subset \mathsf{L}[C]$; за дължината на $A \in C_+$ пишем $long(A) \in N$.

Имаме:

(3.4.5) ЛЕМА. За произволни $a\in C$ и $A\in C_+$, уравненията

$$[(A,\ x)] = a \quad \text{и} \quad [(y,A)] = a,\ x,\ y\in C,$$

където $\mathit{long}(A) = k(n-1)$, $k\in N$ и където (A,x), (y,A) са композируеми, а $[(A,\ x)],[(y,\ A)]$ са удължени композиции в $C^{\bullet}_{[n]}$, притежават поне едно решение, тогава и само тогава когато подлежащият на $C^{\bullet}_{[n]}$ ориентиран граф $[C^{\bullet}_{[n]}]$ е такъв че за всяка наредена двойка от върхове (e, e") имаме $e.C.e" \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л с т в о. Тъй като композициите са образувани в една полиадична категория от ред m, производна на $C^{\bullet}_{[n]}$ и тъй като $\alpha(a).C.\alpha(f_{k(n-1)})\neq\emptyset, f_{k(n-1)}\in A$, то съществува морфизъм $x\in C$ /респ. $y\in C$/, който удовлетворява уравнението; това решение в общия случай не е единствено, тъй като $|\alpha(a).C.\alpha(f_{k(n-1)})|\geq 1$; единственост се получава само в случая, когато $[C^{\bullet}_{[n]}]$ е скелет на ориентиран граф, където по определение $|\alpha(a).C.\alpha(f_{k(n-1)})| = 1$.$\triangle$

(3.4.6) ЛЕМА. За кои да е елементи p, $p"\in C$, съществуват пътища P, $P"\in C_+$, такива че

$$[(P,p)] = p" \quad \text{и} [(P",\ p")] = p$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека изберем една редица $B = (x,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{m-1})$, в която $\beta(x) = \beta(p")$, $\alpha(x) = \beta(x_2)$, $\alpha(x_k) = \beta(x_{k+1})$, $\alpha(x_{n-1}) = \alpha(p")$; нека $x = \bar{x}$ е решение на уравнението

$$[(x,\ (x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{m-1},\ p)] = p";$$

получаваме редицата $P = (\bar{x},\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_{m-1})$, която принадлежи на C ; аналогично се строи редицата $P" = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ \overset{+}{x}_{m-1},\ \bar{\bar{x}})\in C_+$, като се използва второто уравнение от (3.4.5).$\triangle$

(3.4.7) ЛЕМА. Ако m-пътя $A \in C_+$ удовлетворява за един кой да е елемент $a \in C$ едно от следните две равенства

$$[(A,\ a)] = a \quad \text{и} \quad [(a,\ A)] = a,$$

тогава за всяко $x \in C$ е в сила равенството

$$[(A,\ x)] = [(x,\ A)] = x$$

Д о к а з а т е л с т в о. Съществуването на редици от този вид следва от (3.4.6). Ако е дадено произволно $x \in C$, от (3.4.6) следва съществуването на редица $B \in C_+$ такава, че условията за композируемост бидейки удовлетворени, имаме $x = [(a,\ B)]$; тогава

$$[(A,x)] = [(A,\ [(a,B)])] = [([(A,a)]\ ,\ B)] = [(a,B)] = x;$$

нека допуснем, че $[(x,A)] = x''$, $x \neq x''$ и да положим, $A = (y,A''$ като $long\,(A) = 1 + long\,(A'')$; тогава получаваме

$$[(x'',A)] = [([(x,A)]\ ,\ A)] = [([(x,A)]\ ,\ (y,A''))] =$$

$$[(x,\ [(A,y)]\ ,\ A'')] = [(x,y,A'')] = [(x,(y,A''))] = [(x,A$$

но тъй като $[(x'',A)] = [(x,A)]$, имаме окончателно $x'' = x$.△

Една редица от типа на m-редицата A, построена по-горе, ще наричаме <u>единична редица</u>; множеството от единичните редици, свързани с даден ориентиран граф $[C]$ ще бележим с E_c.

Следните четири леми се доказват по подобен начин.

(3.4.8) ЛЕМА. Нека разглеждаме редиците M и M'', образувани от катенарно свързани елементи на C, такива че по отношение на катенарната взаимна свързаност на M и M'', т.е. $\alpha(m_\rho)=\beta(m''_1)$, да имаме $MM''\in C_+$. Ако $A\in E_c$, $MAM''\in C_+$ и имаме

$$[(MAM'')] = [(MM'')].\triangle$$

(3.4.9) ЛЕМА. За произволни $P\in C_+$ и $A\in E_c$, такива че (PA) и (AP) са дефинирани в $C^{\cdot}_{\{n\}}$ е в сила зависимостта

$$[(PA)] = [(P)] \quad \text{и} \quad [(AP)] = [(P)].\triangle$$

(3.4.10) ЛЕМА. За всеки път $H\in L(C)$, съществуват два пътя H', $H''\in L[C]$, които удовлетворяват следната зависимост

$$\alpha(H) = \beta(H') \qquad \text{и} \quad \alpha(H'') = \beta(H),$$

такива че $HH'\in E_c$ и $H''H\in E_c$. В частност може да бъде намерен път $\bar{H}\in L[C]$, такъв че $H' = H'' = \bar{H}.\triangle$

(3.4.11) ЛЕМА. Нека са дадени в C пътищата H, H'', K, $K''\in L[C]$, за които са в сила зависимостите

$$\alpha(K) = \beta(H), \quad \alpha(H) = \beta(K''), \alpha(K)=\beta(H''), \alpha(H'')=\beta(K)$$

и такива че

$$[(KHK'')] = [(KH''K'')]$$

За всички пътища V, $V''\in L[C]$, катенарни с H и H'' от ляво и от дясно съответно и такива че $(V''HV)\in C_+$, $(V''H''V)\in C_+$ имаме

$$[(V''HV)] = [(V''H''V)].\triangle$$

Д о к а з а т е л с т в о на (3.4.4) Нека $C\subset\hat{C}$, нека са дадени графа $[\hat{C}]$ и неговия подграф $[C]$, и нека $L[\hat{C}]$ е множеството от всички пътища в $[\hat{C}]$. Очевидно $L[\hat{C}]$ е категория и нека $(L[\hat{C}])^{\cdot}_{[n]}$ е производната на $L[\hat{C}]$ полиадична категория от ред $n\in N$. Да разгледаме тогава двучленното отношение θ на еквивалентност в $\mathrm{L}[\hat{C}]$ дефинирано както следва

$H\theta H'' \Longleftrightarrow [(KHK'')] = [(KH''K'')]$, където $H, H'', K, K'' \in \mathrm{L}[\hat{C}]$; тук сме използували означенията от (3.4.11); съгласно (3.4.6) и (3.4.11) θ е отношение на еквивалентност съвместимо със структурата на категорията $\mathrm{L}[\hat{C}]$, т.е. е конгруенция. От резултатите, представени в 3.1 следва, че фактор-множеството $\mathrm{L}[\hat{C}]/\theta$ е снабдено със структура на фактор-категория и че $(\mathrm{L}[\hat{C}])^{\cdot}_{[n]}/\theta$ е точна фактор-полиадична категория; от друга страна обаче, тъй като $\mathrm{L}[\hat{C}]$ е свободната категория на пътищата в $[C]$, структурата $(\mathrm{L}[\hat{C}])^{\perp}/\theta$ е очевидно категория. Нека $a \in C$; тогава за всяко $b \in C$ имаме съгласно (3.4.7) и основните свойства на отношението θ:

$$в\ \theta\ a \Rightarrow \quad в = a;$$

ако означим с $K(a)$ класът на еквивалентност съпоставен на $a \in C$ в $[C]$ чрез отношението на еквивалентност θ, тогава $K(a) \cap C = \{a\}$. Нека за $(g_i\,;\ i \leq n) \in \overset{n}{C} \rightarrowtail C$ положим $в = [(g_i\,;\ i \leq n)]$ и нека $B \in \mathrm{L}[C]$ е такъв път в $[C]$, щото $(в, B) \in C_+$; тогава имаме

$$[(g_1, \ldots\ldots g_n, C\ )] = [([(g_i\,; i \leq n)], \quad C)] = [(в, C)]$$

и следва че $в\ \theta\,(g_i\,; i \leq n)$; това дава

$$K\ (в) = K(g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n) = K(g_1)\ .\ K(g_2)\ \ldots\ldots\ K(g_n)$$

и окончателно получаваме

$$в = [(g_i\,;\ i \leq n)] = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n\,.$$

Каноничната вложимост на $C^{\cdot}_{[n]}$ в категорията $\mathrm{L}[\hat{C}]/\theta \in \mathcal{F}_0$ (не непременно като подкатегория) следва от конструкцията

Надмножеството $\hat{C}$ на C е произволно; на една полиадична категория $C^{\bullet}_{[n]}$ могат следователно да бъдат съпоставени повече от една покриващи категории. Резултатът от (3.4.4) се прецизира като положим $\hat{C} = C$. Тогава имаме:

(3.4.12) СЛЕДСТВИЕ 1. Всяка полиадична категория $C^{\bullet}_{[n]}$ от ред $n \in \mathbb{N}$ може да бъде канонично вложена в свободната категория $L[C]$ на пътищата над ориентирания граф $[C] = [C^{\circ}_{[n]}]$

Достатъчно е да се повтори доказателството на (3.4.4) при $\hat{C} = C$, което не е ограничение за прилаганата техника.

(3.4.13) СЛЕДСТВИЕ 2. Най-малката покриваща категория за полиадичната категория от ред $n \in \mathbb{N}$ $C_{[n]}$ е фактор-категорията

$$L[C]/\theta \in \mathcal{F}_o . \triangle$$

Като се разглежда множеството $C - \{a\}$, над което се строи ориентиран граф, се вижда, че вложение не може да се реализира. Изискването минималната покриваща категория за $C^{\bullet}_{[n]}$ да бъде подкатегория на $L[C]/\theta$ води до много силни ограничителни условия върху $C^{\bullet}_{[n]}$; случая не представлява съществен интерес.

(3.4.14) СЛЕДСТВИЕ 3 /Е.Л.Пост [50]/ . За всяка n-група съществува покриваща група. $\triangle$

Единственият специфичен момент в доказателството на това важно следствие е съществуването на обратен елемент за всеки елемент от покриващото множество.

Сега ще дадем отговор на втория въпрос, поставен в началото на настоящия параграф; за дадена полиадична категория търсим наредена двойка $(C^{\bullet}, \theta)$, където $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ и $\theta = (\theta_s;\ s \leq n)$, $\theta_s \in C.\mathcal{F}.C^{\bullet}$, така че всяка композиция, дефинирана в $C^{\bullet}_{[n]}$ да бъде представима чрез удължена композиция в $C^{\bullet}$, чиито компоненти са елементите на композируемата в $C^{\bullet}_{[n]}$ n-редица, трансформирани чрез ендофункторите от θ, т.е. елементите

$$y_s = \theta_s(x_s),\quad s \leq n.$$

Нека $C^{\bullet}_{[n]}$ е разглежданата полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$ и нека $\llcorner[C]$ е свободната категория на пътищата, асоциирана на ориентирания граф $[C^{\bullet}_{[n]}]$, подлежащ на $C^{\circ}_{[n]}$; тогава:

(3.4.15) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Нека $[(x_i;\ i \leq n)]$ е n-арна композиция в $C^{\bullet}_{[n]}$ и нека $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ е удължената композиция за композиционния закон $\circ$ от $\llcorner[C]$ на същите морфизми. Съществува ендофунктор $\Phi: \llcorner[C] \longrightarrow \llcorner[C]$, такъв че

$$[(x_i;\ i \leq n)] \doteq \Phi(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n)$$

Д о к а з а т е л с т в о. Тъй като $x = [(x_i;\ i \leq n)]$ е морфизъм от $C^{\circ}_{[n]}$, то $x \in \llcorner[C]$ и още, съгласно $(\widehat{K.2})$: $\alpha(x_n) = \alpha(x)$, $\beta(x_1) = \beta(x)$; от друга страна, ако $x'' = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$, то имаме по същите съображения $\alpha(x'') = \alpha(x_n)$, $\beta(x'') = \beta(x_1)$. Разглеждаме тогава изображението Φ: $\llcorner[C] \longrightarrow \llcorner[C]$, такова че $\Phi(e) = e$ за всяко $e \in (\llcorner[C])_0$ и $\Phi(x'') = x$, съвместимо с бинерния композиционен закон в $\llcorner[C]$. Очевидно става дума за ендофунктор, който е търсения.

Не се твърди, че ендофунктора Φ е единствен.

Аналогичен резултат за n -квазигрупите /вж. за подробностите [1] или [29] / се доказва със значителни технически трудности; условията за композируемост при полиадичните категории опростяват въпроса.

Нека H · е категория, $a \in H$ е обратим елемент от H · , n е естествено число и Φ е ендофунктор на $H^{\cdot}$, такъв че

$$\Phi(a) = a, \quad W_a^{-1}(x) = a \circ x \circ a^{-1} = \Phi^{n-1}(x)$$

С тези означения, на наредената четворка T = = T ($H^{\cdot}$, a, Φ, n) съпоставяме следния n-арен композиционен закон:

$$[(x_i ; i \leq n)] = x_1 \circ \Phi(x_2) \circ \Phi^2(x_3) \circ \ldots \circ \Phi^{n-2}(x_{n-1}) \circ a \circ x_n$$

В сила е следния резултат:

(3.4.16) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. За построения по-горе n-арен композиционен закон, множеството H е полиадична категория от ред n , асоциирана на наредената четворка T.△

От тук, като имаме пред вид свойствата на категорията на пътищата асоциирана на един ориентиран граф, получаваме:

(3.4.17) ТЕОРЕМА. Всяка полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$ $C^{\circ}_{[n]}$ е изоморфна на една полиадична подкатегория от ред $n \in \mathbb{N}$ на полиадичната категория от ред $n \in \mathbb{N}$, асоциирана на наредената четворка T = T($\mathrm{L}[C]$, e, Φ, n), $e \in (\mathrm{L}[C])_o$.

Д о к а з а т е л с т в о. Тъй като наредената четворка T е построена така както е посочено по-горе, множеството от пътищата $\llcorner[C]$ над подлежащия ориентиран граф $[C] = [C^{\bullet}_{[n]}]$ е снабдено относно композиционния закон $[\dots]$ и съгласно (3.4.16) със структурата на полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$. От друга страна C се съдържа в $\llcorner[C]$ по построение, тъй като елементите на C са пътища с дължина 1; тогава композиционния закон в $C^{\bullet}_{[n]}$, съвместим със закона в $\llcorner[C]$, е също така съвместим с точност до изоморфизъм и със закона $[\dots]$. От тук следва, че $C^{\bullet}_{[n]}$ е полиадична подкатегория от ред $n \in \mathbb{N}$ на полиадичната категория $(\llcorner[C], [\dots])$ $\triangle$

(3.4.18) СЛЕДСТВИЕ 1. За всяка полиадична категория $C^{\bullet}_{[n]}$ съществува категория $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$, такава че $C^{\bullet}_{[n]}$ е изоморфна на полиадичната категория от ред $n \in \mathbb{N}$, асоциирана на една наредена четворка $T = T(H^{\bullet}, e, \Phi, n)$, $e \in H^{\bullet}_0$. $\triangle$

(3.4.19) СЛЕДСТВИЕ 2. Композиционният закон на всяка полиадична категория може еднозначно да бъде представен във вида:

$$[(y_i ; i \leq n)] = y_1 \circ \Phi(y_2) \circ \Phi^2(y_3) \circ \dots \circ \Phi^{n-2}(y_{n-1}) \circ y_n \triangle$$

Това е обобщение на теоремата на Глуски-Хоссу за полиадичните категории. При навсякъде определен композиционен закон получаваме класическия резултат за някои n -оперативи.

Обратен в известен смисъл на (3.4.17) е следния резултат:

(3.4.20) ТЕОРЕМА. Универсалната алгебра $(K, \kappa'_n, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ е полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$ тогава и само тогава, когато е изоморфна на n-арната структура, дефинирана от наредената четворка $K = K(H^{\cdot}, a, \Phi, n)$, където $a \in H^{\cdot}_{\gamma}$, $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, $\Phi \in H^{\cdot} . \mathcal{F} . H^{\cdot}$.△

3.5. Върху характеризацията на $\{n\}$-категориите

Въпросът за характеризацията на $\{n\}$-категориите бе до известна степен решен с резултатите от 3.4. Тук ще се занимаем с някои специални изоморфизми в $\{n\}$ -категориите, чрез които се дава характеристика на всички структури от даден клас. Става дума за някои аналози при $\{n\}$-категориите на теоремата на Кели за представимостта на произволна група от теорията на групите /вж. [40] , [41]/. Тъй като съществува принципиално различие между случаите $\{n\} = (n)$, n и случаите $\{n\} = [n]$ и $\{n\} = \langle n \rangle$ ще разгледаме характеризациите по отделно.

Нека $C^{\cdot}_{[n]}$ е полиадична категория от ред $n \in N$, нека $\mathrm{L}[C]$ е свободната категория на пътищата канонично асоциирана на ориентирания граф $[C] = [C^{\cdot}_{[n]}]$ и нека означим най-малката от покриващите категории на $C^{\cdot}_{[n]}$ с $\hat{L}(C) = \mathrm{L}[C] / \theta$. Нека $\mathbb{Z}_n$ е мултипликативната полугрупа на целите числа по модул n, нека е дадена една категория $H^{\cdot} \in \mathcal{T}_0$ и нека означим с Γ едно изображение от $H^{\cdot}$ към $\mathbb{Z}_n$, което на всеки път от множеството на пътищата на $[H^{\cdot}]$ съпоставя дължината му по модул n, т.е.

$$\Gamma : H \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \Gamma((h_i \,;\, i \leq p)) = k \bmod n \in \mathbb{Z}_n$$

където $(h_i \,; i \leq p)$ е p- редица от елементи на H, такива че $\alpha(h_{i+1}) = \beta(h_i)$, $i < p$. Да означим с ρ_H едно отношение на еквивалентност над $H \in \mathcal{M}_0$, двойно съвместимо (вж. за определението [14] , [15]) , с категорията $H^{\cdot}$

и нека $\bar{\Gamma} : \mathbb{Z}_n \to H \in m$ съпоставя на $к \in \mathbb{Z}_n$ прообраза му в Н.

(3.5 1) ТЕОРЕМА. Ако отношението ρ_H над $H^\bullet \in \mathcal{F}_0$ е такова, че фактор-категорията H° / ρ_H е изоморфна на $\mathbb{Z}_n$ и че обратният образ на $1 \in \mathbb{Z}_n$ чрез Г, означаван $\bar{\Gamma}(1) \subset H$, е пораждащо множество за подмножеството $H^\bullet_0$ на единиците на $H^\bullet$, тогава всяко подмножество $\bar{\Gamma}(к)$ на Н, прообраз на $к \in \mathbb{Z}_n$ чрез Г, е снабдено със структурата на полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$, чрез n-арния частичен вътрешен композиционен закон, канонично индуциран от бинерния закон на $H^\bullet$.

Д о к а з а т е л с т в о. От наложеното върху конгруенцията условие $H^\bullet / \rho_H \cong \mathbb{Z}_n$ следва, че $H/\rho_H = \mathbb{Z}_n$ и от тук

$$\bar{\Gamma}(к) \cap \bar{\Gamma}(к'') = \emptyset, \quad к, к'' \in \mathbb{Z}_n, \quad к \neq к'';$$

тогава редицата от непресекателни подмножества на Н, означена с $(\bar{\Gamma}(к);\ к \leq n)$, образува разбиване на Н, канонично съпоставено на конгруенцията ρ_H; като използуваме n-арния композиционен закон канонично съпоставен на закона на $H^\bullet$, индуциран във всяко подмножество $\bar{\Gamma}(к)$, $к \leq n$ и свойствата на единичните $(n-1)$-редици, установяваме, че

$$|\bar{\Gamma}(к)| = |\bar{\Gamma}(к'')| \quad , к, к'' \in \mathbb{Z}_n, \ к \neq к''$$

/тук с $|E|$ сме означили кардиналното число на множеството Е/; това става чрез две инжективни изображения:

$$j\ \bar{\Gamma}(к) \to \bar{\Gamma}(к'') \quad и \ j'' : \bar{\Gamma}(к'') \to \bar{\Gamma}(к),$$

такива че $j'' = j^{-1}$, които се строят без затруднения; така установяваме, че множеството $\bar{\Gamma}(к)$ е образувано от композируеми редици и има вида

$$\bar{\Gamma}(\kappa) = \{(x_1, x_2, \dots, x_p);\ x_s \in H,\ p = \kappa \bmod n\}$$

За композиционния закон, индуциран във всяко множество $\bar{\Gamma}(\kappa)$ от закона в $H^{\bullet}$, с арност к. n и построен като производен композиционен закон на n-арния композиционен закон канонично съпоставен на закона от $H^{\bullet}$, множеството $\bar{\Gamma}(\kappa)$ е полиадична категория от ред к. $n \in \mathbb{N}$, тъй като аксиомите $(\bar{K})$ са удовлетворени. В частност, ако к = 1, множеството $\bar{\Gamma}(1)$ е подмножество от $\mathsf{L}[H^{\bullet}]$, дължината на пътищата, в което е 1; тогава $\bar{\Gamma}(1)$ е, относно индуцирания производен закон, една полиадична категория от ред точно $n \in \mathbb{N}$. △

Нека означим с $\mathsf{L}(\kappa) \subset \mathsf{L}[C^{\bullet}_{[n]}] = \mathsf{L}[C]$ множеството от пътищата, за които имаме

$$h = (x_i\ ;\ i \le p) \in \mathsf{L}(\kappa) \Longrightarrow p = \kappa \bmod n$$

Тогава от (3.5.1) произтича следния частен резултат:

(3.5.2) СЛЕДСТВИЕ. Отношението на еквивалентност σ върху $\mathsf{L}[C]$ съответствуващо на разбиването $(\mathsf{L}(\kappa);\ \kappa \le n)$, определя еднозначно една конгруенция σ_{L} върху $\mathsf{L}[C]$ която удовлетворява условията на (3.5.1). △

От така установените свойства на свободната категория на пътищата, съпоставена канонично на произволна категория $H^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ получаваме следния основен резултат:

(3.5.3) ТЕОРЕМА. Всяка полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$ е изоморфна на полиадичната категория от същия ред, получена като снабдим класът на еквивалентност, асоцииран на $1 \in \mathbb{Z}_n$ в една свободна категория от пътища със структурата на полиадична категория, чрез n-арния композиционен закон, индуциран в този клас от композиционния закон на свободната категория.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $C^{\bullet}_{[n]}$ е произволна полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$; в съответствие с (3.4.4) тя може да бъде канонично вложена в свободната категория $\llcorner[C]$ на пътищата, асоциирана на ориентирания граф $[C]$, подлежащ на $C^{\bullet}_{[n]}$; като имаме пред вид конструкцията на σ_L от (3.5.2), получаваме $\llcorner(1) = C$, където $1 \in \mathbb{Z}_n$; тогава в съответствие с резултата от (3.5.2), класът на еквивалентност $\llcorner(1) = C$, снабден с производния n-арен композиционен закон, индуциран от композиционния закон на $\llcorner[C]$ е в съответствие с (3.5.1) една полиадична категория от ред $n \in \mathbb{N}$; това е точно полиадичната категория $C^{\bullet}_{[n]}$ $\triangle$

При положение, че n-арният композиционен закон е навсякъде определен, се получават резултати, отнасящи се до n-полугрупите, чиито интерес обаче е ограничен, тъй като за тях има по-силна характеризация.

Аналогично се третират случаите, когато полиадичната категория е с обратими елементи в смисъла на обратимостта в категориите (вж. [14], [15], [42]).

Всяка малка категория, т.е. такава категория $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$, за която $C \in \mathcal{M}_0$, може да бъде канонично вложена в една категория от изображения, а при подходящ избор на базисното множество и система от негови подмножества, за всяка категория може да бъде построена изоморфна на нея подкатегория от изображения.

Ние си поставяме за задача да потърсим за $\{n\}$-категориите при $\{n\} = [n]$ и при $\{n\} = (n)$, n аналогични свойства.

Ще започнем с полиадичните категории; тъй като съществува покриваща категория, търсим едно специално множество от изображения, свързано с носителя на структурата, снабдено със структурата на полиадична категория и допускащо за покриваща категория една подкатегория от $\mathcal{M}$.

Нека $M \in \mathcal{M}_0$, нека R_M е отношение на еквивалентност върху M и нека $R(M)$ е разбиването на M съответствуващо на R_M; нека е дадено още множеството Q, множеството от индекси I" = $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ и декартовото произведение $Q \times$I", такова че

$$M = \bigcup_{i \leq n-1} (Q, i).$$

Ще казваме, че наредената четворка $\bar{M} = (M, R_M, Q, I")$ е <u>полиразслоено множество</u> от ред $n \in N$. Нека сега разгледаме изображенията

$$B = \{f \,;\, f : M \longrightarrow M\}$$

чиито елементи удовлетворяват следните условия;

(I) $\alpha(f) \in R(M)$, $\quad \beta(f) \subset \bar{M} \in R(M)$;

(II) $\quad a \in (Q, i) \cap \alpha(f) \longrightarrow f(a) \in (Q, i+1)$ като $n + 1 = 1$.

Подобно изображение ще наричаме <u>полиразслоено изображение</u> от ред $n \in N$, а множеството B - множество на полиразслоените изображения от ред $n \in N$, асоциирано на полиразслоеното множество от същия ред $\bar{M}$, като за точност ще пишем $B = B(\bar{M})$; по-горе сме означили с $\alpha(f)$ източникът на $f \in \mathfrak{M}$, а с $\beta(f)$ неговата цел.

При така въведените понятия и означения имаме:

(3.5.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. За частинния n-арен композиционен закон, построен над $B(\bar{M})$ по следния начин

$$[(f_1, f_2, \ldots, f_n)] = f_1 . f_2 . \ldots . f_n ,$$

тогава и само тогава, когато $\beta(f_i) \subset \alpha(f_{i+1})$, $i \leq n$, множеството $B(\bar{M}^{\cdot})$ от полиразслоените изображения, асоциирано полиразслоеното множество от ред $n \in N$ $\bar{M}$ над M е полиадична категория от ред $n \in N$

Д о к а з а т е л с т в о. Аксиомите $(\overline{K.1})$ и $(\overline{K.4})$ са удовлетворени очевидно, пред вид конструкцията на n-арния композиционен закон $(\ast)$ в $B(\bar{M})$. Нека сега положим

$$\hat{\beta}(f) = (\beta(f), \ldots, \beta(f)) \text{ и } \hat{\alpha}(f) = (\alpha(f), \ldots, \alpha(f)),$$

където в редиците са взети $(n-1)$ екземпляра на $\beta(f)$, съответно $\alpha(f)$; получените $(n-1)$ редици са единични и аксиомата $(\overline{K.3})$ е удовлетворена. Накрая, аксиомата $(\overline{K.2})$ произтича от условието за композируемост относно $(\ast)$. $\triangle$

Ако $n = 2$ положението се тривиализира: всяко полиразслоено множество от ред $n = 2$ /би-разслоено/ е обикновено множество и $B(\bar{M})$ е снабдено със структурата на категория.

Сега, с въведените понятия, означения и предварителни резултати, можем да формулираме и докажем следния резултат, който характеризира пълно полиадичните категории от ред $n \in N$.

(3.5.5) ТЕОРЕМА. Всяка полиадична категория е изоморфна на една полиадична подкатегория върху множеството от полиразслоените изображения, съпоставена канонично на едно полиразслоено множество /от ред $n \in N$ /

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $C^{\bullet}_{[n]}$ е полиадична категория върху $C \in \mathcal{M}_0$ и нека $\mathsf{L}[C]$ е свободната категория на пътищата, съпоставена на подлежащия на $C^{\bullet}_{[n]}$ ориентиран граф $[C^{\bullet}_{[n]}] = [C]$, за който полагаме $[C]_0 = C_0$; чрез прообразите на елементите от C_0 относно α се дефинира точно едно разбиване на $\mathsf{L}[C]$, на което съответствува единствено отношение на еквивалентност R_{α}^{J}; винаги може да бъде намерено множество Q, така че четворката $\bar{\mathsf{L}} = (\mathsf{L}[C], R_{\alpha}^{\mathsf{J}}, Q, I'')$ да бъде полиразслоено множество от ред $n \in N$, определено с точност до една бижекция. От тук следва съществуването върху $B(\bar{\mathsf{L}})$ на структурата на полиадична категория от ред $n \in N$, построена съгласно (3.5.4). Да разгледаме тогава изображението $u : C \to B(\bar{\mathsf{L}})$, такова, че да имаме

$$g \in C,\ \bar{g} \in L[C],\ (\bar{g}, g) \in L[C] * L[C] \Rightarrow \bar{g}g = u(g)(\bar{g});$$

без затруднение се проверява, че $u(g) \in B(\bar{L})$, както и факта, че u дефинира полиадичен функтор $\bar{u} = ((B(\bar{L}))^{\bullet}_{[n]}, u, C^{\bullet}_{[n]})$; следователно образа на $C^{\bullet}_{[n]}$ чрез $\bar{u}$ е полиадична подкатегория на категорията $(B(\bar{L}))^{\bullet}_{[n]}$. Остава да установим, че $\bar{u} \in \mathcal{F}^{[n]}$ е инжективен; нека за целта изберем $\bar{g}$ така че $\bar{g} = e \in ((B(\bar{L}))^{\bullet}_{[n]})_0$;
тогава за два произволни елемента $g', g'' \in C$ имаме:

$$e g' = u(g')(e) \quad \text{и} \quad e g'' = u(g'')(e);$$

от тук, въз основа на свойствата на единиците в $B(\bar{\mathsf{L}})$ имаме импликацията: $u(g') = u(g'') \longrightarrow g' = g''$;

но това означава, че $u \in \mathcal{M}$ е инжективно изображение, следователно полиадичния функтор $\bar{u} \in \mathcal{F}^{[n]}$ е също така инжективен. $\triangle$

От тук получаваме като следствие класическия резултат:

(3.5.6) СЛЕДСТВИЕ. Всяка категория $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ е изоморфна на една подкатегория на категорията от изображенията, асоциирана канонично на множеството P (C) от подмножествата на $C \in \mathcal{M}_0$. $\triangle$

В 5.1 ние ще докажем, че множеството от n -отношенията, асоциирани на $\mathcal{M}_0$, означавано $\mathcal{R}_n(\mathcal{M}_0) = \mathcal{R}_n$, снабдено с един "естествен" n -арен композиционен закон е $\{n\}$ - категория, $\mathcal{R}_n^{\perp} \subset \{n\} = (n)$ или n в зависимост от конструкцията на закона. Тук ще предполагаме, че тези резултати са известни, за да не прекъсваме изложението.

При тези условия можем да формулираме следния основен за $\{n\}$ -категориите, при $\{n\} = (n)$ и n, резултат:

(3.7.7) ТЕОРЕМА. Всяка малка (n)-категория /респ. n -категория/ $C^{\bullet}_{\{n\}}$, т.е. такава че $C \in \mathcal{M}_0$, е изоморфна на една под-$\{n\}$-категория на $\mathcal{R}_n^{\perp}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Ще дадем подробно доказателство на твърдението само за $\{n\} = n$; случаят $\{n\} = (n)$ се третира аналогично. То се свежда до построяване на инжективно изображение от C в $\mathcal{R}_n$, което да дефинира функтор от $C^{\bullet}_n$ към $\mathcal{R}_n^{\perp}$. Нека $f \in$ C; съгласно построението на $C^{\bullet}_n$, на f съответствува единична редица $E = \{ u_i(f) ; i \leq n \}$, образувана от полюси в $C^{\bullet}$; да означим с $К_Е$ множеството от всички морфизми на $C^{\bullet}$, за които $К_Е$ е единичната редица; тъй като $C^{\bullet}$ е малка n-категория, то от $C \in \mathfrak{M}_0$ следва също, че $К_Е \in \mathfrak{M}_0$; тогава строим изображение $\Phi : C \longrightarrow \mathcal{R}_n$ със следните свойства:

$$\Phi(E) = \{M_к;\ к \leq n\}\ ;\ \Phi(f) \in P(\prod_{к \leq n} M_к)\ ;\ f \neq g \Rightarrow \Phi(f) \neq \Phi(g)\ ;$$

първото свойство се конструира тривиално, а за реализиране на второто е достатъчно да вземем множествата $M_к$ достатъчно големи в редицата $(M_к;\ к \leq n)$; така построихме изображение, което на един морфизъм от $C^{\bullet}_n$ съпоставя n-отношение от $\mathcal{R}_n$ и на два различни морфизма с обща единична редица-две различни n-отношения с общ носител; нека е дадена композицията $[(f_к;\ к \leq n)]$; от условието за композируемост в $C^{\bullet}_n$ следва, че чрез Φ редицата $(f_к;\ к \leq n)$ се изобразява в композируемата редица от n-отношения; от единствеността на композициите в $C^{\bullet}_n$ и в $\mathcal{R}^{\perp}_n$ следва, че Φ дефинира n-хомоморфизъм, в частност n-функтор. △

От тук се получава интересно следствие, аналог на теоремата на Кели за групите и полугрипите при n-полугрупите.

(3.5.8) СЛЕДСТВИЕ. Всяка n-полугрупа C е изоморфна на една n-подполугрупа от n-полугрупата на n-отношенията, построени над $C \in \mathfrak{M}_0$. △

Доказаното твърдение в (3.5.7) има значение не само за характеризацията на $[n]$-категориите /при $[n] = (n)$ и n/ но и определя една n-арна частична структура като еталонна.

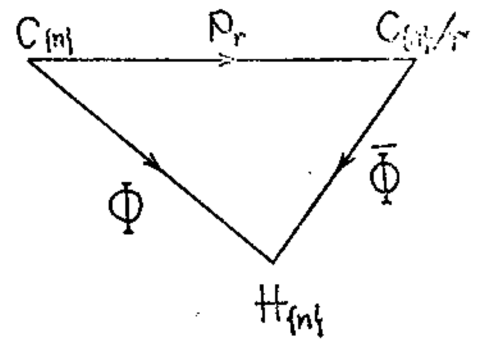


fig. 3.1

4. СВОЙСТВА НА КАТЕГОРИИТЕ ОТ $[n]$-ФУНКТОРИ

В 2. установихме, че $\{n\}$-функторите, асоциирани на $[n]$-категориите при $\{n\} = (n)$, n, $[n]$, $\langle n\rangle$ над $\mathcal{M}_0$ образуват категория. На $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е съпоставен функторът на забрава

$$p^{\{n\}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}^{\{n\}} \longrightarrow \mathcal{M}$$

В тази глава ще изследваме свойствата на категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$. Резултатите в следващите страници са по-скоро констатации, независимо от това, че са преодоляни значителни трудности при доказателствата. Чрез теоремите от 4.1 и 4.2 обаче, се уточнява мястото на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ сред категориите от алгебрични структури. А тъй като частичните универсални алгебри са слабо изследвани, резултатите имат и самостоятелно значение.

В 4.3 е изследван подробно забравящият функтор $p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$. Установени са редица общи и специални свойства на $p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$, които са от голямо значение за пълната характеристика на n-арни категорни структури.

В последните параграфи се спираме без подробности на някои специални свойства на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и на структуризирането й.

4.1. Граници в категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$

Ще установим най-напред съществуването на някои класи от граници в категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$

(4.1.1) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ допуска за терминален обект всяка едноелементна $\{n\}$-категория.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $T \in \mathcal{U}^{\{n\}}$ е такава, че $T = T_0 = \{e\}$. Тогава за всяка $\{n\}$-категория $C^{\circ}_{\{n\}} \in \mathcal{U}_0^{\{n\}}$ съществува един и само един морфизъм $\Phi: C^{\bullet}_{\{n\}} \longrightarrow T^{\bullet}_{\{n\}}$, който е "продължение до $\{n\}$-функтор" на суржекцията $C \longrightarrow T$, очевидно съществуваща и единствена, тъйкато в $\mathcal{M}$ едноелементните множества са терминални обекти. Следователно по определението за терминален обект всяка едноелементна $\{n\}$-категория е терминален обект в $\mathcal{U}^{\{n\}}$. Всички едноелементни $\{n\}$-категории са изоморфни. $\triangle$

(4.1.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е с $\{1,2\}$-произведения.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека са дадени $\{n\}$-категориите $B^{\bullet}_{\{n\}}$ и $C^{\bullet}_{\{n\}}$ и нека сме избрали две произволни n-редици от елементи на B и C съответно, композируеми в $B^{\bullet}_{\{n\}}$ и $C^{\bullet}_{\{n\}}$, т.е.

$$(в_к;\ к \leq n) \in \overset{n}{\times} B^{\bullet}_{\{n\}} \text{ и } (c_к;\ к \leq n) \in \overset{n}{\times} C^{\bullet}_{\{n\}};$$

очевидно $(в_к,\ c_к) \in B \times C$; относно композиционните закони в $B^{\bullet}_{\{n\}}$ и $C^{\bullet}_{\{n\}}$ съответно имаме

$$в = [(в_к;\ к \leq n)] \qquad \text{и} \qquad c = [(c_к;\ к \leq n)],$$

като $(в, c) \in B \times C$; можем следователно да положим

$$((в_к;\ к \leq n),\ (c_к;\ к \leq n)) \sim ((в_к,\ c_к);\ к \leq n)$$

и относно n-арния композиционен закон

$$K: \quad [((в_к,\ c_к);\ к \leq n)] \longmapsto (в, c)$$

наредената двойка $(B \times C,\ K)$ е $\{n\}$-категория /аксиомите се проверяват непосредствено/. Така построената $\{n\}$-категория е произведението на $B^{\bullet}_{\{n\}}$ и $C^{\bullet}_{\{n\}}$ в $\mathcal{U}^{\{n\}}$. $\triangle$

(4.1.3) СЛЕДСТВИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е с крайни произведения. $\triangle$

От (4.1.1) и (4.1.3), като имаме пред вид общите свойства на разслоените произведения в една категория, получаваме:

(4.1.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е с крайни разслоени произведения. $\triangle$

Доказва се без затруднения, че $\mathcal{U}^{\{n\}}$ допуска произволни (в частност $\mathcal{F}_0$-) произведения и разслоени произведения.

(4.1.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ всяка двойка $\{n\}$-функтори с общо начало и обща цел допуска ядро.

Доказателство. Нека са дадени $\{n\}$-функторите Φ, Φ'': $C^{\bullet}_{\{n\}} \longrightarrow \bar{C}^{\bullet}_{\{n\}}$. И нека е дадено семейството $\{n\}$-функтори $(\bar{\Phi}_к;\ к \leq p)$ от изравнители за двойката (Φ, Φ''), т.е. такива $\{n\}$-функтори, щото за всеки индекс $к \leq p$ да имаме

$$\Phi.\bar{\Phi}_к = \Phi''.\bar{\Phi}_к$$

такива $\{n\}$-функтори съществуват и те съвпадат с част от каноничните $\{n\}$-функтори, които влагат под-$\{n\}$-категориите на $C^{\circ}_{\{n\}}$ в $\bar{C}^{\bullet}_{\{n\}}$ и са следователно мономорфизми от $\mathcal{U}^{\{n\}}$. Тъй като класът от мономорфизмите $C^{\bullet}_{\{n\}}$. $\mathcal{R}g(\mathcal{U}^{\{n\}})$ с цел

C $^{\circ}_{\{n\}}$ има най-голям елемент и тъй като всички мономорфизми от това множество са или изоморфни или в отношение на наредба, то и подмножеството, образувано от изравнителите има най-голям елемент, който е търсеното ядро на (Φ, Φ''); наистина, ако $\bar{\bar{\Phi}}$ е ядрото, то за всеки $\Phi_к$ от множеството на изравнителите съществува $\{n\}$-функтор $H: \alpha(\Phi_к) \longrightarrow \alpha(\bar{\bar{\Phi}})$, такъв че $\bar{\bar{\Phi}}.H = \Phi_к$. $\triangle$

От (4.1.2) и (4.1.5) и от теоремата за съществуване на граници от общата теория на категориите следва:

(4.1.6) ТЕОРЕМА. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е /проективно/ плътна, т.е. тя е категория с /проективни/ $\mathcal{F}_0$-граници. $\triangle$

Да разгледаме сега въпроса за кограниците в $\mathcal{U}^{\{n\}}$

(4.1.7) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ допуска за инициален обект всяка празна $\{n\}$-категория. $\triangle$

Доказателството е следствие от аналогично свойство в категорията $\mathcal{M}$ на изображенията над $\mathcal{M}_0$. Ако категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ по предположение /каквото ние тук не правим/ не съдържа празните $\{n\}$-категории, то тя няма инициален обект.

(4.1.8) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е с крайни суми.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $(E_к, к \in I)$ е семейство от множества, за които $E_к \in \mathcal{M}_0, I \in \mathcal{M}_0$; нека $E \in \mathcal{M}_0$ и нека означим с $V_к$: $x \longrightarrow (x,к)$ каноничната инжекция на $E_к$ в E; нека положим още за $e_к \in \mathcal{U}^{\{n\}}_0$ и $x_к \in e. \mathcal{U}^{\{n\}}.e_к$:

$$p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}(e) = E, \quad p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}(e_к) = E_к \quad и \quad p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}(x_к) = (E, \underline{x}_к, E_к).$$

Да допуснем, че $e_к$ е n-клас за всяко $к \in I$; нека построим n-клас $E_{\{n\}}$ чрез n-арния композиционен закон

$$\big((x_p,\ к_p);\ к_p \in I\big) \longrightarrow \big([(x_p;\ p \in I)]\ \ к\big)$$

като композицията е дефинирана тогава и само тогава когато $к_p = к$ и $(x_p;\ p \in I) \in \overset{n}{\divideontimes} E_{\{n\}}$; тогава $V_к : E_{\{n\}к} \longrightarrow E^{\cdot}_{\{n\}}$, $E^{\cdot}_{\{n\}к} = e_к$ е хомоморфизъм от $E^{\cdot}_{\{n\}к}$ към $E^{\cdot}_{\{n\}}$; нека означим с $\bar{x}$ изображението

$$\bar{x}:\ (x,к) \longrightarrow \bar{x}_к\ (x)$$

от E в E" $= \beta(\bar{x}_к) =$ E"; ако композицията на $\big((x_p,\ к_p);\ к_p \in I\big)$ е дефинирана в $E^{\cdot}_{\{n\}}$ и следователно $к_p = к$ за всяко $p \in I$, имаме

$$\bar{x}\ \big(\big((x_p,\ к_p);\ к_p \in I\big) = \bar{x}_к\ \big([(x_к;\ к \in I)]\big) = [(\bar{x}_к(x_к);\ к \in I)]$$
$$= [(\bar{x}(x_к,\ p_к);\ к \in I\ ,\ \ p_к = p)]\ ;$$

следователно $\bar{x}$ дефинира единствен хомоморфизъм от $E^{\cdot}_{\{n\}}$ към $\beta(\bar{x}_к)$, такъв че $\bar{x}.V_к = \bar{x}_к$ за всяко $к \in I$; с това установихме, че за всяко семейство от n-класи съществува сума в категорията на n-класите. Ако елементите $E^{\cdot}_{\{n\}к}$, $к \in I$, са $\{n\}$-категории, то множеството от полюсите на $E^{\cdot}_{\{n\}}$ е обединението на множествата от полюсите на $(E^{\cdot}_{\{n\}к};\ к \in I)$ и построената по-горе сума от n-класи е $\{n\}$-категория, която допуска за подлежащ $\{n\}$-граф $\{n\}$-графът-сума $\{E^{\circ}_{\{n\}}\}$ на подлежащите $\{n\}$-графи на $E^{\cdot}_{\{n\}к}$; както и по-горе, с минимални допълнения и изменения, се установява, че $V_к$ и $\bar{x}$ са функтори и от комутативността на диаграмите за всяко $к \in I$ следва, че $E^{\cdot}_{\{n\}}$ е $\{n\}$-категория, сума на семейството $(E^{\cdot}_{\{n\}к};\ к \in I)$ от $\{n\}$-категории. $\triangle$

(4.1.9) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}_{o}$ допуска крайни разслоени суми. △

Този резултат следва от (4.1.7) и (4.1.8).

Ограничението за крайност е несъществено тук. Получените резултати са в сила и за $\mathcal{F}_0$- когранините.

(4.1.10) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ всяка двойка $\{n\}$-функтори с общ източник и обща цел допуска ко-ядро.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека H_1, H_2: $C^{\cdot}_{\{n\}} \to K^{\cdot}_{\{n\}}$ са два $\{n\}$-функтора и нека Φ: $K^{\cdot}_{\{n\}} \to M^{\cdot}_{\{n\}}$ е $\{n\}$-функтор такъв че $\Phi . H_1 = \Phi . H_2$; $\{n\}$-функтори от типа на Φ съществуват и в общия случай са повече от един. Така полученото семейство съдържа най-малък елемент $\bar{\Phi}$, за който при всеки друг $\{n\}$-функтор Φ имаме единствен $\{n\}$-функтор $\bar{\bar{\Phi}}$: $\beta(\Phi) \to \beta(\bar{\Phi})$ със свойството $\bar{\bar{\Phi}} . \Phi = \bar{\Phi}$. Но това означава, че $\bar{\Phi}$ е ко-ядро на двойката (H_1, H_2). △

(4.1.11) ТЕОРЕМА. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е ко-плътна, т.е. тя е категория с $\mathcal{F}_0$-когранници. △

Доказателството следва от (4.1.8) и (4.1.10) и от общите теореми за съществуването на когранници.

4.2. Върху характеристиката на категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$

Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и редица нейни подкатегории се характеризират от специфични свойства, които определят мястото й в системата от категории на хомоморфизми между универсални или частични универсални алгебри.

Нека припомним, че/вж. [91] / една категория е <u>конкретна</u>, ако съществува изоморфизъм от нея към една подкатегория на категорията $\mathcal{M}$ на изображенията над $\mathcal{M}_0$.

(4.2.1) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е конкретна.

Д о к а з а т е л с т в о. По построение $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е категория от структуризирани множества, снабдени със структурата на $\{n\}$-категория в съответствие с (2.2.2) и (2.2.3). От друга страна съгласно (3.3.7) в $\mathcal{U}^{\{n\}}$ съществуват свободни структури в съответствие с конструкцията на свободните структури от 3.3; така че в $\mathcal{U}^{\{n\}}$ съществуват свободни обекти. Тогава (4.2.1) следва от (V.1.5) на [91] $\triangle$

Това твърдение следва и от съществуването на интегрален обект в $\mathcal{U}^{\{n\}}$. Ще казваме, че $e \in H_0$ е <u>интегрален обект</u> в $H^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, ако $e''.H.e \neq \emptyset$ при $e'' \in H_0$ и ако за два произволни морфизма $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \bar{e}''.H.e''$, такива че $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$, съществува $\bar{y} \in e''.H.e$, за които $\bar{x}.\bar{y} \neq \bar{\bar{x}}.\bar{y}$. Тогава от съществуването на интегрален обект в $\mathcal{U}^{\{n\}}$, което се установява лесно и от общи теореми за съществуване на канонично вложение на категория с интегрален обект в категория от структуризирани множества следва (4.2.1).

(4.2.2) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е малка. $\triangle$

Това предложение следва от факта, че обектите на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ са структуризирани множества от един универсуум. Важността му е свързана с това, че служи за основа на следната теорема, която е конкретизация на важна теорема от теорията на универсалните алгебри:

(4.2.3) ТЕОРЕМА. $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е изоморфна на една пълна подкатегория на категория от универсални алгебри с унарни операции. $\triangle$

Доказателството не изисква да се правят специални хипотези относно характера на операциите в $\{n\}$-категориите, които са частични универсални алгебри. Това обаче не означава, че всяка $\{n\}$-категория може да бъде канонично вложена в универсална алгебра, дефинирана от оператори с арност само единица.

(4.2.4) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е затворена относно под-$\{n\}$-категориите /терминологията от [11] тя е наследствена/, относно произведенията и хомоморфните образи.

Д о к а з а т е л с т в о. Съгласно построението на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ /вж. 2.1/ заедно с всяка $\{n\}$-категория $C_{\{n\}}$, произволна под-$\{n\}$-категория на $C_{\{n\}}$ е също така обект на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ (наследственост).- Тъй като $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е съгласно (4.1.3) категория с произведения, а освен това $\mathcal{M}_0$ съдържа заедно с две множества тяхното декартово произведение, произведението на две $\{n\}$-категории е също обект на $\mathcal{U}^{\{n\}}$, т.е. $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е затворена относно произведенията.- Тъй като $\mathcal{M}$ съдържа заедно с едно множество всички негови образи относно изображения от $\mathcal{M}$, което следва от аксиомите за $\mathcal{M}_0$, и тъй като за всеки $\{n\}$-функтор има поне едно подлежащо изображение от $\mathcal{M}$, то $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е затворена относно хомоморфните образи. $\triangle$

Нека напомним, вж. [11], гл. 2,6, че една категория $\mathcal{A}$ наричаме локална, ако за всяка алгебра A съществува система от подалгебри и канонични вложения $((A_к, i_к); к \in I)$, $I \in \mathfrak{M}_0$, $i_к: A_к \longrightarrow A$, така че от $A_к \in \mathfrak{A}_0$ следва $A \in \mathfrak{A}_0$; една категория ще наричаме резидуална, ако заедно с един обект съдържа всички негови фактор-обекти. Имаме:

(4.2.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е локална и резидуална. $\triangle$

(4.2.6) ТЕОРЕМА. В $\mathcal{U}^{\{n\}}$ всеки $\{n\}$-функтор се представя като композиция от един мономорфизъм и един епиморфизъм

$$\Phi = \Phi_м . \Phi_е$$

За всеки $\{n\}$-функтор съществуват образ и кообраз, които го представят еднозначно с точност до изоморфизъм.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\varphi: H \longrightarrow C$ е подлежащото изображение на $\{n\}$-функтора $\Phi : H^{\cdot}_{\{n\}} \to C^{\cdot}_{\{n\}}$; известно е, че съществува представяне /въобще не единствено/ на φ във вида

$$\varphi = \mu . \lambda$$

където μ е инжективно изображение към $C \in \mathfrak{M}_0$/т.е. мономорфизъм в $\mathfrak{M}$/, а λ е суржективно изображение от $H \in \mathfrak{M}_0$/ т.е. епиморфизъм в $\mathfrak{M}$ /. От (3.2.1) следва, че съществуват представяния на Φ като композиция от два $\{n\}$-функтора; от структурата на $\{n\}$-категорията - цел за $\Phi_е$, следва че $\Phi_е$ и $\Phi_м$ са съответно епиморфизъм и мономорфизъм в $\mathcal{U}^{\{n\}}$, тъй като $p^{\{n\}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U}^{\{n\}} \longrightarrow \mathfrak{M}$ трансформира мономорфизми в мономорфизми и епиморфизми в епиморфизми. Нека сега допуснем, че са дадени две разлагания на Φ, т.е. че имаме

$$\Phi = \Phi_м . \Phi_е = \Phi''_м . \Phi''_е \quad ;$$

в семейството от комутативни триъгълни диаграми съществува една най-голяма, т.е. такава че ако тя е $\Phi=\Phi_М.\Phi_е$, то за всяка друга диаграма $\Phi = \Phi''_М.\Phi''_е$, съществува мономорфизъм $\bar{\Phi}: \alpha(\Phi''_М) \rightarrow \alpha(\Phi_М)$, такъв че $\Phi_М.\bar{\Phi} = \Phi''_М$; по определение тогава $\Phi_М$ е образ на $\{n\}$-функтора Φ, а $\Phi_е$, който е епиморфизъм - негов кообраз. $\triangle$

(4.2.7) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е бикатегория от вида $\mathcal{U}^{\{n\}} = (\mathcal{U}^{\{n\}}, Rg(\mathcal{U}^{\{n\}}), Rd(\mathcal{U}^{\{n\}}))$.

Д о к а з а т е л с т в о. Съгласно (4.2.5) всеки морфизъм от $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е представим в $\mathcal{U}^{\{n\}}$ като композиция от един мономорфизъм и един епиморфизъм. От втората част на (4.2.6) следва, че в множеството от комутативните триъгълни диаграми, в които Φ се разлага, съществува наредба, т.е. за всяка двойка диаграми от въпросното множество съществува мономорфизъм /евентуално изоморфизъм/, чрез който се получава комутативност на диаграмата от двата мономорфизма към двете диаграми и новия мономорфизъм, чието съществуване се утвърждава. Нека отбележим накрая, че отношението

$$Is(\mathcal{U}^{\{n\}}) \subseteq Rg(\mathcal{U}^{\{n\}}) \cap Rd(\mathcal{U}^{\{n\}})$$

е очевидно изпълнено. $\triangle$

Тези няколко твърдения показват, че категорията $\mathcal{U}^{\{n\}}$ има свойствата на всяка категория на многообразия от универсални алгебри. Ние обаче не разполагаме с критерий, който да оказва ясно до къде се простира тази аналогия.

4.3. Свойства на функтора $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$

Нека са дадени два универсуума $\mathfrak{M}_0$ и $\hat{\mathfrak{M}}_0$, такива че $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ и $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$. На тях съответствуват категориите от $\{n\}$-функтори $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и $\hat{\mathcal{U}}^{\{n\}}$, асоциирани съответно на категориите от изображения $\mathfrak{M}$ и $\hat{\mathfrak{M}}$ над двата универсуума. Очевидно $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е пълна подкатегория на $\hat{\mathcal{U}}^{\{n\}}$. По естествен начин се дефинират функторите на забрава.

$$P_{\hat{\mathcal{U}}}^{\{n\}} = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}_{\hat{\mathcal{U}}}^{\{n\}}, \hat{\mathcal{U}}^{\{n\}}) \text{ и } p_{\mathcal{U}}^{\{n\}} = P_{\hat{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}^{\{n\}} = (\mathfrak{M}, \underline{p}_{\mathcal{U}}^{\{n\}}, \mathcal{U}^{\{n\}}).$$

В сила са два резултата:

(4.3.1) ТЕОРЕМА. Функорът $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е:

а) функтор на хомоморфизми;

б) Наситен;

в) с $\mathcal{F}_0$-граници;

г) дясно разрешаващ;

д) с квази-фактор структури.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\mathcal{U}_\gamma^{\{n\}}$ е множеството от обратимите $\{n\}$-функтори; $\mathcal{U}^{\{n\}}_0 = \mathcal{U}_\gamma{}^{\{n\}}_0$ и за $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ имаме

$$\Phi, \Phi'' \in \mathcal{U}^{\{n\}}, \quad \alpha(\Phi) = \alpha(\Phi''), \ \beta(\Phi) = \beta(\Phi'') = (\Phi''),$$
$$p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\Phi) = p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\Phi'') \quad \Longrightarrow \quad \Phi = \Phi''$$

което следва от свойствата на хомоморфизмите между алгебрични структури; накрая, тъй като за всяко множество елементи от $\mathfrak{M}_0$ съществува семейство от

$\{n\}$-категории, което го съдържа като подмножество от носителя и че в това семейство съществува точно един /с точност до изоморфизъм/ най-малък елемент, следва

$$\underline{\Phi} \in p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\mathcal{U}^{\{n\}}) \Rightarrow \bar{p}_{\mathcal{U}}^{-1\,\{n\}}(\alpha(\underline{\Phi})) \subset \alpha(\bar{p}_{\mathcal{U}}^{-1\,\{n\}}(\underline{\Phi})) \quad ;$$

но тогава по определение /вж. [19] , II, 3, A, Деф. 19/ функторът $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е функтор на хомоморфизми. – Очевидно $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\mathcal{U}^{\{n\}})$ е подкатегория на $\mathcal{M}$, което следва от композиционния закон в $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и свойствата на функторите; освен това по построение $(p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\mathcal{U}_{\gamma}^{\{n\}}))_0 = \mathcal{M}_0$ и следва, че $\mathcal{M}_{\gamma}.\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{\gamma} = p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}(\mathcal{U}_{\gamma}^{\{n\}})$, поради това че на всяко бижективно изображение от $\mathcal{M}$ е съпоставен точно един морфизъм в $\mathcal{U}^{\{n\}}$; следователно $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е наситен по определение. Ако е дадено едно семейство $(C^{\cdot}_{\{n\}\,\kappa};\ \kappa \in I)$ от $\{n\}$-категории произведението му съгласно (4.1.3/ може да бъде натурализирано, т.е. отнесено към предварително фиксирано изображение, чрез което от множеството на изоморфните обекти-произведение се избира точно един, зададен за определеност с $\{n\}$-функторите-проекции върху обектите-компоненти/; образът на произведението чрез $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ в $\mathcal{M}$ е също така произведение /този път от множества и също натурализирано, тъй като произведенията в $\mathcal{M}$ са канонични/и следователно $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е функтор с произведения; аналогично се установява, че $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е и с разслоени произведения; от тук се има пред вид определението, че той е функтор и с ядра /вж. [19] , I, 1, A, Деф., Предл. 1 и Следствието/; но тогава от а) и б) следва, че $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е с $\mathcal{F}_0$-граници. – Съгласно (4.1.5) всяка двойка $\{n\}$-функтори $(\Phi,\Phi")$, за които е изпълнено условието

$$\alpha(\Phi) = \alpha(\Phi'') \qquad \text{и} \qquad \beta(\Phi) = \beta(\Phi'')$$

допуска ядро, което чрез $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ се трансформира в ядро в $\mathcal{M}$ съгласно в., така че ядрото за което става дума, че съществува е $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ - ядро; тогава по определение /вж. [15], III, 2, A, Деф. 2/ функторът $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е дясно разрешаващ. - Тъй като $\mathcal{U}^{\{n\}}$ е с $\mathcal{F}_0$-граници и $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е дясно разрешаващ, то за всяка $\{n\}$-категория над елемент от $\mathcal{M}_0$ и за всяко отношение на еквивалентност r съществува квази-фактор-структура на $C^{\cdot}_{\{n\}}$ относно r; установените свойства на функтора $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ /от а) до г)/ и съществуването на квази-фактор-структури в категориите $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и $\mathcal{M}$ показват, че $p_{\mathcal{U}}^{\{n\}}$ е функтор с квази-фактор-структури. $\triangle$

Преди да пристъпим към следващата теорема, нека припомним важното /макар и малко използувано в практическите изследвания/ понятие изброимо-пораждащ функтор.

(4.3.3) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ще казваме, че $P = (\hat{\mathcal{M}}\ \underline{P}, \hat{H}) \in \hat{\mathcal{F}}$ е <u>изброимо пораждащ за</u> $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, ако са удовлетворени условията:

а/ За всяко $e \in \hat{H}_0^{\cdot}$ и всяко $x \in P(e)$. $\bar{\mathcal{M}}^i$, където $\mathcal{M}^i$ е подмножеството образувано от каноничните инжекции (K, ι, K''), $\emptyset \neq K'' \in \bar{\mathcal{M}}_0$, като $\bar{\mathcal{M}}_0$ е множеството от обектите на наситената подкатегория на $\hat{\mathcal{M}}$, породена от $\mathcal{M}$, съществува минимален елемент $\hat{j}$ в семейството на мономорфизмите $j \in e . R_g(H^{\cdot})$, такива че $x < P(j)$;

б/ За всяко цяло положително число $\kappa > 0$ нека e_κ е една P-подструктура на $e \in \hat{H}_0^{\cdot}$, такава че $P(e_\kappa) \in \bar{\mathcal{M}}$

и $P(e_к) \subset P(e_{к+1})$ тогава съществува P-подструктура $\bar{e} \in \hat{H}^{\cdot}_0$ на $e \in \hat{H}^{\cdot}_0$, такава че

$$P(\bar{e}) = \bigcup_{к \in \mathcal{N}} P(e_к)$$

Можем да формулираме и докажем на следната

(4.3.4) ТЕОРЕМА. Функторът $P^{\{n\}}_{\hat{\mathcal{U}}} = (\hat{\mathcal{M}}, P^{\{n\}}_{\hat{\mathcal{U}}}, \hat{\mathcal{U}}^{\{n\}})$ е:

а) С $\hat{\mathcal{F}}_0$-граници;

б) Дясно разрешаващ;

в) Изброимо-пораждащ за $\mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Първите две части на теоремата са идентични на тези от (4.3.1); впрочем твърдението на (4.3.4) може да бъде разширено до пълният списък от свойства на (4.3.1).- За да фиксираме идеите, ще допуснем, че $\{n\} = n$. Нека е даден най-напред един мултипликативен n-граф $C^{\cdot}_n \in \mathcal{N}'_{n0}$ и нека е дадено множество $M \in \mathcal{M}_0$ такова, че $\emptyset \neq M \subset C$, където $C = P^n_{\mathcal{N}'}(C^{\cdot}_n)$; тогава за всяко $\mathcal{U}_p \in U$, $U = (\mathcal{U}_p;\ p \leq n)$ е множеството от нулярни оператори на $C^{\cdot}_n$, имаме $\mathcal{U}_p(M) \in \overline{\mathcal{M}}_0$ и следва

$$\hat{M} = M \cup \Big(\bigcup_{p \leq n} \mathcal{U}_p(M)\Big) \in \overline{\mathcal{M}}_0$$

тъй като $\mathcal{M}_0$ и $\hat{\mathcal{M}}_0$ са универсууми; от друга страна мултипликативния под- n -граф на $C^{\cdot}_n$, породен от $M \subset C$ е под- n-класът $\hat{M}^{\cdot}_n \in \mathcal{N}'_{n0}$, където $\mathcal{N}'_n$ е наситената подкатегория на $\mathcal{N}'_n$, породена от $\mathcal{N}'_n$; следователно за функтора $p^n_{\mathcal{N}'} = P^n_{\hat{\mathcal{N}}/\mathcal{N}'}$ условията от [24] , 2, Предл. 2 са удовлетворени и той е пораждащ функтор. Нека освен това е дадено семейството $(C^{\cdot}_{nк};\ к \in \mathbb{N})$ от мултипликативни под- n -графи на $C^{\cdot}_n \in \mathcal{N}'_{n0}$, за които предполагаме, че

$$C_к \subset C_{к+1}\ ,\ C_к \in \mathcal{M}_0 \text{ за всяко } к \in \mathbb{N}\ ,\ \hat{C} = \bigcup_{к \in \mathbb{N}} C_к;$$

нека вземем произволен елемент $x \in C$; съществува поне един индекс $к \in \mathcal{N}$, такъв че $x \in C_к$ и като имаме пред вид, че съществува мултипликативен под-n-граф $C^{\cdot}_{nк}$, имаме

$$u_{кp}(x) \in C_к \subset \hat{C} \quad \text{за всяко} \quad p \leq n;$$

обаче за всяко к и всяко $p \leq n$ изображението $u_{кp}$ е рестрикция на $u_p \in U$, следователно $\hat{C}^{\cdot}_n$ е мултипликативен под-n-граф на $C^{\cdot}_n \in \hat{\mathcal{N}}_{n0}$; но тогава в съответствие с (4.3.3) функторът $p^{n}_{n}{}'$ е изброимо пораждащ за $\mathcal{M}$; твърдението следователно е доказано за $\mathcal{U}^{n} = \mathcal{N}'_n$; нека сега $C^{\cdot} \in \hat{\mathcal{F}}^{n}_{o}$ и нека $\hat{C}^{\cdot}_n$ е нейната под-n-категория, породена от M; тогава имаме $P^{n}_{\hat{\mathcal{F}}}(\hat{C}) \in \mathcal{M}_o$, тъй като $\hat{C}^{\cdot}_n$ е образът чрез $\tilde{r}$ на свободната n-категория $\mathsf{L}^{n}_{\mathcal{F}}[C]$, съпоставена на $C^{\cdot}_n$, където с $\tilde{r}$ сме означили изображението, съпоставено канонично на отношението на еквивалентност r върху $\mathsf{L}^{n}_{\mathcal{F}}[C]$, чрез което се получава $\mathsf{L}^{n}_{\mathcal{F}}[C]/r = C^{\cdot}_n$/вж. за означенията (3.1.9); същото свойство се установява и директно чрез трансфинитна индукция, както това бе направено за функтора p^{n}_{n}. по-горе/; следователно $P^{n}_{\mathcal{F}}$ е пораждащ функтор за $\mathcal{M}$; нека освен това е зададено семейството от n-категории ($C_{nк}$; $к \in \mathcal{N}$), където $C_{nк}$ е под-n-категория на C_n за всяко $к \in \mathcal{N}$ и за които

$$C_к \subset C_{к+1}, \; C_к \in \mathcal{M}_o \quad \text{за всяко } к \in \mathcal{N} \quad \text{и } C = \bigcup_{к \in \mathcal{N}} C_к;$$

нека сега вземем една n-орка от морфизми на $C^{\cdot}_n$, $x_p \in C$, за които $(x_p;\ p \leq n) \in \overset{n}{\times} C_n$; очевидно съществуват $к_p \in \mathcal{N}$ такива че $x_p \in C_{nк_p}$, от където следва условието за композируемост на $(x_p;\ p \leq n)$ в поне една n-категория от семейството, т.е.

$$(x_p;\ p \leq n) \in \overset{n}{\ast}\ C_{n\bar{k}},\ \text{където}\ \bar{k}=sup(k_p;\ p \leq n);$$

от тук заключаваме, че $(x_p;\ p \leq n) \in \overset{n}{\ast}\ C'_n$ и следователно мултипликативния под-n-граф $\hat{C}_n$ е под-n-категория на C_n; в съответствие с (4.3.3) функторът $p^n_{\mathcal{F}}$ е изброимо-пораждащ за $\mathcal{M}$. △

Междинните случаи, т.е. когато $\mathcal{U}^n = \mathcal{N}_n'', \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n'', \mathcal{F}_n'$ се изследват по аналогичен начин.

От така доказаната теорема могат да се получат някои резултати, които предпочетохме да докажем директно: съществуването на $\mathcal{F}_0$-кограници в $\mathcal{U}^{\{n\}}$, съвместимостта на $P^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$ и $p^{\{n\}}_{\mathcal{U}}$ с $\mathcal{F}_0$-границите и други.

Теоремите (4.3.1) и (4.3.4) са идентични при $\{n\} = (n), [n]$ и $\langle n \rangle$; доказателствата съдържат някои малки особености, свързани с особеностите при построяването на свободните структури. В подробности няма да се впускаме.

4.4. Някои специални свойства на $\mathcal{U}^{\{n\}}$

Нека $(C, V, \emptyset)$ е $\{n\}$-категория с празен композиционен закон; идентифицираме я с $\{n\}$-граф: $(C, V, \emptyset) = [C]$. Тогава категорията на $\{n\}$-графите може да бъде разглеждана като подкатегория на $\mathcal{U}^{\{n\}}$ и съществува идентичен функтор $I_{\mathcal{G}\mathcal{U}} : \mathcal{G}^{\{n\}} \longrightarrow \mathcal{U}^{\{n\}}$

(4.4.1) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Категорията $\mathcal{G}^{\{n\}}$ е рефлективна подкатегория на $\mathcal{U}^{\{n\}}$