БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Институт по Математика и Информатика

Секция "Алгебра и Логика"

Петър Василев Данчев

НЯКОИ КЛАСОВЕ ОТ НЕКОМУТАТИВНИ ПРЪСТЕНИ И АБЕЛЕВИ ГРУПИ

Автореферат

на дисертационен труд

за присъждане на научната степен

"ДОКТОР НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ"

в област на висше образование
4. Природни науки, Математика и Информатика

професионално направление
4.5. Математика

докторска програма по научна специалност
"Алгебра и Теория на Числата"

София, 2019-2020

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Дисертационният труд *"Асоциативни Пръстени с Единица и Слабо Унипотентни Мултипликативни Групи"* е обсъден, одобрен и насочен за защита на разширено заседание на секцията по **"Алгебра и Логика"** при ИМИ на БАН-София с хабилитирани преподаватели от ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски" и АУБ, проведено на 14.02.2020 година в заседателна зала No 578 на ИМИ на БАН-София.

Дисертационният труд съдържа 230 страници. Използваната там литература включва 110 източника на латиница, от които някои са цитирани и тук. Списъкът на авторските публикации, използвани при написването на дисертацията, се състои от 16 заглавия. Защитата на дисертационния труд ще се състои не по-късно от 21.08.2020 година в централната заседателна зала на ИМИ на БАН пред научно жури в състав:

1. Акад. Проф. д.м.н. Веселин Стоянов Дренски (Рецензия) – ИМИ при БАН (ПРЕДСЕДАТЕЛ НА КОМИСИЯТА)

2. Проф. д.м.н. Петър Георгиев Бойваленков (Становище) – ИМИ при БАН

3. Проф. д.м.н. Иван Николов Ланджев (Рецензия) – НБУ и ИМИ при БАН

4. Проф. д.м.н. Стефка Христова Буюклиева (Рецензия) – ФМИ на ВТУ "Св.св. Кирил и Методий"

5. Проф. д.н. Иво Михайлов Михайлов (Рецензия) – ФМИ на ШУ "Еп. Константин Преславски"

6. Проф. д-р Иван Димитров Трендафилов (Становище) – ТУ София

7. Доц. д-р Цецка Григорова Рашкова (Становище) – пенсионер от РУ "Ангел Кънчев"

8. Доц д-р Йорг Копиц (РЕЗЕРВА) – ИМИ при БАН

9. Доц д-р Илинка Димитрова (РЕЗЕРВА) – ЮЗУ "Неофит Рилски"

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ при БАН всеки работен ден от 9.00 до 17.30 часа.

ОБЩО СЪДЪРЖАНИЕ

I. Пълна характеристика на дисертационния труд 5

1. Актуалност на проблематиката
. . . . 5

2. Цели и задачи 7

3. Структура и обем 8

II. Много кратко съдържание на дисертационния труд
. . . . 9

1. Въведение в тематиката 9

2. Некомутативни пръстени
. . . . 10

2.1. Слабо разменни пръстени 10

2.2. Приложения в групови пръстени 13

3. Абелеви групи 14

3.1. Обобщения на транзитивни и напълно транзитивни групи . . . 14

3.2. Обощения на просто представени p-групи

• Заключение и преглед на основните резултати 16

• Перспективи за развитие и основни нерешени въпроси 19

• Апробация и дисертабилност на резултатите 21

• Благодарности 23

• Публикации свързани с дисертацията и науко-метрични данни . 24

• Цитати 27

• Използвана литература 31

• Конфликт на интереси 40

ЧЕСТО ИЗПОЛЗВАНИ ОЗНАЧЕНИЯ

1. R – пръстен

2. $U(R)$ – мултипликативна група на пръстена R

3. $J(R)$ – радикал на Джекобсън на пръстена R

4. $Id(R)$ – множеството от идемпотенти на пръстена R

5. $Nil(R)$ – множеството от нилпотенти на пръстена R

6. $\mathbb{N}$ – множеството на естествените числа

7. $\mathbb{Z}$ – пръстен на целите числа

8. $\mathbb{M}_n(R)$ – пълен матричен $n \times n$ пръстен над пръстена R; $n \in \mathbb{N}$

9. $\mathbb{T}_n(R)$ – триангуларен матричен $n \times n$ пръстен над пръстена R; $n \in \mathbb{N}$

10. G – група

11. $R[G]$ – групов пръстен

I. Пълна характеристика на дисертационния труд

1. Актуалност на проблематиката

Тук ще дадем някои по-основни насоки за успешното изследване на поставените цели и проблеми. За целта, всички пръстени в тази дисертация са асоциативни и притежават единичен елемент, който в повечето случаи не съвпада с нулевия елемент. Добре известно е от [91, 92], че пръстенът R се нарича *чист*, ако за всяко $r \in R$ съществуват $u \in U(R)$ и $e \in Id(R)$, за които $r = u + e$ (вж. също [62],[108]). От историческа гледна точка, развитието на тези пръстени и някои техни нетривиални обобщения е следното: В [2] бяха разгледани тези комутативни пръстени, за които, за всяко $r \in R$ съществуват $u \in U(R)$ и $e \in Id(R)$ със свойството $r = u + e$ или $r = u - e$. Общият случай е разгледан например в [24], [107] и [D1]. Друго нетривиално обобщение са така наречените *разменни* пръстени, които се дефинират по следния начин: За всяко $a \in R$ съществува $e \in Id(R) \cap aR$, за което е изпълнено $1 - e \in (1 - a)R$ – ще отбележим, че тази дефиниция е ляво-дясно симетрична в смисъла, че съществува $f \in Id(R) \cap Ra$, за който $1 - f \in R(1 - a)$. Тези пръстени са също обобщени до т.н. *слабо разменни* пръстени, които са пръстени със свойството, че за всяко $a \in R$ съществува $e \in Id(R) \cap aR$, изпълнявайки едно от равенствата $1 - e \in (1 - a)R$ или $1 - e \in (1 + a)R$ (вж. отново [24], [107] и [D1]). Множество резултати в тази насока са получени до тук, но все пак са останали и твърде много неизяснени неща в структурната теория и характеристичните свойства на тези пръстенови класове. Ето защо получаването на нови, по-съществени резултати в това направление определено биха били от някакъв интерес. Ние тук ще дадем почти пълна характеризация за някои обобщени разновидности на чистите пръстени, описвайки техните основни изоморфни класификации и структурно-алгебрични свойства – вж. [D2]-[D7].

От друга страна, ние ще засегнем и някои важни класове от абелеви групи, които са тясно свързани с гореспоменатите пръстенови класове посредством пръстените си от ендоморфизми. И така, в [68, 69, 70] (вж. също [44, 47]), абелевата група G се нарича *напълно транзитивна*, ако за всеки два нейни елемента x и y, за които Улмовската редица на x е по-малка или равна от тази на y, съществува ендоморфизъм f на G, за който $f(x) = y$. Респективно, абелевата група G се нарича *транзитивна*, ако за всеки два нейни елемента x и y, за които Улмовската редица на x е равна от тази на y, съществува автоморфизм φ на G, за който $\varphi(x) = y$. Доказано е в [29] чрез конструиране на конкретен пример, че тези две понятия са независими едно от друго. Много съществени резултати за тези групи са получени последователно в [15], [43], [50], [51], [59], [60]. Тук ние ще дадем някои по-точни структуризационни резултати относно тези групи, касаещи изоморфната им класификация чрез замяната на пръстена от ендоморфизми и съответстващата му група от автоморфизми съответно с пръстените породени от проективните ендоморфизми или комутаторните ендоморфизми и съответстващите им мултипликативни групи – вж. [D8,D9] и [D12-D15]. Някои други направления на абелевите групи, които са тясно свързани с теорията на тотално проективните (респ., просто представените) групи, са изследвани в детайли в [D10,D11] и [D16].

2. Цели и задачи на дисертационния труд

Основните ни цели са да дадем пълна характеризация с точност до изоморфизъм на някои по-общи видове от чисти и разменни пръстени, като за целта развиваме подходяща алгебрична техника. Основните моменти в нея са използването на някои специфични свойства на възлови елементи в пръстена и по-специално тези на идемпотентите, нилпотентите и обратимите елементи. Също така от съществено значение е и приложението на получените резултати в структурната характеризация на един твърде специален вид от (основно некомутативни) групови пръстени.

Също така, изцяло ще бъдат изследвани и някои широки класове от абелеви групи, като за целта ще развием мощен теоретико-множествен и хомологичен апарат, чрез който ще постигнем много по-дълбоки почти окончателни, и в много случаи дори напълно окончателни, резултати.

Затова нашите основни задачи са последователно поставени така:

- Първо, да се опишат по-подробно основните характеристични свойства на някои известни класове от пръстени, като тези на слабо чистите, слабо разменните и UU пръстените, дефинирани в детайли по-долу.

- Второ, в съчетание с това, да се приложат получените резултати в теорията на груповите пръстени.

- Трето, да се приложат някои от получените резултати от първия пункт в някои други по-специфични направления на комутативната алгебра, като абелевите групи, както и детайлно да се изследват в дълбочина различни класове от абелеви групи, тясно свързани с пръстеновите свойства на техните разширения от ендоморфизми.

3. Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, въведение в някои основни понятия и по-специфични означения, два параграфа, всеки от които съдържа по два тематично различни подпараграфа, заключение в което са поставени основните нерешени проблеми и специфични въпроси, библиография от 110 източника на латиница, някои от които са конкретно цитирани и тук, списък от 16 публикации по темата на дисертацията, и най-накрая техните съответстващи цитати.

Цялостният обем на дисертационния труд е точно 230 страници.

II. Кратко съдържание на дисертационния труд

1 Въведение в тематиката

Настоящата научна разработка ще се занимава с две основни теми, както следва:

(1) Пълно описание на структурата и основните характеризационни свойства на (основно некомутативни) пръстени, чиито елементи удовлетворяват някои по-общи условия от тези на чистите пръстени на Николсън (вж. [91]) и на разменните пръстени на Уорфиелд-Гоодеарл (вж., например, [62] и [108]). Някои последващи приложения за групови пръстени са също дадени.

(2) Пълно описание на структурата и основните характеризационни свойства на абелеви групи, принадлежащи на новодефинирани класове, които изцяло съдържат редица класически класове от групи, подробно описани например в [44]-[47].

Етапите на развитие на тази тематика са както следва:

- При първата се постигат окончателни резултати.
- При втората се постигат окончателни резултати.

1.1 Некомутативни унитарни пръстени

Следвайки комутативната версия на дефиницията в [2], пръстенът R ще наричаме *слабо чист*, ако всеки елемент $r \in R$ може да се представи като $r = u + e$ или $r = u - e$, където $u \in U(R)$ и $e \in Id(R)$. В тази връзка, пръстенът R ще наричаме *слабо разменен*, ако за всеки елемент $x \in R$ съществува $e \in Id(R)$ така, че $e \in xR$ и $1 - e \in (1 - x)R$ или $1 - e \in (1 + x)R$ (вж. [107]). Интензивното изследване на този сорт от пръстени не е напълно завършено, което продължава и до днес, и затова следващият резултат дава някаква удовлетворителна характеризация на основни свойства, свързани с радикала на Джекобсон.

Теорема 2.1. ([D1]) *Нека R е пръстен. Ако фактор-пръстенът $R/J(R)$ е слабо чист (съответно, слабо разменен) и всички идемпотенти се лифтират по модул $J(R)$, то R е също слабо чист (съответно, слабо разменен). В частност, ако $2 \in J(R)$, то е вярна и обратната импликация.*

Аналогичен резултат на горния, без изискването $2 \in J(R)$, е трудно постижим, само поради комплицираната ситуация с лифтиране на идемпотенти – наистина, R бидейни слабо чист (съответно, слабо разменен) непосредствено имплицира, че $R/J(R)$ е също такъв пръстен.

Ще казваме, че пръстенът R е π-UU, ако $\forall r \in R$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ (евентуално зависещо от r) със свойството $r^n - 1 \in Nil(R)$. Ако, все пак, числото n е фиксирано и независи от избора на елемента r, то R ще бъде наричан n-UU пръстен.

Твърдение 2.1. ([D3]) *Ще считаме, че R е пръстен. Тогава R е едновременно разменен и 2-UU тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил и $R/J(R)$ е комутативен инво-чист пръстен (= трипотент).*

Следният пример и конструкцията в него потвърждават, че този твърде странен феномен не е верен в общия случай; например за 3-UU пръстен.

Пример 2.1. Нека да разгледаме пълния матричен 2×2 пръстен $R = \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$. Доказано е в [11], че R е нил-чист и така той е разменен пръстен. Освен това, R е 3-UU пръстен. Обаче, технически може да се провери, че $J(R) = \{0\}$ и, че R не е трипотентен (и затова не е също и булев) пръстен. Наистина, $U(R)$ има точно 6 елемента, удовлетворявайки следните равенства:

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ така, че $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Въпреки всичко, следното основно твърдение за произволен инво-чист пръстен е вярно (напомняме, че един пръстен R е (силно) инво-чист, ако за всяко $r \in R$ съществуват $u \in U(R), u^2 = 1$ и $e \in Id(R)$ със свойството $r = u + e$ (в допълнение $ue = eu$)):

Теорема 2.2. ([D4]) *Пръстенът R е инво-чист тогава и само тогава, когато $R \cong R_1 \times R_2$, където R_1 е инво-чист пръстен с характеристика най-много 8 (който пръстен е също така нил-чист), а R_2 е или $\{0\}$ или комутативен полупримитивен (и следователно редуциран) инво-чист пръстен с характеристика 3 така, че всеки негов елемент е сума на два идемпотента (съответно на две инволюции). В допълнение, R_2 може да се вложи изоморфно като подпръстен в директното произведение на копия на полето $\mathbb{Z}_3$.*

В частност, получаваме важното следствие:

Следствие 2.1. ([D4]) *Пръстенът R е силно инво-чист тогава и само тогава, когато $R \cong R_1 \times R_2$, където R_1 е силно инво-чист пръстен с характеристика по-малка или равна на 8 (който пръстен е също така силно нил-чист), а R_2 е или $\{0\}$ или комутативен полупримитивен (и* *следователно редуциран) инво-чист пръстен с характеристика 3 така, че всеки негов елемент е сума на два идемпотента (съответно на две инволюции). В допълнение, R_2 може да се вложи изоморфно като подпръстен в директното произведение на копия на полето $\mathbb{Z}_3$.*

Разширявайки по естествен начин този вид пръстени, стигаме до следната нова концепция:

Дефиниция 2.1. Пръстенът R се нарича *(силно) n-периодично чист* за някое цяло положително число n, ако за всяко $r \in R$ съществуват $u \in U(R), u^n = 1$, $e \in Id(R)$ със свойството $r = u + e$ и n е минималното число в този запис.

Важен резултат, който материализира тази дефиниция е следният:

Теорема 2.3. *Нека R е абелев пръстен. Пръстенът R е чист, имайки мултипликативна група с крайна експонента, тогава и само тогава, когато R е n-периодично чист пръстен за някое естествено число n.*

Друг основен резултат е следващото твърдение, което гласи следното:

Теорема 2.4. *Нека n е нечетно естествено число. Пръстенът R е силно n-периодично чист тогава и само тогава, когато той е чист пръстен, в който редовете на всички обратими елементи са нечетни и ограничени от n така, че съществува (поне един) обратим елемент от ред n.*

Основната проблематика, която остава нерешена и до днес, е дали *(слабо) чистите пръстени с циклични мултипликативни групи са винаги силно n-периодично чисти за някое естествено число n*, а както и дали *(слабо) разменните пръстени, чиито обратими елементи са суми на два (некомутативни) идемпотента, са обобщено регулярни (= π-регулярни)*?

1.2 Групови пръстени

Нека R е произволен пръстен с единичен елемент, а G е мултипликативно записана абелева група. Под символа $R[G]$ ще разбираме груповия пръстен на G над R, състоящ се от всички формални крайни линейни комбинации на елементи от G с коефициенти от R, образуващи базис.

Един от основните проблеми в теоретико-пръстеновите свойства на груповите алгебри е да се намери критерий кога $R[G]$ е (слабо) нил-чист пръстен (вж., например, [40]). Този въпрос е нерешен и до днес, поради широтата на класа от (слабо) нил-чисти пръстени, и ето защо теоремата по-долу дава напълно удовлетворителен отговор на това за комутативната версия на класа от нил-чисти пръстени.

И така, следващият резултат осигурява едно необходимо и достатъчно условие кога $R[G]$ е UU пръстен само в термините на R и G, и също така разширява аналогична теорема от [83] доказана за нил-чисти групови пръстени. Тази теорема може да се формулира, както следва: *$R[G]$ е комутативен нил-чист пръстен тогава и само тогава, когато R е комутативен нил-чист пръстен и G е абелева 2-група* – нетривиално обобщение за класа от комутативни слабо нил-чисти пръстени, ние препращаме заинтересувания читател към статията [40], докато общият случай на нил-чисти пръстени е изследван в [101].

Тъй като твърде лесно се проврява, че комутативните нил-чисти пръстени са винаги UU пръстени, то в сила е следното по-силно, уточняващо твърдение. Преди това само да припомним, че една произволна група се нарича *локално крайна*, ако всяко нейно крайно подмножество от елементи генерира крайна подгрупа. Тези групи са задължително периодични.

Теорема 4.2.1. ([D6]) *Нека G е локално крайна група. Груповият пръстен $R[G]$ е UU пръстен тогава и само тогава, когато R е UU пръстен и G е 2-група.*

Забележка. Условието върху групата G да бъде локално крайна група е твърде реалистично ограничение, тъй като всяка периодична абелева група определено го удовлетворява. В неабелевия случай, важен пример на такива групи са *локално нормалните групи*, при които всяко крайно подмножество от елементи на групата може да се вложи в крайна нормална подгрупа на формиращата (основната) група.

1.3 Абелеви групи

Следвайки [42], нека G е адитивно записана абелева група с пръстен от ендоморфизми $E(G)$. Един от основните проблеми в теория на абелевите групи е да се опише този пръстен в зависимост от групата и също как той влияе на нейната структура (вж. също [27], [10]). В частност, актуален е и въпросът, кога $E(G)$ е пръстен притежаващ някои определени специфични свойства. Пълен отговор на този въпрос не е получен и до сега, но съществен принос по тази тематика е постигнат в [26, 28, 29] и [11]. Една част от основните и по-съществени резултати в тази насока са следните:

(1) Нека G е p-група и нека е валидно условието $\mathrm{E}(G) \upharpoonright p^{\omega}G = \mathrm{E}R(p^{\omega}G)$. Тогава следните две твърдения са верни:

(i) G е комутаторно напълно транзитивна тогава и само тогава, когато $G/p^{\omega}G$ и $p^{\omega}G$ са комутаторно напълно транзитивни.

(ii) G е силно комутаторно напълно транзитивна тогава и само тогава, когато $G/p^{\omega}G$ и $p^{\omega}G$ са силно комутаторно напълно транзитивни.

(2) Някои p-групи със сепарабелна първа Улмовска подгрупа притежават свойството: Нека G е p-група с дължина $\leq \omega \cdot 2$ така, че $\mathrm{E}R(G) \upharpoonright p^{\omega}G = \mathrm{E}R(p^{\omega}G)$. Тогава G е комутаторно напълно транзитивна тогава и само тогава, когато G е силно комутаторно напълно транзитивна.

(3) В тази връзка, ако $p^{\omega}G$ е елементарна подрупа на p-групата G, то G е напълно транзитивна тогава и само тогава, когато нейният декартов квадрат $G \oplus G$ е силно комутаторно напълно транзитивна група.

Остава все още открит въпросът за верността на тези резултати, без да изискват допълнителни ограничения върху пръстена от ендоморфизми.

Много други резултати, касаещи пръстенът от ендоморфизми, показващи "топлата връзка"със структурата и поведението на съответната група, могат да бъдат намерени в съответните параграфи на дисертацията.

От друга страна, в дисертацията са изследвани следните нови свойства и характеристики на тотално проективните групи и $p^{\omega+n}$-проективните групи, където $n \in \mathbb{N}$: Наистина, в [44, 47] абелевата p-група G се нарича *тотално проективна*, ако тя има пораждаща система от хубави подгрупи (тези групи са естествено обобщение на директните суми на изброими групи, притежавайки дължини $\geq \omega_1 = \Omega$ и са въведени от Нунке в [96]) и $p^{\omega+n}$-*проективна*, ако съществува p^n-ограничена подгрупа A със свойството, че G/A е директна сума на циклични подгрупи.

Следното ново понятие значително уточнява тези две дефиниции едновременно: Ще наричаме p-групата G n-*тотално проективна*, ако съществува p^n-ограничена подгрупа C със свойството, че G/C е тотално проективна.

И така, в сила е следният резултат от [D10-D11],[D16]:

Теорема 4.1.1. *Следните твърдения са изпълнени:*

(а) Нека G е такава група, че фактор-групата $G/p^{\omega+1}G$ е $p^{\omega+1}$-проективна. Ако $p^{\omega+1}G$ е изброима, то G е директна сума на $p^{\omega+1}$-проективна група и на изброима група.

(б) Нека да предположим, че G е група, n е естествено число и λ е произволен ординал. Тогава групата G е n-просто представена $\Longleftrightarrow$ групите $p^\lambda G$ и $G/p^\lambda G$ са n-просто представени.

Основен е и въпросът до каква степен резултати от този тип (вж. също [D10]) остават независими от теоретико-множествените изисквания извън стандартната аксиоматика в ZFC (теорията на Цермело-Френкел и Аксиомата за Избора).

Заключение и преглед на основните резултати

В заключение ще отбележим, че доказаните теореми дават по някакъв начин нов и по-ясен облик на класа от чисти пръстени, а приведените доказателства очертават трудностите, които възникват при стремежа за по-нататъшни нетривиални обобщения и разширения.

В резюме, основните получени резултати в дисертацията са тези:

(а) *Пръстенът R е инво-чист $\iff$ R се разлага като $R \cong R_1 \times R_2$, където $R_1 = \{0\}$ или R_1 е нил-чист пръстен с характеристика ≤ 8, а $R_2 = \{0\}$ или R_2 се влага в директно произведение (т.е., той е под-директно произведение) на фамилия от едно или повече копия на полето $\mathbb{F}_3$. В частност, ако R е силно инво-чист, то $R_1/J(R_1)$ е Булев пръстен с нил $J(R_1)$ винаги, когато R_1 is non-zero.* (Резултатът е публикуван в статията [D4].)

(б) *Пръстенът R е уникално слабо нил-чист $\iff$ R се разлага като $R \cong R_1 \times R_2$, където $R_1 = \{0\}$ или $R_1/J(R_1)$ е Булев пръстен с нил $J(R_1)$, и $R_2 = \{0\}$ или $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{Z}_3$ с нил $J(R_2)$.* (Резултатът е публикуван в статията [D5].)

(в) *Слабо нил-чистият индекс на $\mathbb{T}_2(\mathbb{Z}_p)$ е равен на p, докато за $\mathbb{T}_3(\mathbb{Z}_p)$ той е равен на p^2 винаги, когато p е просто число; слабо нил-чистият индекс на $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ е равен точно на* 5. (Резултатът е публикуван в статията [D5].)

(г) *Пръстенът R е силно n-периодично чист за някое $n \in \mathbb{N}$ $\iff$ R е силно чист и $U(R)$ е с крайна експоненета. В частност, ако n е нечетно число, то R е чист пръстен, в който редовете на всички обратими елементи са нечетни и ограничени от n, като съществува обратим елемент от ред n $\iff$ R е поддиректно произведение на фамилия от едно или повече копия на полетата $\mathbb{F}_{2^{k_i}}$, където $i \in [1, t]$ за някое цяло число $t \geq 1$ така, че съществуват цели числа $k_1, \cdots, k_t \geq 1$ със свойството $n = LCM(2^{k_1} - 1, \ldots, 2^{k_t} - 1)$.* (Резултатът е публикуван в статията [D7].)

(д) *Ако G е локално крайна група и R е произволен пръстен, то груповият пръстен $R[G]$ е UU $\iff$ R е UU и G е 2-група.* (Резултатът е публикуван в статията [D6].)

(е) *Нека $G = A \oplus B$ е група с подгрупи A, B. Тогава*

(1) G е цокълно-регулярна $\iff$ A е цокълно-регулярна, предполагайки, че B е сепарабелна.

(2) A е цокълно-регулярна, ако G е цокълно-регулярна, т.е., директно събираемо на цокълно-регулярна група е отново цокълно-регулярна група.

(3) Крилов-транзитивните групи са винаги цокълно-регулярни, докато обратната импликация е невярна.

(4) Съществува слабо транзитивна група, която не е цокълно-регулярна.

(5) Всяка тотално проективна група с дължина $\leq \omega^2$ е силно проективна напълно транзитивна.

(6) Ако G е група така, че нейната първа Улмовска подгрупа $p^\omega G$ е елементарна, то G е напълно транзитивна $\iff$ декартовият квадрат $G \oplus G$ е силно проективно напълно транзитивен $\iff$ декартовият квадрат $G \oplus G$ е силно комутаторно напълно транзитивен.

(7) Всяка тотално проективна група с дължина $< \omega^2$ е комутаторно цокълно-регулярна.

(8) Директно събираемо на комутаторно цокълно-регулярна група не е непременно отново комутаторно цокълно-регулярна група, като същото е валидно и за случая на комутаторно напълно транзитивна група.

(9) Проективно цокълно-регулярните и комутаторно цокълно-регулярните групи са независими от транзитивните и напълно трансситивните групи.

(10) Комутаторно напълно транзитивните групи са винаги комутаторно цокълно-регулярни.

(11) Директно събираемо на напълно транзитивна IFI-група без периодични елементи е отново напълно транзитивна IFI-група без периодични елементи.

(12) Ако G е IFI-група, то декартовият квадрат $G \oplus G$ е също IFI-група.

(13) Коя да е силно сервантно-неразложима група, за която е валидно неравенството $|G/pG| \leq p$ за всяко просто число p, е IFI-група.
(Резултатите са публикувани в статиите [D8,D9] и [D12]-[D15].)

(ж) *Нека да предположим, че G е група, за която фактор-групата $G/p^{\omega+1}G$ е $p^{\omega+1}$-проективна. Ако подгрупата $p^{\omega+1}G$ е изброима, то G е директна сума на $p^{\omega+1}$-проективна група и изброима група. Освен това, съществува група G, за която фактор-групата $G/p^{\omega+2}G$ е $p^{\omega+2}$-*

проективна и подгрупата $p^{\omega+2}G$ е изброима, но G не е директна сума на $p^{\omega+2}$-проективна група и изброима група. В частност, ако $0 < n < \omega$, то класът от $\omega + n$-тотално $p^{\omega+n}$-проективни групи не е затворен (инвариантен) относно крайните или безкрайни директни суми. (Резултатът е публикуван в статията [D10].)

(з) *Предполагаме, че G е група, n е произволно естествено число и λ е произволен ординал. Тогава G е n-просто представена $\iff$ групите $p^\lambda G$ и $G/p^\lambda G$ са n-просто представени.* (Резултатът е публикуван в статията [D11]; вж. също [D16].)

(и) *За всяко $n \in \mathbb{N}$, директно събираемо на n-просто представена група е отново n-просто представена група предполагайки, че допълнителното директно събираемо е изброима група.* (Резултатът е публикуван в статията [D11].)

(й) *Нека $n \in \mathbb{N}$. Тогава следните две твърдения са верни:*

(1) Хубаво ω_1-n-просто представените групи с дължина $< \omega^2$ са n-просто представени.

(2) Нека G е група, чиято фактор-група $G/p^\lambda G$ е n-просто представена за някой ординал λ. Тогава групата G е хубаво ω_1-n-просто представена $\iff$ подгрупата $p^\lambda G$ е хубаво ω_1-n-просто представена. (Резултатът е публикуван в статията [D16].)

Перспективи за развитие и основни нерешени проблеми

Техниката, която беше въведена, развита и използвана при доказване на основните резултати описани по-горе, а именно някои аспекти от хомологичната алгебра, теория на множествата, алгебрична теория на матриците и матричните изчисления и др., позволява да бъде все още усъвършенствана, както и дадените идеи да се приложат при бъдещи разширения на нови видове некомутативни пръстени в класа на чистите пръстени, както и някои нетривиални обобщения на твърде широки класове от абелеви групи.

Въпреки всичко, едни от основните нерешени въпроси в дисертацията остават следните:

(1) Следва ли, че всички слабо разменни (съответно, всички разменни) пръстени, чиито обратими елементи са суми на два идемпотента са π-регулярни (напомняме, че един пръстен е наречен *π-регулярен*, ако за всеки елемент $a \in R$, съществува естествено число n (определено зависещо от a) така, че $a^n \in a^nRa^n$)?

(2) Предполагаме, че R е пръстен, за който $R = Id(R) + Id(R)$ и $U(R) = 1 + Nil(R)$. Вярно ли е, че R е (слабо) разменен или дори π-регулярен?

(3) Нека R е пръстен и G е група. Е груповият пръстен $R[G]$ UU-пръстен тогава и само тогава, когато R е UU-пръстен и G е 2-група? Ако той *не е*, да се намери необходимо и достатъчно условие за $R[G]$ да бъде UU само в термините на R, G и техни производящи?

(4) Вярно ли е, че просто представените p-групи са по необходимост напълно транситивни?

(5) Нека $n \in \mathbb{N}$. Ако директната сума $G \oplus H$ е силно n-просто представена група за някои две групи G и H така, че H е изброима (крайна или безкрайна), то следва ли, че G е също силно n-просто представена?

(6) В аксиоматиката на **ZFC**, ако G е собствено $(\omega+n)$-тотално $p^{\omega+n}$-проективна p-група за някое $n \in \mathbb{N}$, то следва ли, че $p^\omega G$ is задължително изброима група?

Основни насоки, за да се преодолеят идейните трудности, с цел за да се усъществи успешната атака на тези шест открити въпроса, е да се разшири стратегията и техниката, използвани при горните доказателства, чрез по-финно изучаване на някои по-специфични свойства на идемпотентите и нилпотентите в произволни некомутативни пръстени, както и по-детайлното проникване в структурата на ендоморфизмите на произволни абелеви групи.

Апробация и дисертабилност на резултатите

Съществена част от основните резултати на този дисертационен труд са докладвани на 13.09.2019 година в заседателната зала 578 при регулярно заседание на секцията по "Алгебра & Логика"на ИМИ на БАН-София.

Освен това някои от тях са докладвани на следните семинари, конференции и симпозиуми:

- Conference on "Rings and Factorizations February 19th to 23rd, 2018 in Graz, Austria.

- Специализиран семинар по "Съвременна Алгебра"на Университета в Walla-Walla, WA, USA.

- Конференция по "Комутативна Алгебра – Абелеви Групи и Модули проведена под егидата на Дъбленския Институт по Технологии (DIT) в Дъблин, Ирландия.

Също така, резултатите от стр. .. на автореферата, които са основни за дисертацията, бяха представени, обсъдени и допуснати до защита на специално заседание на секцията "Алгебра и Логика"на ИМИ към БАН - София, разширена с хабилитирани преподаватели-специалисти от СУ "Св. Климент Охридски НБУ-София и АУБ-Благоевград, което се проведе на 13.12.2019 г., отново в зала 578 на ИМИ.

Основните цели и насоки на дисертацията са да бъдат дадени значително по-обозрими и пълни характеризации на, а и също така да бъдат описани в по-голяма пълнота, редица важни класове от некомутативни пръстени и абелеви групи, като въпреки на пръв поглед съществуващата симбиоза между тези две посоки, да се покаже, че между тях съществува много "топла връзка".

Основните приноси се свеждат до (почти) пълното структурно описание на някои съществени класове от пръстени, които са тясно свързани с класическите класове от чисти и разменни пръстени. Също така, не на последно място, абелеви групи принадлежащи на твърде широки класове са напълно изследвани и характеризирани.

От друга страна, поставените в края на дисертацията отворени проблеми и съответните към тях въпроси (вж. по-горе), недвусмислено показват актуалността и трудността на тематиката, като също така очертават някои нови насоки за бъдещи пълноценни изследвания в тези направления на алгебрата. За тези по-нататъшни цели може да се използва същата тактика, проведена в доказателствата на твърденията, но инструментариумът развит до тук би следвало да се доразвие в известна степен, а в някои случаи - дори и значително.

Благодарности

Авторът е много благодарен на своите колеги от секцията по "Алгебра и Логика"в ИМИ на БАН за моралната подкрепа при написването на тази дисертация, както и за многобройните дискусии по темата на дисертацията.

Авторът изказва своята искрена благодарност и на *рецензентите* за стойностните им препоръки отправени към него, както и за отделеното време и положени усилия за написването на експертните доклади.

ПОСВЕЩАВА СЕ НА МОЕТО СЕМЕЙСТВО

С МНОГО ЛЮБОВ И ПРИЗНАТЕЛНОСТ

ЗА ТЪРПЕНИЕТО И ПОДКРЕПАТА

Публикации по дисертационния труд

I. Авторски статии

I.I. Некомутативни Пръстени

[D1] P.V. Danchev, *On weakly exchange rings*, J. Math. Tokushima Univ. **48** (2014), 17–22. (International scientific journal – **2** citations)

[D2] P.V. Danchev, *Rings with Jacobson units*, Toyama Math. J. **38** (2016), 61–74. (International scientific journal – **3** citations)

[D3] P.V. Danchev, *On exchange π-UU unital rings*, Toyama Math. J. **39** (2017), 1–7. (International scientific journal – **2** citation)

[D4] P.V. Danchev, *Invo-clean unital rings*, Commun. Korean Math. Soc. (1) **32** (2017), 19–27. (SJR 2018: 0.227 – **2** citations)

[D5] P.V. Danchev (with A. Cǐmpean), *Weakly nil-clean index and uniquely weakly nil-clean rings*, Int. Electr. J. Algebra **21** (2017), 180–197. (SJR 2018: 0.345 – **3** citations)

[D6] P.V. Danchev (with O.A. Al-Mallah), *UU group rings*, Eurasian Bull. Math. (3) **1** (2018), 94–97. (International scientific journal – **1** citation)

[D7] P.V. Danchev (with J. Matczuk), *n-Torsion clean rings*, Contemp. Math. **727** (2019), 71–82. (International scientific journal – **1** citation)

I.II. Абелеви Групи

[D8] P.V. Danchev (with B. Goldsmith), *On the socles of fully invariant subgroups of Abelian p-groups*, Arch. Math. (Basel) (3) **92** (2009), 191–199. (IF 2018: 0.590 – Q4 – **2** citations)

[D9] P.V. Danchev (with B. Goldsmith), *On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups*, J. Comm. Algebra (3) **3** (2011), 301–319. (IF 2018: 0.519 – Q4 – **5** citations)

[D10] P.V. Danchev (with P.W. Keef), *An application of set theory to* $(\omega + n)$*-totally* $p^{\omega+n}$*-projective primary abelian groups*, Mediterr. J. Math. (4) **8** (2011), 525–542. (IF 2018: 1.181 – Q1 – **1** citation)

[D11] P.V. Danchev (with P.W. Keef), *On n-simply presented primary abelian groups*, Houston J. Math. (4) **38** (2012), 1027–1050. (IF 2018: 0.357 – Q4 – **2** citations)

[D12] P.V. Danchev (with B. Goldsmith), *On projectively fully transitive Abelian p-groups*, Results Math. (3-4) **63** (2013), 1109–1130. (IF 2018: 0.969 – Q2 – **1** citation)

[D13] P.V. Danchev (with B. Goldsmith), *On commutator socle-regular Abelian p-groups*, J. Group Theory (5) **17** (2014), 781–803. (IF 2018: 0.581 – Q4 – **1** citation)

[D14] P.V. Danchev (with A.R. Chekhlov), *On commutator fully transitive Abelian groups*, J. Group Theory (4) **18** (2015), 623–647. (IF 2018: 0.581 – Q4 – **1** citation)

[D15] P.V. Danchev (with A.R. Chekhlov), *On abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic*, Commun. Algebra (12) **43** (2015), 5059–5073. (IF 2018: 0.481 – Q4 – **2** citation)

[D16] P.V. Danchev, *On* ω_1*-n-simply presented abelian p-groups*, J. Algebra Appl. (3) **14** (2015). (IF 2018: 0.596 – Q4 – **1** citation)

Забележка: Тези статии са подредени хронологично по нарастващи години на публикуване.

ОБЩО ***16*** *статии (**5** собствени и **11** съвместни) с **30** цитати изложени по-долу*

ОБЩ Импакт Фактор (2018): 5.855; ОБЩ SJR Фактор (2018): 0.572

II. Цитати на използваните авторски статии

Статията [D1] е цитирана в следните публикации:

- Koşan T., Sahinkaya S., Zhou Y., *On weakly clean rings*, Commun. Algebra (8) **45** (2017), 3494–3502.

- Sharma A., Basnet D.K., *Weakly r-clean rings and weakly *-clean rings*, Anal. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi, Ser. Mat. (SERIE NOUA) (2) **65** (2019).

Статията [D2] е цитирана в следните публикации:

- Koşan M.T., Leroy A., Matczuk J., *On UJ-rings*, Commun. Algebra (5) **46** (2018), 2297–2303.

- Koşan M.T., Quynh T.C., Yildirim T., Žemlička, J., *Rings in which the form $u - u^n$ of units belongs to the Jacobson radical*, Hacettepe J. Math. & Stat. **49** (2020).

- Cui J., Yin X., *Rings with* 2*-UJ property*, Commun. Algebra **48** (2020).

Статията [D3] е цитирана в публикацията:

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

Статията [D3] е цитирана в следните публикации:

- Cui J., Yin X., *Rings with* 2*-UJ property*, Commun. Algebra **48** (2020).

- Cui J., Qin L., *Generalizations of J-clean rings*, Adv. Math. (China) (2020).

Статията [D4] е цитирана в следните публикации:

- Li Y., Quan X., Xia G., *Nil-clean rings of nilpotency index at most two with application to involution-clean rings*, Commun. Korean Math. Soc. (3) **33** (2018), 751–757.

- Chen H., Abdolyousefi M.S., *Strongly* 2*-nil-clean rings with involutions*, Czechoslovak Math. J. (2) **69** (2019), 317–330.

Статията [D5] е цитирана в следните публикации:

- Chen H., Sheibani M., *Rings in which the power of every element is the sum of an idempotent and a unit*, Publ. Inst. Math. Beograd **102(116)** (2017), 133–148.

- Schoonmaker B.L., Clean Indices of Common Rings, PhD Theses and Dissertations, Brigham Young University (2018). https://scholarsarchive.byu.edu/etd/7027.

- Wang L., Wu J., *Weakly clean general index of general rings*, Adv. Math. (China) (2) **48** (2019), 183–190.

Статията [D6] е цитирана в следните публикации:

- Koşan M.T., Quynh T.C., Žemlička J., *UNJ-rings*, J. Algebra Appl. **19** (2020).

Статията [D7] е цитирана в следните публикации:

- Koşan M.T., Quynh T.C., Yildirim T., Žemlička, J., *Rings in which the form $u - u^n$ of units belongs to the Jacobson radical*, Hacettepe J. Math. & Stat. **49** (2020).

Статията [D8] е цитирана в следните публикации:

- Kemoklidze T., *The lattice of fully invariant subgroups of a cotorsion group*, J. Math. Sci. (New York) (5) **203** (2014), 621–751.

- Ghowsi H., *Extended to a counterexample*, Global J. Math. (1) **11** (2017), 715–718.

Статията [D9] е цитирана в следните публикации:

- Chekhlov A.R., *On abelian groups with commuting monomorphisms*, Siberian Math. J. (5) **54** (2013), 946–950.

- Misyakov V.M., *Fully transitive, transitive abelian groups and some their generalizations*, Tomsk State University J. Math. & Mech. **4(42)** (2016), 23–32. (In Russian.)

- Ghowsi H., *Extended to a counterexample*, Global J. Math. (1) **11** (2017), 715–718.

- Misyakov V.M., *On some properties of endomorphism rings of abelian groups*, Fundam. Prikl. Mat. (5) **20** (2015), 131–139 (in Russian); translation in J. Math. Sci. (N.Y.) (3) **230** (2018), 439–444.

- Chekhlov A.R., *On abelian groups with commutative commutators of endomorphisms*, Fundam. Prikl. Mat. (5) **20** (2015), 227–233 (in Russian); translation in J. Math. Sci. (N.Y.) (3) **230** (2018), 502–506.

Статията [D10] е цитирана в следните публикации:

- Sikander F., Fatima T., *On totally projective QTAG-modules*, J. Taibah Univ. Sci. (1) **13** (2019), 892–896.

Статията [D11] е цитирана в следните публикации:

- Sikander F., Fatima T., *On totally projective QTAG-modules*, J. Taibah Univ. Sci. (1) **13** (2019), 892–896.

- Fuchs L., Abelian Groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

Статията [D12] е цитирана в следните публикации:

- Misyakov V.M., *Fully transitive, transitive abelian groups and some their generalizations*, Tomsk State University J. Math. & Mech. **4(42)** (2016), 23–32. (In Russian.)

Статията [D13] е цитирана в следните публикации:

- Sikander F., Mehdi A., Fatima T., *On commutator socle-regular QTAG-modules*, Afr. Mat. (1-2) **29** (2018), 195–202.

Статията [D14] е цитирана в следните публикации:

- Misyakov V.M., *Fully transitive, transitive abelian groups and some their generalizations*, Tomsk State University J. Math. & Mech. **4(42)** (2016), 23–32. (In Russian.)

Статията [D15] е цитирана в следните публикации:

- Kaigorodov E.V., Chedushev S.M., *Co-Hopfian Abelian groups*, Vestnik

Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta – Matematika i Mekhanika **4(36)** (2015), 21–33.

- Misyakov V.M., *Fully transitive, transitive abelian groups and some their generalizations*, Tomsk State University J. Math. & Mech. **4(42)** (2016), 23–32. (In Russian.)

Статията [D16] е цитирана в следните публикации:

- Sikander F., Fatima T., *On totally projective QTAG-modules*, J. Taibah Univ. Sci. (1) **13** (2019), 892–896.

Общо цитати от автори: 30 цитата от 31 автори

Забележка: Цитатите са подредени хронологично по нарастващи години на публикуване.

БИБЛИОГРАФИЯ

In English (На Английски)

Литература

[1] M. Abdolyousefi and H. Chen, *Rings in which elements are sums of tripotents and nilpotents*, J. Algebra & Appl. **17** (2018).

[2] M-S. Ahn and D. D. Anderson, *Weakly clean rings and almost clean rings*, Rocky Mount. J. Math. **36** (2006), 783–798.

[3] B. Balof and P. Keef, *Invariants on primary abelian groups and a problem of Nunke*, Note Mat. **28** (2008), 83–115.

[4] D.K. Basnet and J. Bhattacharyya, *Nil clean index of rings*, Int. Electron. J. Algebra **15** (2014), 145–156.

[5] R.A. Beaumont and R.S. Pierce, *Isomorphic direct summands of abelian groups*, Math. Ann. **153** (1964), 21–37.

[6] I.Kh. Bekker, P.A. Krylov, A.R. Chekhlov, *Abelian torsion-free groups close to algebraic compact*, Abelian Groups and Modules, 1994, 3–52.

[7] Kh. Benabdallah, B. Eisenstadt, J. Irwin and M. Poluianov, *The structure of large subgroups of primary Abelian groups*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (3-4) **21** (1970), 421–435.

[8] Kh. Benabdallah, J. Irwin and M. Rafiq, *A core class of abelian p-groups*, in Sympos. Math., XIII, Acad. Press, London, 1974, 195–206.

[9] A. Braun, *The nilpotency of the radical in a finitely generated P.I. ring*, J. Algebra **88** (1984), 375–396.

[10] G. Braun, B. Goldsmith, K. Gong and L. Strüngmann, *Some transitivity-like concepts in Abelian groups*, J. Algebra **529** (2019), 114–123.

[11] S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev and T. Micu, *Nil-clean matrix rings*, Linear Algebra & Appl. **439** (2013), 3115–3119.

[12] S. Breaz, P. Danchev, and Y. Zhou, *Rings in which every element is either a sum or a difference of a nilpotent and an idempotent*, J. Algebra & Appl. **15** (2016).

[13] S. Breaz and G.C. Modoi, *Nil-clean companion matrices*, Linear Algebra & Appl. **489** (2016), 50–60.

[14] V. Camillo, T.J. Dorsey and P.P. Nielsen, *Dedekind-finite strongly clean rings*, Commun. Algebra **42** (2014), 1619–1629.

[15] D. Carroll and B. Goldsmith, *On transitive and fully transitive Abelian p-groups*, Proc. Royal Irish Academy **96A** (1996), 33–41.

[16] A.R. Chekhlov, *Fully transitive torsion-free groups of finite p-rank*, Algebra and Logic **40** (2001), 391–400.

[17] A.R. Chekhlov, *On decomposable fully transitive torsion-free groups*, Sib. Math. J. **42** (2001), 605–609.

[18] A.R. Chekhlov, *Separable and vector groups whose projectively invariant subgroups are fully invariant*, Sib. Math. J. **50** (2009), 748–756.

[19] A.R. Chekhlov, *Commutator invariant subgroups of Abelian groups*, Sib. Math. J. **51** (2010), 926–934.

[20] A.R. Chekhlov, *On projective invariant subgroups of abelian groups*, J. Math. Sci. **164** (2010), 143–147.

[21] A.R. Chekhlov, *On the projective commutant of Abelian groups*, Sib. Math. J. **53** (2012), 361–370.

[22] A.R. Chekhlov, *Torsion-free weakly transitive* E-*engel abelian groups*, Math. Notes **94** (2013), 583–589.

[23] H. Chen, *On uniquely clean rings*, Commun. Algebra **39** (2011), 189–198.

[24] A.Y.M. Chin and K.T. Qua, *A note on weakly clean rings*, Acta Math. Hungar. **132** (2011), 113–116.

[25] I.G. Connell, *On the group ring*, Canad. J. Math. **15** (1963), 650–685.

[26] A.L.S. Corner, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 687–710.

[27] A.L.S. Corner, *On endomorphism rings of primary Abelian groups*, Quart. J. Math. (Oxford) **20** (1969), 277–296.

[28] A.L.S. Corner, *On endomorphism rings of primary Abelian groups II*, Quart. J. Math. (Oxford) **27** (1976), 5–13.

[29] A.L.S. Corner, *The independence of Kaplansky's notions of transitivity and full transitivity*, Quart. J. Math. (Oxford) **27** (1976), 15–20.

[30] P. Crawley and A.W. Hales, *The structure of abelian p-groups given by certain presentations*, J. Algebra **12** (1969), 10–23.

[31] P. Crawley and A.W. Hales, *The structure of abelian p-groups given by certain presentations II*, J. Algebra **18** (1971), 264–268.

[32] J. Cui and P.V. Danchev, *Some new characterizations of periodic rings*, J. Algebra & Appl. **19** (2020).

[33] D. Cutler, J. Irwin and T. Snabb, *Abelian p-groups containing proper $p^{\omega+n}$-projective subgroups*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **33** (1984), 95–97.

[34] D. Cutler and C. Missel, *The structure of C-decomposable $p^{\omega+n}$-projective abelian p-groups*, Commun. Algebra **12** (1984), 301–319.

[35] P. Danchev and B. Goldsmith, *On the socles of characteristic subgroups of Abelian p-groups*, J. Algebra **323** (2010), 3020–3028.

[36] P. Danchev and B. Goldsmith, *On projection-invariant subgroups of Abelian p-groups*, in Groups and Model Theory, Contemp. Math. **576**, American Mathematical Society, Providence (2012), 31–40.

[37] P.V. Danchev and P.W. Keef, *Generalized Wallace theorems*, Math. Scand. **104** (2009), 33–50.

[38] P.V. Danchev and P.W. Keef, *Nice elongations of primary abelian groups*, Publ. Mat. (Barcelona) **54** (2010), 317–339.

[39] P.V. Danchev and T.-Y. Lam, *Rings with unipotent units*, Publ. Math. Debrecen **88** (2016), 449–466.

[40] P.V. Danchev and W.Wm. McGovern, *Commutative weakly nil clean unital rings*, J. Algebra **425** (2015), 410–422.

[41] A.J. Diesl, *Nil clean rings*, J. Algebra **383** (2013), 197–211.

[42] C. Faith, Algebraic division ring extensions, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 43–53.

[43] S. Files and B. Goldsmith, *Transitive and fully transitive groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1605–1610.

[44] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, Vol. **I** & **II**, Acad. Press, New York and London, 1970 & 1973.

[45] L. Fuchs, *Vector spaces with valuations*, J. Algebra **35** (1975), 23–38.

[46] L. Fuchs, *On $p^{\omega+n}$-projective abelian p-groups*, Publ. Math. (Debrecen) **23** (1976), 309–313.

[47] L. Fuchs, Abelian Groups, Springer, Switzerland (2015).

[48] L. Fuchs and J. Irwin, *On $p^{\omega+1}$-projective p-groups*, Proc. London Math. Soc. **30** (1975), 459–470.

[49] L. Fuchs and J. Irwin, *On elongations of totally projective p-groups by $p^{\omega+n}$-projective p-groups*, Czechoslovak Math. J. **32** (1982), 511–515.

[50] B. Goldsmith and L. Strüngmann, *Some transitivity results for torsion Abelian groups*, Houston J. Math. **23** (2007), 941–957.

[51] P. Griffith, Infinite Abelian Group Theory, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1970.

[52] S.Ya. Grinshpon, *Fully invariant subgroups of abelian groups and full transitivity*, Fundam. Prikl. Mat. **8** (2002), 407–473. (In Russian).

[53] S.Ya. Grinshpon and M.M. Nikolskaya-Savinkova, *Fully invariant subgroups of abelian p-groups with finite Ulm-Kaplansky invariants*, Commun. Algebra **39** (2011), 4273–4282.

[54] S.Ya. Grinshpon and M.M. Nikolskaya-Savinkova, *Torsion IF-groups*, Fundam. Prikl. Mat. **17** (2011-2012), 47–58 (in Russian); translated in J. Math. Sci. **197** (2014), 614–622.

[55] J. Hausen, *Endomorphism rings generated by idempotents*, Tamkang J. Math. **9** (1978), 215–218.

[56] J. Hausen, *On strongly irreducible torsion-free abelian groups*, Abelian Group Theory, Gordon and Breach, New York, 1987, 351–358.

[57] G. Hennecke, Unpublished calculations relating to the PhD thesis *Transitive und volltransitive Abelsche p-gruppen*, Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik an der Universität GH Essen 1996.

[58] M. Henriksen, *Two classes of rings generated by their units*, J. Algebra **31** (1974), 182–193.

[59] P.D. Hill, *On transitive and fully transitive primary groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 414–417.

[60] P.D. Hill and C.K. Megibben, *Extending automorphisms and lifting decompositions in Abelian groups*, Math. Ann. **175** (1968), 159–168.

[61] P.D. Hill and C.K. Megibben, *Primary abelian groups whose countable subgroups have countable closure*, in Abelian Groups and Modules, Mathematics and its Application, Vol. **343**, 283–290, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[62] C.Y. Hong, N.K. Kim and Y. Lee, *Exchange rings and their extensions*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 117–126.

[63] J. Irwin, *High subgroups of abelian torsion groups*, Pac. J. Math. 11 (1961), 1375–1384.

[64] J. Irwin and P. Keef, *Primary abelian groups and direct sums of cyclics*, J. Algebra **159** (1993), 387–399.

[65] J. Irwin and E. Walker, *On N-high subgroups of abelian groups*, Pac. J. Math. **11** (1961), 1363–1374.

[66] N. Jacobson, *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*, Ann. Math. **46** (1945), 695–707.

[67] P. Kanwar, A. Leroy and J. Matczuk, *Idempotents in ring extensions*, J. Algebra **389** (2013), 128–136.

[68] I. Kaplansky, *Some results on Abelian groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952), 538–540.

[69] I. Kaplansky, Infinite Abelian Groups, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954 and 1969.

[70] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings revisited*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 445–454.

[71] G. Karpilovsky, *The Jacobson radical of commutative group rings*, Arch. Math. (Basel) **39** (1982), 428–430.

[72] P.W. Keef, *Elongations of totally projective groups and $p^{\omega+n}$-projective groups*, Commun. Algebra **18** (1990), 4377–4385.

[73] P.W. Keef, *On ω_1-$p^{\omega+n}$-projective primary abelian groups*, J. Algebra Number Theory Acad. **1** (2010), 41–75.

[74] P.W. Keef and P.V. Danchev, *On m,n-balanced projective and m,n-totally pojective primary abelian groups*, J. Korean Math. Soc. **50** (2) (2013), 307–330.

[75] T. Koşan, Z. Wang and Y. Zhou, *Nil-clean and strongly nil-clean rings*, J. Pure & Appl. Algebra **220** (2016), 633–646.

[76] P. Krylov, A. Mikhalev and A. Tuganbaev, Endomorphism Rings of Abelian Groups, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[77] T.-Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Second Edition, Graduate Texts in Math., Vol. **131**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

[78] T.K. Lee and Y. Zhou, *A class of exchange rings*, Glasg. Math. J. **50** (2008), 509–522.

[79] T.K. Lee and Y. Zhou, *Clean index of rings*, Commun. Algebra **40** (2012), 807–822.

[80] R. Linton, *λ-large subgroups of C_λ-groups*, Pac. J. Math. **75** (1978), 477–485.

[81] A. Mader, *Almost completely decomposable torsion-free abelian groups*, in Abelian Groups and Modules, Proc. Padova Conf., Padova, Italy, 1994, Vol. **343**, Kluwer Acad. Publ., 1995, 343–366.

[82] W.L. May, *Group algebras over finitely generated rings*, J. Algebra **38** (1976), 483–511.

[83] W.Wm. McGovern, S. Raja and A. Sharp, *Commutative nil clean group rings*, J. Algebra & Appl. **14** (2015).

[84] C. Megibben, *On high subgroups*, Pac. J. Math. **14** (1964), 1353–1358.

[85] C. Megibben, *Large subgroups and small homomorphisms*, Michigan Math. J. **13** (1966), 153–160.

[86] C.K. Megibben, *Projection-invariant subgroups of Abelian groups*, Tamkang J. Math. **8** (1977), 177–182.

[87] A. Mekler and S. Shelah, *ω-elongations and Crawley's problem*, Pac. J. Math. **121** (1986), 121–132.

[88] Z. Mesyan, *Commutator rings*, Bull. Austral. Math. Soc. **74** (2006), 279–288.

[89] G.S. Monk, *Essentially indecomposable Abelian p-groups*, J. London Math. Soc. **3** (1971), 341–345.

[90] W.K. Nicholson, *Local group rings*, Canad. Math. Bull. **15** (1972), 137–138.

[91] W.K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 269–278.

[92] W.K. Nicholson, *Strongly clean rings and Fitting's lemma*, Commun. Algebra **27** (1999), 3583–3592.

[93] W.K. Nicholson and Y. Zhou, *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*, Glasg. Math. J. **46** (2004), 227–236.

[94] W.K. Nicholson and Y. Zhou, *Clean general rings*, J. Algebra **291** (2005), 297–311.

[95] R. Nunke, *Purity and subfunctors of the identity*, in Topics in Abelian Groups, Scott, Foresman & Co., Chicago, 1962, 121–171.

[96] R. Nunke, *Homology and direct sums of countable abelian groups*, Math. Z. **101** (1967), 182-212.

[97] K. O'Meara, J. Clark and Ch. Vinsonhaler, Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form, Oxford Univ. Press., 1st edition, Oxford, 2011.

[98] R.S. Pierce, *Homomorphisms of primary Abelian groups*, in Topics in Abelian Groups, Scott, Foresman & Co., Chicago, 1963, 215–310.

[99] F. Richman and E. Walker, *Valuated groups*, J. Algebra **56** (1979), 145–167.

[100] L. H. Rowen, Polynomial Identities in Ring Theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. **84**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New YorkLondon, 1980.

[101] S. Sahinkaya, G. Tang and Y. Zhou, *Nil-clean group rings*, J. Algebra & Appl. **16** (2017).

[102] L. Salce, Struttura dei p-gruppi abeliani, Pitagora Ed., Bologna, 1980.

[103] P. Schultz, *The endomorphism ring of the additive group of a ring*, J. Austral. Math. Soc. **15** (1973), 60–69.

[104] Ph. Schultz, *On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **24** (1973), 59–63.

[105] V.K. Sinha, Introduction to Matrix Theory, Alpha Science International Ltd, 2015.

[106] T. Szele and J. Szendrei, *On Abelian groups with commutative endomorphism rings*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **2** (1951), 309–324.

[107] J.-C. Wei, *Weakly-abel rings and weakly exchange rings*, Acta Math. Hungar. **137** (2012), 254–262.

[108] H.-P. Yu, *On the structure of exchange rings*, Commun. Algebra **25** (1997), 661–670.

КОНФЛИКТ НА ИНТЕРЕСИ

Авторът на тази дисертация декларира, че *няма* и *не участва* в групи, които биха довели до евентуален

"Конфликт на Интереси"!