Институт за ядрени изследвания и ядрена енергетика

Българска академия на науките

Тихомир Илчев Вълчев

Редукции на нелинейни уравнения от солитонен тип върху хомогенни и симетрични пространства

Дисертация

за получаване на научната и образователна степен „доктор“
по специалност:

01.03.01 „Теоретична и математическа физика“

Научен ръководител:

ст. н. с. I ст. дфн Владимир Герджиков

София, 2008

Съдържание

1. УВОД

Теорията на солитоните е една бурно развиваща се област на съвременната математична физика. Броят на напълно интегрируемите модели нараства с изключително бързи темпове през последните десетилетия — понастоящем са известни десетки интегрируеми уравнения. Уравнения от солитонен тип се срещат във все повече дялове на физиката: като се започне от механиката на флуидите и нелинейната оптика, премине се през теорията на плазмата и свръхпроводимостта и се стигне до теорията на елементарните частици и кондензацията на Бозе-Айнщайн. Друга основна област на приложение на солитонните уравнения се предоставя от диференциалната геометрия.

Исторически погледнато корените на теорията на солитоните са свързани с определени задачи на класическата диференциална геометрия на повърхнините и на хидродинамиката, датиращи от втората половина на 19-ти век. Така например, известното уравнение sin-Гордън

$$\omega_{uv} - \frac{1}{\rho^2}\sin\omega = 0, \tag{1.1}$$

където долните индекси означават взимане на производна по съответната независима променлива, се е появило за първи път в работите на Бур и малко по-късно при Боне и Енепер при извода на уравненията на Гаус-Майнарди-Кодаци за повърхнини с постоянна отрицателна Гаусова кривина $K = -1/\rho^2$ (вж. [80] за повече подробности). В този контекст функцията ω представлява ъгълът между асимптотичните координати u и v. Друг класически пример е уравнението на Кортевег-де Фриз (КдФ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.2}$$

което описва разпространението на повърхностни гравитационни вълни в плитък канал. Функцията u задава профила на съответната вълна.

Приблизително по същото време се поставя началото и на разработката на първите методи за решаване на тези нелинейни уравнения. Методът на преобразуване на едно решение на дадено диференциално уравнение в друго решение на същото уравнение е въведен за първи път от Беклунд за случая на sin-Гордън през 1882 г. и е реализиран с помощта на чисто геометрични конструкции. Идеята е да се построи от дадена хиперболична повърхност Σ друга хиперболична Σ' чрез трансформацията

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + l\left(\cos\phi\vec{r}_u + \sin\phi(\vec{N}\times\vec{r}_u)\right),$$

където $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ са радиус векторите на Σ и Σ' съответно, $\vec{N} = \vec{r}_u\times\vec{r}_v/|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|$ е нормалният вектор за Σ, а $l = |\vec{r}\,' - \vec{r}|$ и ϕ се считат за константи. По-горе се предполага също, че допирателните вектори $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ са нормирани. Беклунд е показал, че условието Σ' да бъде хиперболична повърхност с постоянна Гаусова кривина води до следните линейни диференциални уравнения от първи ред

$$\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u = \frac{\beta}{\rho}\sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right),$$
$$\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v = \frac{1}{\beta\rho}\sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right),$$

където ъгълът ω' между асимптотичните координати за новата повърхност също удовлетворява уравнението (1.1), а β е параметър на трансформацията. Решаването на тези уравнения позволява при известна функция ω да се получи фамилия от решения на уравнението sin-Гордън, зависеща от параметъра β и някаква интеграционна константа. Най-простият случай, когато $\omega = 0$ води до решение, което съгласно съвременната терминология се нарича 1-солитонно (kink). Резултатите на Беклунд биват по-късно доразвити от Бианки, който доказва съществуването на "нелинеен принцип за суперпозиция"за преобразуванията на Беклунд, което позволява да се пресметнат итеративно по-сложни решения, наричани днес многосолитонни.

Успоредно с работите на Беклунд и Бианки до метод за получаване на решения на нелинейни частни диференциални уравнения достига и Дарбу (вж. [74] за повече подробности по този въпрос). При своите изследвания върху задачата на Щурм-Лиувил

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} + (\lambda - u(x))y = 0 \tag{1.3}$$

Дарбу е забелязал, че трансформацията

$$y \mapsto \tilde{y} = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} - y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\ln y(x, \lambda_0), \qquad u \mapsto \tilde{u} = u - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, x^2}\ln y(x, \lambda_0)$$

оставя уравнението (1.3) ковариантно. Ползата от това наблюдение се състои във факта, че потенциалът u може да се свърже с нелинейно еволюционно уравнение. По този начин от едно известно решение на еволюционното уравнение може да се генерира друго.

Ценноста на резултатите, получени от Беклунд и Дарбу през този период, остава недооценена от техните съвременници и те биват забравени за почти цяло столетие. Истинският бум в развитието на теорията на солитоните започва едва през 60-те години на миналия век. През 1965г. се появява работата на Забуски и Крускал [87], в която те изучават числено КдФ във връзка със задачата на Ферми-Паста-Улам и установяват, че солитоните на КдФ взаимодействат помежду си чисто еластично. Всъщност, по тази причина Забуски и Крускал кръщават този тип уединени нелинейни вълни солитони. Три години по-късно в пионерската работа на Гарднър, Грийн, Крускал и Миура [45] е предложен алгоритъм за решаване на задачата на Коши за уравнението на КдФ с помощта на вспомагателна задача на Щурм-Лиувил и на интегралните уравнения на Гелфанд-Левитан-Марченко и по този начин са поставени основите на метода на обратната задача на разсейването (МОЗР). В последваща забележителна серия от публикации [77, 78, 44, 69] са изследвани подробно свойствата на уравнението (1.2). В [77] Миура достига до известната трансформация

$$u = v_x - v^2, \tag{1.4}$$

която свързва дадено решение $v(x,t)$ на модифицираното уравнение на Кортевег-де Фриз (мКдФ)

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

с решение $u(x,t)$ на КдФ. Трансформацията на Миура се появява при сравняване на законите за запазване на КдФ и мКдФ, получени от Миура, Гарднър и Крускал в [78]. Пак там авторите доказват, че законите за запазване образуват безкрайна серия и плътностите им са от полиномиален тип. Малко по-късно Лакс [71] открива общ алгоритъм, чрез който може да се реши задачата на Коши за еволюционно уравнение

$$u_t = P(u), \tag{1.6}$$

където $P(u)$ е полином на функцията u и нейните производни по x, стига то да допуска представянето

$$\mathcal{L}_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}] \tag{1.7}$$

При подхода на Лакс уравнението (1.6) представлява изоспектрална деформация на задачата за собствени стойности

$$\mathcal{L}y = \lambda y \tag{1.8}$$

за линейния диференциален оператор $\mathcal{L}$, чиито коефициенти са диференциални полиноми от подходяща степен на променливата u. Времевата еволюция на собствените функции на $\mathcal{L}$ се определя от оператора $\mathcal{A}$

$$y_t = \mathcal{A}y.$$

Представянето на Лакс е един от фундаментите на метода на обратната задача и на теорията на интегрируемите системи изобщо — намирането на подходящо Лаксово представяне на дадено нелинейно уравнение обикновено е първата стъпка при неговото аналитично решаване и доказване на пълната му интегрируемост.

Освен наличието на Лаксово представяне друга характерна особеност на солитонните уравнения е, че те могат да се интерпретират като безкрайномерен аналог на напълно интегрируемите Хамилтонови системи от класическата механика. Това е било демонстрирано за първи път за случая на КдФ в [44, 69], където авторите намират Хамилтониан за КдФ, който се оказва третият по ред интеграл в безкрайната серия, и построяват скобка на Поасон, спрямо която намерените закони за запазване "комутират". Хамилтоновата формулировка на КдФ бива доразвита от Захаров и Фадеев [6], които построяват симплектична форма и намират променливи действие-ъгъл за КдФ и така се доказва пълната интегрируемост по Лиувил на уравнението.

Впечатляващите свойства на КдФ са карали мнозина да смятат, че те са присъщи единствено на него. В този смисъл следващата важна крачка в развитието на теорията на солитоните е направена от Захаров и Шабат [7]. Те показват, че нелинейното уравнение на Шрьодингер (НУШ)

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2\kappa|u|^2 u = 0, \tag{1.9}$$

което описва разпространението на стационарен светлинен поток с обвиваща u в нелинейна среда с квадратичен показател на пречупване $n \sim |u|^2$, допуска Лаксово представяне с матрични 2×2 Лаксови оператори. За такава $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}$ двойка авторите развиват метода на обратната задача и намират N-солитонното решение на (1.9). От задачата за собствени стойности на $\mathcal{L}$ след подходяща смяна на променливите авторите извеждат класическата система на разсейване

$$\mathrm{i}\psi_{1,x} + w\psi_2 - \zeta\psi_1 = 0, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{i}\psi_{2,x} + w^*\psi_1 + \zeta\psi_2 = 0, \tag{1.11}$$

където

$$w = \sqrt{\kappa}u, \qquad \zeta = \sqrt{\kappa(\kappa-1)}\lambda, \qquad 0 < \kappa < 1.$$

След работата на Захаров и Шабат постепенно се натрупват и други примери на уравнения интегрируеми с помощта на МОЗР: Вадати [86] получава солитонните решения на мКдФ, а Абловиц, Кауп, Нюъл и Сийгър [18] и независимо от тях Фадеев и Тахтаджян [13] правят това за синус-Гордън. Появяват се и първите многокомпонентни интегруеми уравнения: Манаков [10] извежда системата от сдвоени НУШ

$$\mathrm{i}u_{1,t} + u_{1,xx} + 2(|u_1|^2 + |u_2|^2)u_1 = 0, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{i}u_{2,t} + u_{2,xx} + 2(|u_1|^2 + |u_2|^2)u_2 = 0, \tag{1.13}$$

а Захаров и Манаков [2] успяват да интегрират известната от нелинейната оптика [30] 3-вълнова система

$$\mathrm{i}u_{1,t} + \mathrm{i}v_1 u_{1,x} + \epsilon_1 k u_2 u_3^* = 0, \tag{1.14}$$

$$\mathrm{i}u_{2,t} + \mathrm{i}v_2 u_{2,x} + k u_1 u_3 = 0, \tag{1.15}$$

$$\mathrm{i}u_{3,t} + \mathrm{i}v_3 u_{3,x} + \epsilon_2 k u_1^* u_2 = 0 \tag{1.16}$$

и нейното обобщение за N взаимодействащи вълни.

Системата (1.14)–(1.16) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ описва процеса на разпадане на вълна с комплексна обвиваща u_2 на две вълни с обвиващи u_1 и u_3 и обратния процес на сливане на u_1 и u_3 в u_2, докато изборът $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ води до описание на взривна неустойчивост — спонтанно раждане на три вълни u_1, u_2 и u_3.

Успоредно с това се търсят и обобщения на подхода на Захаров и Шабат — по това време излизат основополагащите работи на Абловиц, Кауп, Нюъл и Сийгър (АКНС) [19, 20] и на Захаров и Шабат [8]. При подхода на АКНС вместо $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}$ двойка се разглеждат двете вспомагателни линейни задачи

$$L\psi(x,t,\lambda) = \mathrm{i}\partial_x\psi(x,t,\lambda) + U(x,t,\lambda)\psi(x,t,\lambda) = 0, \tag{1.17}$$

$$M\psi(x,t,\lambda) = \mathrm{i}\partial_t\psi(x,t,\lambda) + V(x,t,\lambda)\psi(x,t,\lambda) = 0, \tag{1.18}$$

където λ е допълнителен спектрален параметър. Нелинейното еволюционно уравнение се получава от условието за тяхната съвместимост

$$[L,M] = \mathrm{i}U_t - \mathrm{i}V_x - [U,V] = 0, \tag{1.19}$$

изпълнено тъждествено по λ. В оригиналните работи на АКНС първата линейна задача е избрана от типа на задачата за разсейване на Захаров-Шабат

$$L\psi = \mathrm{i}\partial_x\psi + (q(x,t) - \lambda\sigma_3)\psi = 0, \tag{1.20}$$

където

$$q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q^+(x,t) \\ q^-(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

За втория оператор M се предлага следния анзац

$$M = \mathrm{i}\partial_t + \sum_k \lambda^k V_k(x,t), \tag{1.21}$$

където степените на λ могат да бъдат и отрицателни, какъвто е случаят с уравнението sin-Гордън (вж. Приложение Б). В [20] авторите въвеждат и рекурсионен оператор, с чиято помощ се задава цяла йерархия от интегрируеми нелинейни уравнения, свързани със задачата на Захаров-Шабат. Пак там са въведени т.нар. квадрати на решенията на системата на Захаров-Шабат, които са собствени функции на рекурсионния оператор. Малко по-късно Кауп [67] и независимо от него Герджиков и Христов [52] доказват пълнотата на квадратите на решенията. Това залага основата за интерпретацията на МОЗР като обобщено Фурие преобразование, което се използва за линеаризиране на нелинейното уравнение и по този начин за неговото решеаване. По-нататък пълнота на квадратите на решенията за обобщена система на Захаров-Шабат, свързана с произволна проста алгебра на Ли, е доказана от Герджиков [47].

Основно предимство на схемата, предложена от АКНС, пред оригиналния Лаксов подход е, че за операторите L и M се допуска и по-обща рационална зависимост от параметъра λ. Първият нетривиален пример за такава двойка оператори е посочен от Захаров и Михайлов [5] и е свързан с уравненията на главното кирално поле

$$\Psi_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\Psi_\xi\Psi^{-1}\Psi_\eta + \Psi_\eta\Psi^{-1}\Psi_\xi\right), \tag{1.22}$$

където полето Ψ взима стойности в някаква група на Ли G, а $\xi = (t-x)/2$ и $\eta = (t+x)/2$ са конусните променливи. Това са динамичните уравнения на релативистка теория на полето с лагранжиан

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Psi_\xi \Psi_\eta^{-1}).$$

Токовете $\mathcal{J} = \mathrm{i}\Psi_\xi \Psi^{-1}$ и $\mathcal{I} = \mathrm{i}\Psi_\eta \Psi^{-1}$ принадлежат на съответната алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ и участват в изразите за потенциалите на вспомагателните линейни задачи по следния начин

$$U = -\frac{\mathcal{J}}{\lambda+1}, \qquad V = \frac{\mathcal{I}}{\lambda-1}. \tag{1.23}$$

Друг тип обобщение на МОЗР се излага в работата [8]. В нея Захаров и Шабат разглеждат матрични Лаксови оператори, съдържащи производни по времето и по две пространствени променливи, и разработват МОЗР за тях с помощта на техника на факторизация на интегрални оператори. Това позволило на авторите да решат уравнението на Кадомцев-Петвиашвили

$$\epsilon u_{yy} + (u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 0, \qquad \epsilon = \pm 1, \tag{1.24}$$

което представлява $2+1$ мерен аналог на КдФ. Това е първото $2+1$-мерно уравнение, което е интегрирано с помощта на МОЗР.

Оригинален подход за изучаване на нелинейни еволюционни уравнения е предложен от Калоджеро и Дегасперис [32, 33]. В основата му стоят т. нар. обобщени Вронскиански съотношения, които свързват потенциалите на две задачи на разсейването с данните на разсейването, които съответстват на тези задачи. С тяхна помощ Калоджеро и Дегасперис извеждат Беклунд трансформации и законите за запазване за широк клас от нелинейни уравнения, сред които има и уравнения със изроден закон за дисперсия. В резултат на това на авторите се отдава да възпроизведат солитонните решения на вече познати уравнения, а също и да получават нови типове солитони за новите уравнения. Сред откритите от тях нови солитони се оказват и такива, чиито скорости не са постоянни, а се менят с времето — т. нар. бумеронни решения.

Освен като обобщено Фурие преобразование МОЗР може да се разглежда и като локална задача на Риман-Хилберт. Това ключово наблюдение е направено от Шабат [15, 16], който въвежда специален тип фундаментални решения χ^+ и χ^- на задачата на разсейването (1.20), притежаващи свойства на аналитичност съответно в горната и долната полуравнина на λ-равнината. Именно фундаменталните аналитични решения се явяват решения на задачата на Риман-Хилберт. Използвайки идеята на фундаменталните аналитични решения, Захаров и Шабат [9] предлагат нов метод за построяване на решения на нелинейни уравнения — метода на обличането. По същество методът на обличането представлява осъвременена версия на трансформацията на Дарбу, при която съществено се използва наличието на вспомагателна линейна задача. Схемата на метода може да се онагледи чрез следващата диаграма

$$q_0 \mapsto L_0 \mapsto \psi_0 \mapsto \psi \mapsto L \mapsto q.$$

От известно решение q_0 на разглежданото нелинейно еволюционно уравнение се конструира Лаксов оператор L_0, чиито потенциал представлява q_0, и след това се намира фундаменталното решение на съответната система на разсейването. Полученото фундаментално решение ψ_0 се "облича"с помощта на специален множител, който зависи явно от параметъра λ, и така се получава фундаментално решение ψ на задача на разсейването с някакъв друг потенциал q, който се търси. Захаров и Шабат използват следния анзац за обличащия множител

$$g = \mathbb{1} + \frac{\lambda^- - \lambda^+}{\lambda - \lambda^-} P, \tag{1.25}$$

където P е проектор от даден ранг, а λ^+ и λ^- са фиксирани точки съответно от горната и долната полуравнина на λ-равнината. Например, ако вспомагателната линейна задача има вида

$$L\psi = \mathrm{i}\partial_x\psi + (q - \lambda J)\psi = 0, \tag{1.26}$$

където J е реална константна диагонална матрица, тогава се доказва, че новото решение q може да се пресметне по формулата

$$q = q_0 + (\lambda^- - \lambda^+)[J, P]. \tag{1.27}$$

Ефективността на метода се състои в това, че P се изразява само чрез фундаменталните аналитични решения $\chi_0^\pm$ на началната линейна задача. По-нататъшно обобщение на тази методика включва използване на нелокална задача на Риман-Хилберт и $\bar{\partial}$-задача [4, 39] които позволяват да се интегрират многомерни еволюционни уравнения (например уравнението на Кадомцев-Петвиашвили).

Като правило интегрируемите нелинейни уравнения, които имат физически приложения, се получават не от оператори на Лакс в общо положение, а от такива, които притежават някакви допълнителни симетрии. Това е равносилно на налагане на някакви допълнителни алгебрични връзки върху компонентите на потенциала q, които в теорията на солитоните е прието да се наричат редукции. Например нелинейното уравнение на Шрьодингер се получава от условието за съвместимост на L оператор (1.20), при условие че $q^- = (q^+)^*$ е изпълнено. Описанието на редукциите е било формализирано от Михайлов [11, 75], който въвежда понятието група на редукциите. Групата на редукциите представлява крайна група, която действа върху решенията на вспомагателната линейна задача посредством преобразуване на стойностите им и на аргумента λ и налага определени симетрийни изисквания върху матричнозначната функция U в оператора L. В случая на уравнението на Шрьодингер групата на редукциите е $\mathbb{Z}_2$.

Въпреки че случаят на $\mathbb{Z}_2$ редукции е доста често срещан, не малък интерес представляват и уравнения, на чиито Лаксови оператори са наложени "по-дълбоките"редукции, т. е. редукции, породени от по-сложни групи: групата $\mathbb{Z}_n$ $(n \geq 3)$ [37, 41, 42, 75, 48], диедралната група $\mathbb{D}_n$ [72, 75] и др. Свойствата на оператора L за такива системи се различава доста от $\mathbb{Z}_2$-редуцирания случай. Теорията на такива Лаксови оператори е по-слабо изучена и представлява известен интерес.

Направеният дотук кратък преглед на развитието на теорията на солитоните, разбира се, в никакъв случай не може да претендира за изчерпателност. Останаха незасегнати редица важни направления, които вече са се отделили като самостоятелни направления. Такива са например: квантовият метод на обратната задача на разсейването, развитието на алгебро-геометричните методи за решаване на периодичната задача на разсейването, процедурата на Уолкуист-Естабрук за построяване на преобразования на Беклунд за дадено нелинейно уравнение чрез структурата на продължаване (prolongation structure) и т. н. Едно подробно изложение на този въпрос излиза извън рамките на настоящата дисертация. Подборът на разгледания материал е направен с оглед на тематиката на дисертацията. Изложение на квантовия метод на разсейването може да бъде намерено в [12], а на периодичната задача в [3, 29]. Задълбочено въведение в теорията на преобразованията на Беклунд се съдържа в [31, 73, 81].

Целите и задачите, поставени в настоящата дисертация, са следните:

- Получаване на нови интегрируеми системи, свързани с хомогенни и симетрични пространства, с помощта на метода на редукциите. По-точно става дума за получаване на: $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редуцирани системи от типа на N-те вълни, свързани с прости алгебри на Ли; $\mathbb{Z}_2$ редуцирани многокомпонентни нелинейни уравнения на Шрьодингер, асоциирани със симетричните пространства и $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редуцирани многокомпонентни модифицирани уравнения на Кортевег-де Фриз, свързани със симетрични пространства.

- Обобщаване на техниката на обличането на Захаров-Шабат за нелинейни уравнения, чиято вспомагателна спектрална задача преставлява обобщена система на Захаров-Шабат, свързана с простите алгебри от сериите A_r, B_r, C_r и D_r, при наложени допълнително редукции. Това позволява да бъдат пресметнати многосолитонните им решения и по-специално многосолитонните решения на нелинейните уравнения, които се разглеждат в дисертацията.

- Построяване на "квадратите"на решенията за нелинейни уравнения, чиито вспомагателни спектрални задачи са задачи на Кодри-Бийлс-Коифман с допълнителни "дълбоки"редукции; доказване на пълнотата на тези "квадрати"и извеждане на съответните съотношения за пълнота.

Дисертацията е разделена на 7 глави. Във втора глава се излагат основни сведения от математичния апарат, който ще бъде използван по-нататък в изложението: прости алгебри на Ли, метод на обратната задача, метод на редукциите и задача на Риман-Хилберт. Основните резултати в дисертационния труд са поместени в следващите 4 глави. Трета и четвърта глава са посветени на получаването на многокомпонентни нелинейни еволюционни уравнения от типа на N-те вълни, свързани с прости комплексни алгебри на Ли, и техни частни решения. Това са примери за системи, свързани с хомогенни пространства. По специално, трета глава съдържа N-вълнови системи за ортогоналните и симплектични алгебри, получени посредством прилагане на метода на редукциите за групата $\mathbb{Z}_2$. В четвърта глава, от своя страна, са изведени N-вълнови системи за алгебрите A_r, B_r и C_r, но този път получени при действието на групата $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. В разглежданите глави е обобщена класическата техника на обличането на Захаров-Шабат, така че да се отчете вида на конкретната алгебра на Ли и действието на съответната група на редукциите. Това позволява да се пресметнат относително просто и елегантно 1-солитонните решения на разглежданите нелинейни еволюционни уравнения. Наличието на две $\mathbb{Z}_2$ редукции води до възникването на два типа солитонни решения: дублетни и квадроплетни. В последния параграф на четвърта глава е илюстрирано как с помощта на техниката на обличането да се строят сингулярни решения на задачата на Риман-Хилберт.

В глава 5 е показано как отново с помощта на метода на редукциите може да се получат многокомпонентни обобщения на нелинейното уравнение на Шрьодингер и модифицираното уравнение на Кортевег-де Фриз, които са свързани със симетрични пространства от серията **BD.I**. Разгледани са примери на $\mathbb{Z}_2$-редуцирани нелинейни уравнения на Шрьодингер, а също така на $\mathbb{Z}_2$-редуцирани и на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-редуцирани модифицирани уравнения на Кортевег-де Фриз. Демонстрирано е как с техниката на обличането, развита в предишните глави, да се пресметнат техните солитонни решения. При $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-редуцираните модифицирани уравнения на Кортевег-де Фриз по аналогия със случая на уравненията на N-те вълни се появяват два типа солитонни решения: дублетни и квадроплетни. Две от съдържащите се тук нелинейни системи имат физически приложения — описват кондензати на Бозе-Айнщайн.

Шеста глава е посветена на интерпретацията на метода на обратната задача като обобщено преобразование на Фурие. Тук се разглеждат две нелинейни интегрируеми уравнения: уравнението на Кауп-Купършмид и двукомпонентен афинен модел на Тода. Асоциираните с тях спектрални задачи представляват примери за задачи на Кодри-Бийлс-Коифман, свързани с алгебрите $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ съответно. Съгласно общата теория на тези системи са построени "квадратите"на решенията. За последните са изведени съотношения за пълнота с помощта на теоремата на Коши за резудуумите, приложена към подходяща "пораждаща"функция.

Последната глава представлява заключение и съдържа изводи и коментари по резултатите на дисертационния труд.

2. НЕОБХОДИМИ СВЕДЕНИЯ ОТ ТЕОРИЯТА НА ИНТЕГРИРУЕМИТЕ СИСТЕМИ

В настоящата глава ще дадем кратко въведение в математичния апарат, който ще бъде използван по-нататък в дисертационния труд. Поради факта че обект на това изследване са нелинейни еволюционни уравнения, свързани с определени полупрости алгебри на Ли, то в самото начало ще напомним някои основни факти от теорията на тези алгебри. След това ще бъдат изложени необходими сведения от теорията на интегрируемите системи: права и обратна задача на разсейването. Специално място е отделено също така и на метода на редукциите, като основен метод за получаване на нови интегрируеми уравнения.

2.1 Полупрости алгебри на Ли

Настоящият параграф има за цел да даде кратко въведение в теорията на простите алгебри на Ли. За по-подробно запознаване могат да бъдат използвани монографиите [24, 25, 61, 63, 64]. Една алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ се нарича полупроста, ако не съдържа ненулеви комутативни идеали. В случай че тя не съдържа никакви нетривиални идеали, т. е. отлични от 0 и нея самата, тя се нарича проста. Всяка полупроста алгебра се разлага на пряка сума от прости подалгебри. Да припомним, че метриката, дефинирана чрез равенството

$$(X, Y) := \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X\, \mathrm{ad}_Y), \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{2.1}$$

се нарича метрика (форма) на Килинг. Съгласно критерия на Картан една алгебра на Ли е полупроста тогава и само тогава, когато нейната метрика на Килинг е неизродена.

Полупростите алгебри не притежават комутативни идеали, но притежават комутативни подалгебри. Максималната комутативна подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, за която линейният оператор ad_X е полупрост[1] за всяко $X \in \mathfrak{h}$, се нарича подалгебра на Картан[2]. Размерността на Картановата подалгебра се нарича ранг на алгебрата $\mathfrak{g}$. Оттук нататък за нас ще представляват основен интерес комплексни матрични алгебри на Ли. При подходящ

[1] Полупрост се казва линеен оператор, чиито инвариантни подпространства имат инвариантни допълнения.

[2] Съществува еквивалентна дефиниция на Картанова подалгебра — максималната нилпотентна подалгебра, която съвпада със своя нормализатор.

избор на базис Картановата подалгебра се състои от всички диагонални матрици, които принадлежат на съответната алгебра на Ли.

За изясняване на структурата на полупростите алгебри от ключово значение са т.нар. корневи системи. Под корен се разбира линеен функционал $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, който се въвежда чрез равенството

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha, \quad \forall\, H \in \mathfrak{h}, \tag{2.2}$$

където E_α се нарича корневи вектор. Множеството $\mathfrak{g}_\alpha = \{E_\alpha \in \mathfrak{g} : [H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha\}$ има структура на линейно подпространство — корнево подпространство. В комплексния случай това подпространство е едномерно.

Нека означим с Δ множеството на всички корени на $\mathfrak{g}$. Тогава може да се покаже, че са в сила следните свойства:

1. За алгебрата $\mathfrak{g}$ е налице представянето: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$.

2. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, ако $\alpha + \beta \in \Delta$.

3. Ако $\alpha \in \Delta$, то и $-\alpha \in \Delta$, но $k\alpha \notin \Delta$ при $k \neq \pm 1$.

4. Ако $\alpha + \beta \neq 0$, то следва $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

5. Рестрикцията на формата на Килинг върху $\mathfrak{h}$ е неизродена.

6. Нека
$$\mathfrak{h}_{\mathrm{R}} = \left\{ X = \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha H_\alpha, \quad X_\alpha \in \mathbb{R} \right\},$$
където $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ е дуалният вектор на корена α по отношение на Килинговата форма
$$\alpha(Y) = (H_\alpha, Y), \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{h}.$$
Тогава имаме разлагането $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$ и рестрикцията на формата на Килинг върху $\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$ е реална и положително дефинитна.

7. Нека $\alpha, \beta \in \Delta$ удовлетворяват $\alpha \neq \pm\beta$. Съществуват такива цели числа $m > 0$ и $n < 0$, че $\alpha + k\beta \in \Delta$ за всяко $n \leq k \leq m$ и $\alpha + k\beta \notin \Delta$ вън от посочения интервал. Валидно е равенството
$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -m - n.$$

Базисът, който се състои от базис на $\mathfrak{h}$ и от корневи вектори, носи името базис на Картан-Вайл. Занапред ще използваме такъв базис на Картан-Вайл, за който важат комутационните съотношения

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \tag{2.3}$$
$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}. \tag{2.4}$$

Константите $N_{\alpha,\beta}$ удовлетворяват симетрийните условия

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}, \qquad N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Друго пряко следствие от изброените свойства на корневите системи е наличието на градуировка в алгебрата $\mathfrak{g}$. Наистина, свойства 1 и 2 определят градуирана алгебра на Ли.

Множеството на корените Δ поражда цялото пространство на линейните функционали върху $\mathfrak{h}$, но не всички корени са линейно независими. Един удобен "базис"в Δ се задава от т. нар. прости корени. За да изясним кой корен ще наричаме прост, е необходимо да изберем подредба в Δ, т.е. да укажем кой корен е положителен и кой — отрицателелен. За целта нека изберем ортонормиран базис $\{e_k\}_{k=1}^r$ в $\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$. Поради неизродеността на формата на Килинг върху $\mathfrak{h}$ можем да отъждествим пространството $\mathfrak{h}$ с неговото дуално. Тогава ще считаме, че даден корен е положителен (съотв. отрицателен), ако първата му отлична от нула компонента спрямо въведения вече базис е положителна (съотв. отрицателна). Прости са тези положителни корени, които не могат да се представят като сума на 2 положителни корена. Може да се докаже, че простите корени са линейно независими и образуват пълна система, т.е. всеки корен е линейна комбинация от простите корени

$$\alpha = \sum_{k=1}^{r} n_k \alpha_k,$$

където всички коефициенти n_k са цели и неотрицателни или неположителни в зависимост от това дали коренът α е положителен или отрицателен. Подмножеството на всички прости корени ще означаваме с Δ_0. Сумата на коефициентите n_k се нарича височина на корена α.

$$\mathrm{ht}(\alpha) = \sum_k n_k. \tag{2.5}$$

От определението на простите корени следва, че всеки прост корен има височина 1.

Един положителен корен се нарича максимален, ако при добавянето към него на произволен друг положителен корен, се получава фунционал, който не принадлежи на корневото пространство. Максималният корен има най-голямата възможна височина. Аналогична е дефиницията на минимален корен. Простите корени заедно с минималния корен образуват множеството на допустимите корени $\mathscr{A}$.

За всеки два прости корена α_i и α_j е вярно следното свойство

$$(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0, \qquad i, j = 1, \ldots, r.$$

Матрицата с елементи

$$C_{ij} = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

се нарича матрица на Картан. Тя играе важна роля при класификацията на възможните корневи системи и оттам на простите алгебри на Ли.

Нека да рагледаме произведението

$$C_{ij}C_{ji} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = 4\cos^2\varphi_{i,j}. \tag{2.6}$$

Поради свойство 7 на корневите системи стойностите на ъгъла $\varphi_{i,j}$ са ограничени до следните 4 възможности

$$\varphi_{i,j} = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}.$$

Въз основа на този резултат простите алгебри на Ли се класифицират в няколко групи. Това са четирите безкрайни класически серии: $A_r \approx \mathfrak{sl}(r+1)$, $B_r \approx \mathfrak{so}(2r+1)$, $C_r \approx \mathfrak{sp}(2r)$ и $D_r \approx \mathfrak{so}(2r)$ и петте изключителни алгебри: E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2.

Група на Вайл се нарича групата на симетриии на Δ. Тя е крайна група и се поражда от отраженията спрямо хиперравнини ортогонални на корените. Всяко такова отражение W_α, $\alpha\in\Delta$ има вида

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \qquad \beta\in\Delta. \tag{2.7}$$

Изображението

$$\mathcal{C} = W_{\alpha_1}\circ W_{\alpha_2}\circ\ldots\circ W_{\alpha_r}, \qquad \alpha_k\in\Delta_0, \qquad k=1,\ldots,r, \tag{2.8}$$

се нарича елемент на Кокстър (Coxeter). Неговият порядък h, т.е. най-малкото цяло положително число, което удовлетворява условието $\mathcal{C}^h = 1\!\!1$, се казва число на Кокстър.

Дефиницията (2.2) се обобщава за случая на линейно представяне $\rho:\mathfrak{g}\mapsto\mathfrak{gl}(V)$ по следния начин

$$\rho_H(E_\omega) = \omega(H)E_\omega, \tag{2.9}$$

където функционалът $\omega:\mathfrak{h}\mapsto\mathbb{C}$ се нарича тегло, а всички вектори E_ω при дадено ω образуват теглово подпространство V_ω. Така пространството V се разбива на сума от подпространства V_ω инвариантни относно действието на елементи на $\mathfrak{h}$. Изобщо казано, размерността на V_ω не винаги е единица. Съвкупността Γ на всички тегла се нарича теглова система. По подобие на системите от корени тегловите системи разпъват подпространството $\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$ и са инвариантни относно групата на Вайл. Също така е в сила равенството

$$\frac{2(\alpha,\omega)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}, \qquad \forall\alpha\in\Delta, \quad \forall\,\omega\in\Gamma.$$

Съществуват тегла ω_i, $i=1,\ldots,r$, наречени фундаментални, които удовлетворяват условието

$$\frac{2(\alpha_i,\omega_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \delta_{ij}.$$

В тегловата система на крайномерно представяне винаги съществува максимално $\omega_{\max}$, т.е. такова, за което е валидно $\omega_{\max}+\alpha\notin\Gamma$ за кой да е корен $\alpha>0$. Аналогично се дефинира и понятието минимално тегло.

2.2 Права и обратна задача на разсейването

Предмет на настоящото изложение ще бъдат $1+1$-мерни нелинейни еволюционни уравнения (НЕУ), т.е. нелинейни частни диференциални уравнения на 1 пространствена и 1 времева променлива. Теорията на този тип уравнения е най-добре развита от всички останали нелинейни еволюционни уравнения. Повече подробности могат да се намерят в някоя от класическите монографии [3, 14, 17, 31, 34, 36, 70, 79], а също и в [59].

Под интегрируемо уравнение ще разбираме уравнение, което допуска представяне на Лакс

$$[L, M] = 0, \tag{2.10}$$

където L и M са линейни диференциални оператори от вида

$$\begin{aligned} L(\lambda) &:= \mathrm{i}\partial_x + U(x,t,\lambda), \\ M(\lambda) &:= \mathrm{i}\partial_t + V(x,t,\lambda). \end{aligned}$$

Функциите U и V взимат стойности в комплексна полупроста алгебра на Ли $\mathfrak{g}$. Параметърът $\lambda \in \mathbb{C}$ носи името спектрален параметър и условието за съгласуваност (2.10) трябва да е удовлетворено тъждествено по λ.

Геометрически U и V могат да се интерпретират като компоненти на формата на свързаността върху разслоение със структурна група G — групата на Ли, съответстваща на алгебрата $\mathfrak{g}$. Тогава (2.10) означава просто нулиране на формата на кривината на тази свързаност

$$\mathrm{i}\partial_t U - \mathrm{i}\partial_x V + [V, U] = 0.$$

Ние ще разглеждаме занапред оператори на Лакс L и M от специален полиномиален тип

$$U(x,t,\lambda) = q(x,t) - \lambda J, \qquad V(x,t,\lambda) = \sum_{k=-m}^{n} \lambda^k V_k(x,t).$$

където гладките функции q и V_k взимат стойности в $\mathfrak{g}$, J е реален константен регулярен[3] елемент на нейната Картанова подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Поради условието (2.10) операторите на Лакс имат общи собствени функции и затова можем да запишем следната вспомагателна линейна система

$$\begin{aligned} L(\lambda)\psi(x,t,\lambda) &:= \mathrm{i}\partial_x\psi(x,t,\lambda) + (q(x,t) - \lambda J)\psi(x,t,\lambda) = 0, && (2.11) \\ M(\lambda)\psi(x,t,\lambda) &:= \mathrm{i}\partial_t\psi(x,t,\lambda) + \sum_{k=-m}^{n} \lambda^k V_k(x,t)\psi(x,t,\lambda) = \psi(x,t,\lambda)C(\lambda), && (2.12) \end{aligned}$$

където $C(\lambda)$ ще бъде определена по-долу. Оттук следва, че фундаменталните решения[4] ψ взимат стойности в съответната група на Ли G. Ще предполагаме също, че

[3] Тук регулярен означава елемент, чиито диагонални елементи са различни едни от други.

[4] Навсякъде в настоящия текст под фундаментално решение ще разбираме фундаменталната матрица от решения на линейното диференциално уравнение.

потенциалът q удовлетворява нулеви гранични условия, по-точно q е безкрайно пъти диференцируема функция и за нея е в сила условието

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^k q(x,t) = 0, \qquad \forall\, k.$$

Връзката между нелинейното уравнение и неговото представяне на Лакс не е взаимно еднозначна — едно и също уравнение допуска безкрайно много различни представяния на Лакс. Тази нееднозначност е свързана с действието на групата на калибровъчните преобразования, които запазват условието за съвместимост на Лаксовите оператори. Калибровъчни се наричат трансформации от типа

$$\psi(x,t,\lambda) \to g(x,t)\psi(x,t,\lambda),$$

т.е. трансформират се само стойностите на функциите без да променят аргумента им. Геометрически това са вертикални морфизми на съответното главно разслоение. В резултат на това се индуцира действие върху операторите на Лакс

$$L \to \tilde{L} = gLg^{-1}, \qquad M \to \tilde{M} = gMg^{-1}.$$

Следователно U и V се преобразуват по правилото

$$U \to \tilde{U} = -\mathrm{i}\partial_x g g^{-1} + gUg^{-1}, \qquad V \to \tilde{V} = -\mathrm{i}\partial_t g g^{-1} + gVg^{-1}.$$

Системата (2.11) ще наричаме обобщена система на Захаров-Шабат (СЗШ), защото тя е естествено обобщение на класическата система на Захаров-Шабат, която се отнася за случая на алгебрата $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Наличието на калибровъчна свобода позволява линейната задача с потенциал $U(x,t,\lambda) = U_0(x,t) + \lambda U_1$ при U_1 — константна матрица, да се сведе до вида (2.11). С други думи системата на Захаров-Шабат е каноничен представител на тази орбита на калибровъчната група.

Едни от основните понятия при правата задача на разсейването са т.нар. решения на Йост. Решения на Йост $\psi_\pm$ се наричат двете фундаментални решения на СЗШ, които са определени чрез асимптотиката си при $x \to \pm\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi_\pm(x,t,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda J x} = \mathbb{1}. \tag{2.13}$$

Коректност на тази дефиниция се осигурява с подходящ избор на матрицата $C(\lambda)$, а именно

$$C(\lambda) := \lim_{x\to\pm\infty} V(x,t,\lambda).$$

Както е добре известно, всеки две фундаментални решения на една система от линейни обикновени диференциални уравнения са линейно свързани. Затова и решенията на Йост са свързани помежду си чрез т.нар. матрица на разсейването

$$\psi_-(x,t,\lambda) = \psi_+(x,t,\lambda)T(t,\lambda). \tag{2.14}$$

Вследствие на (2.12) и на дефинициите на решенията на Йост времевата еволюция на матрицата на разсейване $T(t,\lambda)$ се определя от следното линейно диференциално уравнение

$$\mathrm{i}\partial_t T + [f(\lambda), T] = 0, \tag{2.15}$$

където величината $f(\lambda)$ се нарича дисперсионен закон на НЕУ и се дефинира като

$$f(\lambda) := \lim_{x\to\pm\infty} V(x,t,\lambda). \tag{2.16}$$

Пример за НЕУ с най-простия дисперсионен закон $f(\lambda) = -\lambda I$, като I е друг реален и константен Картанов елемент, е уравнението на N-те вълни

$$\mathrm{i}[J, Q_t] - \mathrm{i}[I, Q_x] - [[J,Q],[I,Q]] = 0. \tag{2.17}$$

Тук функцията Q допуска представянето

$$Q(x,t) = \sum_{\alpha\in\Delta} Q_\alpha(x,t) E_\alpha,$$

където E_α са генераторите на Вайл за алгебрата $\mathfrak{g}$. Тази функция се въвежда от изискването за съгласуваност на Лаксовите оператори

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{i}\partial_x + q(x,t) - \lambda J, \\ M &= \mathrm{i}\partial_t + V_0(x,t) - \lambda I, \end{aligned}$$

което води до условията

$$q = [J,Q], \qquad V_0 = [I,Q]. \tag{2.18}$$

Уравнението (2.15) се интегрира лесно и дава

$$T(t,\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda)t} T(0,\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda)t}. \tag{2.19}$$

Полученият резултат позволява да се реши задачата на Коши за НЕУ, което става по посочената по-долу схема

$$q(x,t=0) \xrightarrow{\text{ПЗР}} T(t=0,\lambda) \to T(t,\lambda) \xrightarrow{\text{ОЗР}} q(x,t). \tag{2.20}$$

Във връзка с това нека отбележим, че първата стъпка от тази диаграма представлява правата задача на разсейването (ПЗР) или получаване на матрицата на разсейването от потенциала, а третата — обратната задача на разсейването (ОЗР), т.е. възстановяване на потенциала по матрицата на разсейването. В последната стъпка се съдържа основната трудност при решаване на задачата на Коши.

Тъй като времевата еволюция на всички величини (потенциали, фундаментални решения и т.н.) може да бъде възстановена от (2.19), то оттук нататък ще изпускаме времевата зависмост и ще считаме, че t е фиксирано.

В редица въпроси от теорията на интегрируемите системи важна роля играят фундаментални решения на СЗШ, които имат аналитични свойства извън реалната ос на комплексната λ-равнина. Решенията на Йост $\psi_\pm$ не притежават такива свойства — те са добре дефинирани само за реални стойности на λ. Това се вижда лесно, ако СЗШ се преформулира на езика на линейни интегрални уравнения от Волтеров тип. За целта е удобно да се въведат помощни "нормирани"решения на Йост

$$\xi_\pm(x,\lambda) = \psi_\pm(x,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda Jx},$$

които удовлетворяват системата

$$\mathrm{i}\partial_x\xi(x,\lambda) + q(x)\xi(x,\lambda) - \lambda[J,\xi(x,\lambda)] = 0,$$

асоциирана с СЗШ. Тогава е в сила следното представяне

$$\xi_\pm(x,\lambda) = \mathbb{1} + \mathrm{i}\int_{\pm\infty}^{x}\mathrm{d}\,y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda J(x-y)}q(y)\xi_\pm(y,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda J(x-y)}. \qquad (2.21)$$

Матрицата J е реална и регулярна и затова можем да изберем подредба на нейните диагонални елементи, както следва: $J_1 > J_2 > \ldots > J_n$. По-внимателният анализ на условията за сходимост на посочения интеграл води до извода, че първият стълб на ξ_+ (респ. последният стълб на ξ_-) допускат аналитично продължение в горната полуравнина $\mathbb{C}_+$ на λ равнината, а последният стълб на ξ_+ (респ. първият на ξ_-) — в долната полуравнина $\mathbb{C}_-$. За да получим решение, което е аналитично вън от реалната ос, е необходимо да изкомбинираме матрични елементи на ξ_+ с тези на ξ_- по подходящ начин. Може да се провери, че за алгебрата $\mathfrak{sl}(n)$ фундаменталните решения $\eta^\pm$, определени посредством равенствата

$$\eta^\pm_{kl}(x,\lambda) = \begin{cases} \delta_{kl} + \mathrm{i}\int_{\pm\infty}^{x}\mathrm{d}\,y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(J_k-J_l)(y-x)}(q\eta^\pm)_{kl}(y,\lambda), & k \le l, \\ \mathrm{i}\int_{\mp\infty}^{x}\mathrm{d}\,y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(J_k-J_l)(y-x)}(q\eta^\pm)_{kl}(y,\lambda), & k > l. \end{cases} \qquad (2.22)$$

където δ_{kl} е символът на Кронекер, са аналитични в $\mathbb{C}_\pm$. Решенията $\eta^\pm$ имат своите аналози $\chi^\pm(x,\lambda) = \eta^\pm(x,\lambda)\exp(-\mathrm{i}\lambda Jx)$ и за случая на стандартната СЗШ. Те се изразяват чрез решенията на Йост по следния начин

$$\chi^\pm(x,\lambda) = \psi_-(x,\lambda)S^\pm(\lambda) = \psi_+(x,\lambda)T^\mp(\lambda)D^\pm(\lambda), \qquad (2.23)$$

където матриците $S^\pm(\lambda)$, $T^\mp(\lambda)$ и $D^\pm(\lambda)$ са множители от разложението на Гаус на матрицата на разсейването $T(\lambda)$

$$T(\lambda) = T^\mp(\lambda)D^\pm(\lambda)(S^\pm(\lambda))^{-1}.$$

Явният вид на посочените множители за алгебра $\mathfrak{g}$ се дава от следните формули

$$\begin{aligned} T^\pm(\lambda) &= \exp\left(\sum_{\alpha\in\Delta^+} t^{\pm,\alpha}E_{\pm\alpha}\right), \quad D^+(\lambda) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{2d_k^+H_k}{(\alpha_k,\alpha_k)}\right), \\ S^\pm(\lambda) &= \exp\left(\sum_{\alpha\in\Delta^+} s^{\pm,\alpha}E_{\pm\alpha}\right), \quad D^-(\lambda) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{2d^-w_0H_k}{(\alpha_k,\alpha_k)}\right), \end{aligned}$$

където w_0 е елемент на Вайловата група, който изобразява максималното тегло за дадено неприводимо представяне в минималното. В случая на алгебрата $\mathfrak{sl}(n)$ матричните елементи на $D^{\pm}$ се дават от

$$D_{jj}^{+}(\lambda) = \frac{m_j^{+}(\lambda)}{m_{j-1}^{+}(\lambda)}, \qquad D_{jj}^{-}(\lambda) = \frac{m_{n-j+1}^{-}(\lambda)}{m_{n-j}^{-}(\lambda)}, \tag{2.24}$$

където m_j^+ и m_{n-j}^- са главните минори на матрицата на разсейването

$$m_j^+ = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1j} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j\,1} & T_{j\,2} & \dots & T_{jj} \end{vmatrix}, \quad m_{n-j}^- = \begin{vmatrix} T_{n-j+1\,n-j+1} & T_{n-j+1\,n-j+2} & \dots & T_{n-j+1\,n} \\ T_{n-j+2\,n-j+1} & T_{n-j+2\,n-j+1} & \dots & T_{n-j+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n\,n-j+1} & T_{n\,n-j+2} & \dots & T_{nn} \end{vmatrix}.$$

Едно от основните приложения на фундаменталните аналитични решения се отнася до построяването на резолвентен оператор за оператора L. Под резолвентен оператор (резолвента) ще разбираме интегралния оператор

$$R(\lambda)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x,y,\lambda)f(y)dy, \tag{2.25}$$

който удовлетворява равенството

$$L(\lambda)R(\lambda) = \mathbb{1} \tag{2.26}$$

или изразено чрез интегралното ядро $\mathcal{R}$

$$L\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \delta(x-y)\mathbb{1}.$$

Стойностите на спектралния параметър λ, за които резолвентата $R(\lambda)$ не е дефинирана, принадлежат на спектъра на L, а точките от неговото допълнение се наричат регулярни. Изобщо казано, спектърът на оператора L се състои от непрекъсната компонента и от набор от дискретни собствени стойности.

С директна проверка може да се докаже, че за случая на $\mathfrak{sl}(n)$ ядрото на резолвентата се изразява чрез решенията $\chi^{\pm}$ по следния начин [46]

$$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \begin{cases} \mathcal{R}^{+}(x,y,\lambda) = \mathrm{i}\chi^{+}(x,\lambda)\Theta^{+}(x-y)(\chi^{+}(y,\lambda))^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ \mathcal{R}^{-}(x,y,\lambda) = -\mathrm{i}\chi^{-}(x,\lambda)\Theta^{-}(x-y)(\chi^{-}(y,\lambda))^{-1}, & \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases}$$

където

$$\Theta^{\pm}(x-y) = \theta(\mp(x-y))\sum_{p=1}^{a} E_{pp} - \theta(\pm(x-y))\left(\mathbb{1} - \sum_{p=1}^{a} E_{pp}\right),$$

където a е равно на броя на положителните диагонални елементи на матрицата J. Непрекъсната част на спектъра на L се определя от условието ядрото на резолвентата $\mathcal{R}$ да не притежава граница при $x \to \pm\infty$, което води до разходимост на интеграла

(2.25). В случай на реален Картанов елемент J непрекъснатият спектър съвпада с реалната права в λ-равнината. Дискретната част на спектъра, от своя страна, е свързана с наличието на полюсни особености в израза за $\mathcal{R}$. Такъв тип особености могат да възникнат, ако главните минори на T имат нули.

Друго приложение на фундаменталните аналитични решения е свързано с формулиране на метода на обратната задача като обобщение на преобразованието на Фурие. По аналогия с плоските вълни $\exp(\mathrm{i}kx)$, които играят ролята на базис във Фурие анализа, и в теорията на интегрируемите системи се въвеждат базисни функции. Те се наричат "квадрати"на решенията, тъй като в най-простия случай на $\mathfrak{sl}(2)$ алгебрата и класическата система на Захаров-Шабат се изразяват квадратично чрез компонентите на решенията на Йост. Общата дефиниция на "квадратите"на решенията за произволна проста алгебра $\mathfrak{g}$ е следната

$$e^{\pm}_{\alpha}(x,\lambda) = P_J\left[\chi^{\pm}(x,\lambda)E_{\alpha}(\chi^{\pm}(x,\lambda))^{-1}\right], \quad h^{\pm}_{j}(x,\lambda) = P_J\left[\chi^{\pm}(x,\lambda)H_{j}(\chi^{\pm}(x,\lambda))^{-1}\right], \tag{2.27}$$

където $P_J : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}/\ker \operatorname{ad}_J$ "отрязва"диагоналната част на съответната матрица. Подобни комбинации от фундаменталните аналитични решения естествено възникват при разглеждане на Вронскиански съотношения

$$[(\chi^{\pm})^{-1}J\chi^{\pm} - J]|_{-\infty}^{\infty} = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\, x(\chi^{\pm})^{-1}[q,J]\chi^{\pm},$$

които позволяват да се изразят данните на разсейването като обобщено Фурие преобразование на потенциала.

Квадратите на решенията са собствени функции на оператора

$$\Lambda X = \operatorname{ad}_J^{-1}\left\{\mathrm{i}\partial_x X^f + \left[q, X^f\right]^f\right\} + \mathrm{i}\int_{\pm\infty}^{x} \mathrm{d}\, y\left[\operatorname{ad}_J^{-1} q(x), \left[q(y), X^f\right]^d\right].$$

Горните индекси d и f бележат взимане на диагоналната или недиагоналната част на дадената матрица съответно.

Забележка 1: Символът ad_J^{-1} не следва да се разбира буквално, тъй като ad_J има нетривиално ядро и не съществува обратно изображение. Тук по определение ad_J действа само върху матрици с нулеви диагонални елементи по следния начин

$$(\operatorname{ad}_J X)_{ij} = (J_i - J_j)X_{ij},$$

респективно неговото обратно изображение има вида

$$(\operatorname{ad}_J X)_{ij} := \frac{X_{ij}}{J_i - J_j}.$$

2.3 Редукции

В настоящия параграф ще пристъпим към разглеждане на метода на редукциите на Михайлов. Той представлява един ефективен начин за получаване на нови интегрируеми уравнения.

Нека е дадена крайната група G_R, която ще наричаме група на редукциите и която действа в множеството на функциите $\{F(x,\lambda)\}$, взимащи стойности в групата G, по следния начин

$$\mathcal{K} : F(x,\lambda) \to \tilde{F}(x,\lambda) = \mathbf{K}\left(F\left(x, \kappa^{-1}(\lambda)\right)\right), \qquad \mathbf{K} \in \mathrm{Aut}(G),$$

като $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ е конформно изображение. Това действие поражда по естествен начин действие върху диференциалните оператори на Лакс

$$L \to \tilde{L} = \mathcal{K}L\mathcal{K}^{-1}, \qquad M \to \tilde{M} = \mathcal{K}M\mathcal{K}^{-1}. \tag{2.28}$$

Налагаме естественото условие за G_R -инвариантност на множеството на фундаменталните решения на СЗШ, т.е. ако ψ е решение на СЗШ, то и $\tilde{\psi} = \mathcal{K}\psi$ да бъде нейно решение. Тогава от (2.28) могат да се изведат симетрийни изисквания върху $U(x,\lambda)$ и $V(x,\lambda)$, които ще бъдат демонстрирани на конкретни примери по-долу. Тези изисквания намаляват броя на независимите компоненти на q (независимите полета). Този факт обяснява произхода на името на групата G_R.

Налагането на симетрии върху потенциалите $U(x,\lambda)$ и $V(x,\lambda)$ води до подобно условие и върху закона за дисперсия на съответното НЕУ. Това означава, че не всеки тип редукция е непременно възможен за дадено НЕУ — той трябва да е съгласуван с вида на дисперсионния закон.

Нека да илюстрираме дотук казаното с помощта на няколко примера.

Пример 1: Да разгледаме СЗШ, свързана с ортогоналната алгебра $\mathfrak{so}(2r+1,\mathbb{C})$. Нека е дадено действие на групата $\mathbb{Z}_2$ върху фундаменталните решения от вида

$$\mathcal{K} : \psi(x,\lambda) \to \tilde{\psi}(x,\lambda) = K\left(\psi^{\dagger}\left(x,\lambda^{*}\right)\right)^{-1} K^{-1}, \qquad K \in SO(2r+1,\mathbb{C}).$$

В частност, това означава, че фундаменталните аналитични решения $\chi^{+}(x,\lambda)$ и $\chi^{-}(x,\lambda)$ са свързани помежду си

$$\chi^{-}(x,\lambda) = K\left[\left(\chi^{+}\left(x,\lambda^{*}\right)\right)^{\dagger}\right]^{-1} K^{-1}. \tag{2.29}$$

Тогава потенциалите U и V удовлетворяват връзките

$$\begin{aligned} KU^{\dagger}(x,\lambda^{*})K^{-1} &= U(x,\lambda), \qquad KV^{\dagger}(x,\lambda^{*})K^{-1} = V(x,\lambda), && (2.30)\\ \Rightarrow \quad Kq^{\dagger}(x)K^{-1} &= q(x), \quad KJK^{-1} = J, \quad KV_k^{\dagger}(x)K^{-1} = V_k(x). && (2.31) \end{aligned}$$

За да бъде тъждествено удовлетворено изискването върху Картановия елемент J, е достатъчно да изберем K от Картановата подгрупа: $K = \mathrm{diag}\,(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r, 1, \epsilon_r, \ldots, \epsilon_1)$, $\epsilon_k = \pm 1$ при $k = 1, \ldots, r$. Тогава получаваме следните връзки за q

$$q_{jk} = \begin{cases} \epsilon_j \epsilon_k q_{kj}^*, & j,k = 1,\ldots,r,\ j > k, \\ \epsilon_k q_{kj}^*, & j = r+1,\ k = 1,\ldots,r, \\ \epsilon_{2(r+1)-j}\, \epsilon_k q_{kj}^*, & j = r+2,\ldots,2r+1,\ k = 1,\ldots,r. \end{cases} \tag{2.32}$$

В резултат от действието на тази редукция броят на независимите компоненти q се намалява от $2r^2$ на r^2. От дефиницията на дисперсионния закон (2.16) и от (2.30) получаваме, че е в сила условието $Kf^\dagger(\lambda^*)K^{-1} = f(\lambda)$. $\square$

Пример 2: Нека отново е дадена СЗШ, свързана с $\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$. Този път да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукцията

$$\tilde{\psi}(x,\lambda) = K(\psi^T(x,-\lambda))^{-1}K^{-1}, \qquad K \in SO(2r+1,\mathbb{C}).$$

Аналитичните решения $\chi^+(x,\lambda)$ и $\chi^-(x,\lambda)$ са свързани посредством

$$\chi^-(x,\lambda) = K\left[\left(\chi^+(x,-\lambda)\right)^T\right]^{-1} K^{-1}. \tag{2.33}$$

В този случай условията върху U и V са следните

$$KU^T(x,-\lambda)K^{-1} = -U(x,\lambda), \quad KV^T(x,-\lambda)K^{-1} = -V(x,\lambda) \tag{2.34}$$

$$\Rightarrow \quad Kq^T(x)K^{-1} = -q(x), \qquad KJK^{-1} = J. \tag{2.35}$$

Избирайки матрицата K както и в предишния пример, стигаме до връзките

$$q_{jk} = -\begin{cases} \epsilon_j \epsilon_k q_{kj}, & j,k = 1,\ldots,r,\ j > k, \\ \epsilon_k q_{kj}, & j = r+1,\ k = 1,\ldots,r, \\ \epsilon_{2(r+1)-j}\, \epsilon_k q_{kj}, & j = r+2,\ldots,2r+1,\ k = 1,\ldots,r. \end{cases} \tag{2.36}$$

Броят на независимите компоненти и тук е r^2. Взимайки границата при $x \to \pm\infty$ от (2.34) и спомняйки си определението на дисперсионен закон (2.16), получаваме следното съотношение

$$Kf^T(-\lambda)K^{-1} = -f(\lambda). \tag{2.37}$$

Във всички случаи, които представляват интерес за нас по-нататък, дисперсионният закон е пропорционален на някакъв Картанов елемент, т.е. $Kf^T(\lambda)K^{-1} = f(\lambda)$. **Следователно удовлетворяването на (2.37) е възможно само, ако $f(\lambda)$ е нечетен полином на спектралния параметър.** $\square$

2.4 Задача на Риман-Хилберт

Задачата на Риман-Хилберт (ЗРХ) е една от класическите задачи от теорията на аналитичните функции на една независима променлива (вж. [1]). Нека е дадена гладката, затворена и проста крива $\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$ и функцията G, дефинирана и непрекъсната върху кривата и взимаща стойности в $GL(n, \mathbb{C})$ или в някоя нейна подгрупа. Кривата γ разделя комплексната равнина на две области: вътрешна област $\mathbb{D}^-$ и външна $\mathbb{D}^+$. Търсим матричнозначни функции $\Psi^+(\lambda)$ и $\Psi^-(\lambda)$ аналитични в $\mathbb{D}^+$ и $\mathbb{D}^-$ съответно, които са свързани помежду си чрез равенството

$$\Psi^+(\lambda) = \Psi^-(\lambda)G(\lambda), \qquad \forall\, \lambda \in \gamma. \tag{2.38}$$

Поради локалния характер на релацията (2.38) тази задача носи името локална задача на Риман-Хилберт, а функцията $G(\lambda)$ се нарича функция на съшиване. Тази задача се явява частен случай на нелокалната задача на Риман-Хилберт, при която $\Psi^+(\lambda)$ и $\Psi^-(\lambda)$ са свързани посредством

$$\Psi^+(\lambda) = \int_\gamma \Psi^-(\tilde\lambda)G(\tilde\lambda, \lambda)\mathrm{d}\,\tilde\lambda,$$

където $T : \gamma \times \gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ е непрекъсната функция. Локалната задача се получава от тази по-обща задача при специалния избор: $G(\tilde\lambda, \lambda) = \delta(\tilde\lambda - \lambda)G(\lambda)$.

При условие че $\det \Psi^\pm(\lambda)$ няма нули или полюси за никое $\lambda \in \mathbb{D}^\pm$, решението се нарича регулярно, в противен случай — сингулярно. Нека $\Psi^\pm(\lambda)$ е едно произволно регулярно решение на ЗРХ. Тогава $C(\lambda)\Psi^\pm(\lambda)$ за коя да е цяла матричнозначна функция C също е решение на ЗРХ, т. е. съществува естествена нееднозначност при определяне на решението. Ако поискаме $C(\lambda)\Psi^\pm(\lambda)$ да бъде регулярно, то от теоремата на Лиувил се получава, че множителят $C(\lambda)$ е константа. В такъв случай, за да се обезпечи единственост на решението, е необходимо да се зададе допълнително условие (нормировка). Едно такова нормировъчно условие е каноничното

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^+(\lambda) = \mathbb{1}. \tag{2.39}$$

Регулярната ЗРХ може да се сведе до сингулярно интегрално уравнение с помощта на анзаца

$$\Psi^\pm(\lambda) = \mathbb{1} + \lim_{|n(\lambda)|\to 0} \int_\gamma \frac{\psi(\tilde\lambda)}{\tilde\lambda - \lambda \pm n(\tilde\lambda)}\mathrm{d}\,\tilde\lambda, \tag{2.40}$$

където $n(\tilde\lambda)$ е нормалата към кривата γ в точката $\tilde\lambda$. В частност при $\gamma \equiv \mathbb{R}$ нормалата е с фиксирано направление и затова $n(\tilde\lambda) = \mathrm{i}\epsilon$ за някакво $\epsilon > 0$. След като заместим (2.40) в (2.38) и използваме известните формули на Сохоцки-Племел

$$\Psi^\pm(\lambda) = \mathbb{1} + \mathbf{v.p.} \int_\gamma \frac{\psi(\tilde\lambda)}{\tilde\lambda - \lambda}\mathrm{d}\,\tilde\lambda \mp \mathrm{i}\pi\psi(\lambda),$$

получаваме следното интегрално уравнение за ψ

$$\mathrm{i}\pi\psi(\lambda)(G(\lambda)+\mathbb{1})(G(\lambda)-\mathbb{1})^{-1}+\mathbb{1}+\mathbf{v.p.}\int_\gamma \frac{\psi(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}-\lambda}\mathrm{d}\,\tilde{\lambda}=0. \tag{2.41}$$

Решаването на това сингулярно уравнение позволява да се реши и ЗРХ в регулярния случай.

Намирането на решения на ЗРХ, които имат полюсни особености, е по-нетривиално. В най-простия случай на скаларна ЗРХ, задачата лесно се свежда до регулярна ЗРХ. Нека $\Psi^\pm$ са решения на ЗРХ и Ψ^+ има прости нули в точките $\lambda_k^+\in\mathbb{D}^+$, $k=1,\dots,n$, а Ψ^- има прости полюси в $\lambda_k^-\in\mathbb{D}^-$. Тогава функциите

$$\Psi_0^\pm(\lambda)=\prod_{k=1}^n\frac{\lambda-\lambda_k^-}{\lambda-\lambda_k^+}\Psi^\pm(\lambda)$$

нямат нито нули, нито полюси в дефиниционните си области и удовлетворяват същото условие за нормировка, както и $\Psi^\pm$. Следователно те са решения на регулярна ЗРХ със същата функция на съшиване. И така познаването на регулярно решение на ЗРХ и разположението на особеностите на сингулярното решение, което търсим, позволява последното да бъде намерено чрез прилагане на проста процедура на обличане на регулярното решение

$$\Psi_0^\pm(\lambda)\mapsto\Psi^\pm(\lambda)=g(\lambda)\Psi_0^\pm(\lambda), \tag{2.42}$$

където множителят $g(\lambda)$ е аналитичен в цялата комплексна равнина с изключение на краен брой предписани точки, в които има особености, и удовлетворява нормировката

$$\lim_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=1. \tag{2.43}$$

Матричният случай се третира по аналогичен начин на скаларния, т.е.

$$\Psi_0^\pm(\lambda)\mapsto\Psi^\pm(\lambda)=\left[\mathbb{1}+\sum_k\left(\frac{A_k}{\lambda-\lambda_k^+}+\frac{B_k}{\lambda-\lambda_k^-}\right)\right]\Psi_0^\pm(\lambda), \tag{2.44}$$

където и тук $\lambda_k^\pm\in\mathbb{D}^\pm$, а A_k и B_k са линейни оператори в $\mathbb{C}^n$. По-сложната структура на обличащия множител поражда допълнителен произвол, свързан с избора на операторите A_k и B_k. Тъй като даден оператор е определен, когато е известно ядрото му и рестрикцията му върху образа, то това е информацията необходима за еднозначно задаване и на сингулярното решение (2.44). В частност, ако операторът е проектор, то достатъчно е да знаем ядрото и образа му (рестрикцията на проектора върху образа дава просто идентитета).

Съществува дълбока връзка между метода на обратната задача и ЗРХ. Наистина, съотношенията (2.23) може да се пренапишат така

$$\chi^+(x,t,\lambda)=\chi^-(x,t,\lambda)G_0(t,\lambda),\qquad G_0(t,\lambda)=\left(S^-(t,\lambda)\right)^{-1}S^+(t,\lambda). \tag{2.45}$$

Тук е по-удобно да използваме "нормираните"фундаментални решения $\eta^{\pm}$, тъй като за тях е в сила каноничната нормировка (2.39) за разлика от $\chi^{\pm}$. Решенията $\eta^{\pm}$ удовлетворяват аналогично съотношение

$$\eta^{+}(x,t,\lambda) = \eta^{-}(x,t,\lambda)G(x,t,\lambda), \qquad G(x,t,\lambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda Jx}G_0(t,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda Jx}. \tag{2.46}$$

Това означава, че фундаменталните аналитични решения могат да се интерпретират като решения (изобщо казано сингулярно) на локална ЗРХ, при която контурът γ съвпада с $\mathbb{R}$. Оказва се, че е вярно и обратното: нека $\eta^{\pm}(x,t,\lambda)$ е решение на ЗРХ (2.46) с функция на съшиване, която удовлетворява

$$\mathrm{i}\partial_x G(x,t,\lambda) - \lambda[J, G(x,t,\lambda)] = 0, \tag{2.47}$$
$$\mathrm{i}\partial_t G(x,t,\lambda) + [f(\lambda), G(x,t,\lambda)] = 0, \tag{2.48}$$

където матричнозначната функция f има реални коефициенти, т. е. $f(\lambda) \in Gl(n,\mathbb{R})$ при $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава функциите $\chi^{\pm}(x,t,\lambda) = \eta^{\pm}(x,t,\lambda)\exp(-\mathrm{i}\lambda Jx)$ са фундаментални аналитични решения на задачата на Захаров-Шабат. Доказателството на това твърдение се базира на разглеждането на вспомагателните функции

$$\Xi^{\pm} = \mathrm{i}\partial_x \eta^{\pm}(\eta^{\pm})^{-1} + \lambda\left(\eta^{\pm}J(\eta^{\pm})^{-1} - J\right).$$

Като се отчетат равенствата (2.46) и (2.47) лесно се показва, че

$$\Xi^{+} = \Xi^{-}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Следователно функцията

$$\Xi = \begin{cases} \Xi^{+}, & \mathrm{Im}\,(\lambda) \geq 0 \\ \Xi^{-}, & \mathrm{Im}\,(\lambda) \leq 0. \end{cases}$$

е аналитична в цялата комплексна равнина. От друга страна тя е ограничена и съгласно теоремата на Лиувил не зависи от спектралния параметър λ. Тогава нека да означим

$$\mathrm{i}\partial_x \eta^{\pm}(\eta^{\pm})^{-1} + \lambda\left(\eta^{\pm}J(\eta^{\pm})^{-1} - J\right) = -q. \tag{2.49}$$

След като умножим двете страни на това равенство с $\eta^{\pm}\exp(-\mathrm{i}\lambda Jx)$, се убеждаваме, че функциите $\chi^{\pm}$, дефинирани по-горе, са фундаментални аналитични решения на системата на Захаров-Шабат с потенциал q.

Ако се направи граничен преход в (2.49) при $\lambda \to \infty$, то се достига до следната проста връзка

$$q(x) = \lim_{\lambda\to\infty}[J, \eta^{\pm}(x,\lambda)]. \tag{2.50}$$

И така, за да пресметнем решението q, е необходимо да знаем само коефициента пред λ^{-1} в асимптотичното разложение на фундаменталното решение. Частен случай, който представлява особен интерес, е когато $G = \mathbb{1}$. Тогава решенията на ЗРХ съответстват на безотражателни потенциали на задачата на Захаров-Шабат (респ. на солитонни решения на НЕУ). Това потвърждава твърдението, че безотражателните потенциали (респ. солитонните решения) са най-простия клас от потенциали (респ. решения).

Наличието на редукция налага допълнителни условия върху фундаменталните аналитични решения и оттук на функцията на съшиване. Например, в случая на $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа

$$\chi^{-}(x,\lambda) = K[\chi^{+}(x,\lambda^{*})]^{-1}K^{-1} \tag{2.51}$$

$G(\lambda)$ удовлетворява изискването

$$G(\lambda) = KG^{\dagger}(\lambda)K^{-1}.$$

3. НЕУ, СВЪРЗАНИ С ХОМОГЕННИ ПРОСТРАНСТВА I. $\mathbb{Z}_2$-РЕДУЦИРАНИ N-ВЪЛНОВИ УРАВНЕНИЯ

В настоящата глава са изложени оригинални резултати по получаването на нови интегрируеми системи, свързани с хомогенни пространства и техните солитонни решения. По-конкретно, става дума за уравнения от типа на N-те вълни, свързани с прости алгебри на Ли от сериите B_r, C_r и D_r. Известно е, че N-вълновите системи намират приложения във физиката [30, 21] и математиката [38]. Това мотивира определен интерес към тяхното изучаване. Така например, в [50, 49] са класифицирани и анализирани допустимите $\mathbb{Z}_2$ редукции за уравнения на N-те вълни за прости алгебри на Ли с нисък ранг.

Примерите на N-вълнови системи, които се съдържат тази глава, се получават след прилагане на метода на редукциите за групата $\mathbb{Z}_2$. Общите резултати са илюстрирани чрез частните случаи на $\mathbb{Z}_2$-редуцирани 4-вълнови системи, съответстващи на алгебрите с най-нисък ранг. Една от тези системи намира приложение в теорията на Рамановото разсейване. За изведените системи от нелинейни уравнения са пресметнати частни решения от солитонен тип с помощта на техника на обличане. Това изисква конструирането на подходящ обличащ множител за алгебрите от споменатите серии и отчитането на действието на редукцията. На подробното изложение на тези въпроси е посветен първият параграф.

3.1 Метод на обличането

Съществуват различни методи за интегриране на нелинейни еволюционни уравнения. Най-общо те могат да се класифицират на: директни методи, към които спада методът на Хирота, и индиректни методи, които включват уравненията на Гелфанд-Левитан-Марченко, свеждане до задача на Риман-Хилберт и преобразования от типа на Беклунд. Един специален случай на авто-Беклунд преобразование представлява методът на обличането на Захаров-Шабат.

Нека е известно решението q_0 на нелинейното еволюционно уравнение. То играе ролята на потенциал за СЗШ

$$L_0\psi_0(x,\lambda) = \mathrm{i}\partial_x\psi_0(x,\lambda) + (q_0(x) - \lambda J)\psi_0(x,\lambda) = 0. \qquad (3.1)$$

Познаването на потенциала на тази система позволява по принцип да се получат неговите фундаментални решения. Да предполоим, че ψ_0 е кое да е от тях. Тогава можем да построим новата функция $\psi_1(x,\lambda) = g(x,\lambda)\psi_0(x,\lambda)$, където g взима също стойности в групата G и се нарича обличащ множител. От условието ψ_1 да е решение на СЗШ с друг потенциал q_1, т.е.

$$L_1\psi_1(x,\lambda) = \mathrm{i}\partial_x\psi_1(x,\lambda) + (q_1(x) - \lambda J)\psi_1(x,\lambda) = 0 \tag{3.2}$$

получаваме, че обличащият множител удовлетворява

$$\mathrm{i}\partial_x g(x,\lambda) + q_1(x)g(x,\lambda) - g(x,\lambda)q_0(x) - \lambda[J, g(x,\lambda)] = 0. \tag{3.3}$$

По-горното равенство трябва да е изпълнено тъждествено по λ. Връзката на МОЗР със задачата на Риман-Хилберт налага известни ограничения върху вида на обличащия множител. Така например, от самата връзка (2.45) следва, че множителят трябва да бъде аналитичен както в горната, така и в долната полуравнина на λ-равнината с изключение на краен брой точки, в които той може да има особености. Затова той се избира да е мероморфна функция на спектралния параметър λ от вида

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_k \sum_{n_k} \frac{A_{n_k}(x)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}}.$$

Свободният член се фиксира от условието на каноничната нормировка (2.43). Ние ще се ограничим с използване на обличащи множители от вида

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda - \lambda^+} + \frac{B(x)}{\lambda - \lambda^-}, \tag{3.4}$$

като λ^+ и λ^- са разположени в горната и в долната полуравнина съответно.

След като вземем границата $\lambda \to \infty$ в уравнението (3.3) и използваме явния вид на обличащия множител (3.4), то достигаме до следните алгебрични релации

$$q_1(x) = q_0(x) + [J, A(x) + B(x)]. \tag{3.5}$$

По-горните равенства дават отговор на въпроса как от едно известно решение на нелинейно уравнение може да се построи ново и изобщо казано нетривиално решение на същото уравнение. За целта е необходимо само да знаем вида на $n \times n$-матриците $A(x)$ и $B(x)$. Ефективността на метода се състои в това, че посочените величини могат да бъдат изразени чрез фундаменталните аналитични решения $\chi_0^{\pm}$ на "началната"СЗШ.

Нека да анализираме по-внимателно обличащия множител (3.5). Неговият обратен ще търсим от вида

$$[g(x,\lambda)]^{-1} = \mathbb{1} + \frac{C(x)}{\lambda - \lambda^-} + \frac{D(x)}{\lambda - \lambda^+}. \tag{3.6}$$

Тук ще изложим алгоритъм за намиране на матричнозначните функции A, B, C и D.

Тъй като по дефиниция $gg^{-1} = \mathbb{1}$, то умножаването на (3.4) и (3.6) и сравняването на коефициентите пред еднаквите полюси води до следните алгебрични съотношения

$$AD = 0, \qquad BC = 0, \tag{3.7}$$

$$A\left(\mathbb{1} + \frac{C}{\lambda^+ - \lambda^-}\right) + \left(\mathbb{1} + \frac{B}{\lambda^+ - \lambda^-}\right) D = 0, \tag{3.8}$$

$$B\left(\mathbb{1} + \frac{D}{\lambda^- - \lambda^+}\right) + \left(\mathbb{1} + \frac{A}{\lambda^- - \lambda^+}\right) C = 0. \tag{3.9}$$

За по-голямо удобство оттук нататък ще използваме следните обозначения

$$A = (\lambda^+ - \lambda^-)\tilde{A}, \qquad B = (\lambda^- - \lambda^+)\tilde{B},$$
$$C = (\lambda^- - \lambda^+)\tilde{C}, \qquad D = (\lambda^+ - \lambda^-)\tilde{D}.$$

В новите означения равенствата (3.7)–(3.9) добиват вида

$$\tilde{A}\tilde{D} = 0, \qquad \tilde{B}\tilde{C} = 0, \tag{3.10}$$

$$\tilde{A}\left(\mathbb{1} - \tilde{C}\right) + \left(\mathbb{1} - \tilde{B}\right)\tilde{D} = 0, \tag{3.11}$$

$$\tilde{B}\left(\mathbb{1} - \tilde{D}\right) + \left(\mathbb{1} - \tilde{A}\right)\tilde{C} = 0. \tag{3.12}$$

Нека да представим търсените функции по следния начин

$$\tilde{A}(x) = \tilde{X}(x)F^T(x), \qquad \tilde{B}(x) = \tilde{Y}(x)G^T(x), \tag{3.13}$$

$$\tilde{C}(x) = Z(x)\tilde{H}^T(x), \qquad \tilde{D}(x) = W(x)\tilde{N}^T(x), \tag{3.14}$$

където множителите в разложението представляват правоъгълни $n \times s$ матрици. За да удовлетворим условието (3.10), е достатъчно да поискаме

$$F^T W = 0, \qquad G^T Z = 0. \tag{3.15}$$

От вида на останалите две алгебрични условия следва, че съществуват две $s \times s$ матрици $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такива, че

$$(\mathbb{1} - \tilde{Y}G^T)W \;=\; \tilde{X}\tilde{\alpha}, \qquad F^T(\mathbb{1} - Z\tilde{H}^T) = -\tilde{\alpha}\tilde{N}^T, \tag{3.16}$$

$$(\mathbb{1} - \tilde{X}F^T)Z \;=\; \tilde{Y}\tilde{\beta}, \qquad G^T(\mathbb{1} - W\tilde{N}^T) = -\tilde{\beta}\tilde{H}^T. \tag{3.17}$$

Първата двойка равенства може да се разглежда като линейна система за $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$. Нейното решение се дава от

$$\tilde{X} \;=\; [Z - W(G^T W)^{-1}\tilde{\beta}][F^T Z - \tilde{\alpha}(G^T W)^{-1}\tilde{\beta}]^{-1}, \tag{3.18}$$

$$\tilde{Y} \;=\; [W - Z(F^T Z)^{-1}\tilde{\alpha}][G^T W - \tilde{\beta}(F^T Z)^{-1}\tilde{\alpha}]^{-1}. \tag{3.19}$$

Аналогично втората двойка уравнения има следното решение за $\tilde{H}$ и $\tilde{N}$

$$\tilde{H} \;=\; [F + G(W^T G)^{-1}\tilde{\alpha}^T][Z^T F - \tilde{\beta}^T(W^T G)^{-1}\tilde{\alpha}^T]^{-1}, \tag{3.20}$$

$$\tilde{N} \;=\; [G + F(Z^T F)^{-1}\tilde{\beta}^T][W^T G - \tilde{\alpha}^T(Z^T F)^{-1}\tilde{\beta}^T]^{-1}. \tag{3.21}$$

И така задачата се свежда до намиране на 6 матрици: 4-те множителя F, G, Z и W и двете матрици $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Оказва се, че F и G се получават от фундаменталните аналитични решения $\chi_0^{\pm}(x,\lambda)$ на голата линейна задача. За да се убедим, че това наистина е така, ще използваме уравнение (3.3) за обличащия множител. След като заместим в него анзаца за g и сравним коефициентите пред $(\lambda-\lambda^+)^{-2}$ и $(\lambda-\lambda^-)^{-2}$, получаваме следните линейни диференциални уравнения

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\partial_x F^T - F^T(q_0 - \lambda^+ J) &= \gamma F^T, \\ \mathrm{i}\partial_x G^T - G^T(q_0 - \lambda^- J) &= \delta G^T. \end{aligned}$$

Тук е моментът да се възползваме от факта, че разложенията на A и B са нееднозначни, т.е. множителите в тях са определени с точност до някаква обратима матрица

$$\begin{aligned} \tilde{X},\, F^T \quad &\rightarrow \quad \tilde{X}C_1^{-1},\, C_1F^T, \\ \tilde{Y},\, G^T \quad &\rightarrow \quad \tilde{Y}C_2^{-1},\, C_2G^T. \end{aligned}$$

Това ни дава право да подберем C_1 и C_2 по такъв начин, че $\gamma = \delta \equiv 0$ да е в сила. При този избор за множителите F и G получаваме

$$F^T = F_0^T[\chi_0^+(x,\lambda^+)]^{-1}, \qquad G^T = G_0^T[\chi_0^-(x,\lambda^-)]^{-1}, \tag{3.22}$$

където F_0 и G_0 са константни правоъгълни $n \times s$ матрици.

Аналогичното разглеждане на резидуумите в (3.3) води до линейни диференциални уравнения за $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$

$$\mathrm{i}\partial_x\tilde{\alpha} + (\lambda^+ - \lambda^-)F^T JW = 0, \tag{3.23}$$

$$\mathrm{i}\partial_x\tilde{\beta} + (\lambda^- - \lambda^+)G^T JZ = 0. \tag{3.24}$$

За да ги решим, трябва да познаваме множителите Z и W. Те могат да бъдат намерени от сравняването на коефициентите пред $(\lambda-\lambda^+)^{-2}$ и $(\lambda-\lambda^-)^{-2}$ в диференциалното уравнение за g^{-1}

$$\mathrm{i}\partial_x g^{-1} - g^{-1}q_1 + q_0 g^{-1} - \lambda[J, g^{-1}] = 0. \tag{3.25}$$

По аналогия със случая на F и G и сега се получават линейни диференциални уравнения от вида

$$\mathrm{i}\partial_x W + (q_0 - \lambda^+ J)W = 0, \tag{3.26}$$

$$\mathrm{i}\partial_x Z + (q_0 - \lambda^- J)Z = 0. \tag{3.27}$$

Следователно за W и Z имаме

$$W(x) = \chi_0^+(x,\lambda^+)W_0, \qquad Z(x) = \chi_0^-(x,\lambda^-)Z_0, \tag{3.28}$$

където W_0 и Z_0 са константни $n \times s$ матрици. Матриците F_0, G_0, Z_0 и W_0 не са независими. Поради условието (3.15) и отчитайки формули (3.22) и (3.28), достигаме до релациите

$$F_0^T W_0 = 0, \qquad G_0^T Z_0 = 0. \tag{3.29}$$

Геометрически тези равенства означават, че подпространствата, разпънати от стълбовете на F_0 (респ. на G_0) и от стълбовете на W_0 (респ. на Z_0), са взаимно ортогонални.

Вече разполагаме с необходимата информация, за да решим уравнения (3.23) и (3.24). Лесно се проверява, че решенията се дават от следните изрази

$$\tilde{\alpha}(x) = -(\lambda^+ - \lambda^-) F_0^T [\chi_0^+(x,\lambda^+)]^{-1} \partial_\lambda \chi_0^+(x,\lambda^+) W_0 + \tilde{\alpha}_0, \tag{3.30}$$

$$\tilde{\beta}(x) = -(\lambda^- - \lambda^+) G_0^T [\chi_0^-(x,\lambda^-)]^{-1} \partial_\lambda \chi_0^-(x,\lambda^-) Z_0 + \tilde{\beta}_0, \tag{3.31}$$

където $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\beta}_0$ са интеграционни константи. В солитонния сектор, т.е. при $\chi_0^\pm(x,\lambda) = \exp(-\mathrm{i}\lambda J x)$, получените решения силно се опростяват

$$\tilde{\alpha} = \mathrm{i}(\lambda^+ - \lambda^-) F_0^T J W_0 x + \tilde{\alpha}_0, \tag{3.32}$$

$$\tilde{\beta} = \mathrm{i}(\lambda^- - \lambda^+) G_0^T J Z_0 x + \tilde{\beta}_0, \tag{3.33}$$

За да се възстанови времевата еволюция на решението на НЕУ, следва да се извърши замяна на интеграционните константи F_0, G_0 и т.н. съгласно по-долните формули

$$F_0^T \rightarrow F_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda^+)t}, \qquad G_0^T \rightarrow G_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda^-)t}, \tag{3.34}$$

$$Z_0 \rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda^-)t} Z_0, \qquad W_0 \rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda^+)t} W_0, \tag{3.35}$$

$$\tilde{\alpha}_0 \rightarrow \mathrm{i}(\lambda^- - \lambda^+) F_0^T \frac{f(\lambda^+)}{\mathrm{d}\,\lambda} W_0 t + \tilde{\alpha}_0, \quad \tilde{\beta}_0 \rightarrow \mathrm{i}(\lambda^+ - \lambda^-) G_0^T \frac{f(\lambda^-)}{\mathrm{d}\,\lambda} Z_0 t + \tilde{\beta}_0. \tag{3.36}$$

Изводът на тези съответствия изисква да се сравняват коефициентите при всеки полюс в диференциалното уравнение

$$\mathrm{i}\partial_t g + V_1 g - g V_0 = 0, \tag{3.37}$$

така както това бе направено по-горе за уравнение (3.3). Самото уравнение (3.37) се получава при комбинирането на вторите линейни задачи за ψ_0 и ψ_1

$$M_0(\lambda)\psi_0(x,t,\lambda) := \mathrm{i}\partial_t \psi_0(x,t,\lambda) + V_0(x,t,\lambda)\psi_0(x,t,\lambda) = \psi_0(x,t,\lambda) C(\lambda), \tag{3.38}$$

$$M_1(\lambda)\psi_1(x,t,\lambda) := \mathrm{i}\partial_t \psi_1(x,t,\lambda) + V_1(x,t,\lambda)\psi_1(x,t,\lambda) = \psi_1(x,t,\lambda) C(\lambda). \tag{3.39}$$

Тук следва да се отбележи, че матрицата $C(\lambda)$ е една и съща за двете линейни задачи, тъй като тя не зависи от потенциала q на съответната система на Захаров-Шабат.

Чрез директна проверка може да се установи, че $\det g = 1$, т. е. множителят (3.4) взима стойности в групата $SL(n, \mathbb{C})$.

Анзацът (3.4) съдържа в себе си като частен случай множителят на Захаров и Шабат за алгебрата $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Наистина, нека да разгледаме частния случай, когато множителят има само един полюс

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{\lambda^- - \lambda^+}{\lambda - \lambda^-}\tilde{B}(x).$$

Тогава неговият обратен има вида

$$[g(x,\lambda)]^{-1} = \mathbb{1} + \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda - \lambda^+}\tilde{D}(x).$$

Тъй като сега $\tilde{A} = \tilde{C} = 0$, то условията (3.10) са удовлетворени автоматично. Другите две алгебрични съотношения ни водят до заключението

$$\tilde{B} = \tilde{D} = P, \qquad P^2 = P. \tag{3.40}$$

Щом P е проектор, то за него съществува представянето

$$P = W(G^TW)^{-1}G^T, \tag{3.41}$$

където W и G са подходящи матричнозначни функции. След разглеждания подобни на вече направените можем да се убедим, че за множителите W и G са в сила равенствата

$$W(x) = \chi_0^+(x,\lambda^+)W_0, \qquad G^T(x) = G_0^T[\chi_0^-(x,\lambda^-)]^{-1}. \tag{3.42}$$

До този резултат може да се стигне и формално след решаване на (3.16) (респ. (3.17)) спрямо множителя $\tilde{Y}$ (респ. $\tilde{N}^T$) и отчитане на формули (3.22) и (3.28). Така след като въведем новите обозначения $c(\lambda) = (\lambda - \lambda^+)/(\lambda - \lambda^-)$ за коефициента на Бляшке-Потапов, $n(x) = W(x)$ и $m(x) = G(x)$, то възпроизвеждаме класическия анзац на Захаров-Шабат

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + (c(\lambda) - 1)P(x). \tag{3.43}$$

В случая на проектор с ранг 1 е в сила представянето

$$P(x) = \frac{n(x)m^T(x)}{m^T(x)n(x)}, \tag{3.44}$$

В този по-прост случай облеченото решение може да се пресметне с помощта на по-долната връзка

$$q_1(x) = q_0(x) + (\lambda^- - \lambda^+)[J, P(x)]. \tag{3.45}$$

Друг частен случай, който ще използваме многократно по-нататък, се получава при задаване на допълнителното симетрийно изискване

$$g^T(x,\lambda)Sg(x,\lambda) = S, \tag{3.46}$$

където S е матрицата на някаква неособена билинейна форма. В случая когато е изпълнено $S^T = S$, множителят принадлежи на ортогоналната група, а при $S^T = -S$ — на симплектична група. От условието

$$[g(x,\lambda)]^{-1} = S^{-1}g^T(x,\lambda)S,$$

което е тривиално следствие на (3.46), достигаме до извода, че са в сила съотношенията

$$W = S^{-1}F, \qquad Z = S^{-1}G. \tag{3.47}$$

След като заместим (3.47) в (3.18) и (3.19), се получава следното

$$X = (\lambda^+ - \lambda^-)\tilde{X} = (\lambda^+ - \lambda^-)\left(S^{-1}G - S^{-1}F(S_{GF})^{-1}\tilde{\beta}\right)\left(S_{FG} - \tilde{\alpha}(S_{GF})^{-1}\tilde{\beta}\right)^{-1}, \tag{3.48}$$

$$Y = (\lambda^- - \lambda^+)\tilde{Y} = (\lambda^- - \lambda^+)\left(S^{-1}F - S^{-1}G(S_{FG})^{-1}\tilde{\alpha}\right)\left(S_{GF} - \tilde{\beta}(S_{FG})^{-1}\tilde{\alpha}\right)^{-1}, \tag{3.49}$$

където

$$S_{FG} := F^T S^{-1} G.$$

Сега константните матрици F_0 и G_0 удовлетворяват условията

$$F_0^T S F_0 = 0, \qquad G_0^T S G_0 = 0.$$

Геометрически това означава, че рестрикцията на формата S върху подпространствата, разпънати от стълбовете на F_0 и G_0, е тъждествено нула. В симплектичния случай въпросните стълбове определят изотропни подпространства на симплектичното пространство $\mathbb{C}^{2r}$. Следователно тяхната размерност не може да надминава r.

Матриците $\tilde{\alpha}(x)$ и $\tilde{\beta}(x)$ са антисиметрични в ортогоналния и симетрични — в симплектичния случай, което може да се провери и посредством равенствата

$$\alpha(x) := \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\lambda^+ - \lambda^-} = -F_0^T(\chi_0^+(x,\lambda^+))^{-1}\partial_\lambda\chi_0^+(x,\lambda^+)S^{-1}F_0 + \alpha_0, \tag{3.50}$$

$$\beta(x) := \frac{\tilde{\beta}(x)}{\lambda^- - \lambda^+} = -G_0^T(\chi_0^-(x,\lambda^-))^{-1}\partial_\lambda\chi_0^-(x,\lambda^-)S^{-1}G_0 + \beta_0. \tag{3.51}$$

Току-що получените резултати, касаещи множител от ортогоналната и симплектичната група, се съгласуват с тези в [88] и [66].

В ортогоналния случай при ранг $s = 1$ имаме $\alpha = \beta = 0$ и получените формули значително се опростяват

$$X = (\lambda^+ - \lambda^-)\frac{SG}{F^T SG}, \qquad Y = -(\lambda^+ - \lambda^-)\frac{SF}{F^T SG}.$$

След като заместим изразите за X и Y в (3.4) и отчетем (3.22), то резултатът гласи

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + (c(\lambda) - 1)\,P(x) + \left(\frac{1}{c(\lambda)} - 1\right)\overline{P}(x), \qquad \overline{P}(x) = SP^T(x)S^{-1}, \tag{3.52}$$

където проекторът $P(x)$ се дава от

$$P(x) = \frac{SFG^T}{F^TSG}.$$

Оказва се удобно въвеждането новите обозначения

$$n(x) = SF(x), \qquad m(x) = G(x).$$

Тогава видът на P в новите означения съвпада с (3.44), а неговите собствени вектори са свързани с фундаменталните аналитични решения посредством

$$n(x) = \chi_0^+(x, \lambda^+)n_0, \qquad m^T(x) = m_0^T[\chi_0^-(x, \lambda^-)]^{-1}. \tag{3.53}$$

Разгледаната процедура на обличане, разбира се, може да се приложи отново върху облеченото фундаментално решение $\psi_1(x, \lambda)$ и неговия потенциал $q_1(x)$, което ще доведе до някакво ново решение $\psi_2(x, \lambda)$, удовлетворяващо СЗШ с потенциал $q_2(x)$, и т.н.

$$\psi_0 \xrightarrow{g} \psi_1 \xrightarrow{g} \psi_2 \xrightarrow{g} \dots, \tag{3.54}$$

$$q_0 \xrightarrow{g} q_1 \xrightarrow{g} q_2 \xrightarrow{g} \dots. \tag{3.55}$$

Един специален клас от решения на интегрируемите НЕУ са солитонните решения. За да се получат тези решения, се тръгва от тривиалното решение $q_0 = 0$. Резултатът при обличането му представлява 1-солитонно решение, а след като 1-солитонното решение бъде облечено се получава 2-солитонно решение и т.н.

$$0 \xrightarrow{g} q_{1\mathrm{s}} \xrightarrow{g} q_{2\mathrm{s}} \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} q_{n\mathrm{s}}.$$

В случая на $q_0 = 0$ фундаменталните аналитични решения са просто плоски вълни $\chi_0^{\pm}(x, \lambda) = \exp(-\mathrm{i}\lambda Jx)$, а данните на разсейването се тривиализират, т.е. $T_0(\lambda) = \mathbb{1}$.

Друга възможност за пресмятане на n-солитонните решения е да се използва множител с $2n$ полюса

$$g(x, \lambda) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_k(x)}{\lambda - \lambda_k^+} + \frac{B_k(x)}{\lambda - \lambda_k^-} \right). \tag{3.56}$$

Съответно неговият обратен има вида

$$[g(x, \lambda)]^{-1} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{C_k(x)}{\lambda - \lambda_k^-} + \frac{D_k(x)}{\lambda - \lambda_k^+} \right). \tag{3.57}$$

Тогава решението се получава по формулата

$$q_1(x) = q_0(x) + \sum_k [J, A_k(x) + B_k(x)]. \tag{3.58}$$

И сега резидуумите на g и g^{-1} допускат реазложенията

$$\begin{aligned} A_k(x) &= X_k(x)F_k^T(x), \qquad B_k(x) = Y_k(x)G_k^T(x), \\ C_k(x) &= Z_k(x)H_k^T(x), \qquad D_k(x) = W_k(x)N_k^T(x), \end{aligned}$$

като всички множители са правоъгълни матрици с максимален ранг s. Прилагайки разсъждения подобни на вече изложените, можем да се убедим, че за множителите F_k, G_k, Z_k и W_k са в сила равенствата

$$F_k^T(x) = F_{k,0}^T[\chi_0^+(x,\lambda_k^+)]^{-1}, \qquad G_k^T(x) = G_{k,0}^T[\chi_0^-(x,\lambda_k^-)]^{-1}, \tag{3.59}$$

$$W_k(x) = \chi_0^+(x,\lambda_k^+)W_{k,0}, \qquad Z_k(x) = \chi_0^-(x,\lambda_k^-)Z_{k,0}, \tag{3.60}$$

$$F_{k,0}^T W_{k,0} = 0, \qquad G_{k,0}^T W_{k,0} = 0, \tag{3.61}$$

където $F_{k,0}$,$G_{k,0}$,$Z_{k,0}$ и $W_{k,0}$ са константни матрици ранг s. За да бъдат намерени останалите множители, е нужно да се реши следната линейна система

$$W_k = X_k\alpha_k + \sum_{l\neq k}\frac{X_l F_l^T W_k}{\lambda_l^+ - \lambda_k^+} + \sum_l \frac{Y_l G_l^T W_k}{\lambda_l^- - \lambda_k^+}, \tag{3.62}$$

$$Z_k = \sum_l \frac{X_l F_l^T Z_k}{\lambda_l^+ - \lambda_k^-} + Y_k\beta_k + \sum_{l\neq k}\frac{Y_l G_l^T Z_k}{\lambda_l^- - \lambda_k^-}, \tag{3.63}$$

$$G_k = -H_k\beta_k^T + \sum_{l\neq k}\frac{H_l Z_l^T G_k}{\lambda_l^- - \lambda_k^-} + \sum_l \frac{N_l W_l^T G_k}{\lambda_l^+ - \lambda_k^-}, \tag{3.64}$$

$$F_k = \sum_l \frac{H_l Z_l^T F_k}{\lambda_l^- - \lambda_k^+} - N_k\alpha_k^T + \sum_{l\neq k}\frac{N_l W_l^T F_k}{\lambda_l^+ - \lambda_k^+}. \tag{3.65}$$

Квадратните матрици $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$ също зависят от фундаменталните аналитични решения χ_0^+ и χ_0^- по следния начин

$$\alpha_k(x) = -F_{0,k}^T[\chi_0^+(x,\lambda_k^+)]^{-1}\partial_\lambda\chi_0^+(x,\lambda_k^+)W_{0,k} + \alpha_{0,k}, \tag{3.66}$$

$$\beta_k(x) = -G_{0,k}^T[\chi_0^-(x,\lambda_k^-)]^{-1}\partial_\lambda\chi_0^-(x,\lambda_k^-)Z_{0,k} + \beta_{0,k}. \tag{3.67}$$

Възстановяването на времевата еволюция става чрез използване на по-долното съответствие

$$F_{k,0}^T \to F_{k,0}^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda_k^+)t}, \qquad G_{k,0}^T \to G_{k,0}^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda_k^-)t}, \tag{3.68}$$

$$Z_{k,0} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda_k^-)t}Z_{k,0}, \qquad W_{k,0} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda_k^+)t}W_{k,0}, \tag{3.69}$$

$$\alpha_{k,0} \to -\mathrm{i}F_{k,0}^T\frac{f(\lambda_k^+)}{\mathrm{d}\,\lambda}W_{k,0}t + \alpha_{k,0}, \quad \beta_{k,0} \to -\mathrm{i}G_{k,0}^T\frac{f(\lambda_k^-)}{\mathrm{d}\,\lambda}Z_{k,0}t + \beta_{k,0}. \tag{3.70}$$

Частен случай на множителя (3.56) за симплектичните алгебри е предложен в [57].

Множителят (3.43) може да се обобщи в

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_k \frac{P_k(x)}{\lambda - \lambda_k^-}, \tag{3.71}$$

където P_k вече не са проектори. С помощта на този множител могат да се пресметнат n-солитонните решения за случая на алгебрата $\mathfrak{sl}(n)$ по формулата

$$q_1(x) = q_0(x) + \sum_{k=1}^n [J, P_k(x)]. \tag{3.72}$$

Процедурата по обличането естествено води до преобразуване на всички фундаментални решения, на данните на разсейването, на резолвентата и т.н. Обличането на решенията на Йост става по следното правило

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = g(x,\lambda)\psi_{0,\pm}(x,\lambda)(g_{\pm}(\lambda))^{-1},$$

където нормировъчният множител $g_{\pm}(\lambda) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x,\lambda)$ обезпечава правилната асимптотика на решенията. Оттук се вижда, че матрицата на разсейването T на облечения Лаксов оператор L и тази на L_0 са свързани посредсвом формулата

$$T(\lambda) = g_{+}(\lambda)T_0(\lambda)(g_{-}(\lambda))^{-1}.$$

След като се анализира начина, по който се обличат Гаусовите фактори на T, може да се покаже, че фундаменталните аналитични решения $\chi^{\pm}$ се трансформират по следния начин

$$\chi^{\pm}(x,\lambda) = g(x,\lambda)\chi_0^{\pm}(x,\lambda)(g_{-}(\lambda))^{-1}. \tag{3.73}$$

Отчитайки (3.73) и конструкцията на ядрото на резолвентата $\mathcal{R}$ заключаваме, че

$$\mathcal{R}^{\pm}(x,y,\lambda) = g(x,\lambda)\mathcal{R}_0^{\pm}(x,y,\lambda)(g(y,\lambda))^{-1}. \tag{3.74}$$

От получената формула произтича важния факт, че дискретната част на спектъра на L съдържа освен собствените стойности на L_0 и всички полюси на обличащия множител (и на неговия обратен), докато непрекъснатата част от спектъра остава непроменена

$$L_0 \xrightarrow{g} L_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{spec}(L_0) \xrightarrow{g} \mathrm{spec}(L_1) = \mathrm{spec}(L_0) \cup \left\{\lambda_k^{\pm}\right\}_{k=1}^{n}.$$

Нека сега предположим, че е зададена редукция върху L. Тогава обличащият множител трябва да бъде G_R-инвариантен, т.е.

$$\mathbf{K}\left[g(x,\kappa^{-1}(\lambda))\right] = g(x,\lambda). \tag{3.75}$$

Това налага определени условия, както на дискретните собствени стойности $\lambda^{\pm}$, така и на резидуумите на множителя.

3.2 Случай на ортогонални алгебри от серията B_r

Нека разгледаме уравнение на N-те вълни

$$\mathrm{i}[J,Q_t] - \mathrm{i}[I,Q_x] - [[J,Q],[I,Q]] = 0, \tag{3.76}$$

за алгебрата $B_r \approx \mathfrak{so}(2r+1)$. В този случай Картановите елементи J и I имат вида

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{diag}\,(J_1,J_2,\ldots,J_r,0,-J_r,\ldots,-J_2,-J_1), \\ I &= \mathrm{diag}\,(I_1,I_2,\ldots,I_r,0,-I_r,\ldots,-I_2,-I_1). \end{aligned}$$

Съобразно структурата на корневото пространство на ортогоналната алгебра (вж. приложение A.2) многокомпонентната функция Q допуска следното разложение по базиса на Вайл

$$Q(x,t) = \sum_{i<j}^{r} Q_{\pm(e_i-e_j)}(x,t)E_{\pm(e_i-e_j)} + \sum_{i=1}^{r} Q_{\pm e_i}(x,t)E_{\pm e_i} + \sum_{i<j}^{r} Q_{\pm(e_i+e_j)}(x,t)E_{\pm(e_i+e_j)}$$

Тогава, написано по компоненти, уравнението (3.76) добива вида

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} + C_{ij}Q_{e_i}Q_{-e_j} \\ &+ \sum_{k\neq i,j} A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} + \sum_{k\neq i,j} B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{-(e_k+e_j)} = 0, \qquad i<j, \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\mathrm{i}J_iQ_{e_i,t} - \mathrm{i}I_iQ_{e_i,x} + \sum_{k\neq i} C_{ki}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k} + \sum_{k\neq i} D_{ik}Q_{e_i+e_k}Q_{-e_k} = 0, \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i + J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j)Q_{e_i+e_j,x} + (-1)^{j+r+1}C_{ij}Q_{e_i}Q_{e_j} \\ &+ \sum_{k\neq i,j} F_{ijk}Q_{e_j-e_k}Q_{e_i+e_k} + \sum_{k\neq i,j} G_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j+e_k} = 0, \qquad i<j, \end{aligned} \tag{3.79}$$

където

$$\begin{aligned}
A_{ijk} &= C_{ij} + C_{jk} + C_{ki}, \qquad C_{ij} = J_iI_j - J_jI_i, \\
D_{ik} &= \begin{cases} (-1)^{i+r}C_{ki}, & k<i \\ (-1)^{k+r}C_{ik}, & k>i. \end{cases} \\
B_{ijk} &= \begin{cases} (-1)^{i+j}(C_{ij} - C_{ki} - C_{jk}), & k<i \\ (-1)^{k+j}(C_{ki} + C_{jk} - C_{ij}), & i<k<j \\ C_{ij} - C_{ki} - C_{jk}, & k>j \end{cases} \\
F_{ijk} &= \begin{cases} (-1)^{i+j}(C_{jk} - C_{ij} - C_{ki}), & k<i \\ (-1)^{j+k}(C_{ij} + C_{ki} - C_{jk}), & k>i, \quad k\neq j \end{cases} \\
G_{ijk} &= \begin{cases} C_{ki} + C_{ij} - C_{jk}, & k<j, \quad k\neq i \\ (-1)^{j+k}(C_{ij} + C_{jk} - C_{ki}), & k>j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Навсякъде в по-горните изрази се изисква индексите в корените от вида $e_i + e_k$ да са подредени, т. е. при $i<k$ се записва e_i+e_k, а при $i>k$ събираемите са в обратен ред. Останалите уравнения, свързани с отрицателните корени, се получават от горепосочените чрез простата замяна

$$e_i,\ e_j,\ e_k \to -e_i,\ -e_j,\ -e_k.$$

Нека да наложим $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа

$$K_1U^{\dagger}(x,\lambda^*)K_1^{-1} = U(x,\lambda), \tag{3.80}$$

където K_1 принадлежи на Картановата подгрупа на $SO(2r+1)$ и изглежда така

$$K_1 = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, 1, \epsilon_r, \ldots, \epsilon_2, \epsilon_1), \qquad \epsilon_k = \pm 1, \qquad k = 1, \ldots, r. \tag{3.81}$$

Както беше показано в пример 1 от предходната глава, този тип редукция намалява наполовина броя на независимите полета посредством изпълнението на връзките (2.32). От последните следва, че са в сила равенствата

$$Q_{-(e_i-e_j)} = -\epsilon_i\epsilon_j Q^*_{e_i-e_j}, \qquad Q_{-e_i} = -\epsilon_i Q^*_{e_i}, \qquad Q_{-(e_i+e_j)} = -\epsilon_i\epsilon_j Q^*_{e_i+e_j} \tag{3.82}$$

където индексите i и j се менят от 1 до r при условието $i < j$. Тогава N-вълновата система (3.77)–(3.79) се записва така

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} - \epsilon_j C_{ij} Q_{e_i} Q^*_{e_j}\\ - \sum_{k<i} \epsilon_i\epsilon_k A_{ijk} Q^*_{e_k-e_i} Q_{e_k-e_j} + \sum_{i<k<j} A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k-e_j}\\ - \sum_{k>j} \epsilon_j\epsilon_k A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q^*_{e_j-e_k} - \sum_{k\neq i,j} \epsilon_j\epsilon_k B_{ijk} Q_{e_i+e_k} Q^*_{e_k+e_j} = 0,\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}J_i Q_{e_i,t} - \mathrm{i}I_i Q_{e_i,x} - \sum_{k<i} \epsilon_i\epsilon_k C_{ki} Q^*_{e_k-e_i} Q_{e_k} + \sum_{k>i} C_{ki} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k}\\ - \sum_{k\neq i} \epsilon_k D_{ik} Q_{e_i+e_k} Q^*_{e_k} = 0,\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(J_i + J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j)Q_{e_i+e_j,x} + (-1)^{j+r+1} C_{ij} Q_{e_i} Q_{e_j}\\ - \sum_{k<j,k\neq i} \epsilon_j\epsilon_k F_{ijk} Q^*_{e_k-e_j} Q_{e_i+e_k} + \sum_{k>j} F_{ijk} Q_{e_j-e_k} Q_{e_i+e_k}\\ - \sum_{k<i} \epsilon_i\epsilon_k G_{ijk} Q^*_{e_k-e_i} Q_{e_j+e_k} + \sum_{k>i,k\neq j} G_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_j+e_k} = 0,\end{aligned} \tag{3.85}$$

За да се пресметне n-солитонното решение на системата (3.83)–(3.85), може да се използва обличащия множител (3.56). Действието на $\mathbb{Z}_2$ редукцията (вж. (3.75)) изисква g да удовлетворява

$$K_1 \left[g^\dagger(x,\lambda^*)\right]^{-1} K_1^{-1} = g(x,\lambda), \tag{3.86}$$

откъдето се вижда, че g има вида

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(x)}{\lambda - \lambda_k^+} + \frac{K_1 S A_k^*(x)(K_1 S)^{-1}}{\lambda - (\lambda_k^+)^*}. \tag{3.87}$$

С други думи в сила са връзките

$$B_k(x) = K_1 S A_k^*(x)(K_1 S)^{-1}, \qquad \lambda_k^- = (\lambda_k^+)^*.$$

След заместване във формула (3.58) и отчитайки връзката (2.18), за солитонното решение се получава

$$[J, Q(x)] = \sum_k [J, A(x) + K_1 S A_k^*(x) S K_1]. \tag{3.88}$$

В едносолитонния случай за матрицата A важи разложението (3.13) с

$$X = 2\nu(\mathrm{i}K_1 F^* - 2\nu S F (F^\dagger K_1 F)^{-1}\alpha^*)(F^T K_1 F^* - 4\nu^2 \alpha (F^\dagger K_1 F)^{-1}\alpha^*)^{-1}, \tag{3.89}$$

$$F(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ J x} F_0, \qquad \alpha(x) = \mathrm{i}x F_0^T J S F_0 + \alpha_0. \tag{3.90}$$

Компонентите на матрицата F_0 не са произволни — те трябва да удовлетворяват равенството

$$F_0^T S F_0 = 0. \tag{3.91}$$

За да възстановим времевата еволюция на решението, е необходимо да заместим константните матрици F_0 и α_0 с такива, които зависят от t, по правилото

$$F_0 \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ It} F_0, \qquad \alpha_0 \to \mathrm{i}t F_0^T ISF_0 + \alpha_0. \tag{3.92}$$

В най-простия случай, когато rankX = rankF = 1 и $\alpha \equiv 0$, за множителя X получаваме

$$X(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger(x,t)K_1F(x,t)} K_1 F^*(x,t).$$

В този случай 1-солитонното решение на системата (3.83)–(3.85) се дава от

$$\begin{aligned}
Q_{e_i-e_j}(z) &= \frac{2\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i-z_j)}}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_i \mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)} F^*_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\epsilon_j \mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)} F_{0,\bar{i}}F^*_{0,\bar{j}}\right), && (3.93)\\
Q_{e_i}(z) &= \frac{2\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu z_i}}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_i \mathrm{e}^{-\nu z_i} F^*_{0,i}F_{0,r+1} + (-1)^{i+r} \mathrm{e}^{\nu z_i} F_{0,\bar{i}}F^*_{0,r+1}\right), && (3.94)\\
Q_{e_i+e_j}(z) &= \frac{2\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i+z_j)}}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_i \mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)} F^*_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j+1}\epsilon_j \mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)} F_{0,\bar{i}}F^*_{0,j}\right), && (3.95)\\
F^\dagger K_1 F &= \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k \left(\mathrm{e}^{-2\nu z_k}|F_{0,k}|^2 + \mathrm{e}^{2\nu z_k}|F_{0,\bar{k}}|^2\right) + |F_{0,r+1}|^2,
\end{aligned}$$

където

$$z_i = J_i x + I_i t, \qquad \bar{i} = 2(r+1) - i. \tag{3.96}$$

От формулите се вижда, че решението се параметризира от реалната и имагинерната части на дискретните собствени стойности $\lambda^\pm = \mu \pm \mathrm{i}\nu$ на оператора L и от компонентните на поляризационния вектор F_0.

Пример 3: Физическа 4-вълнова система.

Нека да се спрем по-подробно на най-простия случай $r = 2$. По-нататък ще използваме индексни обозначения, които произлизат от разложението всеки корен по простите корени

$$Q_\alpha \equiv \begin{cases} Q_{mn}\,, & \alpha = m\alpha_1 + n\alpha_2, \quad m,n > 0,\\ Q_{\overline{mn}}\,, & \alpha = -m\alpha_1 - n\alpha_2 \end{cases}$$

В тези означения функцията Q има представянето

$$\begin{aligned}
Q(x,t) &= Q_{10}(x,t)E_{e_1-e_2} + Q_{12}(x,t)E_{e_1+e_2} + Q_{11}(x,t)E_{e_1} + Q_{01}(x,t)E_{e_2}\\
&+ Q_{\overline{10}}(x,t)E_{-(e_1-e_2)} + Q_{\overline{12}}(x,t)E_{-(e_1+e_2)} + Q_{\overline{11}}(x,t)E_{-e_1} + Q_{\overline{01}}(x,t)E_{-e_2}.
\end{aligned}$$

Условията на редукцията за $Q(x,t)$ са

$$Q_{\overline{10}}(x,t) = -\epsilon_1\epsilon_2 Q^*_{10}(x,t), \qquad Q_{\overline{11}}(x,t) = -\epsilon_1 Q^*_{11}(x,t),$$

$$Q_{\overline{12}}(x,t) = -\epsilon_1\epsilon_2 Q^*_{12}(x,t), \qquad Q_{\overline{01}}(x,t) = -\epsilon_2 Q^*_{01}(x,t).$$

В резултат на действието на редукцията остават 4 независими полета [55], които удовлетворяват системата

$$\mathrm{i}(J_1 - J_2)Q_{10,t} - \mathrm{i}(I_1 - I_2)Q_{10,x} - k\epsilon_2 Q_{11}Q^*_{01} = 0, \tag{3.97}$$

$$\mathrm{i}J_1 Q_{11,t} - \mathrm{i}I_1 Q_{11,x} - k(Q_{10}Q_{01} + \epsilon_2 Q_{12}Q^*_{01}) = 0, \tag{3.98}$$

$$\mathrm{i}(J_1 + J_2)Q_{12,t} - \mathrm{i}(I_1 + I_2)Q_{12,x} - kQ_{11}Q_{01} = 0, \tag{3.99}$$

$$\mathrm{i}J_2 Q_{01,t} - \mathrm{i}I_2 Q_{01,x} - k\epsilon_1(Q^*_{11}Q_{12} + \epsilon_2 Q^*_{10}Q_{11}) = 0, \tag{3.100}$$

където $k = J_1 I_2 - J_2 I_1$. Известно е, че тази 4-вълнова система при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ и $I_2 = 0$ има физическо приложение в теорията на Рамановото разсейване. По-конкретно, ако въведем новите обозначения

$$Q_{10}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{i}}{k}E_{\mathrm{s}}(x,t), \qquad Q_{11}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{i}}{k}E_{\mathrm{p}}(x,t), \tag{3.101}$$

$$Q_{12}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{i}}{k}E_{\mathrm{a}}(x,t), \qquad Q_{01}(x,t) = -\tfrac{\mathrm{i}}{k}Q_{\mathrm{pol}}(x,t) \tag{3.102}$$

то системата (3.97)–(3.100) се записва по следния начин

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v_{\mathrm{s}}}\frac{\partial E_{\mathrm{s}}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\mathrm{s}}}{\partial x} - \kappa E_{\mathrm{p}} Q^*_{\mathrm{pol}} = 0,\\
&\frac{1}{v_{\mathrm{p}}}\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x} - \kappa (E_{\mathrm{a}} Q^*_{\mathrm{pol}} - E_{\mathrm{s}} Q_{\mathrm{pol}}) = 0,\\
&\frac{1}{v_{\mathrm{a}}}\frac{\partial E_{\mathrm{a}}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\mathrm{a}}}{\partial x} + \kappa E_{\mathrm{p}} Q_{\mathrm{pol}} = 0,\\
&\frac{\partial Q_{\mathrm{pol}}}{\partial t} - \kappa_{pol}(E^*_{\mathrm{p}} E_{\mathrm{a}} + E_{\mathrm{p}} E^*_{\mathrm{s}}) = 0
\end{aligned}$$

където

$$v_{\mathrm{s}} = -\frac{I_1}{J_1 - J_2}, \qquad v_{\mathrm{p}} = -\frac{I_1}{J_1}, \qquad v_{\mathrm{a}} = -\frac{I_1}{J_1 + J_2}, \qquad \kappa = -\frac{1}{I_1}, \qquad \kappa_{pol} = \frac{1}{J_2}.$$

Такава система е изследвана за първи път в [21, 53] и тя описва генерирането на Стокс и анти-Стокс вълна. По-специално Q_{pol} е нормираната ефективна поляризация на средата, а E_{p}, E_{s} и E_{a} са нормирани амплитуди на напомпващата, Стокс и анти-Стокс вълни съответно.

Тогава 1-солитонното решение има вида

$$Q_{10}(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_1 F^*_{0,1}F_{0,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\lambda^+ z_2 - (\lambda^+)^* z_1\right)} + \epsilon_2 F^*_{0,4}F_{0,5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((\lambda^+)^* z_2 - \lambda^+ z_1\right)}\right), \tag{3.103}$$

$$Q_{11}(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_1 F^*_{0,1}F_{0,3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda^+)^* z_1} - F^*_{0,3}F_{0,5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_1}\right), \tag{3.104}$$

$$Q_{12}(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_1 F^*_{0,1}F_{0,4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left((\lambda^+)^* z_1 + \lambda^+ z_2\right)} + \epsilon_2 F^*_{0,2}F_{0,5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\lambda^+ z_1 + (\lambda^+)^* z_2\right)}\right), \tag{3.105}$$

$$Q_{01}(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\left(\epsilon_2 F^*_{0,2}F_{0,3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda^+)^* z_2} + F^*_{0,3}F_{0,4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_2}\right), \tag{3.106}$$

$$F^\dagger K_1 F = \epsilon_1(|F_{0,1}|^2\mathrm{e}^{-2\nu z_1} + |F_{0,5}|^2\mathrm{e}^{2\nu z_1}) + \epsilon_2(|F_{0,2}|^2\mathrm{e}^{-2\nu z_2} + |F_{0,4}|^2\mathrm{e}^{2\nu z_2}) + |F_{0,3}|^2,$$

където z_1 и z_2 се дават от (3.96). Нека се спрем по-подробно на частния случай $K_1 = \mathbb{1}$. Да наложим допълнителното условие

$$F_{0,1} = F_{0,5}^*, \qquad F_{0,2} = F_{0,4}^*, \qquad F_{0,3} = F_{0,3}^*.$$

В резултат на това решението (3.103)–(3.106) се опростява значително и добива вида

$$\begin{aligned}
Q_{10}(x,t) &= \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta_1}\sinh 2\theta_0 \cosh(\nu(z_1+z_2))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_1-z_2+\phi_1-\phi_2)}, && (3.107)\\
Q_{11}(x,t) &= -\frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\nu}{\Delta_1}\sinh\theta_0\sinh(\nu z_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu z_1+\phi_1)}, && (3.108)\\
Q_{12}(x,t) &= \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta_1}\sinh(2\theta_0)\cosh(\nu(z_1-z_2))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_1+z_2+\phi_1+\phi_2)}, && (3.109)\\
Q_{01}(x,t) &= \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\nu}{\Delta_1}\cosh\theta_0\cosh(\nu z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_2+\phi_2)}, && (3.110)\\
\Delta_1(x,t) &= 2\left(\sinh^2\theta_0\sinh^2(\nu z_1) + \cosh^2\theta_0\cosh^2(\nu z_2)\right),
\end{aligned}$$

където сме ползвали представянето

$$F_{0,1} = \frac{F_{0,3}}{\sqrt{2}}\sinh\theta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \qquad F_{0,2} = \frac{F_{0,3}}{\sqrt{2}}\cosh\theta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}, \qquad \theta_0, \phi_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Забележка 2: При този конкретен избор на редукцията знаменателят Δ_1 не се нулира и затова решенията са добре дефинирани за всяко x и t (няма взривна неустойчивост). При фиксирането на матрицата K_1 по друг начин такива особености, разбира се, са напълно възможни.$\square$

След заместване на $I_2 = 0$ в намереното солитонно решение се достига до съответното решение на физическата 4-вълнова система, която описва Раманово разсейване. По-долу привеждаме вида на квадратите на модулите на физическите полета, които участват в нея

$$\begin{aligned}
|E_{\mathrm{s}}(x,t)|^2 &= \frac{\kappa^2\nu^2}{\Delta_1^2}\sinh^2 2\theta_0\cosh^2\nu[(J_1+J_2)x + I_1 t], && (3.111)\\
|E_{\mathrm{p}}(x,t)|^2 &= \frac{8\kappa^2\nu^2}{\Delta_1^2}\sinh^2\theta_0\sinh^2\nu(J_1 x + I_1 t), && (3.112)\\
|E_{\mathrm{a}}(x,t)|^2 &= \frac{\kappa^2\nu^2}{\Delta_1^2}\sinh^2 2\theta_0\cosh^2\nu[(J_1-J_2)x + I_1 t], && (3.113)\\
|Q_{\mathrm{pol}}(x,t)|^2 &= \frac{8\kappa^2\nu^2}{\Delta_1^2}\cosh^2\theta_0\cosh^2\nu J_2 x. && (3.114)
\end{aligned}$$

където

$$\kappa = -J_2 I_1, \qquad \Delta_1 = 2\left(\sinh^2\theta_0\sinh^2(\nu(J_1x+I_1t)) + \cosh^2\theta_0\cosh^2(\nu J_2 x)\right).\square$$

Нека да разгледаме друг тип $\mathbb{Z}_2$ редукция

$$K_2 U^T(x,-\lambda) K_2^{-1} = -U(x,\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad Q(x) = K_2 Q^T(x) K_2^{-1}, \tag{3.115}$$

където матрицата K_2 е отново избрана да лежи в Картановата подгрупа на $SO(2r+1)$

$$K_2 = \operatorname{diag}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_r, 1, \vartheta_r, \dots, \vartheta_1), \qquad \vartheta_k = \pm 1, \qquad k = 1, \dots, r.$$

Разписано по компоненти, последното равенство изглежда така

$$Q_{-(e_i-e_j)} = \vartheta_i \vartheta_j Q_{e_i-e_j}, \qquad Q_{-e_i} = \vartheta_i Q_{e_i}, \qquad Q_{-(e_i+e_j)} = \vartheta_i \vartheta_j Q_{e_i+e_j},$$

като индексите i и j пробягват числата от 1 до r и освен това считаме, че $i < j$. И в този случай броят на независимите величини е r^2. Те удовлетворяват следната система от уравнения

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i - J_j) Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j) Q_{e_i-e_j,x} + \vartheta_j C_{ij} Q_{e_i} Q_{e_j} \\
&\quad + \sum_{k<i} \vartheta_k \vartheta_i A_{ijk} Q_{e_k-e_i} Q_{e_k-e_j} + \sum_{i<k<j} A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k-e_j} \\
&+ \sum_{k>j} \vartheta_j \vartheta_k A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_j-e_k} + \sum_{k\neq i,j} \vartheta_j \vartheta_k B_{ijk} Q_{e_i+e_k} Q_{e_k+e_j} = 0,
\end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i} J_i Q_{e_i,t} - \mathrm{i} I_i Q_{e_i,x} + \sum_{k<i} \vartheta_k \vartheta_i C_{ki} Q_{e_k-e_i} Q_{e_k} + \sum_{k>i} C_{ki} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k} \\
&\qquad + \sum_{k\neq i} \vartheta_k D_{ik} Q_{e_i+e_k} Q_{e_k} = 0,
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i + J_j) Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j) Q_{e_i+e_j,x} + (-1)^{j+r+1} C_{ij} Q_{e_i} Q_{e_j} \\
&\quad + \sum_{k<j,\, k\neq i} \vartheta_k \vartheta_j F_{ijk} Q_{e_k-e_j} Q_{e_i+e_k} + \sum_{k>j} F_{ijk} Q_{e_j-e_k} Q_{e_i+e_k} \\
&+ \sum_{k<i} \vartheta_k \vartheta_i G_{ijk} Q_{e_k-e_i} Q_{e_j+e_k} + \sum_{k\neq i,j} G_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_j+e_k} = 0,
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Намирането на солитонните решения на тази система става с помощта на обличащ множител, който е съгласуван с редукцията (3.115), т. е.

$$K_2 \left[(g^T(x,-\lambda)) \right]^{-1} K_2^{-1} = g(x,\lambda).$$

Това условие води до следния вид на g

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_k(x)}{\lambda - \lambda_k^+} - \frac{K_2 S A_k(x) (K_2 S)^{-1}}{\lambda + \lambda_k^+} \right). \tag{3.119}$$

Съгласно формула (3.5) солитонното решение се изразява чрез

$$[J, Q(x)] = \sum_k [J, A_k(x) - K_2 S A_k(x) S K_2]. \tag{3.120}$$

В едносолитонния случай матрицата $A = XF^T$ при rankX = rankF = 1 се дава от

$$A(x) = \frac{2\lambda^+ K_2 F(x) F^T(x)}{F^T(x) K_2 F(x)}, \qquad F(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ Jx} F_0.$$

Константните вектор-стълбове и сега удовлетворяват (3.91), а възстановяването на времевата зависимост става посредством формулите (3.92). След като отчетем всичко това, можем да запишем 1-солитонното решение по следния начин

$$Q_{e_i-e_j}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}}\right), \tag{3.121}$$

$$Q_{e_i}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ z_i} F_{0,i}F_{0,r+1} + (-1)^{i+r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_i} F_{0,\bar{i}}F_{0,r+1}\right), \tag{3.122}$$

$$Q_{e_i+e_j}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j+1}\vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,j}\right), \tag{3.123}$$

$$F^T K_2 F = \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda^+ z_k} F_{0,k}^2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_k} F_{0,\bar{k}}^2\right) + F_{0,r+1}^2. \tag{3.124}$$

По-горе сме употребили отново означенията, вече въведени при разглеждането на солитонното решение за предходния тип $\mathbb{Z}_2$ редукция (вж. (3.96)).

Пример 4: Нека разгледаме случая $r = 2$. В индексните обозначения от предишния пример условията на $\mathbb{Z}_2$ редукцията са

$$Q_{\overline{10}} = \vartheta_1\vartheta_2 Q_{10}, \qquad Q_{\overline{11}} = \vartheta_1 Q_{11}, \qquad Q_{\overline{12}} = \vartheta_1\vartheta_2 Q_{12}, \qquad Q_{\overline{01}} = \vartheta_2 Q_{01}.$$

Независимите полета и този път са четири [55] и те удовлетворяват системата

$$\mathrm{i}(J_1 - J_2)Q_{10,t} - \mathrm{i}(I_1 - I_2)Q_{10,x} + k\vartheta_2 Q_{11}Q_{01} = 0, \tag{3.125}$$

$$\mathrm{i}J_1 Q_{11,t} - \mathrm{i}I_1 Q_{11,x} + kQ_{01}(\vartheta_2 Q_{12} - Q_{10}) = 0, \tag{3.126}$$

$$\mathrm{i}(J_1 + J_2)Q_{12,t} - \mathrm{i}(I_1 + I_2)Q_{12,x} - kQ_{11}Q_{01} = 0, \tag{3.127}$$

$$\mathrm{i}J_2 Q_{01,t} - \mathrm{i}I_2 Q_{01,x} + k\vartheta_1 Q_{11}(Q_{12} + \vartheta_2 Q_{10}) = 0. \tag{3.128}$$

Нейното 1-солитонно решение се задава от функциите

$$Q_{10}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,1}F_{0,2} + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,4}F_{0,5}\right), \tag{3.129}$$

$$Q_{11}(z) = \frac{2\lambda^+ F_{0,3}}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ z_1} F_{0,1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_1} F_{0,5}\right), \tag{3.130}$$

$$Q_{12}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,1}F_{0,4} + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,2}F_{0,5}\right), \tag{3.131}$$

$$Q_{01}(z) = \frac{2\lambda^+ F_{0,3}}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ z_2} F_{0,2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+ z_2} F_{0,4}\right). \tag{3.132}$$

В частност, при налагане на условията: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$, $F_{0,1} = F_{0,5}$ и $F_{0,2} = F_{0,4}$, получаваме следното

$$\begin{aligned}
Q_{10}(x,t) &= \frac{\lambda^+}{\Delta_2}\sinh 2\theta_0 \cos\lambda^+[(J_1+J_2)x + (I_1+I_2)t],\\
Q_{11}(x,t) &= \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\lambda^+}{\Delta_2}\sinh 2\theta_0 \sin\lambda^+(J_1x + I_1t),\\
Q_{12}(x,t) &= \frac{\lambda^+}{\Delta_2}\sinh 2\theta_0 \cos\lambda^+[(J_1-J_2)x + (I_1-I_2)t],\\
Q_{01}(x,t) &= \frac{2\sqrt{2}\lambda^+}{\Delta_2}\cosh 2\theta_0 \cos\lambda^+(J_2x + I_2t),\\
\Delta_2(x,t) &= 2(\cosh^2\theta_0\cos^2\lambda^+(J_2x+I_2t) - \sinh^2\theta_0\sin^2\lambda^+(J_1x+I_1t)).
\end{aligned}$$

където

$$F_{0,1} = \frac{F_{0,3}}{\sqrt{2}}\sinh\theta_0, \qquad F_{0,2} = \frac{F_{0,3}}{\sqrt{2}}\cosh\theta_0, \qquad \theta_0 \in \mathbb{C}. \tag{3.133}$$

Вижда се, че знаменателят в изразите за солитонното решение при определени стойности на променливите x и t може да се нулира, т.е. получените решения имат полюсни особености. Това е една съществена разлика със солитонното решение, получено при предната редукция.□

Съгласуваността на уравнението на N-те вълни с редукция от тип $\lambda \to -\lambda$ има важни последствия: при едновременното действие на две $\mathbb{Z}_2$ редукции уравнението на N-те вълни допуска 2 различни вида решения: дублетни солитони, асоциирани с 2 имагинерни дискретни собствени стойности на L оператора, и квадроплетни солитони — с 4 собствени стойности.

3.3 Случай на симплектични алгебри

Да разгледаме случая на симплектична алгебра $C_r \approx \mathfrak{sp}(2r)$. Съгласно приетата от нас конвенция (вж. приложение A.3) Картановата подалгебра за $\mathfrak{sp}(2r)$ се състои от диагонални матрици от вида

$$J = \mathrm{diag}\,(J_1, \dots, J_r, -J_r, \dots, -J_1).$$

Функцията Q се разлага по базиса на Картан-Вайл така

$$Q(x,t) = \sum_{i<j} Q_{\pm(e_i-e_j)}(x,t)E_{\pm(e_i-e_j)} + \sum_{i<j} Q_{\pm(e_i-e_j)}(x,t)E_{\pm(e_i+e_j)} + \sum_{i=1}^{r} Q_{\pm 2e_i}(x,t)E_{\pm 2e_i}.$$

За алгебрите от серията C_r се получава следната N-вълнова система от 3 различни типа уравнения според корена, който стои като индекс

$$\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j}$$

$$+\sum_{k\neq i,j} B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{-(e_k+e_j)} + 2C_{ij}\left(Q_{e_i+e_j}Q_{-2e_j} + (-1)^{i+j}Q_{-(e_i+e_j)}Q_{2e_i}\right) = 0, \quad (3.134)$$

$$\mathrm{i}J_iQ_{2e_i,t} - \mathrm{i}I_iQ_{2e_i,x} + 2\sum_{k<i} C_{ki}Q_{-(e_k-e_i)}Q_{e_k+e_i} + 2\sum_{k>i}(-1)^{i+k}C_{ki}Q_{e_i-e_k}Q_{e_i+e_k} = 0, \quad (3.135)$$

$$\mathrm{i}(J_i+J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i+I_j)Q_{e_i+e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} F_{ijk}Q_{e_j-e_k}Q_{e_i+e_k}$$
$$+\sum_{k\neq i,j} G_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j+e_k} - 2C_{ij}(Q_{e_i-e_j}Q_{2e_j} - (-1)^{i+j}Q_{-(e_i-e_j)}Q_{2e_i}) = 0, \quad (3.136)$$

където

$$\begin{aligned}
A_{ijk} &= C_{ij}+C_{ki}+C_{jk}, \qquad C_{ij} = J_iI_j - J_jI_i,\\
B_{ijk} &= \begin{cases} (-1)^{i+j}(C_{ij}-C_{ki}-C_{jk}), & k<i \\ (-1)^{j+k}(C_{ij}-C_{ki}-C_{jk}), & i<k<j \\ C_{ij}-C_{ki}-C_{jk}, & k>j. \end{cases}\\
F_{ijk} &= \begin{cases} (-1)^{i+j}(C_{ij}-C_{jk}+C_{ki}), & k<i \\ (-1)^{j+k}(C_{ij}-C_{jk}+C_{ki}), & k>i, \quad k\neq j \end{cases}\\
G_{ijk} &= \begin{cases} C_{ki}-C_{ij}-C_{jk}, & k<j, \quad k\neq i \\ (-1)^{j+k}(C_{ki}-C_{ij}-C_{jk}), & k>j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Навсякъде в по-горните формули, където има сумиране по k, индексите в корените от типа e_i+e_k се считат за подредени, т. е.

$$e_i+e_k = \begin{cases} e_k+e_i, & k<i \\ e_i+e_k, & k>i \end{cases}$$

Останалата част от уравненията могат да се получат от дадените при прилагането на замяната

$$e_i,\ e_j,\ e_k \to -e_i,\ -e_j,\ -e_k.$$

Нека да наложим $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.80), като матрицата K_1 избираме да принадлежи на Картановата подгрупа на C_r, по-специално нека $K_1 = \mathrm{diag}\,(\epsilon_1,\dots,\epsilon_r,\epsilon_r,\dots,\epsilon_1)$, $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1,\dots,r$. Тогава функцията Q се подчинява на изискванията

$$Q_{-(e_i-e_j)} = -\epsilon_i\epsilon_jQ^*_{e_i-e_j}, \qquad Q_{-(e_i+e_j)} = -\epsilon_i\epsilon_jQ^*_{e_i+e_j}, \qquad Q_{-2e_i} = -Q^*_{2e_i} \quad (3.137)$$

Системата от N-те вълни (3.134)–(3.136) добива вида

$$\mathrm{i}(J_i-J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i-I_j)Q_{e_i-e_j,x} - \epsilon_i\sum_{k<i}\epsilon_kA_{ijk}Q^*_{e_k-e_i}Q_{e_k-e_j}$$
$$+\sum_{i<k<j}A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} - \epsilon_j\sum_{k>j}\epsilon_kA_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q^*_{e_j-e_k} - \epsilon_j\sum_{k\neq i,j}\epsilon_kB_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q^*_{e_k+e_j}$$
$$-2C_{ij}\left(Q_{e_i+e_j}Q^*_{2e_j} + (-1)^{i+j}\epsilon_i\epsilon_jQ^*_{e_i+e_j}Q_{2e_i}\right) = 0, \quad (3.138)$$

$$\mathrm{i}J_iQ_{2e_i,t} - \mathrm{i}I_iQ_{2e_i,x} - 2\epsilon_i\sum_{k<i}\epsilon_kC_{ki}Q^*_{e_k-e_i}Q_{e_k+e_i} + 2\sum_{k>i}(-1)^{i+k}C_{ki}Q_{e_i-e_k}Q_{e_i+e_k} = 0, \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(J_i+J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i+I_j)Q_{e_i+e_j,x} - \epsilon_j\sum_{k<j}\epsilon_kF_{ijk}Q^*_{e_k-e_j}Q_{e_i+e_k}\\
+\sum_{k>j}F_{ijk}Q_{e_j-e_k}Q_{e_i+e_k} - \epsilon_i\sum_{k<i}\epsilon_kG_{ijk}Q^*_{e_k-e_i}Q_{e_j+e_k} + \sum_{k\neq i,j}G_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j+e_k}\\
-2C_{ij}(Q_{e_i-e_j}Q_{2e_j} + (-1)^{i+j}\epsilon_i\epsilon_jQ^*_{e_i-e_j}Q_{2e_i}) = 0, \quad (3.140)
\end{aligned}$$

И сега за намиране на n-солитонното решение на тази система от уравнения може да се използва формула (3.88) от предния параграф. В едносолитонния случай матричнозначната функция X в разложението на A се получава от общата формула (3.48), след като се отчете, че $\mathbb{Z}_2$ редукцията изисква връзките

$$G = K_1SF^*, \qquad \beta = \alpha^*, \qquad \lambda^+ = (\lambda^-)^* = \mu + \mathrm{i}\nu$$

да са в сила. Тогава резултатът за матрици с ранг $s = 1$ гласи

$$X = \frac{2\mathrm{i}\nu((F^\dagger K_1F)K_1F^* + 2\mathrm{i}\nu\alpha^*SF)}{(F^\dagger K_1F)^2 + 4\nu^2|\alpha|^2}, \quad (3.141)$$

където

$$F(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(Jx+It)}F_0, \qquad \alpha(x,t) = \mathrm{i}F_0^T(Jx+It)S^{-1}F_0 + \alpha_0.$$

Този път $\alpha(x,t)$ изобщо казано не е тъждествено равна на нула и това, разбира се, води до усложняване на израза за X. След като заместим във формулата за солитонното решение

$$[J,Q] = [J, A + K_1SA^*(K_1S)^{-1}],$$

то получаваме следното

$$\begin{aligned}
Q_{e_i-e_j}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i-z_j)}}{b^2-|\alpha|^2}\Big\{b\Big[\epsilon_i\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F^*_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\epsilon_j\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F^*_{0,\bar{j}}\Big]\\
&+ (-1)^{i-1}\Big[\alpha^*\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\epsilon_i\epsilon_j\alpha\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F^*_{0,i}F^*_{0,\bar{j}}\Big]\Big\}, \quad (3.142)\\
Q_{e_i+e_j}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i+z_j)}}{b^2-|\alpha|^2}\Big\{b\big[\epsilon_i\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F^*_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j}\epsilon_j\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F^*_{0,j}\big]\\
&+ (-1)^{i-1}\big[\alpha^*\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j}\epsilon_i\epsilon_j\alpha\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F^*_{0,i}F^*_{0,j}\big]\Big\}, \quad (3.143)\\
Q_{2e_i}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu z_i}}{b^2-|\alpha|^2}\Big[2b\epsilon_iF^*_{0,i}F_{0,\bar{i}} + (-1)^{i-1}\Big(\alpha^*\mathrm{e}^{2\nu z_i}F^2_{0,\bar{i}} + \alpha\mathrm{e}^{-2\nu z_i}(F^*_{0,i})^2\Big)\Big], \quad (3.144)\\
b &= \frac{F^\dagger K_1F}{2\mathrm{i}\nu}, \qquad z_i = J_ix + I_it, \qquad \bar{i} = 2r+1-i.
\end{aligned}$$

Пример 5: Да се спрем на най-простия случай $r = 2$. В този случай се получават 4-независими полета, които удовлетворяват системата

$$\mathrm{i}(J_1-J_2)Q_{10,t} - \mathrm{i}(I_1-I_2)Q_{10,x} - 2k\left(Q_{11}Q^*_{01} - \epsilon_1\epsilon_2Q^*_{11}Q_{21}\right) = 0, \quad (3.145)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}(J_1+J_2)Q_{11,t} &- \mathrm{i}(I_1+I_2)Q_{11,x} - 2k(Q_{10}Q_{01} - \epsilon_1\epsilon_2 Q_{10}^* Q_{21}) = 0, && (3.146)\\
\mathrm{i}J_1 Q_{21,t} &- \mathrm{i}I_1 Q_{21,x} + 2kQ_{10}Q_{11} = 0, && (3.147)\\
\mathrm{i}J_2 Q_{01,t} &- \mathrm{i}I_2 Q_{01,x} - 2\epsilon_1\epsilon_2 k Q_{10}^* Q_{11} = 0, && (3.148)
\end{aligned}
$$

където $k = J_1 I_2 - J_2 I_1$. Тук отново сме употребили индексни обозначения, свързани с разложението по простите корени $e_1 - e_2$ и $2e_2$

$$
Q_\alpha \to Q_{mn}, \qquad \alpha = m\alpha_1 + n\alpha_2.
$$

Съответното 1-солитонно решение на тази 4-вълнова система се дава от

$$
\begin{aligned}
Q_{10}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_1-z_2)}}{b^2-|\alpha|^2}\left[b\left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(z_1+z_2)} F_{0,1}^* F_{0,2} + \epsilon_2 \mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)} F_{0,4} F_{0,3}^*\right)\right.\\
&+ \left.\left(\alpha^* \mathrm{e}^{\nu(z_1-z_2)} F_{0,4} F_{0,2} + \epsilon_1\epsilon_2 \alpha \mathrm{e}^{-\nu(z_1-z_2)} F_{0,1}^* F_{0,3}^*\right)\right], && (3.149)\\
Q_{11}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_1+z_2)}}{b^2-|\alpha|^2}\left[b\left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(z_1-z_2)} F_{0,1}^* F_{0,3} - \epsilon_2 \mathrm{e}^{\nu(z_1-z_2)} F_{0,4} F_{0,2}^*\right)\right.\\
&+ \left.\left(\alpha^* \mathrm{e}^{\nu(z_1+z_2)} F_{0,4} F_{0,3} - \epsilon_1\epsilon_2 \alpha \mathrm{e}^{-\nu(z_1+z_2)} F_{0,1}^* F_{0,2}^*\right)\right], && (3.150)\\
Q_{21}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu z_1}}{b^2-|\alpha|^2}\left(2b\epsilon_1 F_{0,1}^* F_{0,4} + \alpha^* \mathrm{e}^{2\nu z_1} F_{0,4}^2 + \alpha \mathrm{e}^{-2\nu z_1} (F_{0,1}^*)^2\right), && (3.151)\\
Q_{01}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu z_2}}{b^2-|\alpha|^2}\left(2b\epsilon_2 F_{0,2}^* F_{0,3} - \alpha^* \mathrm{e}^{2\nu z_2} F_{0,3}^2 - \alpha \mathrm{e}^{-2\nu z_2} (F_{0,2}^*)^2\right). && (3.152)
\end{aligned}
$$

Известно е, че $\mathfrak{sp}(4) \approx \mathfrak{so}(5)$. Това обаче не означава, че съответните решения на 4-вълновите системи непременно трябва да съвпадат. Разликата в тях произтича от това, че докато в ортогоналния случай $s \times s$ матрицата α е антисиметрична и следователно при $s = 1$ тя е тъждествено равна на 0, то в симплектичния — тя е симетрична и поради това, изобщо казано, не е равна на 0. □

Нека сега да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.115), като изберем матрицата $K_2 = \mathrm{diag}\,(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r, \vartheta_r, \ldots, \vartheta_1)$, $\vartheta_i = \pm 1$. В сила са релациите

$$
Q_{-(e_i-e_j)} = \vartheta_i\vartheta_j Q_{e_i-e_j}, \qquad Q_{-2e_i} = Q_{2e_i}, \qquad Q_{-(e_i+e_j)} = \vartheta_i\vartheta_j Q_{e_i+e_j},
$$

При тази редукция се достига до следната система от N-вълнови уравнения

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} + \vartheta_i \sum_{k<i} \vartheta_k A_{ijk} Q_{e_k-e_i} Q_{e_k-e_j}\\
&+ \sum_{i<k<j} A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k-e_j} + \vartheta_j \sum_{k>j} \vartheta_k A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_j-e_k} + \vartheta_j \sum_{k\neq i,j} \vartheta_k B_{ijk} Q_{e_i+e_k} Q_{e_k+e_j}\\
&+2C_{ij}\left(Q_{e_i+e_j} Q_{2e_j} + (-1)^{i+j}\vartheta_i\vartheta_j Q_{e_i+e_j} Q_{2e_i}\right) = 0, \qquad (3.153)\\
&\mathrm{i}J_i Q_{2e_i,t} - \mathrm{i}I_i Q_{2e_i,x} + 2\vartheta_i \sum_{k<i} \vartheta_k C_{ki} Q_{e_k-e_i} Q_{e_k+e_i} + 2\sum_{k>i} (-1)^{i+k} C_{ki} Q_{e_i-e_k} Q_{e_i+e_k} = 0, \qquad (3.154)\\
&\mathrm{i}(J_i + J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j)Q_{e_i+e_j,x} + \vartheta_j \sum_{k<j} \vartheta_k F_{ijk} Q_{e_k-e_j} Q_{e_i+e_k}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k>j} F_{ijk} Q_{e_j-e_k} Q_{e_i+e_k} + \vartheta_i \sum_{k<i} \vartheta_k G_{ijk} Q_{e_k-e_i} Q_{e_j+e_k} + \sum_{k>i} G_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_j+e_k}$$
$$-2C_{ij}(Q_{e_i-e_j} Q_{2e_j} - (-1)^{i+j} \vartheta_i \vartheta_j Q_{e_i-e_j} Q_{2e_i}) = 0 \quad (3.155)$$

Солитонните решения на тази система се получават чрез обличащия множител (3.119). В 1-солитонния случай за множителя X имаме

$$X = \frac{2\lambda^+}{4(\lambda^+)^2\alpha^2 + (F^T K_2 F)^2} \left((F^T K_2 F) K_2 F - 2\lambda^+ \alpha S F \right), \quad (3.156)$$

където F и α са същите като в предишните разглеждания. Самото решение се определя от формулата

$$[J, Q] = [J, A - K_2 S A (K_2 S)^{-1}]$$

и след като заместим изразите за X и F в нея достигаме до резултата

$$\begin{aligned}
Q_{e_i-e_j}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[a(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}}) \\
&+ (-1)^i \alpha (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,j} + (-1)^{i+j}\vartheta_i\vartheta_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,i}F_{0,\bar{j}})\Big], \quad (3.157) \\
Q_{e_i+e_j}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[a(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j}\vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,j}) \\
&+ (-1)^i \alpha (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j+1}\vartheta_i\vartheta_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,i}F_{0,j})\Big], \quad (3.158) \\
Q_{2e_i}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[2a\vartheta_i F_{0,i}F_{0,\bar{i}} + (-1)^i\alpha(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda^+ z_i} F_{0,\bar{i}}^2 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda^+ z_i} F_{0,i}^2)\Big], \quad (3.159)
\end{aligned}$$

където

$$a = \frac{F^T K_2 F}{2\lambda^+}.$$

Пример 6: Отново при $r = 2$ се получава 4-вълнова система

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(J_1 - J_2)Q_{10,t} &- \mathrm{i}(I_1 - I_2)Q_{10,x} + 2k\,(Q_{11}Q_{01} - \vartheta_1\vartheta_2 Q_{11}Q_{21}) = 0, \quad (3.160) \\
\mathrm{i}(J_1 + J_2)Q_{11,t} &- \mathrm{i}(I_1 + I_2)Q_{11,x} - 2k(Q_{10}Q_{01} + \vartheta_1\vartheta_2 Q_{10}Q_{21}) = 0, \quad (3.161) \\
\mathrm{i}J_1 Q_{21,t} &- \mathrm{i}I_1 Q_{21,x} + 2kQ_{10}Q_{11} = 0, \quad (3.162) \\
\mathrm{i}J_2 Q_{01,t} &- \mathrm{i}I_2 Q_{01,x} + 2\vartheta_1\vartheta_2 k Q_{10}Q_{11} = 0. \quad (3.163)
\end{aligned}$$

Нейното 1-солитонно решение се дава от

$$\begin{aligned}
Q_{10}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[a(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,1}F_{0,2} + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,4}F_{0,3}) \\
&- \alpha(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,4}F_{0,2} - \vartheta_1\vartheta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,1}F_{0,3})\Big], \quad (3.164) \\
Q_{11}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[a(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,1}F_{0,3} - \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1-z_2)} F_{0,4}F_{0,2}) \\
&- \alpha(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,4}F_{0,3} + \vartheta_1\vartheta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_1+z_2)} F_{0,1}F_{0,2})\Big], \quad (3.165) \\
Q_{21}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[2a\vartheta_1 F_{0,1}F_{0,4} - \alpha(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda^+ z_1} F_{0,4}^2 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda^+ z_1} F_{0,1}^2)\Big], \quad (3.166) \\
Q_{01}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\Big[2a\vartheta_2 F_{0,2}F_{0,3} + \alpha(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda^+ z_2} F_{0,3}^2 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda^+ z_2} F_{0,2}^2)\Big]. \square \quad (3.167)
\end{aligned}$$

3.4 Случай на ортогонални алгебри от серията D_r

Нека е дадена алгебра от серията $D_r \approx \mathfrak{so}(2r)$ при $r \geq 4$. Съгласно приложение A.4 Картановите елементи J и I имат вида

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_r, -J_r, \dots, -J_1), \qquad I = \operatorname{diag}(I_1, \dots, I_r, -I_r, \dots, -I_1).$$

Функцията Q се разлага по базиса на Картан-Вайл така

$$Q(x,t) = \sum_{i<j} Q_{\pm(e_i-e_j)}(x,t) E_{\pm(e_i-e_j)} + \sum_{i<j} Q_{\pm(e_i+e_j)}(x,t) E_{\pm(e_i+e_j)}.$$

Уравнението на N-те вълни (3.76) за тази алгебра добива вида

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(J_i - J_j) Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j) Q_{e_i-e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} A_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k-e_j} \\ + \sum_{k\neq i,j} B_{ijk} Q_{e_i+e_k} Q_{-(e_k+e_j)} = 0, \end{aligned} \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(J_i + J_j) Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j) Q_{e_i+e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} D_{ijk} Q_{e_i+e_k} Q_{e_j-e_k} \\ + \sum_{k\neq i,j} E_{ijk} Q_{e_i-e_k} Q_{e_k+e_j} = 0, \end{aligned} \tag{3.169}$$

където

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= C_{ij} + C_{ki} + C_{jk}, \qquad C_{ij} = J_i I_j - J_j I_i, \\ B_{ijk} &= \begin{cases} C_{ij} - C_{ki} - C_{jk}, & k < i \\ C_{ki} + C_{jk} - C_{ij}, & i < k < j \\ C_{ij} - C_{ki} - C_{jk}, & k > j \end{cases} \\ D_{ijk} &= \begin{cases} C_{jk} - C_{ij} - C_{ki}, & k < i, \\ C_{ij} + C_{ki} - C_{jk}, & i < k < j, \\ C_{ij} + C_{ki} - C_{jk}, & k > j \end{cases} \\ E_{ijk} &= \begin{cases} C_{ki} - C_{ij} - C_{jk}, & k < i, \\ C_{ki} - C_{ij} - C_{jk}, & i < k < j, \\ C_{ij} + C_{jk} - C_{ki}. \end{cases} \end{aligned}$$

Останалите $r(r-1)$ уравнения, свързани с отрицателните корени, се получават от горните с помощта на простата замяна

$$e_i,\ e_j,\ e_k \to -e_i,\ -e_j,\ -e_k.$$

И тук както в предните случаи ще разгледаме два примера на $\mathbb{Z}_2$ редуцирани системи. Нека първо да се спрем на действието на $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.80), където за матрицата K_1 е избран следния елемент на Картановата подгрупа на $SO(2r)$

$$K_1 = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r, \epsilon_r, \dots, \epsilon_1), \qquad \epsilon_k = \pm 1, \qquad k = 1, \dots, r$$

Следователно функцията Q удовлетворява връзките

$$Q_{-(e_i\pm e_j)} = -\epsilon_i\epsilon_j Q^*_{e_i\pm e_j}, \qquad i<j, \qquad i,j=1,\dots,r. \tag{3.170}$$

В резултат се получава системата

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i-J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i-I_j)Q_{e_i-e_j,x} - \sum_{k<i}\epsilon_i\epsilon_k A_{ijk}Q^*_{e_k-e_i}Q_{e_k-e_j}\\
&+\sum_{i<k<j}A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} - \sum_{k>j}\epsilon_j\epsilon_k A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q^*_{e_j-e_k} - \sum_{k\neq i,j}\epsilon_k\epsilon_j B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q^*_{e_k+e_j} = 0,
\end{aligned} \tag{3.171}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i+J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i+I_j)Q_{e_i+e_j,x} - \sum_{i\neq k<j}\epsilon_j\epsilon_k D_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q^*_{e_k-e_j}\\
&+\sum_{k>j}D_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_j-e_k} - \sum_{k<i}\epsilon_i\epsilon_k E_{ijk}Q^*_{e_k-e_i}Q_{e_k+e_j} + \sum_{i<k\neq j}E_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k+e_j} = 0
\end{aligned} \tag{3.172}$$

За да намерим нейното n-солитонно решение, прилагаме процедурата на обличане с множителя (3.87), където матрицата S се дава от

$$S_{pq} = \delta_{p,2r+1-q}, \qquad p,q=1,\dots,2r.$$

В частност, 1-солитонното решение се определя от изразите

$$Q_{e_i-e_j} = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i-z_j)}\left[\epsilon_i\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F^*_{0,i}F_{0,j} + \epsilon_j\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F^*_{0,\bar{j}}\right], \tag{3.173}$$

$$Q_{e_i+e_j} = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^\dagger K_1 F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(z_i+z_j)}\left[\epsilon_i\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F^*_{0,i}F_{0,\bar{j}} + \epsilon_j\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F^*_{0,j}\right], \tag{3.174}$$

$$F^\dagger K_1 F = \sum_{k=1}^{r}\epsilon_k\left(\mathrm{e}^{-2\nu z_k}|F_{0,k}|^2 + \mathrm{e}^{2\nu z_k}|F_{0,\bar{k}}|^2\right), \qquad \bar{k} = 2r+1-k, \tag{3.175}$$

където $z_i = J_i x + I_i t \ \forall\, i = 1,\dots,r$.

Нека сега да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.115). Избираме матрицата K_2 да бъде елемент на Картановата подгрупа от типа

$$K_2 = \mathrm{diag}\,(\vartheta_1,\dots,\vartheta_r,\vartheta_r,\dots,\vartheta_1), \tag{3.176}$$

където $\vartheta_k = \pm 1$, $\forall\, k = 1,\dots,r$. Тогава са валидни връзките

$$Q_{-(e_i\pm e_j)} = \vartheta_i\vartheta_j Q_{e_i\pm e_j}. \tag{3.177}$$

Системата от $r(r-1)$ уравнения за независимите полета има вида

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i-J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i-I_j)Q_{e_i-e_j,x} + \sum_{k<i}\vartheta_i\vartheta_k A_{ijk}Q_{e_k-e_i}Q_{e_k-e_j}\\
&+\sum_{i<k<j}A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} + \sum_{k>j}\vartheta_j\vartheta_k A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j-e_k} + \sum_{k\neq i,j}\vartheta_k\vartheta_j B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_k+e_j} = 0
\end{aligned} \tag{3.178}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(J_i+J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i+I_j)Q_{e_i+e_j,x} + \sum_{i\neq k<j}\vartheta_j\vartheta_k D_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_k-e_j}\\
&+\sum_{k>j}D_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_j-e_k} + \sum_{k<i}\vartheta_i\vartheta_k E_{ijk}Q_{e_k-e_i}Q_{e_k+e_j} + \sum_{i<k\neq j}E_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k+e_j} = 0
\end{aligned} \tag{3.179}$$

За да пресметнем n-солитонното решение, можем отново да ползваме $\mathbb{Z}_2$ редуцирания множител (3.119). По аналогия със случая на B_r серията за 1-солитонното решение получаваме до следния отговор

$$Q_{e_i-e_j}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,i}F_{0,j} - \vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i+z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}}\right), \tag{3.180}$$

$$Q_{e_i+e_j}(z) = \frac{2\lambda^+}{F^T K_2 F}\left(\vartheta_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,i}F_{0,\bar{j}} - \vartheta_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^+(z_i-z_j)} F_{0,\bar{i}}F_{0,j}\right), \tag{3.181}$$

$$F^T K_2 F = \sum_k \vartheta_k \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda^+ z_k} F_{0,k}^2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda^+ z_k} F_{0,\bar{k}}^2\right), \tag{3.182}$$

където сме използвали същите означения както и в предния случай.

4. НЕУ, СВЪРЗАНИ С ХОМОГЕННИ ПРОСТРАНСТВА II. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-РЕДУЦИРАНИ N-ВЪЛНОВИ УРАВНЕНИЯ

Резултатите, съдържащи се в тази глава, се отнасят до получаване на системи от типа на N-те вълни, получени при едновременното действие на две $\mathbb{Z}_2$ редукции или, което е същото, при действието на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция. В този смисъл главата се явява идейно продължение на предходната. N-вълновите системи, които предстои да бъдат разгледани, са свързани с алгебрите A_r, B_r и C_r и при подходящ избор на действието на групата $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ тези уравнения стават чисто реални. Тези редуцирани уравнения допускат два вида солитонни решения: "дублетни"решения, свързани с 2 чисто имагинерни дискретни собствени стойности на Лаксовия оператор L, и квадроплетни решения — с 4 собствени стойности, разположени по върховете на правоъгълник с център в началото на координатната система. Пресмятането на солитонните решения изисква адаптиране на метода на обличането към действието на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ групата на редукциите. Това може да се осъществи по два начина, което е причината за наличието на споменатите два вида солитони.

4.1 Случай на специалната линейна алгебра

Нека да разгледаме N-вълнова система, свързана с алгебрата $\mathfrak{sl}(r+1)$. В конкретния случай матриците $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_{r+1})$ и $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, \ldots, I_{r+1})$ имат нулеви следи, т. е.

$$\sum_{k=1}^{r+1} J_k = \sum_{k=1}^{r+1} I_k = 0.$$

Матрицата $Q(x,t)$ се разлага по базиса на Вайл за $\mathfrak{sl}(r+1)$

$$Q(x,t) = \sum_{\alpha\in\Delta} Q_\alpha(x,t) E_\alpha = \sum_{i\neq j} Q_{ij}(x,t) E_{ij},$$

където $(E_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$. Уравнението на N-те вълни може да се запише по компоненти така

$$\mathrm{i}(J_i - J_j) Q_{ij,\,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j) Q_{ij,\,x} - \sum_{k\neq i,j} c_{ij\,k} Q_{ik} Q_{kj} = 0, \qquad (4.1)$$

където

$$c_{ij\,k} = J_i I_k - J_k I_i - J_i I_j + J_j I_i + J_k I_j - J_j I_k.$$

Нека да наложим $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция от типа

$$K_1 \left[\psi^\dagger(x, \lambda^*)\right]^{-1} K_1^{-1} = \tilde{\psi}(x, \lambda) \tag{4.2}$$

$$K_2 \left[\psi^T(x, -\lambda)\right]^{-1} K_2^{-1} = \tilde{\psi}(x, \lambda), \tag{4.3}$$

където матриците $K_{1,2} \in SL(r+1)$ удовлетворяват условието: $[K_1, K_2] = 0$. Потенциалът $U(x, \lambda)$ удовлетворява следните равенства

$$K_1 U^\dagger(x, \lambda^*) K_1^{-1} = U(x, \lambda) \quad \Rightarrow \quad K_1 J^* K_1^{-1} = J, \qquad K_1 Q^\dagger K_1^{-1} = -Q, \tag{4.4}$$

$$K_2 U^T(x, -\lambda) K_2^{-1} = -U(x, \lambda) \quad \Rightarrow \quad K_2 J K_2^{-1} = J, \qquad K_2 Q^T K_2^{-1} = Q. \tag{4.5}$$

В настоящото разглеждане ще приемем, че $K_1 = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{r+1}) \in SL(r+1)$, $\epsilon_k = \pm 1$ за всяко $k = 1, \ldots, r+1$, а $K_2 = \mathbb{1}$. Тогава симетрийните условия (4.4) и (4.5), разписани по компонентите на Q, изглеждат по следния начин

$$Q_{ji} = -\epsilon_i \epsilon_j Q_{ij}^*, \qquad Q_{ji} = Q_{ij} \tag{4.6}$$

В резултат от действието на редукцията броят на "степените на свобода"намалява 4 пъти: остават $r(r+1)/2$ независими полета, които са реални или имагинерни в зависимост от знаците на ϵ_j.

За да намерим 1-солитонното решение на (4.1) трябва да отчетем, че обличащият множител е инвариантен относно $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукцията

$$K_1 \left[g^\dagger(x, \lambda^*)\right]^{-1} K_1^{-1} = g(x, \lambda), \tag{4.7}$$

$$\left[g^T(x, -\lambda)\right]^{-1} = g(x, \lambda). \tag{4.8}$$

За да осигурим изпълнението на по-горните условия, можем да използваме анзаца на Захаров-Шабат за $\mathfrak{sl}(r+1)$ (формула (3.43)) и тогава получаваме, че дискретните собствени стойности са имагинерни: $\lambda^\pm = \pm \mathrm{i}\nu$, а векторите n и m са свързани помежду си

$$m = K_1 n^*, \qquad m = n. \tag{4.9}$$

Тъй като в солитонния сектор $\chi_0^\pm(x, \lambda^\pm) = \exp(\pm \nu J x)$ са реални функции, от (3.53) следва, че връзки подобни на по-горните съществуват и за поляризационните вектори n_0 и m_0

$$m_0 = K_1 n_0^*, \qquad m_0 = n_0. \tag{4.10}$$

Комбинирайки двете по-горни условия и използвайки вида на матрицата K_1, достигаме до извода, че компонентите на вектора n_0 са или реални, или имагинерни. Съответното 1-солитонно решение съгласно (3.45) при $q_0 = 0$ (съотв. $Q_0 = 0$) се дава от

$$[J, Q^{1\mathrm{s}}] = -2\mathrm{i}\nu [J, P], \qquad P = \frac{n n^T}{n^T n}. \tag{4.11}$$

Солитонното решение, написано по компонентни, изглежда така

$$Q_{ij}^{1s}(z) = -2\mathrm{i}\nu \frac{\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)} n_{0,i} n_{0,j}}{\Delta}, \qquad i \neq j, \qquad i,j = 1,\ldots,r+1, \tag{4.12}$$

където

$$\Delta = \sum_k \mathrm{e}^{2\nu z_k} n_{0,k}^2 \qquad z_i = J_i x + I_i t. \tag{4.13}$$

Знаменателят в конкретния случай е добре дефиниран, само ако знаците на всички ϵ_i са еднакви, например при $K_1 = \mathbb{1}$. В противен случай са налице "взривяващи"се солитони.

В частния случай на специална линейна алгебра $\mathfrak{sl}(3)$ при $K_1 = \mathbb{1}$ се получават три независими имагинерни полета [51]

$$Q_{10}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{10}(x,t), \qquad Q_{01}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{01}(x,t), \qquad Q_{11}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{11}(x,t),$$

където отново сме употребили индексни обозначения, свързани с разложението по простите корени

$$Q_\alpha = Q_{mn}, \qquad \alpha = m\alpha_1 + n\alpha_2.$$

Съответната 3-вълнова система има вида

$$(J_1 - J_2)\mathbf{Q}_{10,t} - (I_1 - I_2)\mathbf{Q}_{10,x} + 3k\mathbf{Q}_{11}\mathbf{Q}_{01} = 0, \tag{4.14}$$

$$(2J_1 + J_2)\mathbf{Q}_{11,t} - (2I_1 + I_2)\mathbf{Q}_{11,x} - 3k\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{01} = 0, \tag{4.15}$$

$$(2J_2 + J_1)\mathbf{Q}_{01,t} - (2I_2 + I_1)\mathbf{Q}_{01,x} + 3k\mathbf{Q}_{10}\mathbf{Q}_{11} = 0. \tag{4.16}$$

Нейното солитонно решение се дава от изразите

$$\mathbf{Q}_{10}(x,t) = -\frac{2\nu e^{\nu(z_1+z_2)} n_{0,1} n_{0,2}}{e^{2\nu z_1} n_{0,1}^2 + e^{2\nu z_2} n_{0,2}^2 + e^{-2\nu(z_1+z_2)} n_{0,3}^2}, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{Q}_{11}(x,t) = -\frac{2\nu e^{-\nu z_2} n_{0,1} n_{0,3}}{e^{2\nu z_1} n_{0,1}^2 + e^{2\nu z_2} n_{0,2}^2 + e^{-2\nu(z_1+z_2)} n_{0,3}^2}, \tag{4.18}$$

$$\mathbf{Q}_{01}(x,t) = -\frac{2\nu e^{-\nu z_1} n_{0,2} n_{0,3}}{e^{2\nu z_1} n_{0,1}^2 + e^{2\nu z_2} n_{0,2}^2 + e^{-2\nu(z_1+z_2)} n_{0,3}^2}. \tag{4.19}$$

При наличието на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция от типа (4.4)–(4.5) освен 1-солитонни решения от "дублетен"тип, т. е. такива, които са асоциирани с 2 дискретни собствени стойности $\{\pm \mathrm{i}\nu\}$ (дублет) на оператора на разсейване L, са възможни и такива с 4 собствени стойности $\{\pm\lambda^+, \pm(\lambda^+)^*\}$ (квадроплет). Ситуацията тук доста напомня на уравнението sin-Гордън (вж. приложение Б), което освен топологични солитони допуска и дишащи солитони[1].

[1] Много автори разглеждат дишащите солитони като специален частен случай на 2-солитонното решение. Основание за това дава фактът, че то се свързва с 2 двойки собствени стойности на Лаксовия оператор. От друга страна обаче, симетричното разположение на собствените стойности води до образуването на обект, който се движи като едно единно цяло и извършва сложни "вътрешни"движения, поради присъствието на допълнителни степени на свобода. По тази причина ние интерпретираме този вид решения като друг тип едносолитонни решения.

"Квадроплетен"тип решения се получават, ако се използва обличане с множител

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + (c(\lambda) - 1)A(x) + \left(\frac{1}{c(-\lambda)} - 1\right) B(x), \tag{4.20}$$

където $c(\lambda) = (\lambda - \lambda^+)/(\lambda - \lambda^-)$, а $r+1 \times r+1$ матриците $A(x)$ и $B(x)$ предстои да бъдат определени. Обратният множител на (4.20) ще търсим във вида

$$[g(x,\lambda)]^{-1} = \mathbb{1} + \left(\frac{1}{c(\lambda)} - 1\right) C(x) + (c(-\lambda) - 1)\, D(x). \tag{4.21}$$

Модифицираният множител (4.20) следва да бъде $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ инвариантен, с други думи да удовлетворява (4.7) и (4.8). От тях и от (4.21) следва, че $\lambda^+ = (\lambda^-)^* = \mu + \mathrm{i}\nu$ и

$$B = K_1 A^* K_1^{-1}, \qquad C = K_1 A^\dagger K_1^{-1}, \qquad D = A^T. \tag{4.22}$$

Тъй като условието $gg^{-1} = \mathbb{1}$ трябва да е изпълнено тъждествено по λ, то нулирането на резидуумите на функцията gg^{-1} води до алгебричните връзки

$$A\left(\mathbb{1} - C + \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu - \mathrm{i}\nu} D\right) = 0, \tag{4.23}$$

$$\left(\mathbb{1} - A - \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu + \mathrm{i}\nu} B\right) C = 0, \tag{4.24}$$

$$\left(\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu - \mathrm{i}\nu} A - B\right) D = 0, \tag{4.25}$$

$$B\left(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu + \mathrm{i}\nu} C - D\right) = 0. \tag{4.26}$$

Нека да въведем разложението

$$\begin{aligned} A(x) &= X(x)F^T(x,), \qquad & B(x) &= Y(x)G^T(x), \\ C(x) &= G(x)Y^T(x), \qquad & D(x) &= F(x)X^T(x), \end{aligned}$$

където множителите $X(x)$, $F(x)$, $Y(x)$ и $G(x)$ са матрици $r+1 \times s$. За да решим системата (4.23)–(4.26), е достатъчно да поискаме валидността на равенствата

$$F^T\left(\mathbb{1} - GY^T + \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu - \mathrm{i}\nu} FX^T\right) = 0, \tag{4.27}$$

$$G^T\left(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}\nu}{\mu + \mathrm{i}\nu} GY^T - FX^T\right) = 0. \tag{4.28}$$

Те могат да се разглеждат като линейна система за множителите X и Y. В матрични обозначения тази система има вида

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

където

$$a = F^{\dagger}K_1F, \qquad b = -\frac{\mathrm{i}\nu}{\mu-\mathrm{i}\nu}F^TF.$$

При извода на по-горните съотношения сме използвали, че съгласно (4.22) са в сила

$$Y = K_1X^*, \qquad G = K_1F^*. \tag{4.30}$$

Решаването на (4.29) води до следния резултат за множителя X

$$X = \frac{aG - b^*H}{a^2-|b|^2} = \frac{aK_1F^* - b^*F}{a^2-|b|^2}. \tag{4.31}$$

Другият множител F може да се намери като се използва диференциалното уравнение (3.3) и се приравнят на нула резидуумите на съответните функции. По този начин се показва, че F се изразява с помощта на фундаменталното аналитично решение χ_0^- по следния начин

$$F^T(x) = F_0^T[\chi_0^-(x,\lambda^-)]^{-1}, \qquad F_0 = \mathrm{const}. \tag{4.32}$$

За да пресметнем 1-солитонното решение, взимаме границата $\lambda\to\infty$ в (3.3) и заместваме $q_0\equiv 0$ в него. Така се стига до следния израз

$$Q_{ij}^{1\mathrm{s}} = -2\mathrm{i}\nu[A_{ij} + (K_1A^*K_1^{-1})_{ij}], \qquad i\neq j. \tag{4.33}$$

В частност, при $K_1 = \mathbb{1}$ се получава

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{1\mathrm{s}} &= -\frac{4\mathrm{i}\nu}{a^2-|b|^2}\left[a\mathrm{Re}\,(F_i^*F_j) - \mathrm{Re}\,(b^*F_iF_j)\right] \\ &= -\frac{4\mathrm{i}\nu}{a^2-|b|^2}\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}|F_{0,i}F_{0,j}|\,\{a\cos[\mu(z_i-z_j)+\delta_i-\delta_j] \\ &- b^{\mathrm{R}}\cos[\mu(z_i+z_j)+\delta_i+\delta_j] - b^{\mathrm{I}}\sin[\mu(z_i+z_j)+\delta_i+\delta_j]\big\}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

където $b = b^{\mathrm{R}}+\mathrm{i}b^{\mathrm{I}}$, $\delta_i = \arg F_{0,i}$, а z_i и сега се определя от (4.13). В най-простия 3-вълнов случай имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{10} &= -\frac{4\nu}{a^2-|b|^2}\mathrm{e}^{\nu(z_1+z_2)}|F_{0,1}F_{0,2}|\,\{a\cos[\mu(z_1-z_2)+\delta_1-\delta_2] \\ &- b^{\mathrm{R}}\cos[\mu(z_1+z_2)+\delta_1+\delta_2] - b^{\mathrm{I}}\sin[\mu(z_1+z_2)+\delta_1+\delta_2]\big\}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= -\frac{4\nu}{a^2-|b|^2}\mathrm{e}^{-\nu z_2}|F_{0,1}F_{0,3}|\,\{a\cos[\mu(2z_1+z_2)+\delta_1-\delta_3] \\ &- b^{\mathrm{R}}\cos(\mu z_2-\delta_1-\delta_3) + b^{\mathrm{I}}\sin(\mu z_2-\delta_1-\delta_3)\big\}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{01} &= -\frac{4\nu}{a^2-|b|^2}\mathrm{e}^{-\nu z_1}|F_{0,2}F_{0,3}|\,\{a\cos[\mu(z_1+2z_2)+\delta_2-\delta_3] \\ &- b^{\mathrm{R}}\cos(\mu z_1-\delta_2-\delta_3) + b^{\mathrm{I}}\sin(\mu z_1-\delta_2-\delta_3)\big\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

За да се пресметне n-солитонно решение, състоящо се от n_1 дублета и n_2 квадроплета, може да се използва следния по-общ анзац за обличащия множител

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n_1}\frac{P_l(x)}{\lambda+\mathrm{i}\nu_l} + \sum_{l=1}^{n_2}\left(\frac{A_l(x)}{\lambda-\lambda_l^-} + \frac{K_1A_l^*(x)K_1^{-1}}{\lambda+\lambda_l^+}\right). \tag{4.38}$$

Самото решение се определя от формулата

$$[J, Q(x)] = \sum_{l=1}^{n_1}[J, P_l(x)] + \sum_{l=1}^{n_2}[J, A_l(x) + K_1 A_l^*(x) K_1^{-1}]. \tag{4.39}$$

4.2 Случай на ортогонална алгебра

Нека се върнем отново на N-вълново уравнение, асоциирано с $\mathfrak{so}(2r+1)$. Да наложим $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция от типа (4.2)–(4.3), където K_1 и K_2 са елементи на Картановата подгрупа. По-специално, избираме K_1 от вида (3.81), а $K_2 = \mathbb{1}$. При конкретния избор на редукция $U(x,\lambda)$ удовлетворява едновременно (4.4) и (4.5). Това води до r^2 независими полета, които са или чисто реални, или чисто имагинерни

$$Q^*_{e_i-e_j} = -\epsilon_i\epsilon_j Q_{e_i-e_j}, \qquad Q^*_{e_i} = -\epsilon_i Q_{e_i}, \qquad Q^*_{e_i+e_j} = -\epsilon_i\epsilon_j Q_{e_i+e_j}, \qquad i<j.$$

За тях са в сила следните уравнения

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} + C_{ij}Q_{e_i}Q_{e_j} \\ &\quad + \sum_{k<i} A_{ijk}Q_{e_k-e_i}Q_{e_k-e_j} + \sum_{i<k<j} A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} \\ &+ \sum_{k>j} A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j-e_k} + \sum_{k\neq i,j} B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_k+e_j} = 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}J_iQ_{e_i,t} - \mathrm{i}I_iQ_{e_i,x} + \sum_{k<i} C_{ki}Q_{e_k-e_i}Q_{e_k} + \sum_{k>i} C_{ki}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k} \\ + \sum_{k\neq i} D_{ik}Q_{e_i+e_k}Q_{e_k} = 0, \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i + J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j)Q_{e_i+e_j,x} + (-1)^{j+r+1}C_{ij}Q_{e_i}Q_{e_j} \\ &\quad + \sum_{i\neq k<j} F_{ijk}Q_{e_k-e_j}Q_{e_i+e_k} + \sum_{k>j} F_{ijk}Q_{e_j-e_k}Q_{e_i+e_k} \\ &+ \sum_{k<i} G_{ijk}Q_{e_k-e_i}Q_{e_j+e_k} + \sum_{i<k\neq j} G_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_j+e_k} = 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

За тези уравнения могат да бъдат намерени частни решения с метода на обличането, като се използва множител, който удовлетворява равенства (4.7) и (4.8). Както видяхме в случая на специалната линейна алгебра, при наличието на $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ редукция възникват 2 различни типа решения в зависимост от това какъв обличащ множител използваме — с 1 или с 2 полюса. В първия случай решенията съответстват на 2 дискретни собствени стойности $\pm\mathrm{i}\nu$ на L оператора, а във втория — на 4 собствени стойности $\pm\lambda^+, \pm(\lambda^+)^*$. За получаване на дублетен тип солитони в ортогоналния случай трябва да се използва обличащ множител от типа

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda - \mathrm{i}\nu} + \frac{K_1SA^*(x)S^{-1}K_1^{-1}}{\lambda + \mathrm{i}\nu}, \qquad K_1A^*(x)K_1^{-1} = -A(x). \tag{4.43}$$

където $A(x)$ се дава от израза

$$A(x) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^T(x)F(x)}F(x)F^T(x), \qquad F(x) = e^{-\nu Jx}F_0.$$

Множителят (4.43) е по построение съгласуван с условията (4.7)–(4.8). Тогава за солитонното решение получаваме

$$Q_{e_i-e_j}(z) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^TF}\left[\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}}\right], \tag{4.44}$$

$$Q_{e_i}(z) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^TF}\left[\mathrm{e}^{-\nu z_i}F_{0,i}F_{0,r+1} + (-1)^{i+r}\mathrm{e}^{\nu z_i}F_{0,\bar{i}}F_{0,r+1}\right], \tag{4.45}$$

$$Q_{e_i+e_j}(z) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{F^TF}\left[\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,j}\right], \tag{4.46}$$

$$F^TF = \sum_{k=1}^{r}\left(\mathrm{e}^{-2\nu z_k}F_{0,k}^2 + e^{2\nu z_k}F_{0,\bar{k}}^2\right) + F_{r+1}^2, \qquad z_k = J_kx + I_kt.$$

В най-простия случай на $\mathbf{B}_2$ алгебрата при $K_1 = \mathbb{1}$ получаваме следната $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-редуцирана реална 4-вълнова система

$$(J_1 - J_2)\mathbf{Q}_{10,t} - (I_1 - I_2)\mathbf{Q}_{10,x} + k\mathbf{Q}_{11}\mathbf{Q}_{01} = 0, \tag{4.47}$$

$$J_1\mathbf{Q}_{11,t} - I_1\mathbf{Q}_{11,x} + k(\mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{10})\mathbf{Q}_{01} = 0, \tag{4.48}$$

$$(J_1 + J_2)\mathbf{Q}_{12,t} - (I_1 + I_2)\mathbf{Q}_{12,x} - k\mathbf{Q}_{11}\mathbf{Q}_{01} = 0, \tag{4.49}$$

$$J_2\mathbf{Q}_{01,t} - I_2\mathbf{Q}_{01,x} + k(\mathbf{Q}_{10} + \mathbf{Q}_{12})\mathbf{Q}_{11} = 0, \tag{4.50}$$

където $\mathbf{Q}_{10}(x,t)$, $\mathbf{Q}_{11}(x,t)$, $\mathbf{Q}_{12}(x,t)$ и $\mathbf{Q}_{01}(x,t)$ са реални полета, дефинирани с помощта на равенствата

$$Q_{10}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{10}(x,t), \qquad Q_{11}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{11}(x,t),$$
$$Q_{12}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{12}(x,t), \qquad Q_{01}(x,t) = \mathrm{i}\mathbf{Q}_{01}(x,t).$$

Както в аналогичните случаи преди, и тук индексите съответстват на разложението по простите корени на $\mathbf{B}_2$ и $k = J_1I_2 - J_2I_1$.

Дублетното солитонно решение (4.44)–(4.46) за този частен случай добива вида

$$\mathbf{Q}_{10}(x,t) = \frac{2\nu}{F^TF}\left(e^{-\nu[(J_1+J_2)x+(I_1+I_2)t]}F_{0,1}F_{0,2} + e^{\nu[(J_1+J_2)x+(I_1+I_2)t]}F_{0,5}F_{0,4}\right), \tag{4.51}$$

$$\mathbf{Q}_{11}(x,t) = \frac{2\nu}{F^TF}\left(e^{-\nu(J_1x+I_1t)}F_{0,1}F_{0,3} - e^{\nu(J_1x+I_1t)}F_{0,5}F_{0,3}\right), \tag{4.52}$$

$$\mathbf{Q}_{12}(x,t) = \frac{2\nu}{F^TF}\left(e^{-\nu[(J_1-J_2)x+(I_1-I_2)t]}F_{0,1}F_{0,4} + e^{\nu[(J_1-J_2)x+(I_1-I_2)x]}F_{0,5}F_{0,2}\right) \tag{4.53}$$

$$\mathbf{Q}_{01}(x,t) = \frac{2\nu}{F^TF}\left(e^{-\nu(J_2x+I_2t)}F_{0,2}F_{0,3} + e^{\nu(J_2x+I_2t)}F_{0,4}F_{0,3}\right). \tag{4.54}$$

Тази решения могат да се презапишат удобно с помощта на хиперболични функции по следния начин

$$\mathbf{Q}_{10}(x,t) = \frac{4\nu}{F^TF}N_1N_2\cosh\{\nu[(J_1+J_2)x + (I_1+I_2)t] + \xi_1 + \xi_2\}, \tag{4.55}$$

$$\mathbf{Q}_{11}(x,t) = -\frac{4\nu}{F^T F} N_1 F_{0,3} \sinh[\nu(J_1 x + I_1 t) + \xi_1], \tag{4.56}$$

$$\mathbf{Q}_{12}(x,t) = \frac{4\nu}{F^T F} N_1 N_2 \cosh\{\nu[(J_1 - J_2)x + (I_1 - I_2)t] + \xi_1 - \xi_2\}, \tag{4.57}$$

$$\mathbf{Q}_{01}(x,t) = \frac{4\nu}{F^T F} N_2 F_{0,3} \cosh[\nu(J_2 x + I_2 t) + \xi_2], \tag{4.58}$$

$$F^T(x,t)F(x,t) = 2\sum_{\sigma=1,2} N_\sigma^2 \cosh 2[\nu(J_\sigma x + I_\sigma t) + \xi_\sigma] + F_{0,3}^2,$$

където за определеност сме приели, че е в сила $F_{0,k} > 0$ за $k = 1,2,4,5$, и следователно по-долните изрази имат смисъл

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{F_{0,5}}{F_{0,1}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{F_{0,4}}{F_{0,2}}, \qquad N_1 = \sqrt{F_{0,1}F_{0,5}}, \qquad N_2 = \sqrt{F_{0,2}F_{0,4}}.$$

По-специално, ако допълнително предположим, че $F_{0,1} = F_{0,5}$ и $F_{0,2} = F_{0,4}$, то прилагането на същото параметризиране като в (3.133) дава следния резултат

$$\mathbf{Q}_{10}(x,t) = \frac{\nu}{\Delta_D}\sinh(2\theta_0)\cosh\nu[(J_1 + J_2)x + (I_1 + I_2)t], \tag{4.59}$$

$$\mathbf{Q}_{11}(x,t) = -\frac{2\sqrt{2}\nu}{\Delta_D}\sinh\theta_0 \sinh\nu(J_1 x + I_1 t), \tag{4.60}$$

$$\mathbf{Q}_{12}(x,t) = \frac{\nu}{\Delta_D}\sinh(2\theta_0)\cosh\nu[(J_1 - J_2)x + (I_1 - I_2)t], \tag{4.61}$$

$$\mathbf{Q}_{01}(x,t) = \frac{2\sqrt{2}\nu}{\Delta_D}\cosh\theta_0 \cosh\nu(J_2 x + I_2 t). \tag{4.62}$$

където

$$\Delta_D(x,t) = 2\left(\sinh^2\theta_0 \sinh^2\nu(J_1 x + I_1 t) + \cosh^2\theta_0 \cosh^2\nu(J_2 x + I_2 t)\right), \qquad \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

Едновременното удовлетворяване на двете условия за $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ инвариантността на обличащия множител може да се постигне и чрез подходяща модификация на самия множител [58, 55]. За целта е достатъчно да се добавят 2 допълнителни полюса към множителя, така че се получава следният 4-полюсен множител

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda - \lambda^+} + \frac{K_1 S A^*(x)(K_1 S)^{-1}}{\lambda - (\lambda^+)^*} - \frac{S A(x) S^{-1}}{\lambda + \lambda^+} - \frac{K_1 A^*(x) K_1^{-1}}{\lambda + (\lambda^+)^*}. \tag{4.63}$$

Солитонното решение, което се получава при обличане с множителя (4.63), се определя от израза

$$[J, Q] = [J, A + K_1 S A^* S K_1 - SAS - K_1 A^* K_1]. \tag{4.64}$$

За да пресметнем решението ни е нужна матрицата $A(x)$. Алгоритъмът за нейното намиране е подобен на този разгледан в обшата част на тази глава — матрицата $A(x)$ се представя като произведение на 2 правоъгълни $2r+1 \times s$ матрици $X(x)$ и $F(x)$, след това за множителя X се извежда линейното уравнение

$$\left(\mathbb{1} - \frac{SA(x)S}{2\lambda^+} + \frac{K_1 S A^*(x) S K_1}{2\mathrm{i}\nu} - \frac{K_1 A^*(x) K_1}{2\mu}\right) SF(x) = X(x)\alpha(x). \tag{4.65}$$

За другия множител $F(x)$ и квадратната $s\times s$ матрица $\alpha(x)$ се показва, че са решения на линейните диференциални уравнения

$$\mathrm{i}\partial_x F^T - F^T(q_0-\lambda^+ J) = 0, \tag{4.66}$$

$$\mathrm{i}\partial_x \alpha + F^T J S^{-1} F = 0, \tag{4.67}$$

В солитонния сектор тяхното интегриране води до резултата

$$F(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ Jx}F_0, \qquad \alpha(x) = \mathrm{i}F_0^T JSF_0 x.$$

Остава да се пресметне X, което става чрез извеждането от (4.65) на линейната система

$$\begin{pmatrix} SF, & SG, & SH, & SN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X, & Y, & Z, & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c \\ a & \alpha & c & b \\ b^* & c^* & \alpha^* & a^* \\ c^* & b^* & a^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{4.68}$$

където

$$\begin{aligned} Y(x) &= SX(x), \qquad Z(x) = K_1SX^*(x), \qquad W(x) = K_1X^*(x), \\ G(x) &= SF(x), \quad H(x) = K_1SF^*(x), \qquad N(x) = K_1F^*(x), \\ a(x) &= \frac{F^T(x)F(x)}{2\lambda^+}, \qquad b(x) = \frac{F^T(x)K_1F^*(x)}{2\mathrm{i}\nu}, \qquad c(x) = \frac{F^T(x)SK_1F^*(x)}{2\mu}. \end{aligned}$$

В най-простия случай, когато $\mathrm{rank}X = \mathrm{rank}F = s = 1$ и следователно $\alpha\equiv 0$, от системата (4.68) достигаме до

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(x,t)}\begin{pmatrix} 0 & a^* & b & -c \\ a^* & 0 & -c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} SF \\ SG \\ SH \\ SN \end{pmatrix},$$

където

$$\Delta = |a|^2 + b^2 - c^2.$$

Оттук намираме, че

$$X = \frac{a^*F + bK_1F^* - cK_1SF^*}{|a|^2+b^2-c^2}.$$

След като заместим по-горния израз за $X(x)$ в (4.64), се получава следния сложен израз

$$\begin{aligned} &[J,Q(x)] = \frac{1}{\Delta}\left[J,\left\{a^*(x)F(x)+b(x)K_1F^*(x)-c(x)K_1SF^*(x)\right\}F^T(x)\right. \\ &-S\left\{a^*(x)F(x)+b(x)K_1F^*(x)-c(x)K_1SF^*(x)\right\}F^T(x)S \\ &+K_1S\left\{a(x)F^*(x)-b(x)K_1F(x)-c(x)K_1SF(x)\right\}F^\dagger(x)SK_1 \\ &\left.-K_1\left\{a(x)F^*(x)-b(x)K_1F(x)-c(x)K_1SF(x)\right\}F^\dagger(x)K_1)\right]. \end{aligned}$$

Възстановяването на времевата еволюция в решението Q става по формулите

$$F_0 \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ It} F_0, \qquad \alpha_0 \to \mathrm{i}t F_0^T ISF_0 + \alpha_0.$$

В частност, при $K_1 = \mathbb{1}$ полученото решение е чисто имагинерно и може да се запише така

$$\begin{aligned}[J, Q(x,t)] = \frac{2\mathrm{i}}{\Delta}\mathrm{Im}\, &\left[\{a^*(x,t)F(x,t) + b(x,t)K_1F^*(x,t) - c(x,t)K_1SF^*(x,t)\}\, F^T(x,t)\right. \\ &\left. -S\,\{a^*(x,t)F(x,t) + b(x,t)K_1F^*(x,t) - c(x,t)K_1SF^*(x,t)\}\, F^T(x,t)S\right].\end{aligned}$$

В случая на 4-вълновата система, свързана с $\mathbf{B}_2$, за квадроплетното решение получаваме

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{10}(x,t) &= \frac{4}{\Delta}\mathrm{Im}\left[a^*N_1\cosh(\varphi_1+\varphi_2) - \frac{\mathrm{i}mN_1^*}{\mu\nu}\left(\mu\cosh(\varphi_1^*+\varphi_2) - \mathrm{i}\nu\cosh(\varphi_1^*-\varphi_2)\right)\right] N_2 \\
\mathbf{Q}_{11}(x,t) &= \frac{4}{\Delta}\mathrm{Im}\left[a^*N_1\sinh(\varphi_1) - \frac{\mathrm{i}m\lambda^+}{\mu\nu}N_1^*\sinh(\varphi_1^*)\right] F_{0,3} \\
\mathbf{Q}_{12}(x,t) &= \frac{4}{\Delta}\mathrm{Im}\left[a^*N_1\cosh(\varphi_1-\varphi_2) - \frac{\mathrm{i}mN_1^*}{\mu\nu}\left(\mu\cosh(\varphi_1^*-\varphi_2) - \mathrm{i}\nu\cosh(\varphi_1^*+\varphi_2)\right)\right] N_2 \\
\mathbf{Q}_{01}(x,t) &= \frac{4}{\Delta}\mathrm{Im}\left[a^*N_2\cosh(\varphi_2) - \frac{\mathrm{i}m\lambda^{+*}}{\mu\nu}N_2^*\cosh(\varphi_2^*)\right] F_{0,3}.
\end{aligned}$$

където

$$\begin{gathered}
a(x,t) = \frac{1}{\mu+\mathrm{i}\nu}\left[N_1^2\cosh 2\varphi_1 + N_2^2\cosh 2\varphi_2 + \frac{F_{0,3}^2}{2}\right], \qquad b(x,t) = \frac{m(x,t)}{\mathrm{i}\nu}, \\
c(x,t) = \frac{m(x,t)}{\mu}, m(x,t) = |N_1|^2\cosh(2\mathrm{Re}\ \varphi_1) + |N_2|^2\cosh(2\mathrm{Re}\ \varphi_2) + \frac{|F_{0,3}|^2}{2}, \\
N_\sigma = \sqrt{F_{0,\sigma}F_{0,6-\sigma}}, \qquad \varphi_\sigma(x,t) = \mathrm{i}\lambda^+(J_\sigma x + I_\sigma t) + \frac{1}{2}\log\frac{F_{0,\sigma}}{F_{0,6-\sigma}}, \qquad \sigma = 1,2.
\end{gathered}$$

И сега е възможно да се конструират по-сложни n-солитонни решения, което става с помощта на множители от типа

$$\begin{aligned}
g(x,\lambda) &= \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n_1}\left(\frac{A_l(x)}{\lambda - \mathrm{i}\nu_l} + \frac{K_1SA_l^*(x)(K_1S)^{-1}}{\lambda + \mathrm{i}\nu_l}\right) + \sum_{l}^{n_2}\left(\frac{B_l(x)}{\lambda - \lambda_l^+}\right. \\
&+ \left.\frac{K_1SB_l^*(x)(K_1S)^{-1}}{\lambda - (\lambda_l^+)^*} - \frac{SB_l(x)S^{-1}}{\lambda + \lambda_l^+} - \frac{K_1B_l^*(x)K_1^{-1}}{\lambda + (\lambda_l^+)^*}\right),
\end{aligned} \tag{4.69}$$

където резидуумите A_l и B_l подлежат на определяне. Съответното решение се получава по формулата

$$\begin{aligned}
[J, Q(x)] &= \sum_{l=1}^{n_1}[J, A_l(x) + K_1SA_l^*(x)(K_1S)^{-1}] + \sum_{l=1}^{n_2}[J, B_l(x) + K_1SB_l^*(x)(K_1S)^{-1} \\
&- SB_l(x)S^{-1} - K_1B_l^*(x)K_1^{-1}].
\end{aligned} \tag{4.70}$$

4.3 Случай на симплектична алгебра

Нека да разгледаме N-вълново уравнение за $\mathfrak{sp}(2r)$ при наложена $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция от типа (4.2)–(4.3), където $K_1 = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r, \epsilon_r, \dots, \epsilon_1)$ и $K_2 = \mathbb{1}$. Комбинираното действие на двете $\mathbb{Z}_2$ редукции води до r^2 независими полета, които са или чисто реални, или чисто имагинерни

$$Q^*_{e_i-e_j} = -\epsilon_i\epsilon_j Q_{e_i-e_j}, \qquad Q^*_{2e_i} = -Q_{2e_i}, \qquad Q^*_{e_i+e_j} = -\epsilon_i\epsilon_j Q_{e_i+e_j}.$$

За тях са в сила следните уравнения

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i - J_j)Q_{e_i-e_j,t} - \mathrm{i}(I_i - I_j)Q_{e_i-e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} A_{ijk}Q_{e_i-e_k}Q_{e_k-e_j} \\ &+ \sum_{k\neq i,j} B_{ijk}Q_{e_i+e_k}Q_{e_k+e_j} + 2C_{ij}\left(Q_{e_i+e_j}Q_{2e_j} + (-1)^{i+j}Q_{e_i+e_j}Q_{2e_i}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\mathrm{i}J_iQ_{2e_i,t} - \mathrm{i}I_iQ_{2e_i,x} + 2\sum_{k<i} C_{ki}Q_{e_k-e_i}Q_{e_k+e_i} + 2\sum_{k>i}(-1)^{i+k}C_{ki}Q_{e_i-e_k}Q_{e_i+e_k} = 0, \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(J_i + J_j)Q_{e_i+e_j,t} - \mathrm{i}(I_i + I_j)Q_{e_i+e_j,x} + \sum_{k\neq i,j} F_{ijk}Q_{e_k-e_j}Q_{e_i+e_k} \\ &+ \sum_{k\neq i,j} G_{ijk}Q_{e_k-e_i}Q_{e_j+e_k} - 2C_{ij}(Q_{e_i-e_j}Q_{2e_j} - (-1)^{i+j}Q_{e_i-e_j}Q_{2e_i}) = 0, \end{aligned} \tag{4.73}$$

коефициентите A_{ijk}, B_{ijk} и т.н. съвпадат с въведените в параграф 3.3.

Както и в предишните случаи действието на $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ определя наличието на дублетни и квадроплетни солитонни решения. Дублетният тип солитонно решение се получава при обличане с двуполюсния множител (4.43). За множителя X след като отчетем допълнителните съотношения

$$\lambda^+ = \mathrm{i}\nu, \qquad \alpha^* = -\alpha, \qquad F^* = K_1F,$$

от (3.156) се получава

$$X = \frac{2\mathrm{i}\nu}{-4\nu^2\alpha^2 + (F^TF)^2}\left((F^TF)F - 2\mathrm{i}\nu\alpha SF\right).$$

Резултатът за дублетното решение гласи

$$\begin{aligned} Q_{e_i-e_j}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\left[a(\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F_{0,i}F_{0,j} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}})\right. \\ &+ \left.(-1)^i\alpha(\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,j} + (-1)^{i+j}\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F_{0,i}F_{0,\bar{j}})\right], \end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} Q_{e_i+e_j}(z) &= \frac{1}{\alpha^2+a^2}\left[a(\mathrm{e}^{-\nu(z_i-z_j)}F_{0,i}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j}\mathrm{e}^{\nu(z_i-z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,j})\right. \\ &+ \left.(-1)^i\alpha(\mathrm{e}^{\nu(z_i+z_j)}F_{0,\bar{i}}F_{0,\bar{j}} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{e}^{-\nu(z_i+z_j)}F_{0,i}F_{0,j})\right], \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$Q_{2e_i}(z) = \frac{1}{\alpha^2+a^2}\left[2aF_{0,i}F_{0,\bar{i}} + (-1)^i\alpha(\mathrm{e}^{2\nu z_i}F^2_{0,\bar{i}} - \mathrm{e}^{-2\nu z_i}F^2_{0,i})\right], \tag{4.76}$$

където

$$a = \frac{F^T F}{2\mathrm{i}\nu} = \frac{1}{2\mathrm{i}\nu} \sum_{k=1}^{r} \left(\mathrm{e}^{-2\nu z_k} F_{0,k}^2 + \mathrm{e}^{2\nu z_k} F_{0,\bar{k}}^2 \right), \qquad z_k = J_k x + I_k t, \qquad F_0^* = K_1 F_0.$$

Квадроплетното решение, от своя страна, се извежда с помощта на множителя (4.63)

$$[J, Q] = [J, A - SAS^{-1} + K_1 SA^* (K_1 S)^{-1} - K_1 A^* (K_1)^{-1}] \tag{4.77}$$

или в частност при $K_1 = \mathbb{1}$ имаме

$$[J, Q(x,t)] = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\, [J, A(x,t) + SA(x,t)S],$$

където е отчетено, че $S = -S^T = -S^{-1}$.

Следвайки същите стъпки като в ортогоналния случай, се убеждаваме, че множителят F в разложението на A

$$A(x,t) = X(x,t) F^T(x,t)$$

има добре познатия вид

$$F(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ (Jx + It)} F_0, \qquad F_0 = \mathrm{const}.$$

За да намерим другия множител X, трябва да решим линейна система, която в най-простия случай на $\mathrm{rank} X = \mathrm{rank} F = 1$ изглежда така [58]

$$\begin{pmatrix} SF \\ SG \\ SH \\ SN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a & -b & -c \\ -a & \alpha & c & -b \\ -b & c & \alpha^* & a^* \\ -c & -b & -a^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

където

$$\begin{aligned} Y &:= SX, \qquad Z := SX^*, \qquad W := -X^*, \qquad G := SF, \\ H: &= SF^*, \qquad N := -F^*, \qquad \alpha = \mathrm{i} F_0^T (Jx + It) S^{-1} F_0, \\ a &:= \frac{F^T F}{2\lambda^+}, \qquad b := \frac{F^\dagger F}{2\mathrm{i}\nu}, \qquad c := \frac{F^\dagger S F}{2\mu}. \end{aligned}$$

След като "обърнем"системата, получаваме

$$X = \frac{1}{\Delta} \left(\tilde{\alpha} SF - \tilde{a} SG - \tilde{b} SH - \tilde{c} SN \right),$$

където

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &:= \alpha^* (|\alpha|^2 - b^2 - c^2) + \alpha (a^*)^2, \qquad \tilde{a} := a^* (|a|^2 + b^2 + c^2) + a (\alpha^*)^2, \\ \tilde{b} &:= b(|a|^2 - |\alpha|^2 + b^2 + c^2) - 2c\mathrm{Re}\,(a\alpha^*), \qquad \tilde{c} := c(|a|^2 - |\alpha|^2 + b^2 + c^2) + 2b\mathrm{Re}\,(a\alpha^*), \\ \Delta &:= |a|^4 + 2\mathrm{Re}\,(a^2 (\alpha^*)^2) + |\alpha|^4 + 2(|a|^2 - |\alpha|^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Така достигаме до следния израз за съответното 1-солитонното решение

$$Q = \frac{2\mathrm{i}}{\Delta} \mathrm{Im}\, \left[\left(\tilde{\alpha} SF + \tilde{a} F + \tilde{b} F^* + \tilde{c} SF^* \right) F^T + S \left(\tilde{\alpha} SF + \tilde{a} F + \tilde{b} F^* + \tilde{c} SF^* \right) F^T S \right].$$

Ползвайки формула (4.70), и в разглеждания случай могат да се построят по-общите n-солитонни решения при обличане с множителя (4.69).

4.4 Сингулярни решения на задачата на Риман-Хилберт

Така както задачата на Риман-Хилберт може да се използва за решаване на НЕУ, така е възможно и обратното — да се получат частни решения на ЗРХ, тръгвайки от дадено интегрируемо НЕУ. Изборът на конкретно НЕУ води до определена зависимост на решенията на ЗРХ от допълнителните променливи x и t. Същото се отнася и за обличащия множител и неговите резидууми. Нека да разгледаме няколко примера.

Пример 7: Нека е дадено интегрируемо нелинейно уравнение, чиято задача на разсейването се дава от обобщената система на Захаров-Шабат (2.11) за алгебрата $\mathfrak{sl}(n)$, а операторът M е произволен. При $q_0 = 0$ фундаментални решения $\chi_0^{\pm}$ са просто $\exp(-\mathrm{i}\lambda Jx)$, а съответните нормирани решения на ЗРХ са $\eta_0^{\pm} = \mathbb{1}$. Следователно функцията на съшиване $G(\lambda)$ е също равна на $\mathbb{1}$. В този случай ще използваме обличащ множител, който има само един полюс

$$g = \mathbb{1} + \frac{\lambda^- - \lambda^+}{\lambda - \lambda^-} P.$$

Както споменахме в началото на предишната глава, в този случай операторът P е проектор и в най-простия случай на ранг 1 може да се представи по следния начин

$$P = \frac{nm^T}{m^T n},$$

където векторите $n(x)$ и $m(x)$ се изразяват посредством решенията $\chi_0^{\pm}$, както следва

$$n(x) = \chi_0^+(x, \lambda^+) n_0, \qquad m^T(x) = m_0^T [\chi_0^-(x, \lambda^-)]^{-1}.$$

Тогава облечените решения на ЗРХ, съответстващи на 1-солитонен потенциал, имат също по един полюс и една нула

$$\eta_{ij}^{\pm}(x, \lambda) = \delta_{ij} + \frac{\lambda^- - \lambda^+}{\lambda - \lambda^-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^- J_j - \lambda^+ J_i)x} n_{0,i} m_{0,j}}{\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^- - \lambda^+)J_k x} n_{0,k} m_{0,k}} \tag{4.78}$$

Възстановяването на времевата зависимост на решенията става по формулите

$$n_0 \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\lambda^+)t} n_0, \qquad m_0 \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda^-)t} m_0.$$

Нека сега да наложим $\mathbb{Z}_2$ редукцията (2.51) при $K = \mathbb{1}$. Получаваме следните връзки

$$\lambda^+ = (\lambda^-)^* = \mu + \mathrm{i}\nu, \qquad m = n^*.$$

Следователно достигаме до следния отговор

$$\eta_{ij}^{\pm}(x, \lambda) = \delta_{ij} - \frac{2\mathrm{i}\nu}{\lambda - \lambda^-} \frac{\mathrm{e}^{[\mathrm{i}\mu(J_j - J_i) + \nu(J_i + J_j)]x} n_{0,i} n_{0,j}^*}{\sum_k \mathrm{e}^{2\nu J_k x} |n_{0,k}|^2}. \tag{4.79}$$

Ако наложим още една $\mathbb{Z}_2$ редукция

$$\chi^-(x, \lambda) = [(\chi^+(x, -\lambda))^T]^{-1}, \tag{4.80}$$

то имаме

$$\lambda^{\pm} = \pm \mathrm{i}\nu, \qquad n^* = n.$$

Облечените решения на ЗРХ добиват вида

$$\eta^{\pm}_{ij}(x,\lambda) = \delta_{ij} - \frac{2\mathrm{i}\nu}{\lambda - \lambda^-} \frac{\mathrm{e}^{\nu(J_i+J_j)x} n_{0,i} n_{0,j}}{\sum_k \mathrm{e}^{2\nu J_k x} n^2_{0,k}}. \square \tag{4.81}$$

Пример 8: Нека отново разгледаме НЕУ, свързано със системата на Захаров-Шабат, но този път за $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$. Ортогоналната алгебра изисква обличащ множител с 2 полюса

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda - \lambda^+} + \frac{B(x)}{\lambda - \lambda^-}.$$

Напомняме, че матричнозначните функции A и B в най-простия случай са пропорционални на два проектора

$$A = (\lambda^+ - \lambda^-) \frac{SGF^T}{F^T SG}, \qquad B = (\lambda^- - \lambda^+) \frac{SFG^T}{F^T SG},$$

където

$$F^T(x) = F^T_0 [\chi^+_0(x,\lambda^+)]^{-1}, \qquad G^T(x) = G^T_0 [\chi^-_0(x,\lambda^-)]^{-1}.$$

Константните вектори F_0 и G_0 се подчиняват на алгебричните условия

$$F^T_0 S F_0 = 0, \qquad G^T_0 S G_0 = 0.$$

Метриката S има вида

$$S_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-1}\delta_{i\,2r+2-j}, & \mathfrak{so}(2r+1), \\ \delta_{i\,2r+1-j}, & \mathfrak{so}(2r). \end{cases}$$

Тръгвайки отново от тривиалното решение $q_0 = 0$ (съотв. $\eta^{\pm}_0 = \mathbb{1}$), за облечените решения получаваме

$$\begin{aligned} \eta^{\pm}_{ij}(x,\lambda) &= \delta_{ij} + \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\sum_{k,l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^+ - \lambda^-)J_k x} F_{0,k} S_{kl} G_{0,l}} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^+ J_j - \lambda^- J_i)x} \sum_k S_{ik} G_{0,k} F_{0,j}}{\lambda - \lambda^+} \right. \\ &- \left. \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^- J_j - \lambda^+ J_i)x} \sum_k S_{ik} F_{0,k} G_{0,j}}{\lambda - \lambda^-} \right]. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Зз възстановяване на времевата еволюция трябва да се използва правилото

$$F_0 \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda^+)t} F_0, \qquad G_0 \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(\lambda^-)t} G_0.$$

Действието на редукцията (2.51) води до изискването

$$\lambda^{\pm} = \mu \pm \mathrm{i}\nu, \qquad G_0 = KSF^*_0.$$

Полагайки $K = \mathbb{1}$ и замествайки по-горните връзки в (4.82), достигаме до

$$\eta_{ij}^{\pm}(x,\lambda) = \delta_{ij} + \frac{2\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(J_j - J_i)x}}{\Delta}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\nu(J_j+J_i)x}F_{0,i}^*F_{0,j}}{\lambda-\lambda^+} - \frac{\mathrm{e}^{\nu(J_j+J_i)x}\sum_{k,l}S_{ik}S_{jl}F_{0,k}F_{0,l}^*}{\lambda-\lambda^-}\right], \quad (4.83)$$

където

$$\Delta = \sum_k \mathrm{e}^{-2\nu J_k x}|F_{0,k}|^2.$$

Ако наложим и втора $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (4.80), се получават връзките

$$\lambda^{\pm} = \pm\mathrm{i}\nu, \qquad F_0^* = F_0.$$

След като ги заместим в (4.83), то съответните решения на ЗРХ добиват вида

$$\begin{aligned} \eta_{ij}^{\pm}(x,\lambda) &= \delta_{ij} + \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\nu(J_j+J_i)x}F_{0,i}F_{0,j}}{\lambda-\mathrm{i}\nu} - \frac{\mathrm{e}^{\nu(J_j+J_i)x}\sum_{k,l}S_{ik}S_{jl}F_{0,k}F_{0,l}}{\lambda+\mathrm{i}\nu}\right], \qquad (4.84) \\ \Delta &= \sum_k \mathrm{e}^{-2\nu J_k x}F_{0,k}^2. \end{aligned}$$

Както имахме възможност многократно да изтъкваме досега, в случая на действие на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукция е възможно да се използва и обличащ множител с 4 полюса [84]

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda-\lambda^+} + \frac{SA^*(x)S^{-1}}{\lambda-(\lambda^+)^*} - \frac{SA(x)S^{-1}}{\lambda+\lambda^+} - \frac{A^*(x)}{\lambda+(\lambda^+)^*}.$$

Функцията A този път се дава от израза

$$A = \frac{(a^*F + bF^* - cSF^*)F^T}{|a|^2+b^2-c^2}, \qquad F = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^+ Jx}F_0,$$

където коефициентите по-горе зависят квадратично от вектора F

$$a = \frac{F^TF}{2\lambda^+}, \qquad b = \frac{F^TF^*}{2\mathrm{i}\nu}, \qquad c = \frac{F^TSF^*}{2\mu}.$$

5. НЕУ, СВЪРЗАНИ СЪС СИМЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

В този глава предстои да разгледаме 2 типа интегрируеми многокомпонентни уравнения, свързани със симетрични пространства от серията **BD.I**: нелинейното уравнение на Шрьодингер (НУШ) и модифицираното уравнение на Кортевег-де Фриз (мКдФ). Ще бъдат построени конкретни примери на интегрируеми многокомпонентни уравнения, получени след прилагането на редукции към НУШ и мКдФ. Поради това че са свързани със симетрични пространства от указания вид, съответните НУШ и мКдВ допускат по-голямо разнообразие от редукции. Ще построим техните солитонни решения с помощта на метода на обличането, като и сега обличащият множител, който ще използваме за тази цел ще е съгласуван с типа на редукцията. За първи път многокомпонентни уравнения от типа на НУШ върху симетрични пространства са разгледани в [43], а уравнения от типа на КдФ съответно в [23]. Интересът към НУШ върху симетрични пространства напоследък се възроди във връзка с техните приложения в Бозе-Айнщайновата кондензация [65, 22]. Многокомпонентни (векторни) уравнения, свързани с алгебри на Йордан, са получени в [83, 82].

5.1 *Нелинейно уравнение на Шрьодингер*

Нека да разгледаме операторите на Лакс

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \mathrm{i}\partial_x + U(x,t,\lambda), \qquad U(x,t,\lambda) = q(x,t) - \lambda J, && (5.1)\\
M(\lambda) &= \mathrm{i}\partial_t + V(x,t,\lambda), \qquad V(x,t,\lambda) = V_0(x,t) + \lambda V_1(x,t) - \lambda^2 J, && (5.2)\\
V_1(x,t) &= q(x,t), \qquad V_0(x,t) = \mathrm{i}\,\mathrm{ad}_J^{-1}\partial_x q(x,t) + \frac{1}{2}[\mathrm{ad}_J^{-1} q(x,t), q(x,t)],
\end{aligned}$$

където матрицата $q(x,t)$ принадлежи на $\mathfrak{so}(n+2)$, а J лежи в Картановата алгебра на $\mathfrak{so}(n+2)$. Нека да изберем q и Картановият елемент J да имат следния специален вид

$$q = \begin{pmatrix} 0 & \vec{q}^T & 0 \\ \vec{p} & 0 & s_0\vec{q} \\ 0 & \vec{p}^T s_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = H_{e_1} = \mathrm{diag}\,(1, 0, \dots 0, -1),$$

където векторите $\vec{q}$ и $\vec{p}$ се задават от

$$\vec{q} = (q_2, q_3, \dots, q_{2r})^T, \qquad \vec{p} = (p_2, p_3, \dots, p_{2r})^T,$$

а s_0 е равна на взетата с обратен знак рестрикция на метриката S върху $\mathbb{C}^n$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -s_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такива Лаксови оператори се свързват със серията от симетрични пространства $\mathbf{BD.I} = SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$. Многокомпонентното уравнение на Шрьодингер, което представлява условие за съвместимост на операторите (5.1) и (5.2), се състои от следната система от уравнения

$$\mathrm{i}\vec{q}_t \quad + \vec{q}_{xx} + 2(\vec{q},\vec{p})\vec{q} - (\vec{q}, s_0\vec{q})s_0\vec{p} = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{i}\vec{p}_t \quad - \vec{p}_{xx} - 2(\vec{q},\vec{p})\vec{p} - (\vec{p}, s_0\vec{p})s_0\vec{q} = 0, \tag{5.4}$$

За напред ще се ограничим с частния случай на НУШ, асоциирано със симетричното пространство $SO(5)/SO(2) \times SO(3)$. Тогава матриците q и J изглеждат така

$$q = \begin{pmatrix} 0 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & q_4 \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & -q_3 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & p_4 & -p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} J &= \mathrm{diag}\,(1,0,0,0,-1), \\ s_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}. \tag{5.5}$$

Пример 9: В този пример ще се спрем на $\mathbb{Z}_2$-редуцирана система с физическо приложение. Нека имаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа $\lambda \to \lambda^*$, т.е. като тази от формула (3.80) с матрица $K_1 = \mathrm{diag}\,(\epsilon_1, \epsilon_2, 1, \epsilon_2, \epsilon_1)$. Тогава са в сила връзките

$$p_2 = \epsilon_1\epsilon_2 q_2^*, \qquad p_3 = \epsilon_1 q_3^*, \qquad p_4 = \epsilon_1\epsilon_2 q_4^*, \tag{5.6}$$

а системата се свежда до следните 3 уравнения

$$\begin{aligned} \mathrm{i}q_{2,t} \quad &+ \quad q_{2,xx} + 2\epsilon_1\epsilon_2|q_2|^2 q_2 + \epsilon_1\epsilon_2 q_3^2 q_4^* + 2\epsilon_1|q_3|^2 q_2 = 0, \\ \mathrm{i}q_{3,t} \quad &+ \quad q_{3,xx} + 2\epsilon_1 q_2 q_4 q_3^* + 2\epsilon_1\epsilon_2|q_2|^2 q_3 + 2\epsilon_1\epsilon_2 q_3|q_4|^2 + \epsilon_1|q_3|^2 q_3 = 0, \\ \mathrm{i}q_{4,t} \quad &+ \quad q_{4,xx} + 2\epsilon_1\epsilon_2|q_4|^2 q_4 + \epsilon_1\epsilon_2 q_3^2 q_2^* + 2\epsilon_1|q_3|^2 q_4 = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ако фиксираме $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ и въведем новите "физически"означения: $\Phi_1 = q_2$, $\Phi_0 = q_3/\sqrt{2}$ и $\Phi_{-1} = q_4$, то получаваме системата

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t\Phi_1 + \partial_{x^2}^2\Phi_1 + 2(|\Phi_1|^2 + 2|\Phi_0|^2)\Phi_1 + 2\Phi_{-1}^*\Phi_0^2 = 0, \\ &\mathrm{i}\partial_t\Phi_0 + \partial_{x^2}^2\Phi_0 + 2(|\Phi_{-1}|^2 + |\Phi_0|^2 + |\Phi_1|^2)\Phi_0 + 2\Phi_0^*\Phi_1\Phi_{-1} = 0, \\ &\mathrm{i}\partial_t\Phi_{-1} + \partial_{x^2}^2\Phi_{-1} + 2(|\Phi_{-1}|^2 + 2|\Phi_0|^2)\Phi_{-1} + 2\Phi_1^*\Phi_0^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Тази система описва спинорен кондензат на Бозе-Айнщайн в състояние със свръхфин спин $F = 1$, който е поставен в оптична яма, така че движението на кондензата е възможно само по оста x (вж. [65]). Векторът $\Phi(x,t) = (\Phi_1(x,t), \Phi_0(x,t), \Phi_{-1}(x,t))^T$ представлява нормираният спинорен вълнов вектор на кондензата.

Многосолитонното решение на (5.7) може да се пресметне с помощта на процедурата на обличане с множителя (3.87). Пресмятания аналогични на вече направените в предишните параграфи водят до следния резултат за 1-солитонното решение [56]

$$q_k = \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\epsilon_1\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_k + (-1)^k\epsilon_k\mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}^*_{6-k}\right), \tag{5.9}$$

$$\Delta = \epsilon_1\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0) + \mathcal{C}, \qquad \xi_0 = \frac{1}{2\nu}\ln\frac{|F_{0,1}|}{|F_{0,5}|}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}[\epsilon_2(|\mathcal{F}_2|^2 + |\mathcal{F}_4|^2) + |\mathcal{F}_3|^2], \qquad \mathcal{F}_k = \frac{F_{0,k}}{\sqrt{|F_{0,1}||F_{0,5}|}}, \qquad k = 2,3,4. \tag{5.11}$$

Скоростите u и v се изразяват чрез реалната и имагинерната част на дискретната собствена стойност λ^+ по следния начин

$$v = \frac{\nu^2-\mu^2}{\mu}, \qquad u = -2\mu. \tag{5.12}$$

При получаването на по-горната формула за решението сме отчели естествената инвариантност на обличащия множител и оттам на самото солитонно решение относно трансформация на поляризационния вектор

$$F_0 \to F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \qquad \forall\,\varphi\in\mathbb{R}.$$

Това позволява без ограничение на общността да изберем първата и последната компонента на вектора F_0 да имат противоположни фази

$$\arg F_{0,1} = -\arg F_{0,5} = -\mu\delta_0. \tag{5.13}$$

За решението на физическата система (5.8) след просто заместване се получава следното

$$\Phi_1(x,t) = \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_2 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}^*_4\right), \tag{5.14}$$

$$\Phi_0(x,t) = \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}\nu}{2\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_3 - \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}^*_3\right), \tag{5.15}$$

$$\Phi_{-1}(x,t) = \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_4 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}^*_2\right). \tag{5.16}$$

Ако въведем по-кратките означения

$$\delta_{\pm1} = \delta_0 \pm \frac{\arg\mathcal{F}_2 - \arg\mathcal{F}_4}{2\mu}, \qquad \phi_{\pm1} = \frac{\arg\mathcal{F}_2 + \arg\mathcal{F}_4}{2}$$

$$\phi_0 = \arg\mathcal{F}_3, \qquad z = \nu(x-ut-\xi_0), \qquad z_{\pm1} = z \pm \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathcal{F}_4|}{|\mathcal{F}_2|},$$

и преработим изразите в (5.14)–(5.16), се достига до следния резултат

$$\Phi_{\pm 1} = \frac{2\mathrm{i}\nu\sqrt{|\mathcal{F}_2\mathcal{F}_4|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_{\pm 1})}}{\cosh 2z+\mathcal{C}}\left(\cos\phi_{\pm 1}\cosh z_{\pm 1} - \mathrm{i}\sin\phi_{\pm 1}\sinh z_{\pm 1}\right), \qquad (5.17)$$

$$\Phi_0 = -\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}\nu|\mathcal{F}_3|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}}{\cosh 2z+\mathcal{C}}\left(\cos\phi_0\sinh z - \mathrm{i}\sin\phi_0\cosh z\right). \qquad (5.18)$$

Изложените в този пример резултати позволяват просто обобшение за произволни симетрични пространства от серията $SO(2r+1)/SO(2)\times SO(2r-1)$, вж. [56]. В общия случай компонентите на векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са свързани посредством

$$p_i = \epsilon_1\epsilon_i q_i^*, \qquad p_{r+1} = \epsilon_1 q_{r+1}^*, \qquad p_{\bar{i}} = \epsilon_1\epsilon_i q_{\bar{i}}^*, \qquad \bar{i} = 2(r+1)-i \qquad (5.19)$$

за $i = 2,\ldots,r$. Съгласно (5.3) и (5.4) и отчитайки, че $(s_0)_{ij} = (-1)^{i-1}\delta_{i,2r-j}$, общата $\mathbb{Z}_2$-редуцирана система от НУШ добива вида

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}q_{k,t} + q_{k,xx} + 2\epsilon_1\left[\sum_{l=2}^{r}\epsilon_l(|q_l|^2+|q_{\bar{l}}|^2) + |q_{r+1}|^2\right]q_k \\ &+(-1)^{k+1}\epsilon_1\epsilon_k\left[2\sum_{l=2}^{r}(-1)^l q_l q_{\bar{l}} + (-1)^{r+1}q_{r+1}^2\right]q_{\bar{k}}^* = 0, \end{aligned} \qquad (5.20)$$

за $k = 2,\ldots,2r$. Нейното солитонно решение се дава от

$$q_k = \frac{\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\epsilon_1\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_k + (-1)^k\epsilon_k\mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_{\bar{k}}^*\right), \qquad (5.21)$$

$$\Delta = \epsilon_1\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0) + \mathcal{C}, \quad \mathcal{F}_k = \frac{F_{0,k}}{\sqrt{|F_{0,1}||F_{0,\bar{1}}|}}, \qquad (5.22)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=2}^{r}\epsilon_j(|\mathcal{F}_j|^2+|\mathcal{F}_{\bar{j}}|^2) + |\mathcal{F}_{r+1}|^2\right], \qquad \xi_0 = \frac{1}{2\nu}\ln\frac{|F_{0,1}|}{|F_{0,\bar{1}}|}, \qquad (5.23)$$

където при извода на по-горните изрази отново сме избрали $\arg F_{0,1} = -\arg F_{0,\bar{1}} = -\mu\delta_0$. В случая на $r = 3$ и $\epsilon_i = 1$ $(i = 1,2,3)$ системата отново описва Бозе-Айнщайнов кондензат [65], но този път в състояние със свръхфин спин $F = 2$. Ето как изглежда самата система от 5 уравнения

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t\Phi_{\pm 2} + \partial_{x^2}^2\Phi_{\pm 2} + 2|\vec{\Phi}|^2\Phi_{\pm 2} - (2\Phi_2\Phi_{-2} - 2\Phi_1\Phi_{-1} + \Phi_0^2)\Phi_{\mp 2}^* = 0, \\ &\mathrm{i}\partial_t\Phi_{\pm 1} + \partial_{x^2}^2\Phi_{\pm 1} + 2|\vec{\Phi}|^2\Phi_{\pm 1} + (2\Phi_2\Phi_{-2} - 2\Phi_1\Phi_{-1} + \Phi_0^2)\Phi_{\mp 1}^* = 0, \\ &\mathrm{i}\partial_t\Phi_0 + \partial_{x^2}^2\Phi_0 + 2|\vec{\Phi}|^2\Phi_0 - (2\Phi_2\Phi_{-2} - 2\Phi_1\Phi_{-1} + \Phi_0^2)\Phi_0^* = 0. \end{aligned}$$

където

$$\Phi_2 = q_2, \qquad \Phi_1 = q_3, \qquad \Phi_0 = q_4, \qquad \Phi_{-1} = q_5, \qquad \Phi_{-2} = q_6.$$

Съответното солитонно решение е

$$\Phi_{\pm 2} = \frac{2\mathrm{i}\nu\sqrt{|\mathcal{F}_2\mathcal{F}_6|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_{\pm 2})}}{\cosh 2z+\mathcal{C}}\left(\cos\phi_{\pm 2}\cosh z_{\pm 2} - \mathrm{i}\sin\phi_{\pm 2}\sinh z_{\pm 2}\right), \qquad (5.24)$$

$$\Phi_{\pm 1} = -\frac{2\mathrm{i}\nu\sqrt{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_5|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_{\pm 1})}}{\cosh 2z+\mathcal{C}}\left(\cos\phi_{\pm 1}\sinh z_{\pm 1} - \mathrm{i}\sin\phi_{\pm 1}\cosh z_{\pm 1}\right), \qquad (5.25)$$

$$\Phi_0 = \frac{2\mathrm{i}\nu|\mathcal{F}_4|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}}{\cosh 2z+\mathcal{C}}\left(\cos\phi_0\cosh z - \mathrm{i}\sin\phi_0\sinh z\right). \qquad (5.26)$$

където

$$\delta_{\pm 2} = \delta_0 \pm \frac{\arg\mathcal{F}_2 - \arg\mathcal{F}_6}{2\mu}, \qquad \phi_{\pm 2} = \frac{\arg\mathcal{F}_2 + \arg\mathcal{F}_6}{2}, \qquad z_{\pm 2} = z \pm \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathcal{F}_6|}{|\mathcal{F}_2|},$$

$$\delta_{\pm 1} = \delta_0 \pm \frac{\arg\mathcal{F}_3 - \arg\mathcal{F}_5}{2\mu}, \qquad \phi_{\pm 1} = \frac{\arg\mathcal{F}_3 + \arg\mathcal{F}_5}{2}, \qquad z_{\pm 1} = z \pm \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathcal{F}_5|}{|\mathcal{F}_3|},$$

$$\delta_0 = \frac{\arg\mathcal{F}_5}{\mu} = -\frac{\arg\mathcal{F}_1}{\mu}, \qquad z = \nu(x-ut-\xi_0), \qquad \phi_0 = \arg\mathcal{F}_4.$$

Решението (5.24)–(5.26) съвпада с това в [65], получено с помощта на метода на Хирота.□

Пример 10: Нека сега да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.80), но този път матрицата K_1 се изразява чрез матрицата, задаваща действие на Вайлово отражение спрямо простия корен e_2 върху $\mathfrak{so}(5)$

$$W_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ K_1 = K_{e_2} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix}, \qquad (5.27)$$

като по дефиниция $\epsilon_{1,2} = \pm 1$. Тогава в сила са следните връзки между компонентите на потенциала q

$$p_2 = \epsilon_1\epsilon_2 q_4^*, \qquad p_3 = -\epsilon_1 q_3^*, \qquad p_4 = \epsilon_1\epsilon_2 q_2^*. \qquad (5.28)$$

Отново получаваме 3-компонентна система от НУШ, а именно

$$\mathrm{i}q_{2,t} + q_{2,xx} + 2\epsilon_1\epsilon_2(q_2)^2 q_4^* + \epsilon_1\epsilon_2 q_3^2 q_2^* - 2\epsilon_1|q_3|^2 q_2 = 0, \qquad (5.29)$$

$$\mathrm{i}q_{3,t} + q_{3,xx} - 2\epsilon_1 q_2 q_4 q_{13}^* + 2\epsilon_1\epsilon_2 q_2 q_4^* q_3 + 2\epsilon_1\epsilon_2 q_2^* q_3 q_4 - \epsilon_1|q_3|^2 q_3 = 0, \qquad (5.30)$$

$$\mathrm{i}q_{4,t} + q_{4,xx} + 2\epsilon_1\epsilon_2(q_4)^2 q_2^* + \epsilon_1\epsilon_2 q_3^2 q_4^* - 2\epsilon_1|q_3|^2 q_4 = 0. \qquad (5.31)$$

Прилагането на метода на обличането и отчитането на съществуващите симетрии заради редукцията води до по-долното солитонно решение

$$q_2(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\epsilon_1\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_2 + \epsilon_2\mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_2^*\right), \qquad (5.32)$$

$$q_3(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\epsilon_1\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_3 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_3^*\right), \qquad (5.33)$$

$$q_4(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}\left(\epsilon_1\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_4 + \epsilon_2\mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_4^*\right), \qquad (5.34)$$

където сме използвали същите означения като в (5.10), (5.11) и (5.12). Единствената разлика е, че в настоящия случай константата $\mathcal{C}$ изглежда по-различно

$$\mathcal{C} = \epsilon_2\mathrm{Re}\,(\mathcal{F}_2\mathcal{F}_4^*) - \frac{1}{2}|\mathcal{F}_3|^2.\square$$

5.2 Модифицирани уравнения на Кортевег-де Фриз

В този параграф ще разгледаме още един пример на НЕУ, свързано със симетричните пространства от серията **BD.I** — модифицираното уравнение на Кортевег-де Фриз. Поради факта, че неговият дисперсионен закон е нечетен полином на спектралния параметър λ, то, както ще се убедим по-нататък, това определя по-голямото разнообразие от възможни $\mathbb{Z}_2$ редукции спрямо НУШ.

МКдФ, свързано със симетрично пространство от серията **BD.I**, има Лаксово представяне с L оператор от вида (5.1) и оператор M от вида

$$M = \mathrm{i}\partial_t + V_0(x,t) + \lambda V_1(x,t) + \lambda^2 V_2(x,t) - \lambda^3 J,$$

където

$$V_2 = q, \qquad V_1(x,t) = \mathrm{i}\,\mathrm{ad}_J^{-1}\partial_x q + \frac{1}{2}\left[\mathrm{ad}_J^{-1} q, q\right],$$
$$V_0(x,t) = -\partial^2_{xx} q + \frac{1}{2}\left[\mathrm{ad}_J^{-1} q, \left[\mathrm{ad}_J^{-1} q, q\right]\right] + \mathrm{i}\left[\partial_x q, q\right].$$

Самата система от мКдФ уравнения се записва така

$$\vec{q}_t + \vec{q}_{xxx} + 3(\vec{p},\vec{q})\vec{q}_x + 3\left(\vec{q}_x,\vec{p}\right)\vec{q} - 3\left(\vec{q}_x s_0 \vec{q}\right) s_0 \vec{p} = 0, \tag{5.35}$$
$$\vec{p}_t + \vec{p}_{xxx} + 3(\vec{p},\vec{q})\vec{p}_x + 3\left(\vec{p}_x,\vec{q}\right)\vec{p} - 3\left(\vec{p}_x s_0 \vec{p}\right) s_0 \vec{q} = 0. \tag{5.36}$$

Както и в случая на НУШ и тук ще се ограничим с НЕУ, свързани със симетричното пространство $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$.

Пример 11: Да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (3.80), зададена с помощта на елемент на Картановата група: $K_1 = \mathrm{diag}\left(\epsilon_1, \epsilon_2, 1, \epsilon_2, \epsilon_1\right)$. В резултат на това за потенциала q са в сила релациите (5.6) и остават само 3 независими компоненти, които удовлетворяват уравненията

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} + 3\epsilon_1 (q_2 q_3)_x q_3^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 q_3 q_4^* q_{3,x} + 6\epsilon_1\epsilon_2 |q_2|^2 q_{2,x} = 0, \tag{5.37}$$
$$q_{3,t} + q_{3,xxx} + 3\epsilon_1 (q_2 q_4)_x q_3^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 (q_2 q_3)_x q_2^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 (q_3 q_4)_x q_4^* + 3\epsilon_1 |q_3|^2 q_{3,x} = 0, \tag{5.38}$$
$$q_{4,t} + q_{4,xxx} + 3\epsilon_1 (q_3 q_4)_x q_3^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 q_2^* q_3 q_{3,x} + 6\epsilon_1\epsilon_2 |q_4|^2 q_{4,x} = 0. \tag{5.39}$$

Солитонното решение, получено чрез обличане, има вида

$$q_k(x,t) = \frac{\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}}{\epsilon_1 \cosh 2\nu(x-ut-\xi_0) + \mathcal{C}} \left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_k + (-1)^k \epsilon_k \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}^*_{6-k}\right), \tag{5.40}$$

като константите δ_0, ξ_0, $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{C}$ съвпадат с вече въведените при аналогичния случай на НУШ (вж. формули (5.10), (5.11) и (5.13)), а скоростите u и v този път се определят от изразите

$$u = \nu^2 - 3\mu^2, \qquad v = 3\nu^2 - \mu^2. \tag{5.41}$$

Получените резултати могат да се обобщят за произволно симетрично пространство от серията **BD.I**. Редукцията налага връзки между векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, които съвпадат с тези от (5.19). Вследствие на това получаваме следната обща $\mathbb{Z}_2$-редуцирана система от мКдФ

$$\begin{aligned} &q_{k,t} + q_{k,xxx} + 3\epsilon_1\epsilon_k \sum_{l=2}^{2r} (-1)^{l+k+1} q_{l,x} q_{\bar{l}} q_{\bar{k}}^* + 3\epsilon_1 \left[\sum_{l=2}^{r} \epsilon_l \left(|q_l|^2 + |q_{\bar{l}}|^2 \right) + |q_{r+1}|^2 \right] q_{k,x} \\ + \quad &3\epsilon_1 \left[\sum_{l=2}^{r} \epsilon_l \left(q_{l,x} q_l^* + q_{\bar{l},x} q_{\bar{l}}^* \right) + q_{r+1,x} q_{r+1}^* \right] q_k = 0, \qquad k = 2, \ldots, 2r. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Нейното 1-солитонно решение се дава от изразите

$$q_k(x,t) = \frac{\mathrm{i}\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)}}{\epsilon_1 \cosh 2\nu(x-ut-\xi_0) + \mathcal{C}} \left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_k + (-1)^k \epsilon_k \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_{\bar{k}}^* \right), \tag{5.43}$$

където константите $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}_k$ и ξ_0 съвпадат с въведени чрез формули (5.22) и (5.23), а $\delta_0 = -\arg F_{0,1}/\mu = \arg F_{0,\bar{1}}/\mu$.□

Пример 12: Да разгледаме отново редукция от типа на (3.80), като сега $K_1 = K_{e_2}$ (вж. пример 10). Тогава са налице съотношенията (5.28) и се стига до 3-компонентна система от модифицирани КдФ уравнения

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} - 3\epsilon_1 (q_2 q_3)_x q_3^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 q_2^* q_3 q_{3,x} + 6\epsilon_1\epsilon_2 q_2 q_4^* q_{2,x} = 0, \tag{5.44}$$

$$q_{3,t} + q_{3,xxx} - 3(q_2 q_4)_x q_3^* + 3(q_2 q_3)_x q_4^* + 3(q_3 q_4)_x q_2^* - 3|q_3|^2 q_{3,x} = 0, \tag{5.45}$$

$$q_{4,t} + q_{4,xxx} - 3\epsilon_1 (q_3 q_4)_x q_3^* + 3\epsilon_1\epsilon_2 q_3 q_4^* q_{3,x} + 6\epsilon_1\epsilon_2 q_2^* q_4 q_{4,x} = 0. \tag{5.46}$$

Нейното солитонно решение изглежда така

$$q_2(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)} \left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_2 + \epsilon_2 \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_2^* \right), \tag{5.47}$$

$$q_3(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)} \left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_3 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_3^* \right), \tag{5.48}$$

$$q_4(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu}{\Delta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt-\delta_0)} \left(\epsilon_1 \mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_4 + \epsilon_2 \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_4^* \right), \tag{5.49}$$

където

$$\Delta = \epsilon_1 \cosh 2\nu(x-ut-\xi_0) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} = \epsilon_2 \mathrm{Re}\left(\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_4^* \right) - \frac{1}{2} |\mathcal{F}_3|^2.$$

Константите δ_0, ξ_0 и $\mathcal{F}_k$ заедно със скоростите u и v съвпадат с тези, дадени в предишния пример.□

И в разгледаните случаи могат се строят и по-сложни n-солитонни решения с помощта на множители от типа (3.87).

В следващите примери ще разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукции, които нямат аналог при НУШ — те са съвместими само с такива НЕУ, които имат нечетен закон за дисперсия. Такъв е случаят с мКдФ, защото неговият дисперсионен закон е $f(\lambda) = -\lambda^3 J$.

Пример 13: Нека да разгледаме $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа $\lambda \to -\lambda$, т.е.

$$K_2 U^T(x,-\lambda) K_2^{-1} = -U(x,\lambda) \quad \Rightarrow \quad K_2 q^T K_2^{-1} = -q. \tag{5.50}$$

Да изберем $K_2 = \mathrm{diag}\,(\vartheta_1, \vartheta_2, 1, \vartheta_2, \vartheta_1)$, като $\vartheta_{1,2} = \pm 1$. Тогава за компонентите на потенциала q са валидни връзките

$$p_2 = -\vartheta_1\vartheta_2 q_2, \qquad p_3 = -\vartheta_1 q_3, \qquad p_4 = -\vartheta_1\vartheta_2 q_4. \tag{5.51}$$

Действието на редукцията свежда системата от мКдФ уравнения до следните три

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} - 3\vartheta_1(q_2q_3)_x q_3 - 3\vartheta_1\vartheta_2 q_3 q_4 q_{3,x} - 6\vartheta_1\vartheta_2 q_2^2 q_{2,x} = 0, \tag{5.52}$$

$$q_{3,t} + q_{3,xxx} - 3\vartheta_1(q_2q_4)_x q_3 - 3\vartheta_1\vartheta_2(q_2q_3)_x q_2 - 3\vartheta_1\vartheta_2(q_3q_4)_x q_4 - 3\vartheta_1 q_3^2 q_{3,x} = 0, \tag{5.53}$$

$$q_{4,t} + q_{4,xxx} - 3\vartheta_1(q_3q_4)_x q_3 - 3\vartheta_1\vartheta_2 q_2 q_3 q_{3,x} - 6\vartheta_1\vartheta_2 q_4^2 q_{4,x} = 0. \tag{5.54}$$

За да намерим нейното n-солитонно решение, може отново да се използва обличащия множител (3.119), който е симетричен относно действието на $\mathbb{Z}_2$ редукцията. Съгласно общата схема за пресмятане, която изложихме дотук, за решението се получава

$$q_2(x,t) = \frac{(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\vartheta_1 \cosh 2z(x,t) + \mathcal{C}} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{z(x,t)}\mathcal{F}_2 + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-z(x,t)}\mathcal{F}_4\right), \tag{5.55}$$

$$q_3(x,t) = \frac{(\mu + \mathrm{i}\nu)\mathcal{F}_3}{\vartheta_1 \cosh 2z(x,t) + \mathcal{C}} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{z(x,t)} - \mathrm{e}^{-z(x,t)}\right), \tag{5.56}$$

$$q_4(x,t) = \frac{(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\vartheta_1 \cosh 2z(x,t) + \mathcal{C}} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{z(x,t)}\mathcal{F}_4 + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-z(x,t)}\mathcal{F}_2\right), \tag{5.57}$$

където

$$\mathcal{C} = \frac{\vartheta_2(F_{0,2}^2 + F_{0,4}^2) + F_{0,3}^2}{2|F_{0,1}F_{0,5}|}, \qquad z(x,t) = \mathrm{i}\mu(x - vt - \delta_0) + \nu(x - ut - \xi_0).$$

Константите δ_0, ξ_0 и $\mathcal{F}_k$ заедно със скоростите u и v съвпадат с вече въведените в предишните примери.

И тук е възможно да се обобщят получените резултати за произволно симетрично пространство от серията $SO(2r+1)/SO(2)\times SO(2r-1)$. Така например, под действието на $\mathbb{Z}_2$ редукцията

$$p_i = -\vartheta_1\vartheta_i q_i, \qquad p_{r+1} = -\vartheta_1 q_{r+1}, \qquad p_{\bar{i}} = -\vartheta_1\vartheta_i q_{\bar{i}}, \qquad \bar{i} = 2(r+1) - i \tag{5.58}$$

при $i = 2, \ldots, r$ се достига до следната система от $2r-1$ мКдФ уравнения

$$\begin{aligned} & q_{k,t} + q_{k,xxx} + 3\vartheta_1\vartheta_k \sum_{i=2}^{2r} (-1)^{i+k} q_{i,x} q_{\bar{i}} q_{\bar{k}} - 3\vartheta_1 \left(\sum_{i=2}^{r} \vartheta_i (q_i^2 + q_{\bar{i}}^2) + q_{r+1}^2\right) q_{k,x} \\ & - \; 3\vartheta_1 \left(\sum_{i=2}^{r} \vartheta_i (q_{i,x} q_i + q_{\bar{i},x} q_{\bar{i}}) + q_{r+1,x} q_{r+1}\right) q_k = 0, \qquad k = 2, \ldots, 2r. \end{aligned} \tag{5.59}$$

За 1-солитонното решение на тази обща система се получава

$$q_k(x,t) = \frac{(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\vartheta_1 \cosh[2z(x,t)] + \mathcal{C}} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{z(x,t)} \mathcal{F}_k + (-1)^k \vartheta_k \mathrm{e}^{-z(x,t)} \mathcal{F}_{\bar{k}}\right), \qquad (5.60)$$

където

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2|F_{0,1}F_{0,\bar{1}}|} \left[\sum_{i=2}^{r} \vartheta_i (F_{0,i}^2 + F_{0,\bar{i}}^2) + F_{0,r+1}^2\right].\Box$$

Пример 14: Още един случай на $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа $\lambda \to -\lambda$ имаме, когато

$$K_2 = K_{e_2} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_1 \end{pmatrix}. \qquad (5.61)$$

Налице са симетрийните условия

$$p_2 = -\vartheta_1 \vartheta_2 q_4, \qquad p_3 = \vartheta_1 q_3, \qquad p_4 = -\vartheta_1 \vartheta_2 q_2. \qquad (5.62)$$

Отново имаме 3-компонентна система от мКдФ

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} + 3\vartheta_1 (q_2 q_3)_x q_3 - 3\vartheta_1 \vartheta_2 q_2 q_3 q_{3,x} - 6\vartheta_1 \vartheta_2 q_2 q_4 q_{2,x} = 0, \qquad (5.63)$$

$$q_{3,t} + q_{3,xxx} + 3\vartheta_1 (q_2 q_4)_x q_3 - 3\vartheta_1 \vartheta_2 (q_2 q_3)_x q_4 - 3\vartheta_1 \vartheta_2 (q_3 q_4)_x q_2 + 3\vartheta_1 q_3^2 q_{3,x} = 0, \qquad (5.64)$$

$$q_{4,t} + q_{4,xxx} + 3\vartheta_1 (q_3 q_4)_x q_3 - 3\vartheta_1 \vartheta_2 q_3 q_4 q_{3,x} - 6\vartheta_1 \vartheta_2 q_2 q_4 q_{4,x} = 0. \qquad (5.65)$$

Солитонното решение, получено с помощта на метода на обличането, има вида

$$q_2(x,t) = \frac{2(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\Delta} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F_{0,1} + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F_{0,5}\right) F_{0,2}, \qquad (5.66)$$

$$q_3(x,t) = \frac{2(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\Delta} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F_{0,1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F_{0,5}\right) F_{0,3}, \qquad (5.67)$$

$$q_4(x,t) = \frac{2(\mu + \mathrm{i}\nu)}{\Delta} \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F_{0,1} + \vartheta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F_{0,5}\right) F_{0,4}, \qquad (5.68)$$

$$\Delta = 2\vartheta_1 |F_{0,1}F_{0,5}| \cosh[\mathrm{i}\mu(x - vt - \delta_0) - \nu(x - ut - \xi_0)] + 2\vartheta_2 F_{0,2} F_{0,4} - F_{0,3}^2.\Box \qquad (5.69)$$

Пример 15: В настоящия пример ще разгледаме $\mathbb{Z}_2$-редукция от типа $\lambda \to -\lambda^*$, т.е.

$$K_3 U^\dagger(x, -\lambda^*) K_3^{-1} = U(x,\lambda) \quad \Rightarrow \quad K_3 q^\dagger(x) K_3^{-1} = q(x), \qquad K_3 J K_3^{-1} = -J \qquad (5.70)$$

За да подсигурим изпълнението на условието в (5.70) за матрицата J, можем да изберем K_3 да е пропорционална на матрицата, задаваща действието на Вайлово отражение относно хиперравнина ортогонална на корена e_1 в алгебрата $\mathfrak{so}(5)$ [51]

$$W_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\varsigma_1 \\ 0 & \varsigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varsigma_2 & 0 \\ -\varsigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.71)$$

където $\varsigma_{1,2} = \pm 1$. Оттук следва, че потенциалът q удовлетворява съотношенията

$$q_4 = -\varsigma_1\varsigma_2 q_2^*, \qquad q_3 = -\varsigma_1 q_3^*, \qquad p_4 = -\varsigma_1\varsigma_2 p_2^*, \qquad p_3 = -\varsigma_1 p_3^*. \tag{5.72}$$

Действието на $\mathbb{Z}_2$ симетрията води до следните 4 мКдФ уравнения

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} + 3(q_2q_3)_x p_3 - 3\varsigma_1\varsigma_2 q_3 p_2^* q_{3,x} + 6q_2p_2q_{2,x} = 0, \tag{5.73}$$

$$q_{3,t} + q_{3,xxx} - 3\varsigma_1\varsigma_2 |q_2|_x^2 p_3 + 3(q_2q_3)_x p_2 + 3(q_2^*q_3)_x p_2^* + 3q_3p_3q_{3,x} = 0, \tag{5.74}$$

$$p_{2,t} + p_{2,xxx} + 3(p_2p_3)_x q_3 - 3\varsigma_1\varsigma_2 q_2^* p_3 p_{3,x} + 6q_2p_2p_{2,x} = 0, \tag{5.75}$$

$$p_{3,t} + p_{3,xxx} - 3\varsigma_1\varsigma_2 |p_2|_x^2 q_3 + 3(p_2p_3)_x q_2 + 3(p_2^*p_3)_x q_2^* + 3q_3p_3p_{3,x} = 0. \tag{5.76}$$

Условието за инвариантност на обличащия множител изглежда така

$$K_3[g^\dagger(x,-\lambda^*)]^{-1}K_3^{-1} = g(x,\lambda). \tag{5.77}$$

За множител от типа (3.4) това означава, че или

$$\lambda^+ = -(\lambda^-)^*, \qquad B = -K_3SA^*S^{-1}K_3^{-1}, \tag{5.78}$$

или

$$(\lambda^\pm)^* = -\lambda^\pm, \qquad A = -K_3SA^*S^{-1}K_3^{-1}, \qquad B = -K_3SB^*S^{-1}K_3^{-1} \tag{5.79}$$

$$\Rightarrow \qquad F_0 = K_3SF_0^*, \qquad G_0 = K_3SG_0^*. \tag{5.80}$$

Първата възможност отпада, тъй като двете дискретни собствени стойности лежат в една и съща полуравнина на λ-равнината, а това води до неправилно асимптотично поведение на решенията — вместо да затихват на безкрайност, те нарастват неограничено. По тази причина тук ще разгледаме само втория случай, когато собствените стойности са чисто имагинерни и лежат в различни полуравнини, т.е. $\lambda^\pm = \pm \mathrm{i}\nu^\pm$. Тогава за солитонното решение се получава следното

$$q_k = \frac{\mathrm{i}(\nu^+ + \nu^-)}{\Delta}\left(\mathrm{e}^{-\nu^-(x-u^-t)}F_{0,k}G_{0,5} - \mathrm{e}^{\nu^+(x-u^+t)}G_{0,k}F_{0,5}\right), \tag{5.81}$$

$$p_k = \frac{\mathrm{i}(\nu^+ + \nu^-)(-1)^k}{\Delta}\left(\mathrm{e}^{-\nu^+(x-u^+t)}F_{0,1}G_{0,6-k} - \mathrm{e}^{\nu^-(x-u^-t)}G_{0,1}F_{0,6-k}\right), \tag{5.82}$$

$$\Delta = \mathrm{e}^{-(\nu^+ + \nu^-)(x-ut)}F_{0,1}G_{0,5} + \mathrm{e}^{(\nu^+ + \nu^-)(x-ut)}F_{0,5}G_{0,1} + \mathcal{C},$$

$$\mathcal{C} = F_{0,3}G_{0,3} - F_{0,2}G_{0,4} - F_{0,4}G_{0,2}, \qquad u^\pm = (\nu^\pm)^2, \quad u = (\nu^+)^2 + (\nu^-)^2 - \nu^+\nu^-.\square$$

Нека преминем към разглеждане на комбинации от две $\mathbb{Z}_2$ редукции.

Пример 16: Да наложим едновременно две $\mathbb{Z}_2$ редукции

$$U^\dagger(\lambda^*) = U(\lambda) \quad \Rightarrow \quad q^\dagger = q, \tag{5.83}$$

$$U^T(-\lambda) = -U(\lambda) \quad \Rightarrow \quad q^T = -q. \tag{5.84}$$

Следователно $q(x,t)$ е чисто имагинерна матрица и нейните компоненти удовлетворяват следната система от 3 мКдФ уравнения

$$\mathbf{q}_{2,t} + \mathbf{q}_{2,xxx} + 3(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)_x\mathbf{q}_3 + 3\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4\mathbf{q}_{3,x} + 6\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_{2,x} = 0, \tag{5.85}$$

$$\mathbf{q}_{3,t} + \mathbf{q}_{3,xxx} + 3(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_4)_x\mathbf{q}_3 + 3(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)_x\mathbf{q}_2 + 3(\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)_x\mathbf{q}_4 + 3\mathbf{q}_3^2\mathbf{q}_{3,x} = 0, \tag{5.86}$$

$$\mathbf{q}_{4,t} + \mathbf{q}_{4,xxx} + 3(\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)_x\mathbf{q}_3 + 3\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_{3,x} + 6\mathbf{q}_4^2\mathbf{q}_{4,x} = 0, \tag{5.87}$$

където $q_k = \mathrm{i}\mathbf{q}_k$ за $k = 2,3,4$.

Дублетният тип солитонно решение, което съответства на две дискретни собствени стойности: $\lambda^{\pm} = \pm\mathrm{i}\nu$, има вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_2(x,t) &= \frac{\nu}{\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0)+\mathcal{C}}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_2 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_4\right), && (5.88)\\
\mathbf{q}_3(x,t) &= -\frac{2\nu\sinh\nu(x-ut-\xi_0)\mathcal{F}_3}{\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0)+\mathcal{C}}, && (5.89)\\
\mathbf{q}_4(x,t) &= \frac{\nu}{\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0)+\mathcal{C}}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_4 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_2\right), && (5.90)\\
\mathcal{C} &= \mathcal{F}_2^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{F}_4^2, \qquad u = \nu^2.
\end{aligned}$$

При записа на солитонното решение сме предположили за простота, че $F_{0,1} > 0$ и $F_{0,5} > 0$.

Системата (5.85)–(5.87) се явявава частен случай на по-общата система

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_{k,t} + \mathbf{q}_{k,xxx} - 3\sum_{i=2}^{2r}(-1)^{i+k}\mathbf{q}_{i,x}\mathbf{q}_{\bar{i}}\mathbf{q}_{\bar{k}} + 3\left(\sum_{i=2}^{r}(\mathbf{q}_i^2 + \mathbf{q}_{\bar{i}}^2) + \mathbf{q}_{r+1}^2\right)\mathbf{q}_{k,x}\\
&+ \; 3\left(\sum_{i=2}^{r}(\mathbf{q}_{i,x}\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{\bar{i},x}\mathbf{q}_{\bar{i}}) + \mathbf{q}_{r+1,x}\mathbf{q}_{r+1}\right)\mathbf{q}_k = 0, \qquad k = 2,\ldots,2r
\end{aligned} \tag{5.91}$$

при $r = 2$. Съответно и нейното солитонно решение е специален случай на следното

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_k(x,t) &= \frac{\nu}{\cosh 2\nu(x-ut-\xi_0)+\mathcal{C}}\left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_k + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)}\mathcal{F}_{\bar{k}}\right), && (5.92)\\
\mathcal{C} &= \mathcal{F}_2^2 + \mathcal{F}_3^2 + \ldots + \mathcal{F}_{2r}^2.
\end{aligned}$$

Другият тип солитонно решение — квадроплетното, съответства на 4 собствени стойности: $\pm\lambda^+, \pm(\lambda^+)^*$ и се получава с помощта на множителя

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x)}{\lambda-\lambda^+} + \frac{SA^*(x)S}{\lambda-(\lambda^+)^*} - \frac{SA(x)S}{\lambda+\lambda^+} - \frac{A^*(x)}{\lambda+(\lambda^+)^*}. \tag{5.93}$$

Тогава за безотражателния потенциал имаме

$$\mathbf{q}(x) = 2\mathrm{Im}\,[J, A(x) - SA(x)S]. \tag{5.94}$$

Разглеждания аналогични на вече направените при случая на уравнението на N-те вълни (вж. параграф 4.2) водят до следните резултати за функцията $A = XF^T$

$$X = \frac{1}{\Delta}\left(a^* F + bF^* - cSF^*\right), \qquad F = \mathrm{e}^{[\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)]J} F_0, \tag{5.95}$$

$$\Delta = |a|^2 + b^2 - c^2, \qquad a = \frac{F^T F}{2\lambda^+}, \qquad b = \frac{F^T F^*}{2\mathrm{i}\nu}, \qquad c = \frac{F^T S F^*}{2\mu} \tag{5.96}$$

където $u = \nu^2 - 3\mu^2$, $v = 3\nu^2 - \mu^2$. В края на краищата за квадроплетното решение се получава следното

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k = 2\mathrm{Im}\,[&(a^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F_{0,1} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F^*_{0,1} - c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F^*_{0,5}) F_{0,k} \\ &+(-1)^k (a^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F_{0,5} + b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-vt)+\nu(x-ut)} F^*_{0,5} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(x-vt)-\nu(x-ut)} F^*_{0,1}) F_{0,\bar{k}}] \end{aligned} \tag{5.97}$$

Пример 17: Съществува още една възможност за съчетаване на две $\mathbb{Z}_2$ редукции [51], а именно

$$K_3 U^\dagger(x, -\lambda^*) K_3^{-1} = U(x, \lambda), \qquad K_3 q^\dagger(x) K_3^{-1} = q(x), \tag{5.98}$$

$$U^T(x, -\lambda) = -U(x, \lambda), \qquad q^T(x) = -q(x), \tag{5.99}$$

където матрицата K_3 е въведена в (5.71). Комбинирането на условията на редукциите води до две възможни конфигурации от дискретни собствени стойности: двойка от имагинерни стойности $\lambda^\pm = \pm\mathrm{i}\nu$ и четири стойности $\{\pm\lambda^+, \pm(\lambda^+)^*\}$. В крайна сметка налагането на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ редукцията води до система от само 2 мКдФ уравнения

$$q_{2,t} + q_{2,xxx} - 3(q_2 q_3)_x q_3 + 3\varsigma_1\varsigma_2 q_3 q_2^* q_{3,x} - 6q_2^2 q_{2,x} = 0, \tag{5.100}$$

$$q_{3,t} + q_{3,xxx} + 3\varsigma_1\varsigma_2 |q_2|_x^2 q_3 - 3(q_2 q_3)_x q_2 - 3(q_2^* q_3)_x q_2^* - 3q_3^2 q_{3,x} = 0. \tag{5.101}$$

Едносолитонното решение, което е свързано с двойката имагинерни собствени стойности, се получава от вида

$$q_2(x,t) = \frac{-\mathrm{i}\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0}}{\varsigma_1 \cosh 2\nu(x - ut - \xi_0) + \mathcal{C}} \left(\mathrm{e}^{-\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_2 + \mathrm{e}^{\nu(x-ut-\xi_0)} \mathcal{F}_4\right), \tag{5.102}$$

$$q_3(x,t) = \frac{2\mathrm{i}\nu\mathcal{F}_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_0} \sinh \nu(x - ut - \xi_0)}{\varsigma_1 \cosh 2\nu(x - ut - \xi_0) + \mathcal{C}}, \qquad \mathcal{C} = \frac{2\varsigma_2 \mathrm{Re}\,(\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_4^*) + |\mathcal{F}_3|^2}{2}, \tag{5.103}$$

като и в този случай сме се придържали към вече използваните нееднократно дефиниции за ξ_0 и $\mathcal{F}_i$ (вж. (5.10) и (5.11)). Тъй като компонентите на поляризационните вектори удовлетворяват условията

$$F^*_{0,1} = -\varsigma_1 F_{0,1}, \qquad F^*_{0,2} = -\varsigma_2 F_{0,4}, \qquad F^*_{0,3} = -F_{0,3}, \qquad F^*_{0,5} = -\varsigma_1 F_{0,5},$$

то можем да наложим условието

$$\delta_0 = \arg F_{0,1} = \arg F_{0,5} = \frac{l\pi}{2}, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Другият тип солитонно решение се получава с помощта на обличащ множител, притежаващ 4 полюса от типа

$$g(x,t,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{A(x,t)}{\lambda-\lambda^+} - \frac{K_3SA^*(x,t)SK_3}{\lambda+(\lambda^+)^*} - \frac{SA(x,t)S}{\lambda+\lambda^+} + \frac{K_3A^*(x,t)K_3}{\lambda-(\lambda^+)^*}. \qquad (5.104)$$

Взимането на границата $\lambda\to\infty$ в уравнението (3.3) води до следния израз за решението

$$q(x,t) = [J, A - K_3SA^*SK_3 - SAS + K_3A^*K_3](x,t). \qquad (5.105)$$

Получаването на матрицата $A(x,t)$ става по начин напълно аналогичен на този при другия тип $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ редукция: разлагаме A на множители X и F, които представляват правоъгълни матрици с ранг $s\leq r$, след това нулирането на коефициентите пред полюсите води следния израз за множителя F

$$F(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda^+x+(\lambda^+)^3t)J}F_0, \qquad F_0 = \mathrm{const},$$

а множителят X в най-простия случай на $s=1$ има вида

$$X = \frac{a^*F + bSKF^* - cKF^*}{|a|^2+b^2-c^2},$$

където

$$\begin{aligned}
a &= \frac{F^TF}{2\lambda^+} = \frac{|F_{0,1}F_{0,5}|}{\lambda^+}(\cosh 2(\phi_{\mathrm{R}} - \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}) + \mathcal{C}_a), \qquad \mathcal{C}_a = \frac{F_{0,2}^2+F_{0,3}^2+F_{0,4}^2}{2|F_{0,1}F_{0,5}|},\\
b &= \frac{(F^\dagger SK_3F)}{2\mathrm{i}\nu} = \frac{\mathrm{i}|F_{0,1}F_{0,5}|}{\nu}(\varsigma_1\cosh 2\phi_{\mathrm{R}} + \mathcal{C}_b), \qquad \mathcal{C}_b = \frac{2\varsigma_2\mathrm{Re}\,(F_{0,2}^*F_{0,4}) + |F_{0,3}|^2}{2|F_{0,1}F_{0,5}|},\\
c &= \frac{(F^\dagger K_3F)}{2\mu} = \frac{|F_{0,1}F_{0,5}|}{\mu}(-\varsigma_1\cos 2\phi_{\mathrm{I}} + \mathcal{C}_c), \qquad \mathcal{C}_c = \frac{\varsigma_2(|F_{0,2}|^2+|F_{0,4}|^2) - |F_{0,3}|^2}{2|F_{0,1}F_{0,5}|},\\
\phi_{\mathrm{R}} &= \nu\,(x-ut-\xi_0)\,, \qquad \phi_{\mathrm{I}} = \mu\left(x - vt - \frac{\arg F_{0,5}}{\mu}\right).
\end{aligned}$$

По-горе отново сме фиксирали $\arg F_{0,1} = -\arg F_{0,5}$. След като заместим получения резултат в (5.105) и изберем за простота $\varsigma_1=\varsigma_2=1$, получаваме следното

$$\begin{aligned}
q_2 &= \frac{2\sqrt{|F_{0,1}F_{0,2}F_{0,4}F_{0,5}|}}{|a|^2+b^2-c^2}\left\{a^*\cosh(\phi_{\mathrm{R}}^- - \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^-) - b[\cosh(\phi_{\mathrm{R}}^- + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^+) + \cosh(\phi_{\mathrm{R}}^+ - \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^-)]\right.\\
&- \left. a\cosh(\phi_{\mathrm{R}}^+ + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^+) + c[\cosh(\phi_{\mathrm{R}}^+ + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^-) - \cosh(\phi_{\mathrm{R}}^- - \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}^+)]\right\}, \qquad (5.106)\\
q_3 &= \frac{2\mathrm{i}\sqrt{|F_{0,1}F_{0,5}|}}{|a|^2+b^2-c^2}\mathrm{Im}\,\{(b+c)\sinh(\phi_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}}) - a^*\sinh(\phi_{\mathrm{R}} - \mathrm{i}\phi_{\mathrm{I}})\}F_{0,3}, \qquad (5.107)
\end{aligned}$$

където сме употребили допълнителните обозначения

$$\phi_{\mathrm{R}}^{\pm} = \phi_{\mathrm{R}} \pm \frac{1}{2}\ln\frac{|F_{0,2}|}{|F_{0,4}|}, \qquad \phi_{\mathrm{I}}^{\pm} = \phi_{\mathrm{I}} \pm \arg F_{0,4}.\Box \qquad (5.108)$$

Получените 1-солитонни решения на $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ редуцираните системи, които разгледахме, могат да се обобщят с помощта на множители с по-голям брой полюси (вж. (4.69)).

6. ОБОБЩЕНИ ФУРИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗА УРАВНЕНИЯ С ДЪЛБОКА РЕДУКЦИЯ

Резултатите, изложени в настоящата глава, се отнасят до доказване на съотношения за пълнота на "квадратите"на решенията за вспомагателните линейни задачи на две конкретни нелинейни уравнения: уравнението на Кауп-Купършмид и афинен модел на Тода за алгебрата $\mathfrak{so}(5)$. Споменатите линейни задачи за тези уравнения представляват примери за обобщени задачи на Захаров-Шабат, върху които има наложена $\mathbb{Z}_h$ редукция с помощта на Кокстъров автоморфизъм. Наличието на такава редукция изисква Картановия елемент в (2.11) да е комплексна матрица. Това обстоятелство доста усложнява спектралната задача за съответния Лаксов оператор — непрекъснатият спектър вече се състои не от една, а от няколко прави през началото на координатната система, които се определят от условието

$$\operatorname{Im} \lambda\alpha(J) = 0,$$

където α е даден корен за алгебрата $\mathfrak{g}$, свързана със системата на Захаров-Шабат. Спектралната теория на Лаксовия оператор L за системи от този по-общ тип при $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{sl}(n)$ е разработена от Кодри [35] и Бийлс и Коифман [26, 27, 28]. По-късно техните резултати са обобщени от Герджиков и Яновски [60] за случая на произволна проста алгебра на Ли. В началото на тази глава ще направим кратък преглед на спектралната теорията за системите на Кодри-Бийлс-Коифман при наличието на Кокстърова редукция.

6.1 Системи на Кодри-Бийлс-Коифман

Нека е дадена системата на Захаров-Шабат (2.11) и нека е зададено действието на групата на редукциите $\mathbb{Z}_h$

$$\psi(x,\lambda) \mapsto \tilde{\psi}(x,\lambda) = K\psi(x,\omega\lambda)K^{-1}, \tag{6.1}$$

където K е автоморфизмът на Кокстър за алгебрата $\mathfrak{g}$, h е съответното число на Кокстър ($K^h = \mathbb{1}$), а $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/h}$. За Кокстъровия автоморфизъм съществува следното представяне

$$K = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} \omega^k H_k\right) \tag{6.2}$$

Съответното породено действие на тази редукция върху потенциала

$$KU(x,\omega\lambda)K^{-1} = U(x,\lambda) \quad \Rightarrow \quad Kq(x)K^{-1} = q(x), \quad \omega KJK^{-1} = J \tag{6.3}$$

налага силни ограничения върху вида на $q(x)$ и J. Отчитайки явния вид на Кокстъровия автоморфизъм, може да се провери, че за тях се получава следното

$$q(x) = \sum_{k=1}^{r} q_k(x) H_k, \qquad J = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} E_\alpha \tag{6.4}$$

където $\mathscr{A}$ е множеството на допустимите корени на $\mathfrak{g}$. За нашите цели е по-удобно да работим с J, което е елемент на Картановата подалгебра, затова оттук нататък ще считаме, че матрицата е диагонализирана.

Наличието на редукция от Кокстъров тип води до усложняване на метода на обратната задача на разсейването. Това се дължи на по-сложния спектър на Лаксовия оператор L — непрекъснатата част на спектъра се състои от $2h$ лъча l_a $(a = 1, \dots, 2h)$, сключващи равни ъгли от π/h помежду си. Така λ-равнината се оказва разделена на $2h$ сектора Ω_a. Всеки сектор се явява отделна област на аналитичност, т.е. във всеки сектор съществува фундаментално аналитично решение $\chi^a(x,\lambda)$. По аналогия с по-простия случай на реален Картанов елемент и сега фундаменталните аналитични решения на съседни области удовлетворяват локална задача на Риман-Хилберт

$$\begin{gathered} \chi^a(x,\lambda) = \chi^{a-1}(x,\lambda) G^a(\lambda), \qquad \lambda \in l_a \\ G^a(\lambda) = (S_a^-(\lambda))^{-1} S_a^+(\lambda) = (T_a^+(\lambda) D_a^-(\lambda))^{-1} T_a^-(\lambda) D_a^+(\lambda). \end{gathered} \tag{6.5}$$

Матриците $S_a^\pm(\lambda)$, $T_a^\pm(\lambda)$ и $D_a^\pm(\lambda)$ представляват съответните множители в Гаусовото разложение на матрицата на разсейването $T_a(\lambda)$. По-подробно изследване на свойствата на данните на разсейването за линейни задачи от разглеждания тип може да се намери в [62].

Забележка 3: Буквалното следване на пътя на изложение на правата задача на разсейването, както за случая на реална матрица J не е възможно, защото в случая на спектър от разглеждания вид не съществуват решения на Йост и матрица на разсейването. Това, което се прави в такива случаи, е да се разгледа значително по-леката задача за потенциали с компактен носител по x и след това чрез граничен преход да се премине обратно към интересуващата ни задача за потенциали, удовлетворяващи нулеви гранични условия. $\square$

С всеки лъч от непрекъснатия спектър на L се свързва подмножеството $\delta_a \subset \Delta$ на всички корени α, за които е изпълнено условието

$$\operatorname{Im} \lambda\alpha(J) = 0, \qquad \lambda \in l_a. \tag{6.6}$$

Очевидно е, че ако $\alpha \in \delta_a$, то и $-\alpha \in \delta_a$. Също така в сила е връзката: $\delta_a = \delta_{a+h}$. Всеки корен принадлежи на подмножество δ_a за някое a и по този начин се задава разбиване на корневото пространство на непресичащи се подмножества

$$\Delta = \bigcup_{a=1}^{h} \delta_a, \qquad \delta_a \cap \delta_b = \emptyset, \qquad a \neq b.$$

Освен възприетата от нас подредба на корените в корневото пространство е възможно да се въведат и други. По-нататък ние ще се възползваме от подредба, която е свързана с разбиването на компексната равнина на секторите Ω_a. По отношение на всеки сектор може да се въведе релация на подредба за корените, както следва: един корен α ще наричаме положителен тогава, когато е изпълнено равенството

$$\operatorname{Im} \lambda\alpha(J) > 0, \qquad \forall\, \lambda \in \Omega_a \tag{6.7}$$

и отрицателен — в обратния случай. Множеството на всички положителни (съотв. отрицателни) корени ще бележим с Δ_a^+ (съотв. с Δ_a^-), като индексът a е поставен, за да напомня спрямо коя област се взима подредбата. Подмножеството на всички положителни (съотв. отрицателни) корени, които удовлетворяват (6.6), по-нататък ще означаваме с δ_a^+ (сътв. с δ_a^-)

$$\delta_a^\pm = \Delta_a^\pm \cap \delta_a.$$

Лесно се съобразява, че са валидни следните съотношения за токущо въведените множества

$$\Delta_{a+h}^\pm = \Delta_a^\mp, \qquad \delta_{a+h}^\pm = \delta_a^\mp. \tag{6.8}$$

Освен подмножество на корени с всеки лъч се асоциира и подалгебра $\mathfrak{g}_a \subset \mathfrak{g}$. Тази подалгебра се разпъва от генераторите на Картан-Вайл, които съответстват на корени от множеството δ_a

$$\mathfrak{g}_a \equiv \operatorname{span}\{E_\alpha, H_\alpha; \quad \alpha \in \delta_a\}. \tag{6.9}$$

Може да се покаже, че тази подалгебра е винаги пряка сума на няколко $\mathfrak{sl}(2)$ алгебри. Освен подалгебрите $\mathfrak{g}_a$ важна роля играят и съответните им групи на Ли G_a. Така например, матрицата на разсейването $T_a(\lambda)$ и множителите в нейното Гаусово разложение лежат в G_a.

Автоморфизмът на Кокстър има краен порядък h и затова поражда $\mathbb{Z}_h$-градиуровка в $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=1}^{h} \mathfrak{g}^{(k)}. \tag{6.10}$$

Подпространствата $\mathfrak{g}^{(k)}$ представляват собствени подпространства на морфизма на Кокстър

$$\mathfrak{g}^{(k)} \equiv \{X \in \mathfrak{g} : KXK^{-1} = \omega^k X\}.$$

От дефиницията им следва, че условието за градуировка $[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)}$ е автоматично изпълнено.

Така както във всеки сектор Ω_a съществува аналитично решение $\chi^a(x,\lambda)$, така за всеки сектор могат да се дефинират "квадрати"на решенията

$$e_\alpha^{(a)} = P_J\left(\chi^a E_\alpha (\chi^a)^{-1}\right), \qquad h_j^{(a)} = P_J\left(\chi^a H_j (\chi^a)^{-1}\right), \tag{6.11}$$

където $P_J : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}/\ker \operatorname{ad}_J$.

В следващите параграфи на два конкретни примера ще формулираме и докажем условията за пълнота на квадратите на решенията за $\mathbb{Z}_3$-редуцирана системи на Захаров-Шабат, свързана с алгебрата $\mathfrak{sl}(3)$, и за $\mathbb{Z}_4$-редуцирана такава, но свързана с алгебрата $\mathfrak{so}(5)$. Тези системи се появяват естествено при разглеждането на конкретни интегрируеми уравнения: уравнение на Кауп-Купършмид и афинен модел на Тода, свързан с алгебрата $\mathfrak{so}(5)$.

6.2 Уравнение на Кауп-Купършмид

Уравнение на Кауп-Купършмид (УКК) се нарича 1+1-мерното нелинейно еволюционно уравнение [68]

$$\partial_t f = \partial^5_{x^5} f + 10 f \partial^3_{x^3} f + 25 \partial_x f \partial^2_{x^2} f + 20 f^2 \partial_x f, \tag{6.12}$$

за реалната функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. То притежава Лаксово представяне

$$\partial_t \mathcal{L} = [\mathcal{L}, \mathcal{A}], \tag{6.13}$$

където операторите на Лакс имат вида

$$\mathcal{L} = \partial^3_{x^3} + 2f\partial_x + \partial_x f, \tag{6.14}$$

$$\mathcal{A} = 9\partial^5_{x^5} + 30 f \partial^3_{x^3} + 45 \partial_x f \partial^2_{x^2} + (20 f^2 + 35 \partial^2_{x^2} f)\partial_x + 10 \partial^3_{x^3} f + 20 f \partial_x f. \tag{6.15}$$

Поради това че операторът $\mathcal{L}$ е от трети ред, то УКК се свързва с кубична задача за собствени стойности

$$\mathcal{L} f = \lambda^3 f.$$

Представянето (6.13) се може да се сведе до условие за съвместимост на два матрични диференциални оператора [40] с помощта на стандартна процедура по факторизация на $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = (\partial_x - u)\partial_x(\partial_x + u). \tag{6.16}$$

Нововъведената функция $u(x,t)$ е свързана с $f(x,t)$ посредством преобразованието на Миура

$$f = \partial_x u - \frac{1}{2} u^2. \tag{6.17}$$

В резултат на посочената факторизация се получава следния диференциален оператор от първи ред

$$\mathcal{L} \to L = \partial_x + q - \lambda J, \tag{6.18}$$

където

$$q = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След като сравним с (6.4) и отчетем, че допустимите корени за $\mathfrak{sl}(3)$ са: $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$ и $-(e_1 - e_3)$ (вж. приложение A.1), то стигаме до извода, че матричният Лаксов оператор за УКК съвпада с точност до множителя i с оператора на $\mathbb{Z}_3$-редуцираната обобщена система на Захаров-Шабат за алгебрата $\mathfrak{sl}(3)$. По-нататъшните разглеждания се отнасят именно за умножения с имагинерна единица отпред Лаксов оператор на системата на Захаров-Шабат. Ефектът от това умножение се изразява в завъртане на спектъра на ъгъл $\pi/2$ спрямо "оригиналния"Лаксов оператор.

Забележка 4: Поради това че величината u е чисто имагинерна, ефективно върху потенциала на оператора L е наложена допълнителна $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа

$$Kq^* K^{-1} = q, \qquad KJ^T K^{-1} = J. \tag{6.19}$$

Нейното съществуване няма да има съществено значение за разглежданията в настоящия параграф.□

Съгласно уговорката ни оттук нататък ще работим с диагонализираната матрица J, т.е. извършена е трансформацията

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix} \mapsto q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{6}u & -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{6}u \\ -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{6}u & 0 & \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{6}u \\ \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{6}u & -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{6}u & 0 \end{pmatrix}.$$

В този конкретен частен случай спектърът на L се състои от 6 лъча, сключващи помежду си ъгли от $\pi/3$ радиана, както е изобразено на фигура 6.1. Комплексната λ-равнина е разделена съответно на 6 сектора. На всеки лъч по дискутирания вече начин се съпоставят по 2 корена — един положителен и един отрицателен, както е посочено в по-долната таблица

лъч l_a	l_1, l_4	l_2, l_5	l_3, l_6
корени от δ_a	$\pm(e_1 - e_2)$	$\pm(e_2 - e_3)$	$\pm(e_1 - e_3)$

.

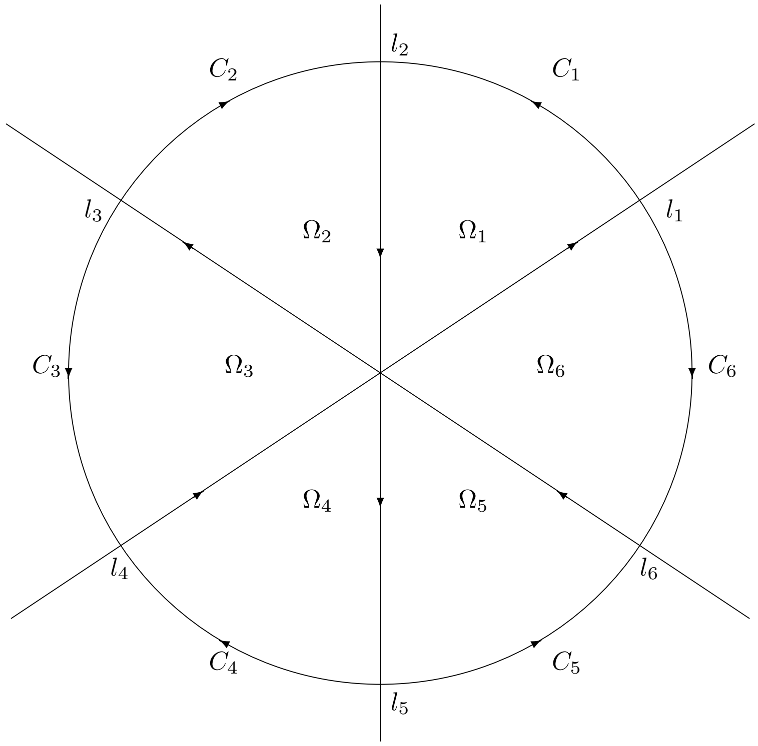

Fig. 6.1: Контур за интегриране $\gamma_a = l_a \cup C_a \cup l_{a+1}$.

Освен това с всеки лъч е асоциирана $\mathfrak{sl}(2)$ алгебрата, породена от базиса $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha\}$, където α е положителният корен, свързан с l_a. Кокстъровият автоморфизъм, който в новия базис има вида

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

поражда $\mathbb{Z}_3$-градуировка на $\mathfrak{sl}(3)$

$$\mathfrak{sl}(3) = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}.$$

Следващата теорема съдържа основния резулат в настоящия параграф.

Теорема 1: Квадратите на решенията (6.11) образуват пълна система [85], чиито съотношения за пълнота се дават от равенството

$$\begin{aligned} \delta(x-y)\Pi &= \frac{1}{2\pi}\sum_{a=1}^{6}(-1)^{a+1}\int_{l_a} \mathrm{d}\,\lambda \left[e^{(a)}_{\beta_a}(x,\lambda)\otimes e^{(a)}_{-\beta_a}(y,\lambda) - e^{(a-1)}_{-\beta_a}(x,\lambda)\otimes e^{(a-1)}_{\beta_a}(y,\lambda)\right] \\ &- \mathrm{i}\sum_{a=1}^{6}\sum_{n_a}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n_a}} G^{(a)}(x,y,\lambda). \end{aligned} \qquad (6.20)$$

където

$$\Pi = \sum_{\alpha\in\Delta^+}\frac{E_\alpha\otimes E_{-\alpha} - E_{-\alpha}\otimes E_\alpha}{\alpha(J)}, \qquad G^{(a)}_{\beta_a}(x,y,\lambda) = e^{(a)}_{\beta_a}(x,\lambda)\otimes e^{(a)}_{-\beta_a}(y,\lambda).$$

Доказателство: Изводът на съотношенията (6.20) се базира на прилагането на теоремата за резидуумите към израза

$$\mathcal{J}(x,y) = \sum_{a=1}^{6} (-1)^{a+1} \oint_{\gamma_a} G^{(a)}(x,y,\lambda) \mathrm{d}\,\lambda, \tag{6.21}$$

като контурите, по които се интегрира, са дадени на фигура 6.1, а функциите $G^{(a)}(x,y,\lambda)$ избираме от вида

$$\begin{aligned} G^{(a)}(x,y,\lambda) &= \theta(y-x) \sum_{\alpha\in\Delta_a^+} e_\alpha^{(a)}(x,\lambda) \otimes e_{-\alpha}^{(a)}(y,\lambda) - \theta(x-y) \\ &\times \left[\sum_{\alpha\in\Delta_a^-} e_\alpha^{(a)}(x,\lambda) \otimes e_{-\alpha}^{(a)}(y,\lambda) + \sum_{j=1}^{2} h_j^{(a)}(x,\lambda) \otimes h_j^{(a)}(y,\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Съгласно споменатата теорема $\mathcal{J}(x,y)$ е равен на сумата от резидуумите на подинтегралната финкция $G^{(a)}(x,y,\lambda)$, т.е.

$$\mathcal{J}(x,y) = 2\pi \mathrm{i} \sum_{a=1}^{6} \sum_{n_a} \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_{n_a}} G^{(a)}(x,y,\lambda). \tag{6.22}$$

От друга страна, предвид на структурата на контурите γ_a, интегралите в $\mathcal{J}(x,y)$ се разлагат на събираеми по следния начин

$$\oint_{\gamma_a} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda = \int_{l_a} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda + \int_{C_a} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda + \int_{l_{a+1}} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda. \tag{6.23}$$

Членовете, в които има интегриране по общ лъч, могат да се групират заедно, така че се стига до по-долното представяне

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x,y) &= \sum_{a=1}^{6} (-1)^{a+1} \int_{l_a} (G^{(a)}(x,y,\lambda) - G^{(a-1)}(x,y,\lambda))\mathrm{d}\,\lambda \\ &+ \sum_{a=1}^{6} (-1)^{a+1} \int_{C_a} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Лема 1: За $\lambda \in l_\nu$ са в сила съотношенията

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha^{(a-1)}(x,\lambda) \otimes e_{-\alpha}^{(a-1)}(y,\lambda) + \sum_{j=1,2} h_j^{(a-1)}(x,\lambda) \otimes h_j^{(a-1)}(y,\lambda) \\ &= \sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha^{(a)}(x,\lambda) \otimes e_{-\alpha}^{(a)}(y,\lambda) + \sum_{j=1,2} h_j^{(a)}(x,\lambda) \otimes h_j^{(a)}(y,\lambda). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Доказателство на Лема 1: Както изяснихме в началото на тази глава, фундаменталните аналитични решения удовлетворяват задача на Риман-Хилберт (6.5). Следователно съгласно дефиницията на квадратите на решенията имаме

$$\sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha^{(a)}(x,\lambda) \otimes e_{-\alpha}^{(a)}(y,\lambda) + \sum_{j=1,2} h_j^{(a)}(x,\lambda) \otimes h_j^{(a)}(y,\lambda) =$$

$$\chi^{a-1}(x,\lambda)G^a(\lambda) \otimes \chi^{a-1}(y,\lambda)G^a(\lambda)P(\chi^{a-1}(x,\lambda)G^a(x,\lambda))^{-1} \otimes (\chi^{a-1}(y,\lambda)G^a(\lambda))^{-1}.$$

Операторът

$$P = \sum_{\alpha\in\Delta} E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + \sum_{j=1,2} H_j \otimes H_j$$

представлява вторият оператор на Казимир за алгебрата $\mathfrak{sl}(3)$. Операторът на Казимир притежава сленото свойство

$$P(A\otimes B) = (B\otimes A)P, \qquad \forall\, A, B \in SL(3).$$

Тогава валидността на лемата е просто следствие от това свойство на оператора P.$\square$

Следващата лема дава възможност да бъдат опростени значително членовете в (6.24), съдържащи интегриране по лъчите.

Лема 2: В интегралите по лъчите l_a принос дават само събираемите, които съответстват на корени от δ_a^+ и δ_a^-, т.е.

$$G^{(a)}(x,y,\lambda) - G^{(a-1)}(x,y,\lambda) = e^{(a)}_{\beta_a}(x,\lambda)\otimes e^{(a)}_{-\beta_a}(y,\lambda) - e^{(a-1)}_{-\beta_a}(x,\lambda)\otimes e^{(a-1)}_{\beta_a}(y,\lambda). \quad (6.26)$$

Доказателство на Лема 2: Вследствие на лема 1 получаваме, че

$$G^{(a)}(x,y,\lambda) - G^{(a-1)}(x,y,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Delta_a^+} e^{(a)}_{\alpha}(x,\lambda)\otimes e^{(a)}_{-\alpha}(y,\lambda) - \sum_{\alpha\in\Delta_{a-1}^+} e^{(a-1)}_{\alpha}(x,\lambda)\otimes e^{(a-1)}_{-\alpha}(y,\lambda).$$

Тук е моментът да се възползваме от следното просто свойство:

$$\Delta_a^+ \backslash \delta_a^+ = \Delta_{a-1}^+ \backslash \delta_a^-$$

и от факта, че съшиващата функция $G^a(\lambda)$ принадлежи на групата $SL(2)$, свързана с l_a. Тогава сумите в $G^{(a)}(x,y,\lambda)$ и $G^{(a-1)}(x,y,\lambda)$ по тези множества взаимно се унищожават и в крайна сметка остават само членовете по δ_a^+ и δ_a^- съответно.$\square$

Остава да се пресметнат интегралите по дъгите C_a. За тази цел е нужно първо да оценим асимптотиката на функциите $G^{(a)}(x,y,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$. Тъй като за фундаменталните аналитични решения е в сила асимптотиката

$$\chi^a(x,\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\approx} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda J x},$$

не е трудно да се провери, че асимптотиката на $G^{(a)}(x,y,\lambda)$ изглежда така

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(x,y,\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\approx} & \sum_{\alpha\in\Delta_\nu^+} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\alpha(J)(y-x)} E_\alpha\otimes E_{-\alpha} - \theta(x-y) \\ & \times\left(\sum_{\alpha\in\Delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\alpha(J)(y-x)} E_\alpha\otimes E_{-\alpha} + \sum_{j=1,2} H_j\otimes H_j\right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Асимптотически $G^{(a)}(x,y,\lambda)$ е цяла функция и поради това интеграла от нейната асимптотика не зависи от самия контур. Това ни дава право да деформираме дъгите C_a, така че да получим комбинация от два лъча

$$C_a \mapsto \bar{l}_a \cup \bar{l}_{a+1}.$$

Чертичките над символите на лъчите означават, че ориентацията им е обратна на тази изобразена на фигура 6.1. Оттук следва, че интегралите по дъгите са равни на

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{6}(-1)^{a+1}\int_{C_a} G^{(a)}(x,y,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda &= \sum_{a=1}^{6}(-1)^{a+1}\int_{l_a}\mathrm{d}\,\lambda\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\beta_a(J)(y-x)}E_{-\beta_a}\otimes E_{\beta_a}\right.\\ &- \left.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\beta_a(J)(y-x)}E_{\beta_a}\otimes E_{-\beta_a}\right). \qquad (6.28)\end{aligned}$$

След като комбинираме събираемите, съответстващи на противоположни лъчи, и си спомним за известната формула за Фурие образа на 1

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} = \delta(x)$$

получаваме следното

$$2\pi\delta(x-y)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(E_\alpha\otimes E_{-\alpha}-E_{-\alpha}\otimes E_\alpha)}{\alpha(J)}. \qquad (6.29)$$

Накрая остава да съберем заедно резултатите (6.22), (6.24), (6.26) и (6.29) и по този начин се извежда съотношението за пълнота (6.20).□

Поради това че наличието на Кокстърова редукция определя $\mathbb{Z}_3$ градуировка на $\mathfrak{sl}(3)$, всички елементи на $\mathfrak{sl}(3)$ включително "квадратите"на решенията допускат разложение съгласувано с тази градуировка

$$e_\alpha^{(a)}(x,\lambda) = e_{\alpha,0}^{(a)}(x,\lambda)+e_{\alpha,1}^{(a)}(x,\lambda)+e_{\alpha,2}^{(a)}(x,\lambda), \qquad e_{\alpha,k}^{(a)}(x,\lambda)\in\mathfrak{g}^{(k)}.$$

Затова може да се напишат съотношения за пълнота за всяка компонента $e_{\alpha,k}^{(a)}(x,\lambda)$ по отделно.

Пълнотата на "квадратите"на решенията означава, че всяка функция X със стойности в $\mathfrak{sl}(3)/\ker\mathrm{ad}_J$ може да се разложи по тях

$$\begin{aligned}X(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{a=1}^{6}(-1)^{a+1}\int_{l_a}\mathrm{d}\lambda\left(X_{\beta_a}(\lambda)e_{-\beta_a}^{(a)}(x,\lambda)-X_{-\beta_a}(\lambda)e_{\beta_a}^{(a-1)}(x,\lambda)\right)\\ &- \mathrm{i}\sum_{a=1}^{6}\sum_{n_a}X_{n_a},\end{aligned}$$

където компонентите на X се дават от изразите

$$\begin{aligned}X_{\beta_a}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\langle\mathrm{ad}_J e_{\beta_a}^{(a)}(y,\lambda),X(y)\rangle\\ X_{-\beta_a}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\langle\mathrm{ad}_J e_{-\beta_a}^{(a-1)}(y,\lambda),X(y)\rangle\\ X_{n_a} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\mathrm{tr}_1\left(\mathrm{ad}_J\otimes\mathbb{1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n_a}}G^{(a)}(x,y,\lambda)X\otimes\mathbb{1}\right).\end{aligned}$$

Символът tr_1 означава, че се взима следата на първия множител в тензорното произведение.

6.3 Афинен модел на Тода, свързан с алгебрата $\mathfrak{so}(5)$

Афинният модел на Тода, свързан с проста алгебра на Ли $\mathfrak{g}$, е $1+1$-мерен релативистки полеви модел, определен от лагранжиана [76]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_j \left(q_{j,t}^2 - q_{j,x}^2\right) - \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathrm{e}^{-(\alpha,\vec{q})}, \qquad \vec{q} = (q_1, \dots, q_r).$$

Съответните уравнения на Ойлер-Лагранж имат следния вид

$$q_{i,\xi\eta} = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \alpha_i \mathrm{e}^{-(\alpha,\vec{q})},$$

където $\xi = (t-x)/2$ и $\eta = (t+x)/2$ са конусните променливи. В частност, за $\mathfrak{so}(5)$ получаваме

$$\begin{aligned} q_{1,\xi\eta} &= \mathrm{e}^{q_2-q_1} - \mathrm{e}^{q_1+q_2}, && (6.30)\\ q_{2,\xi\eta} &= -\mathrm{e}^{q_2-q_1} + \mathrm{e}^{-q_2} - \mathrm{e}^{q_1+q_2}. && (6.31) \end{aligned}$$

Тази система от уравнения има следното представяне на нулевата кривина

$$\begin{aligned} L\psi(\xi,\eta,\lambda) &\equiv \mathrm{i}\partial_\xi\psi(\xi,\eta,\lambda) - (\mathrm{i}q_\xi(\xi,\eta) + \lambda J)\psi(\xi,\eta,\lambda) = 0, && (6.32)\\ M\psi(\xi,\eta,\lambda) &\equiv \mathrm{i}\partial_\eta\psi(\xi,\eta,\lambda) - \frac{I(\xi,\eta)}{\lambda}\psi(\xi,\eta,\lambda) = 0, && (6.33) \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} q_\xi &= q_{1,\xi}H_1 + q_{2,\xi}H_2, \qquad J = E_{e_1-e_2} + E_{e_2} + E_{-(e_1+e_2)}, && (6.34)\\ I &= \mathrm{e}^{q_2-q_1}E_{-(e_1-e_2)} + \mathrm{e}^{-q_2}E_{-e_2} + \mathrm{e}^{q_1+q_2}E_{-(e_1+e_2)}. && (6.35) \end{aligned}$$

Това подсказва, че посочената афинна система на Тода може да се свърже със задача на Захаров-Шабат, редуцирана с помощта на Кокстъров автоморфизъм. Допълнителното условие полетата q_1 и q_2 да са реални, води до налагането на $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа (6.19).

По аналогия с предишния параграф и тук ще предпочетем да направим подходяща трансформация, така че J да лежи в Картановата подалгебра $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{so}(5)$. В новия базис матрицата J и потенциалът q_ξ се определят от следните изрази

$$\begin{aligned} J &= H_1 + \mathrm{i}H_2, \qquad q_\xi = -\frac{1}{2}q_{1,\xi}(\mathrm{i}E_{e_1} + E_{e_2} - \mathrm{i}E_{-e_1} + E_{-e_2})\\ &- \frac{1}{2}q_{2,\xi}(E_{e_1-e_2} - E_{e_1+e_2} + E_{-e_1+e_2} - E_{-e_1-e_2}). && (6.36) \end{aligned}$$

Този път непрекъснатият спектър на L се състои от 8 лъча, сключващи ъгли $\pi/4$ (вж. фигура 6.2). Отново с всеки лъч се асоциира двойка противоположни корени по начина описан в таблицата

лъч l_a	l_1, l_5	l_2, l_6	l_3, l_7	l_4, l_8
корен от δ_a	$\pm e_1$	$\pm(e_1-e_2)$	$\pm e_2$	$\pm(e_1+e_2)$

.

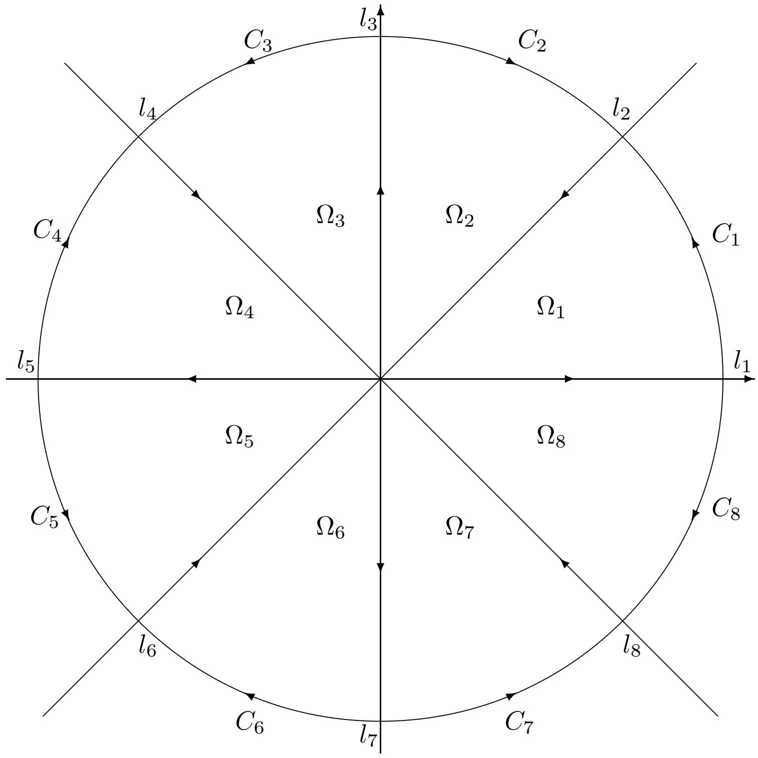

Fig. 6.2: Контур за интегриране $\gamma_a = l_a \cup C_a \cup l_{a+1}$.

И сега на всеки лъч l_a съответства $\mathfrak{sl}(2)$ подалгебра, разпъната от генераторите на Картан-Вайл за корена $\alpha \in \delta_a$. Заради действието на Кокстъровия автоморфизъм алгебрата $\mathfrak{so}(5)$ има $\mathbb{Z}_4$ градуировка

$$\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}.$$

В сила е следната

Теорема 2: Квадратите на решенията за задачата на Захаров-Шабат, съответстваща на афинната система на Тода за $\mathfrak{so}(5)$ образуват пълна система [54], чиито съотношения за пълнота са следните

$$\begin{aligned}\delta(\xi-\zeta)\Pi &= \frac{1}{2\pi}\sum_{a=1}^{8}(-1)^{a+1}\int_{l_a}\mathrm{d}\,\lambda\left(G^{(a)}_{\beta_a}(\xi,\zeta,\lambda) - G^{(a-1)}_{-\beta_a}(\xi,\zeta,\lambda)\right)\\ &\quad -\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\sum_{n_a}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n_a}} G^{(a)}(\xi,\zeta,\lambda).\end{aligned} \tag{6.37}$$

където

$$G^{(a)}_{\beta_a}(\xi,\zeta,\lambda) = e^{(a)}_{\beta_a}(\xi,\lambda)\otimes e^{(a)}_{-\beta_a}(\zeta,\lambda), \qquad \Pi = \sum_{\alpha\in\Delta^+}\frac{E_\alpha\otimes E_{-\alpha} - E_{-\alpha}\otimes E_\alpha}{\alpha(J)}.$$

Доказателство: Схемата на доказателството на теоремата повтаря напълно тази от предишния параграф — стартираме от началния анзац

$$\mathcal{J}(\xi,\zeta) = \sum_{a=1}^{8}(-1)^{a+1}\oint_{\gamma_a} G^{(a)}(\xi,\zeta,\lambda)\mathrm{d}\,\lambda, \tag{6.38}$$

като интегрирането се извършва по контурите, указани на фигура 6.2, а функциите $G^{(a)}(\xi,\zeta,\lambda)$ избираме от вида

$$\begin{aligned} G^{(a)}(\xi,\zeta,\lambda) &= \theta(\zeta-\xi)\sum_{\alpha\in\Delta_a^+} e_\alpha^{(a)}(\xi,\lambda)\otimes e_{-\alpha}^{(a)}(\zeta,\lambda) - \theta(\xi-\zeta) \\ &\times\left[\sum_{\alpha\in\Delta_a^-} e_\alpha^{(a)}(\xi,\lambda)\otimes e_{-\alpha}^{(a)}(\zeta,\lambda) + \sum_{j=1}^{2} h_j^{(a)}(\xi,\lambda)\otimes h_j^{(a)}(\zeta,\lambda)\right]. \end{aligned}$$

Остава да се приложи теоремата на Коши към посочения анзац.□

Както и в предходния случай, всяка функция X със стойности в $\mathfrak{so}(5)/\ker\operatorname{ad}_J$ допуска разложение по базиса от квадрати на решенията

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{a=1}^{8}(-1)^{a+1}\int_{l_a}\mathrm{d}\lambda\left(X_{\beta_a}(\lambda)e_{-\beta_a}^{(a)}(x,\lambda) - X_{-\beta_a}(\lambda)e_{\beta_a}^{(a-1)}(x,\lambda)\right) \\ &- \mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\sum_{n_a} X_{n_a}, \end{aligned}$$

където компонентите на X се дават от изразите

$$\begin{aligned} X_{\beta_a}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\langle\operatorname{ad}_J e_{\beta_a}^{(a)}(y,\lambda), X(y)\rangle, \\ X_{-\beta_a}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\langle\operatorname{ad}_J e_{-\beta_a}^{(a-1)}(y,\lambda), X(y)\rangle, \\ X_{n_a} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\,y\operatorname{tr}_1\left(\operatorname{ad}_J\otimes\mathbb{1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n_a}} G^{(a)}(x,y,\lambda)X\otimes\mathbb{1}\right). \end{aligned}$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резултатите, изложени в дисертационния труд, могат да се разделят на две групи: получаване на нови интегрируеми системи с помощта на метода на редукциите и намирането на техни частни решения (солитонни решения) и извеждане на съотношения за пълнота за "квадратите"на решенията за конкретни системи от типа на Кодри-Бийлс-Коифман. Към първата група резултати спадат: примерите на $\mathbb{Z}_2$-редуцирани N-вълнови уравнения за простите алгебри от сериите B_r, C_r и D_r, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-редуцираните N-вълнови уравнения за алгебрите A_r, B_r и C_r, $\mathbb{Z}_2$-редуцирани системи от типа на НУШ за симетрични пространства от серията **BD.I** и $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-редуцирани мКдФ за симетрични пространства от същата серия. И трите типа многокомпонентни интегрируеми уравнения се характеризират с полиномиални закони за дисперсия. Уравнението на N-те вълни и многокомпонентното мКдФ имат дисперсионни закони от нечетна степен — от първа и трета степен по спектралния параметър λ съответно. Поради това при тях са възможни $\mathbb{Z}_2$ редукции от типа $\lambda \to -\lambda$. Това, от своя страна, води до наличието на два вида 1-солитонни решения на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-редуцираните уравнения от посочения тип: "дублетен"солитон, който съответства на 2 дискретни собствени стойности $\pm \mathrm{i}\nu$ на Лаксовия оператор L и се явява аналог на топологичния солитон за уравнението sin-Гордън, и "квадроплетен"солитон, който е свързан с 4 собствени стойности $\{\pm(\mu + \mathrm{i}\nu), \pm(\mu - \mathrm{i}\nu)\}$ и е аналог на дишащия солитон. За пресмятане на самите 1-солитонни решения може да се приложи методът на обличането с множител, който взима стойности в съответната група на Ли и представлява мероморфна функция на λ с подходящ брой прости полюси в зависимост от типа 1-солитонно решение. Полюсите са пряко свързани с дискретните собствени стойности на L и взаимното им разположение в комплексната λ-равнина се фиксира от действието на съответната редукция поради условието за инвариантност на обличащия множител под действието на групата на редукциите. Освен чрез положението на дискретните собствени стойности решенията се параметризират и чрез независимите интеграционни константи, които участват в резидуумите на обличащия множител. Броят на тези константи се определя от размера и ранга на матрицата на резидуума. Освен 1-солитонните решения методът на обличането позволява да се сметнат и многосолитонните решения на съответните уравнения. Тук следва да се отбележи, че техниката на обличането може да се приложи за намиране на решения не само на уравнението на N-те вълни, НУШ и мКдФ, но и на по-висшите уравнения от техните йерархии. Разликата се състои във времевата зависимост на решенията поради различните дисперсионни закони на тези по-висши уравнения.

Нелинейните уравнения, асоциирани със симетричните пространства **BD.I**, допускат по-голямо разнообразие от редукции поради простия вид на Картановия елемент $J = H_{e_1}$. Освен Картанови редукции са възможни реализации на $\mathbb{Z}_2$ групата и посредством Вайлови отражения. В случая на мКдФ е възможна и $\mathbb{Z}_2$ редукция от типа $\lambda \mapsto -\lambda^*$, която може да се зададе чрез Вайловото отражение W_{e_2}. Симетричните пространства от серията **BD.I** $\approx SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ са удобни, тъй като броят на компонентите на q нараства линейно с r. Това дава възможност за получаване интегрируеми системи с малък брой уравнения след прилагане на (дълбоки) редукции върху общите системи, свързани с алгебри от по-висок ранг. Относителната простота на редуцираните системи, на свой ред, повишава вероятността те да намерят някакви физически приложения.

Освен нелинейни уравнения за алгебрите от 4-те безкрайни серии по подобен начин могат да се третират и уравнения, свързани с изключителните алгебри на Ли. За да се получи обличащия множител в тези случаи, следва да се осредни множителя за някоя от безкрайните серии по подходящ автоморфизъм.

Към първата група можем да отнесем също и резултатите по пресмятане на сингулярни решения на задачата на Риман-Хилберт. Наличието на тясна връзка между задачата на Риман-Хилберт и метода на обратната задача позволява решаването на едната задача да се сведе до решаване на другата. Така с избор на подходящ обличащ множител можем да генерираме решения на задачата на Риман-Хилберт с различен брой полюси. Получените решения са пропорционални на фундаменталните аналитични решения на спектралната задача на Захаров-Шабат. Потенциалът в тази задача, от своя страна, е свързан с решенията на конкретни нелинейни еволюционни уравнения. Времевата еволюция на решението се определя от дисперсионния закон на съответното уравнение.

Втората група от резултати се отнася до построяването на обобщен Фурие анализ, за две нелинейни уравнения: уравненията на Кауп-Купършмид и двукомпонентен афинен модел на Тода. В основата му стоят "квадратите"на решенията, които в много отношения са аналози на обикновените експоненти в класическия Фурие анализ. Така например, квадратите на решенията образуват пълна система. Показано е как се получават съотношенията за пълнота с помощта на метода на контурното интегриране, приложен към подходяща подинтегрална функция. Самите квадрати на решенията се конструират посредством фундаменталните аналитични решения за съответните системи на Кодри-Бийлс-Коифман с дълбока редукция от Кокстъров тип. За уравнението на Кауп-Купършмид системата на Кодри-Бийлс-Коифман е свързана с $\mathfrak{sl}(3)$ и е $\mathbb{Z}_3$-редуцирана, а при афинния модел на Тода — е $\mathbb{Z}_4$-редуцирана и се асоциира с $\mathfrak{so}(5)$. Наличието на редукция води до определена симетрия в спектъра на Лаксовия оператор.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторът би искал да изкаже своята признателност на ст. н. с. I ст. В. Герджиков за всичко, на което го е научил в областта на теорията на солитоните и не само. Авторът е благодарен също на ст. н. с. I ст. Н. Костов, проф. А. Михайлов и проф. Д. Кауп, за полезните обсъждания и за критичните бележки, които несъмнено са спомогнали за подобряване на ръкописа на дисертацията. Накрая, но не по значение, авторът благодари на родителите си за моралната подкрепа.

Приложение

А. КОРНЕВИ СИСТЕМИ НА НЯКОИ ПОЛУПРОСТИ АЛГЕБРИ НА ЛИ

А.1 Серията A_r

Специалната линейна алгебра $A_r \equiv \mathfrak{sl}(r{+}1)$ се състои от всички преобразования на $\mathbb{C}^{r+1}$, които имат нулева следа. Нейната Картанова подалгебра $\mathfrak{h}$ съдържа всички диагонални матрици с нулева следа. Очевидно $\dim \mathfrak{h} = r$.

В корневата система на A_r участват функционалите от типа

$$e_i - e_j, \qquad i, j = 1, \dots, r+1, \tag{A.1}$$

където $\{e_i\}_{i=1}^{r+1}$ е ортонормиран базис в евклидовото пространство $\mathbb{R}^{r+1}$. Простите корени имат вида

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \qquad i = 1 \dots, r. \tag{A.2}$$

Тогава положителни са всички корени от типа

$$e_i - e_j, \qquad i < j. \tag{A.3}$$

Максималният корен е

$$\alpha_{\max} = e_1 - e_{r+1}.$$

За базис на Картан-Вайл на A_r обичайно се избира

$$E_{e_i - e_j} = E_{ij}, \qquad H_{\alpha_i} = E_{ii} - E_{i+1,i+1}. \tag{A.4}$$

Числото на Кокстър за A_r е

$$h = r + 1. \tag{A.5}$$

А.2 Серията B_r

Серията $B_r \equiv \mathfrak{so}(2r+1)$ включва инфинитезималните преобразованията в $\mathbb{C}^{2r+1}$, които запазват матриката S, т. е.

$$B_r = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2r+1) : S(X\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{x}, X\mathbf{y}) = 0, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2r+1} \right\}.$$

Фиксирайки определен базис в $\mathbb{C}^{2r+1}$, горната дефиниция се записва така

$$B_r = \left\{ X \in \mathfrak{sl}(2r+1) : X^T S + SX = 0 \right\}. \tag{A.6}$$

Ние ще предпочетем да работим в неортонормиран базис в $\mathbb{C}^{2r+1}$, при който метриката има вида

$$S_{jk} = (-1)^{j-1}\delta_{j\ 2(r+1)-k}, \qquad j,k = 1,\dots,2r+1. \tag{A.7}$$

Това обезпечава възможността Картановата подалгебра да се състои от диагонални матрици от типа

$$X = \mathrm{diag}\,(X_1, X_2, \dots, X_r, 0, -X_r, \dots, -X_2 - X_1). \tag{A.8}$$

Очевидно ранга на алгебрата B_r е r. Корените на серията B_r биват 2 типа:

1. дълги корени от типа: $\pm e_i \pm e_j, \quad i,j = 1,\dots,r$;

2. къси корени: $\pm e_i, \quad i = 1,\dots,r$,

където $(e_j)^i = \delta^i_j$ е стандартният ортонормиран базис в реалното евклидово пространство $\mathbb{R}^r$. Положителните корени имат вида

$$e_i \pm e_j, \qquad i < j, \qquad e_i, \tag{A.9}$$

а простите

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \qquad i = 1,\dots,r-1, \qquad \alpha_r = e_r. \tag{A.10}$$

За серията B_r максимален е коренът

$$\alpha_{\max} = e_1 + e_2. \tag{A.11}$$

За базис на Картан-Вайл избираме

$$E_{e_i - e_j} = E_{ij} + (-1)^{i+j+1} E_{2(r+1)-j\ 2(r+1)-i}, \qquad i,j = 1,\dots,r, \tag{A.12}$$

$$E_{e_i + e_j} = E_{i\ 2(r+1)-j} + (-1)^{i+j+1} E_{j\ 2(r+1)-i}, \qquad i < j, \tag{A.13}$$

$$E_{e_i} = E_{ir} + (-1)^{i+r} E_{r\ 2(r+1)-i}, \tag{A.14}$$

$$H_{\alpha_j} = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_j, e_k) H_k, \qquad H_k = E_{kk} - E_{2(r+1)-k\ 2(r+1)-k}. \tag{A.15}$$

За ортогоналните алгебри B_r числото на Кокстър е равно на

$$h = 2r. \tag{A.16}$$

A.3 Серията C_r

Симплектичната алгебра $C_r \equiv \mathfrak{sp}(2r)$ се формира от инфинитезималните симплектоморфизми в $\mathbb{C}^{2r}$, т.е.

$$C_r = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2r) : S(X\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{x}, X\mathbf{y}) = 0, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2r} \right\},$$

където S е алгебрична 2-форма (антисиметрична билинейна форма). Избирайки такъв базис в $\mathbb{C}^{2r}$, че симплектичната форма да има вида

$$S_{jk} = (-1)^{j-1}\delta_{j\ 2r+1-k}, \tag{A.17}$$

достигаме до равенството

$$C_r = \left\{X \in \mathfrak{sl}(2r+1) : X^T S + SX = 0\right\}.$$

Спрямо този базис елементите на Картановата алгебра изглеждат по следния начин

$$X \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad X = \operatorname{diag}(X_1, X_2, \ldots, X_r, -X_r, \ldots, -X_2, -X_1). \tag{A.18}$$

Размерността на $\mathfrak{h}$ е равна на r. Корневата система на C_r серията както и тази на B_r се състои от къси и дълги корени:

1. къси: $\pm e_i \pm e_j, \qquad i, j = 1, \ldots, r$
2. дълги: $\pm 2e_i$.

Положителни корени са

$$e_i \pm e_j, \qquad i < j, \qquad 2e_i. \tag{A.19}$$

Простите корени се задават от

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, r-1, \qquad \alpha_r = 2e_r. \tag{A.20}$$

Максималният корен е

$$\alpha_{\max} = 2e_1. \tag{A.21}$$

Базисът на Картан-Вайл за симплектичните алгебри има вида

$$\begin{aligned}
E_{e_i - e_j} &= E_{ij} + (-1)^{i+j+1} E_{2r+1-j\ 2r+1-i}, \qquad i, j = 1, \ldots, r, && \text{(A.22)}\\
E_{e_i + e_j} &= E_{i\ 2r+1-j} + (-1)^{i+j} E_{j\ 2r+1-i}, && \text{(A.23)}\\
E_{2e_i} &= E_{i\ 2r+1-i}, \qquad H_{\alpha_j} = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_j, e_k) H_k, && \text{(A.24)}\\
H_k &= E_{kk} - E_{2r+1-k\ 2r+1-k}. && \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

Числото на Кокстър за симплектичните алгебри е

$$h = 2r. \tag{A.26}$$

А.4 Серията D_r

Серията D_r включва ортогоналните алгебри от типа $\mathfrak{so}(2r)$ при $r \geq 4$. По дефиниция те удовлетворяват (А.6), като ние ще изберем матрицата на метриката S да бъде от вида

$$S_{ij} = \delta_{i,\,2r+1-j}, \qquad i, j = 1, \ldots, 2r. \tag{A.27}$$

Картановата подалгебра $\mathfrak{h}$ има размерност r и се състои от диагонални матрици от типа

$$J := \mathrm{diag}\,(J_1, \ldots, J_r, -J_r, \ldots, -J_1).$$

Корневото пространство се състои от корени от следните 2 вида

1. $\pm(e_i - e_j)$, $i, j = 1, \ldots, r$, $i \neq j$

2. $\pm(e_i + e_j)$, $i < j$, където $\{e_i\}_{i=1}^r$ е ортонормиран базис в $\mathbb{R}^r$.

Положителните корени имат вида

$$e_i \pm e_j, \qquad i < j.$$

Прости са корените

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, r-1, \qquad \alpha_r = e_{r-1} + e_r.$$

Максимален е коренът

$$\alpha_{\max} = e_1 + e_2.$$

Базисът на Картан-Вайл съдържа векторите

$$H_\alpha = \sum_i (\alpha, e_i) H_i, \qquad H_i = E_{ii} - E_{\bar{i},\bar{i}}, \qquad \bar{i} = 2r + 1 - i, \tag{A.28}$$

$$E_{e_i - e_j} = E_{ij} - E_{\bar{j},\bar{i}}, \qquad E_{e_i + e_j} = E_{i,\bar{j}} - E_{j,\bar{i}}, \qquad E_{-\alpha} = E_\alpha^T. \tag{A.29}$$

Числото на Кокстър за серията D_r е

$$h = 2(r-1).$$

Б. СОЛИТОННИ РЕШЕНИЯ НА УРАВНЕНИЕТО СИНУС-ГОРДЪН

Уравнението синус-Гордън (СГ), което тук ще запишем по следния начин

$$\omega_{xt} = \sin 2\omega, \tag{Б.1}$$

се явява условие за съгласуваност на два Лаксови оператора, единият от които е свързан със системата на Захаров-Шабат

$$L\psi(x,t,\lambda) = \mathrm{i}\partial_x\psi(x,t,\lambda) + [q(x,t) - \lambda\sigma_3]\psi(x,t,\lambda) = 0, \tag{Б.2}$$

За да се получи уравнението (Б.1), се налагат допълнително две $\mathbb{Z}_2$ редукции

$$q^+ = (q^-)^*, \qquad q^+ = -q^-,$$

които водят до представянето

$$q^+ = -q^- = -\mathrm{i}\omega_x.$$

Вторият Лаксов оператор, от своя страна, има вида

$$M\psi = \mathrm{i}\partial_t\psi + \frac{1}{2\lambda}(\cos 2\omega\sigma_3 - \sin 2\omega\sigma_1)\psi. \tag{Б.3}$$

СГ допуска 2 типа солитонни решения: топологични солитони (kinks) и "дишащи"солитони (breathers). Първият тип решения се свързват с 2 имагинерни дискретни собствени стойности $\lambda^\pm = \pm\mathrm{i}\nu$ на оператора L, докато дишащите решения са свързани 4 дискретни собствени стойности: $\pm\lambda^+, \pm(\lambda^+)^*$.

Топологичният солитон може да бъде получен по метода на обличането с помощта на обличащия множител

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + (c(\lambda) - 1)P(x), \qquad c(\lambda) = \frac{\lambda - \mathrm{i}\nu}{\lambda + \mathrm{i}\nu}, \tag{Б.4}$$

Съгласно формула (3.45) безотражателният потенциал се определя от следното равенство

$$q_{1\mathrm{s}}(x) = -2\mathrm{i}\nu[\sigma_3, P(x)], \tag{Б.5}$$

където

$$P(x) = \frac{n(x)n^T(x)}{n^T(x)n(x)}, \qquad n(x) = \mathrm{e}^{\nu\sigma_3 x}n_0.$$

След елементарно заместване се стига до следния резултат

$$q^+(x) = -q^-(x) = -\frac{2\mathrm{i}\nu}{\cosh(2\nu x + \xi_0)}, \qquad \xi_0 = \ln\left|\frac{n_{0,1}}{n_{0,2}}\right| \tag{Б.6}$$

Оттук, след като извършим интегриране по променливата x, получаваме

$$\omega(x) = 2\arctan\left(\mathrm{e}^{2\nu x+\xi_0}\right) \tag{Б.7}$$

За да възстановим времевата зависимост в израза за ω, е необходимо да се пресметнем границата $\lim_{x\to\pm\infty}\cos 2\omega(x)$. Елементарно заместване в конкретния случай води до следното

$$\lim_{x\to\pm\infty}\cos(2\omega) = 1.$$

Следователно дисперсионният закон на СГ добива вида

$$f(\lambda) = \lim_{x\to\pm\infty} V(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\sigma_3. \tag{Б.8}$$

В резултат на всичко това 1-солитонното решение се дава от израза

$$\omega(x,t) = 2\arctan\left[\mathrm{e}^{2\nu\left(x+\frac{t}{2\nu^2}\right)+\xi_0}\right]. \tag{Б.9}$$

Дишащ тип солитон може да се получи при използване на обличащия множител

$$g(x,\lambda) = \mathbb{1} + (c(\lambda)-1)A(x) + \left(\frac{1}{c(-\lambda)} - 1\right)A^*(x), \qquad c(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda^+}{\lambda-(\lambda^+)^*}. \tag{Б.10}$$

В горния анзац матричнозначната функция A допуска разлагането

$$A(x) = X(x)F^T(x), \tag{Б.11}$$

където

$$X = \frac{1}{a^2-|b|^2}\left(aF^* - b^*F\right), \qquad a = F^\dagger F, \tag{Б.12}$$

$$b = -\frac{\mathrm{i}\nu F^T F}{\mu - \mathrm{i}\nu}, \qquad F^T(x) = F_0^T(\chi_0^-(x,\lambda^-))^{-1}. \tag{Б.13}$$

Тъй като в солитонния сектор $\chi_0^\pm(x,\lambda) = \exp(-\mathrm{i}\lambda\sigma_3 x)$, в сила са равенствата

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^- x}F_{0,1}, \qquad F_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^- x}F_{0,2}. \tag{Б.14}$$

Така, за безотражателния потенцил се получава следния израз

$$\begin{aligned} q^+(x) &= -\frac{8\mathrm{i}\nu}{a^2-|b|^2}\left[a\mathrm{Re}\left(F_1^*F_2\right) - \mathrm{Re}\left(b^*F_1F_2\right)\right] \\ &= -4\mathrm{i}\mu\nu\frac{\mu\cosh\phi\cos\delta - \nu\sinh\phi\sin\delta}{\mu^2\cosh^2\phi + \nu^2\sin^2\delta} \end{aligned} \tag{Б.15}$$

където

$$\phi = 2\nu x + \xi_0, \qquad \delta = 2\mu x + \arg F_{0,1} - \arg F_{0,2}.$$

След като извършим съответното интегриране, за функцията ω се получава

$$\omega(x) = 2\arctan\left(\frac{\nu\sin\delta}{\mu\cosh\phi}\right) = 2\arctan\left[\frac{\nu\sin(2\mu x + \arg F_{0,1} - \arg F_{0,2})}{\mu\cosh(2\nu x + \xi_0)}\right]. \tag{Б.16}$$

Понеже в настоящия случай

$$\lim_{x\to\pm\infty}\omega(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty}\cos 2\omega = 1,$$

то окончателният отговор за солитонното решение на СГ има вида

$$\omega(x,t) = 2\arctan\left\{\frac{\nu\sin[2\mu(x - t/2(\mu^2+\nu^2)) + \arg F_{0,1} - \arg F_{0,2}]}{\mu\cosh\left[2\nu\left(x + t/2(\mu^2+\nu^2)\right) + \xi_0\right]}\right\}. \tag{Б.17}$$

В. ПУБЛИКАЦИИ, СВЪРЗАНИ С ДИСЕРТАЦИЯТА

Изложените в дисертацията резултати са публикувани в следните журнални статии:

1. V. Gerdjikov, N. Kostov, T. Valchev, N-wave equations with orthogonal algebras: $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ reductions and soliton solutions, *Sigma* **3**, 039 (2007) 19 pages.

2. V. Gerdjikov, D. Kaup, N. Kostov, T. Valchev, On classification of soliton solutions of multicomponent nonlinear evolution equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 36 pages.

3. V. Gerdjikov, N. Kostov, T. Valchev, Solutions of multi-component NLS models and spinor Bose-Einstein condensates, *Physica D*, doi: 10.1016/j.physd.2008.06.007.

и в следните доклади от конференции:

1. V. Gerdjikov, T. Valchev, On soliton solutions of N-wave equations associated with symplectic algebras, in proc. conference “Meetings in Physics at University of Sofia“ vol. 7, ed. A. Proykova, Heron Press 2006, 1–7.

2. V. Gerdjikov, T. Valchev, Breather solutions of N-wave equations, in proc. 8-th int. conference “Geometry, integrability and quantization“, June 9–14, 2006, Varna, eds. I. Mladenov and M. de León, Softex 2007, 184–200.

3. T. Valchev, Bäcklund transformations and Riemann-Hilbert problem for N wave equations with additional symmetries, in proc. 8-th int. workshop “Complex structures and vector fields“, August 21–26, 2006, Sofia, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific 2007, 327–334.

4. V. Gerdjikov, N. Kostov, T. Valchev, Soliton equations with deep reductions. Generalized Fourier transforms, in proc. 8-th int. workshop “Complex structures and vector fields“, August 21–26, 2006, Sofia, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific 2007, 85–96.

5. T. Valchev, On the Kaup-Kupershmidt equation. Completeness relations for the squared solutions, in proc. 9-th int. conference “Geometry, integrability and quantization“, June 8–13, 2007, Varna, ed. I. Mladenov, Softex 2008, 308–319.

Библиография

[1] Гахов Ф., Краевые задачи, Наука, Москва, 1977.

[2] Захаров В., Манаков С., К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах *ЖЭТФ* **69**, вып. 5 (1975) 1654–1672.

[3] Захаров В., Манаков С., Новиков С., Питаевский Л., Теория солитонов: метод обратной задачи, Наука, Москва, 1985.

[4] Захаров В., Манаков С., Построение многомерных нелинейных интегруемых систем и их решений, *Функ. Анализ Прил.* **19** (1985) 11–25.

[5] Захаров В., Михайлов А., Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, *ЖЭТФ* **74**, вып. 6 (1978) 1953–1973.

[6] Захаров В., Фаддеев Л., Уравнение Кортевега-де Фриса — вполне интегрируемая Гамильтонова система, *Функ. Анализ Прил.* **5** (1971) 18–27.

[7] Захаров В., Шабат А., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *ЖЭТФ* **61** (1970) 118–134.

[8] Захаров В., Шабат А., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I, *Функ. Анализ Прил.* **8**, вып. 3 (1974) 43–53.

[9] Захаров В., Шабат А., Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II, *Функ. Анализ Прил.* **13**, вып. 3 (1979) 13–22.

[10] Манаков С., К теории двумерного стационарного самофокусировки електромагнитных волн, *ЖЭТФ* **65**, вып. 2 (1973) 505–516.

[11] Михайлов А., Редукции в интегрируемых системах. Группа редукции, *Письма ЖЭТФ* **32**, вып. 2 (1980) 187–192.

[12] Склянин Е., Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния, Записки научных семинаров ЛОМИ, том 95 "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III Наука, Ленинград, 1980, 55–128.

[13] Тахтаджян Л., Фаддеев Л., Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля, *ТМФ* **21**, вып. 2 (1974) 160–174.

[14] Тахтаджян Л., Фаддеев Л., Гамильтонов подход в теории солитонов, Наука, Москва, 1986.

[15] Шабат А., Обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений, *Функ. Анализ Прил.* **9**, вып. 3 (1975) 75–78.

[16] Шабат А., Обратная задача рассеяния, *Дифф. урав.* **15**, вып. 10, (1979) 1824–1834.

[17] Ablowitz M. J., Segur H., Solitons and the inverse scattering transform, Cam. Univ. Press, 1981.

[18] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A., Segur H., Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1262–1264.

[19] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A., Segur H., Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 125–127.

[20] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A., Segur H., The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems, *Studies Appl. Math.* **53** (1974) 249–315.

[21] Ackerhalt J. R., Milonni P. W., Solitons and four-wave mixing, *Phys. Rev. A* **33** (1986) 3185–3198.

[22] Atanasov V., Gerdjikov V., Grahovski G., Kostov N., Fordy-Kulish models and spinor Bose-Einstein condensates, nlin.SI/0802.4405 (2008).

[23] Athorne C., Fordy A., Generalized KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987) 1377–1386.

[24] Barut A., Raczka R., Theory of group representations and applications, PWN— Polish Scient. Publ., Warszawa, 1977.

[25] Bäuerle G., de Kerf E., Lie algebras: finite and ininite dimensional Lie algebras and Applications in Physics, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[26] Beals R., Coifman R., Scattering and inverse scattering for first order systems, *Commun. Pure and Appl. Math.* **37** (1984) 39–90.

[27] Beals R., Coifman R., Scattering and inverse scattering for first order systems: II, *Inv. Problems* **3** (1987) 577–593.

[28] Beals R., Coifman R., Linear spectral problems, nonlinear equations and the delta-method, *Inv. Problems* **5** (1989) 87–130.

[29] Belokolos E., Bobenko A., Enol'skii V., Its A., Matveev V., Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[30] Bloembergen N., Nonlinear optics, Benjamin, New York-Amsterdam, 1965.

[31] Bullough R., Caudrey P., Solitons, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1980.

[32] Calogero F., Degasperis A., Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. I., *Nuovo Cimento* **32B** (1976) 201–242.

[33] Calogero F., Degasperis A., Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform. II., *Nuovo Cimento* **39B** (1977) 1–54.

[34] Calogero F., Degasperis A., Spectral transform and solitons: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations, North-Holland Publ. Company, Amsterdam - New York - Oxford, 1982.

[35] Caudrey P., The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation, *Physica D* **6** (1982) 51–66.

[36] Dodd R., Eilbeck J., Gibbon J., Morris H., Solitons and nonlinear wave equations, Academic Press, London, 1984.

[37] Drinfel'd V., Sokolov V., Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, *J. Sov. Math.* **30** (1985) 1975–2036.

[38] Ferapontov E., Isoparametric hypersurfaces in spheres, integrable nondiagonalizeble systems of hydrodynamic type and N-wave systems, *Diff. Geom. Appl.* **5** (1995) 335–369.

[39] Fokas A., Pelloni B., Integral transforms, spectral representation and d-bar problem, proc. R. Society Lond. A **456** (2000) 805–833.

[40] Fordy A., Gibbons J., Factorization of operators I. Miura transformation, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2508–2510.

[41] Fordy A., Gibbons J., Factorization of operators II., *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1170–1175.

[42] Fordy A., Gibbons J., Integrable nonlinear Klein-Gordon equations and Toda lattices, *Commun. Math. Phys.* **77** (1980) 21-30.

[43] Fordy A., Kulish P., Nonlinear Schrodinger equations and simple Lie algebras *Commun. Math. Phys.* **89** (1983) 427–443.

[44] Gardner C., Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, *J. Math. Phys.* **12**, (1971) 1548–1551.

[45] Gardner C., Greene J., Kruskal M., Miura R., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095–1097.

[46] Gerdjikov V., On the spectral theory of the integro-differential operator Λ, generating nonlinear evolution equations, *Lett. Math. Phys.* **6**, n 6 (1982) 315–324.

[47] Gerdjikov V., Generalised Fourier transforms for the soliton equations. Gauge covariant formulation, *Inv. Problems* **2**, n 1 (1986) 51–74.

[48] Gerdjikov V., $\mathbb{Z}_N$-reductions and new integrable versions of derivative nonlinear Schrödinger equations, in proc. 6-th int. workshop on nonlinear evolution equations: integrability and spectral methods, Como, Italy, 1988, Eds.: A. Fordy, A. Degasperis, M. Lakshmanan, Manchester Univ. Press, (1981) 367–372.

[49] Gerdjikov V., Grahovski G., Ivanov R., Kostov N., N-wave interactions related to simple Lie algebras. $\mathbb{Z}_2$- reductions and soliton solutions, *Inv. Problems* **17** (2001) 999–1015.

[50] Gerdjikov V., Grahovski G., Kostov N., Reductions of N-wave interactions related to low-rank simple Lie algebras, *J. Phys A: Math. Gen.* **34** (2001) 9425–9461.

[51] Gerdjikov V., Kaup D., Kostov N., Valchev T., On classification of soliton solutions of multicomponent nonlinear evolution equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 36 pages.

[52] Gerdjikov V., Khristov E., On the evolution equations solvable with the inverse scattering problem. I. The spectral theory, *Bul. J. Phys.* **7**, n. 2 (1980) 119–133 (In Russian).

[53] Gerdjikov V., Kostov N., Inverse scattering transform analysis of Stokes-anti Stokes stimulated Raman scattering, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 4339–4350.

[54] Gerdjikov V., Kostov N. , Valchev T., Soliton equations with deep reductions. Generalized Fourier transforms, in proc. 8-th int. workshop "Complex structures and vector fields", August 21–26, 2006, Sofia, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific 2007, 85–96.

[55] Gerdjikov V., Kostov N. , Valchev T., N-wave equations with orthogonal algebras: $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ reductions and soliton solutions, *Sigma* **3**, 039 (2007) 19 pages.

[56] Gerdjikov V., Kostov N., Valchev T., Solutions of multi-component NLS models and spinor Bose-Einstein condensates, *Physica D*, (in press) doi: 10.1016/j.physd.2008.06.007.

[57] Gerdjikov V., Valchev T., On soliton solutions of N-wave equations associated with symplectic algebras, in proc. conference "Meetings in Physics at University of Sofia" vol. 7, ed. A. Proykova, Heron Press 2006, 1–7.

[58] Gerdjikov V., Valchev T., Breather solutions of N-wave equations, in proc. 8-th int. conference "Geometry, integrability and quantization", June 9–14, 2006, Varna, eds. I. Mladenov and M. de León, Softex 2007, 184–200.

[59] Gerdjikov V., Vilasi G.,Yanovski A., Integrable Hamiltonian hierarchies. Spectral and geometric methods, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[60] Gerdjikov V., Yanovski A., Completeness of the eigenfunctions for the Caudrey–Beals–Coifman system, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 3687–3725.

[61] Goto M. and Grosshans F., Semisimple Lie algebras, Marcel Dekker, New York, 1978.

[62] Grahovski G., On the reductions and scattering data for the CBC system, in proc. of 3-rd int. conference "Geometry, integrability and quantization June 14–23, 2001, Varna, Bulgaria, eds. I. Mladenov and G. Naber.

[63] Helgason S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, Toronto, 1978.

[64] Humphreys J., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, New York, 1978.

[65] Ieda J., Miyakawa T., Wadati M., Exact analysis of soliton dynamics in spinor Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), 194102.

[66] Ivanov R., On the dressing method for the generalised Zakharov-Shabat system, *Nuc. Phys. B* **694** (2004) 509-–524.

[67] Kaup D., Closure of the squared Zakharov-Shabat eigenstates, *J. Math. Anal. & Appl.* **54** n. 3 (1976) 849–864.

[68] Kaup D., On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$, *Stud. Appl. Math.* **62** (1980) 189–216.

[69] Kruskal M., Muira R., Gardner C., Zabusky N., Korteweg-de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 952–960.

[70] Lamb G., Elements of soliton theory, John Wiley & Sons, New York-Brisbane-Toronto, 1980.

[71] Lax P., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Commun. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467–490.

[72] Lombardo S., Mikhailov A., Reductions of integrable equations: dihedral group, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 7727–7742.

[73] Lonngren K., Scott A., Solitons in action, Academic Press, New York, 1978.

[74] Matveev V., Salle M., Darboux transformations and solitons, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[75] Mikhailov A., The reduction problem and the inverse scattering method, *Physica D* **3**, n 1–2 (1981) 73–117.

[76] Mikhailov A., Olshanetsky M., Perelomov A., Two-dimensional generalized Toda lattice, *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 473–488.

[77] Miura R., Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1202–1204.

[78] Miura R., Gardner C., Kruskal M., Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.* **9**, (1968) 1204–1209.

[79] Newell A., Solitons in Mathematics and Physics, SIAM, Philadelphia, 1985.

[80] Rogers C., Schief W.K., Bäcklund and Darboux transformations, Cambridge Univ. Press, London, 2002.

[81] Rogers C., Shadwick W., Bäcklund transformations and their applications, Academic Press, New York, 1982.

[82] Sokolov V., Wolf T., Classification of integrable polynomial vector evolution equations *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 11139–11148.

[83] Svinolupov S., Sokolov V., Vector-matrix generalizations of classical integrable equations, *Theor. Math. Phys.* **100** (1994) 959–962.

[84] Valchev T., Bäcklund transformations and Riemann-Hilbert problem for N wave equations with additional symmetries, in proc. 8-th int. workshop “Complex structures and vector fields“, August 21–26, 2006, Sofia, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific 2007, 327–334.

[85] Valchev T., On the Kaup-Kupershmidt equation. Completeness relations for the squared solutions, in proc. 9-th int. conference “Geometry, integrability and quantization“, June 8–13, 2007, Varna, ed. I. Mladenov, Softex 2008, 308–319.

[86] Wadati M., The modified Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **34** (1973) 1289-1296.

[87] Zabusky N., Kruskal M., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the reccurence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240–243.

[88] Zakharov V., Mikhailov A., On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time, *Commun. Math. Phys.* **74** (1980) 21–40.