



ЧИСЛЕНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДВУМЕРНОТО УРАВНЕНИЕ НА БУСИНЕСК

Красимир Андреев Ангелов
с научен ръководител
проф. д-р Наталия Кольковска

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за получаване на образователната и научна
степен „доктор”

в област на висше образование

4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
докторска програма „Математическо моделиране и
приложение на математиката”

Януари 2023

Съдържание

1	Въведение	3
1.1	Литературен обзор	5
1.2	Цели на дисертацията	6
2	Съдържание на дисертацията	7
3	Заклучение	26
4	Научни приноси	27
5	Декларация	28
6	Благодарности и посвещение	29

1 Въведение

Настоящият труд разглежда моделна задача, описваща поведението на самотна вълна в плитки води, движеща се в правоъгълен канал. Математическият модел е открит първоначално от Жозеф Бусинеск, важи за дълги нелинейни вълни и е известен с това, че нелинейността и дисперсията изпадат в самобалансиращо състояние [1, 2]. Проф. Христо Христов [3] извежда клас от вълнови уравнения, базирани на предходните две работи и едно от тях е наречено „Парадигматично уравнение на Бусинеск“ (ПУБ):

$$u_{tt} - \Delta u - \beta_1 \Delta u_{tt} + \beta_2 \Delta^2 u + \Delta f(u) = 0 \text{ при } (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \text{ при } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, y, t) \rightarrow 0, \Delta u(x, y, t) \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (2)$$

където $f(u) = \alpha u^2$, $\alpha > 0$ е амплитудата, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ са дисперсионни параметри, а Δ е операторът на Лаплас. Показано е, че уравнението (1) е частично интегрируемо и са изведени три закона за запазване на енергията, масата и момента [3, 4]. Други инварианти на (1) не са ми известни.

Задачата (1)-(2) и численото ѝ решаване ще са основна цел на настоящата работа. Уравненията на Бусинеск се използват не само за изучаване на динамиката на така наречените дълги вълни в плитка водна среда (например канал). Те могат да моделират разпространението на вълни в еластичен прът или в непрекъснатия еквивалент на решетъчни структури на молекулно ниво.

Началото на тази работа се фокусира върху решения на (1) от вида

$$u(x, y, t) = U(x, y - ct), \quad (3)$$

които са стационарни солитонни вълни (ССВ), движещи се по y оста със скорост c . След полагане на (3) в (1), ССВ удовлетворяват следното нелинейно елиптично диференциално уравнение от четвърти ред

$$c^2(E_1 - \beta_1 \Delta)U_{yy} = \Delta U - \beta_2 \Delta^2 U - \Delta f(U), \quad (4)$$

където E_1 е тъждествения оператор, при условие че $c < c_{max} :=$

$\min(\sqrt{\beta_2}/\sqrt{\beta_1}, 1)$. В следствие тези вълни ще служат за начално условие на хиперболичното уравнение (1) – (2).

Алгебричните изрази от [5], които апроксимират решението на елиптичното уравнение (4), са използвани като начално условие за числени симулации на ПУБ (1) – (2), (виж [6, 7, 8, 9, 10]). Първите четири статии показват, че при стойности на скоростта $c \leq 0.3$, ССВ се разсейват във формата на разширяваща се пръстеновидна вълна или избухват след кратък период от време. В последния труд [10] са направени експерименти при по високи скорости $c = 0.5, 0.6$, но отново резултатите за формата на вълната са сходни с вече документираното поведение. Вижда се, че балансът между дисперсията и нелинейността в ПУБ (1) е много крехък, което изисква повече усилия при запазването му.

Едномерното ПУБ

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta_1 u_{ttxx} + \beta_2 u_{xxxx} + f(u)_{xx} = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R},$$

$$u(x, t) \rightarrow 0, u(x, t)_{xx} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

притежава точно решение от тип солитон при $u = \tilde{u}(x - ct)$:

$$\tilde{u}(x, t : c) = \frac{3c^2 - 1}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_1(c^2 - 1)}{\beta_1 c^2 - \beta_2}} (x - ct \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}) \right). \quad (7)$$

Солитон е уединена вълна, движеща се със скорост c , от вида $\phi(x - ct)$, която е локализирана в пространството и при движение запазва формата си. Структурата ѝ се запазва дори след взаимодействие с друг(и) солитон(и).

Също така е добре известно от [11], че при числени симулации в едномерния случай, за уравнение (5), при условие, че $\beta_1/\beta_2 \leq 1$, солитонните вълни са нестабилни („strongly unstable by blow up“) за малки скорости c около нулата и не избухват за по-големи скорости. В следствие, такива изследвания са направени и за многомерното ПУБ, при $\beta_1/\beta_2 = 1$ (виж [12]), където е изведено необходимо условие за скоростта, спрямо критичната енергия, при което вълната не избухва.

Тези наблюдения изместват фокуса към изчисляване на ССВ от (1) с по-голяма точност и при по-големи скорости $c \approx c_{max}$,

тъй като това е от съществено значение за конструирането на началните данни за ПУБ (1)-(2). Важно е да получим числено решение на (4) с висока точност, чрез гъвкав и устойчив процес, който ще позволи тестването на повече и различни сценарии за развитие на решенията на хиперболичната задача (1)-(2).

1.1 Литературен обзор

Предисторията на изчисляването на ССВ за уравнение (1) е свързана с няколко числени техники, както следва - спектрален метод на Гальоркин е използван в [13, 14]; метод на простата итерация и шаблони с крайни разлики от втори ред върху неравномерна мрежа са приложени в [15, 16]; пертурбационно решение с развитие в ред около малък параметър (скоростта c) е представено в [5], където са изведени така наречените „best-fit“ апроксимационни формули. Освен това в [4] са изведени аналогични формули с тези от [5], но за нелинейност от вида $\alpha(u^3 - \sigma u^5)$.

Следните резултати се отнасят за двумерното ПУБ. Христов, Кольковска и Василева [7] разработват метод с неявна консервативна схема и неравномерна мрежа. Василева и Кольковска [17] представят числен метод с движеща се координатна система. Черток, Христов и Курганов [6] трансформират ПУБ в система от хиперболично и елиптично уравнения. При първото е използвана консервативна схема на Годунов, а за второто е приложен числен метод за елиптични уравнения базиран на бързи преобразувания на Фурие върху равномерна мрежа. В статията [18] на Димова и Кольковска е изведена консервативна схема, където пространственият оператор пред втората производна по времето е разложен на произведение от три дискретни такива, което води до решаване на пет-диагонални системи от линейни уравнения. В [8] Димова и Василева сравняват числения метод от [18] с друга консервативна схема приложена върху системата показана в [6], при равномерна и неравномерна мрежи, като решенията от двата подхода си съответстват едно на друго. Кольковска [19, 20, 21] е извела класове от трислойни и четирислойни консервативни диференчни схеми както с, така и без вътрешни итерации (на Пикард). Схемите без вътрешни итерации се изпълняват по-бързо. Блинков, Гердт, Панкратов и Коткова [22] представят нова не-

явна консервативна схема, базирана на комбинацията от метод на крайните обеми и числено интегриране. Всички тези статии [7, 6, 18, 8, 19, 20, 21, 22] апроксимират вторите производни в уравнение (1) с крайни разлики от втори ред - $O(|h|^2 + \tau^2)$. Кольковска и Ангелов [9] използват векторни схеми на Абрашин върху равномерна мрежа. На всеки слой по времето се получават по две числени апроксимации за решението като втората „изглажда“ първата, а грешката от апроксимациите е $O(|h|^2 + \tau)$. В [10], Юю Хе и Хонгтао Чен, извеждат неявна компактна консервативна схема с грешки $O(|h|^4 + \tau^2)$. Числените резултати са направени върху равномерна мрежа. Вучева и Кольковска [23] прилагат вариация на Рунге-Кута схеми за получаване на симплектични числени методи с грешки $O(|h|^2 + \tau^4)$.

Всичките статии, изброени в тази част, които представят числени решения на двумерното Парадигматично уравнение на Бусинеск (някои от статиите представят метод за многомерното ПУБ, но резултати само за едномерната задача), имат поне един пример с начално условие от [5], т.е. „best-fit“ формулите. Разбира се са използвани и други, но нито една от тези работи не представя резултати с начално условие получено чрез итерационен подход за решаване на съответното елиптично уравнение (4) (напр. „Метод на Якоби“, „Метод на простата итерация“ и т.н.). Входни данни, (т.е. $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$ от (1)-(2)) получени с такъв алгоритъм (наречен още „False Transients“), са разработени от Христов и Чаудури в [15, 16]. Въпреки това все още липсват диференчни схеми от четвърти и по-висок ред $O(|h|^p)$, $p \geq 4$ за решаване на елиптичното стационарно уравнение на Бусинеск. В допълнение, все още няма разработени диференчни схеми за двумерното Парадигматично уравнение на Бусинеск с четвърти и по-висок ред на апроксимация на вторите производни, едновременно по пространството и времето $O(|h|^p + \tau^p)$, $p \geq 4$.

1.2 Цели на дисертацията

Основната цел на този труд е да покаже, че двумерното ПУБ притежава числени решения със свойства, които са сходни с тези на солитоните. Построяването на подходящо начално условие заема съществена част от изследването на ПУБ и води до решаване

на друга задача - стационарното (елиптично) уравнение на Бусинеск. Подробното изследване на тези две уравнения поставят следните цели:

- построяване на диференчни схеми с висок ред на апроксимация (втори, четвърти и шести) върху равномерна мрежа за решаването на двумерните стационарно и хиперболично уравнения на Бусинеск;
- изследване на измененията в свойствата (енергията, масата, максимума и формата) на численото решение в зависимост от реда на апроксимация;
- сравнение между численото решение, получено за елиптичната задача, с шести ред на апроксимация, и „best-fit“ формулите от Пертурбационното решение на проф. Христов [5];
- построяване на ново асимптотично гранично условие за решаването на елиптичната задача;
- изследване на числените решения на хиперболичното уравнение (1) при по-високи скорости c близки до допустимия максимум $c \approx \min(\sqrt{\beta_2}/\sqrt{\beta_1}, 1)$, $c < \min(\sqrt{\beta_2}/\sqrt{\beta_1}, 1)$ с начално условие, получено от численото решение на елиптичната задача (4) (построено с метода на простата итерация);
- сравнение между числените резултати, получени с метода на Тейлор и други известни в литературата решения, използващи консервативни схеми (виж [7, 8]) с втори ред на апроксимация на вторите производни за хиперболичната задача.

2 Съдържание на дисертацията

Глава 2. Основни числени инструменти

В тази глава са дефинирани помощни средства и алгоритми, които се използват при численото решение на двумерните стационарно и хиперболично уравнения на Бусинеск. Дискретизацията

на пространствената област Ω_h е дефинирана чрез:

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = (i - \frac{N_x - 1}{2})h, y_j = (j - \frac{N_y - 1}{2})h, \\ i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 1\}, \quad (8)$$

където N_x и N_y описват броят точки по осите x и y . Стъпката по пространството h удовлетворява $h = 2L_x/(N_x - 1) = 2L_y/(N_y - 1)$, където $2L_x$ и $2L_y$ са размерите на областта Ω . Дискретният времеви интервал е дефиниран аналогично чрез

$$T_\tau = \{(t_k) : t_k = k\tau, k = 0, \dots, N_t - 1\}, \quad (9)$$

където N_t е броят точки по оста t , а $\tau = T/(N_t - 1)$ е стъпката по времето. За дискретизация на оператора на Лаплас, във

$p = 2$			1	-2	1		
$p = 4$		$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$	
$p = 6$	$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$

Таблица 1: Централни крайни разлики, използвани при апроксимацията на оператора на Лаплас.

вътрешността на Ω_h , са използвани централни крайни разлики с различна степен на апроксимация:

$$u_{\widehat{xx},p}(x, y) := \frac{1}{h^2} \sum_{i=-p/2}^{p/2} d_i u(x + ih, y_j), \quad p = 2, 4, 6. \quad (10)$$

като теглата d_i са взети от [24] и са описани в Таблица 1. Производните по y се дефинират аналогично. С помощта на Таблица 1 и използвайки несиметрични крайни разлики напред и крайни разлики назад върху границата на областта $\partial\Omega_h$, са изведени следните диференчни оператори, в матричен вид, с големина $N_x \times N_x$, за вторите производни по x :

$$\Delta_{h,2,x} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{h,4,x} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -\frac{38}{15} & \frac{29}{20} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{120} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{12} & \cdots & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{120} & -\frac{2}{15} & \frac{29}{20} & -\frac{38}{15} \end{bmatrix}$$

Матрицата $\Delta_{h,6,x}$ не е показана, защото е прекалено голяма, но се извежда аналогично като случаят при $p = 4$. Матриците $\Delta_{h,p,y}$, $p = 2, 4, 6$, които апроксимират вторите производни по y , имат същата структура, но различна големина ($N_y \times N_y$). Дискретният оператор на Лаплас в Ω_h се дефинира чрез:

$$\Delta_{h,p} = \Delta_{h,p,x} + \Delta_{h,p,y}, \quad p = 2, 4, 6, \quad (11)$$

където грешката от дискретните апроксимации е $O(h^p)$ в зависимост от избора на p .

Редът на сходимост на изследваните крайни разлики и развиятия в ред на Тейлор са получени посредством правилото на Рунге:

$$\xi = \ln \frac{\|u_{h,\tau} - u_{(h/2,\tau/2)}\|_{\kappa}}{\|u_{(h/2,\tau/2)} - u_{(h/4,\tau/4)}\|_{\kappa}} / \ln(2), \quad (12)$$

тъй като не е известно аналитично решение на уравнението, а нормата κ е подходящо подбрана. Тук $u_{h,\tau}$ е решението получено при стъпки h и τ . В настоящата работа за κ са използвани L_2 и L_{∞} норми:

$$\|u_{h,\tau}\|_{L_2} = \sqrt{h^2 \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} (u_{i,j})^2}$$

$$\|u_{h,\tau}\|_{\infty} = \max_{i,j} (|u_{i,j}|), \quad i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$$

Извели сме три различни квадратурни формули за пресмятане на интеграли, които са подробно описани в [25]. Тези формули са използвани за пресмятане на следните инварианти: маса и

енергия за хиперболичната задача, съответно с апроксимационни грешки $O(h^2)$, $O(h^4)$ и $O(h^6)$.

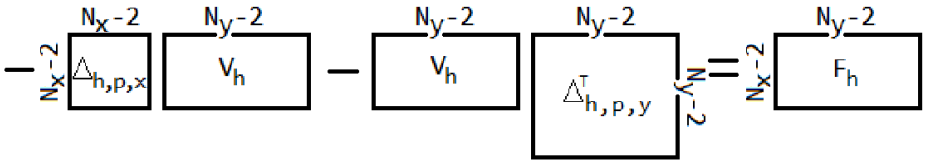
Използван е бърз директен метод за обръщане на двумерния дискретен оператор на Лаплас (Fast Poisson Solvers), който се описва чрез следната моделна задача:

$$-\Delta v = f \quad (13)$$

дефинирана в областта Ω с хомогенни гранични условия $v|_{\partial\Omega} = 0$. Дискретната версия на (13) има вида:

$$-\Delta_{h,p,x} V_h - V_h (\Delta_{h,p,y})^T = F_h, \quad (14)$$

където V_h, F_h са двумерни матрици с елементи съответно $v(x_i, y_j)$ и $f(x_i, y_j)$, и една и съща големина $(N_x - 2) \times (N_y - 2)$ (виж Фигура 1). Дискретните функции V_h, F_h представят непрекъснатите такива v, f ограничени върху мрежата Ω_h , т.е. $V_h = v(\Omega_h)$ и $F_h = f(\Omega_h)$.



Фигура 1: Дискретното уравнение на Лаплас (14) в матричен вид

Този тип запис на задачата (13) е разгледан от Том Личи в [26], където областта е квадратна $L_x = L_y$ и са използвани централни крайни разлики от втори ред ($p = 2$) с нулево гранично условие в $\partial\Omega_h$. При $p = 2$ операторите $\Delta_{h,2,x}$ и $\Delta_{h,2,y}$ са симетрични, което допълнително улеснява търсенето на решение на поставената задача. Настоящата глава се явява разширение на горепосочения труд при произволна правоъгълна област с размери $2L_x \times 2L_y$ и несиметрични крайни разлики по границата на областта, където се прилага нулево гранично условие. Т.е. в общия случай матриците $\Delta_{h,p,x}$ и $\Delta_{h,p,y}$ не са симетрични.

Глава 3. Формулировка и числено решаване на двумерното стационарно уравнение на Бусинеск - Метод на простата итерация

За удобство правим следната смяна на променливите: $x = \sqrt{\beta_1}\bar{x}$, $y = \sqrt{\beta_1}\bar{y}$, която трансформира уравнение (4) в

$$c^2\beta(E_1 - \Delta)v_{\bar{y}\bar{y}} = \beta\Delta v - \Delta^2 v - \beta\Delta f(v), \quad \beta = \beta_1/\beta_2 \quad (15)$$

За улеснение навсякъде по-надолу в текста ще се използват отново старите означения x, y вместо \bar{x}, \bar{y} .

Част 3.1 Метод на простата итерация за числено решаване на стационарното Парадигматично уравнение на Бусинеск (16)

Равенството (15) се преобразува в система от две елиптични уравнения от втори ред, като се въвеждат две нови функции $\hat{v} = v/\theta$ и $\hat{w} = w/\theta$, както е описано в [15, 16]:

$$\begin{aligned} - (1 - c^2\beta)\hat{v}_{yy} - \hat{v}_{xx} + \beta(1 - c^2)\hat{v} - \alpha\beta\theta\hat{v}^2 &= \hat{w}, \quad \beta = \beta_1/\beta_2, \\ - \Delta\hat{w} &= c^2\beta\hat{v}_{xx}, \end{aligned} \quad (16)$$

като се фиксира стойността на неизвестната функция v в нулата, $v(0,0) = \theta$, за да се избегне нулевото решение. Стойността на θ се намира, използвайки следната зависимост

$$\theta = \frac{(1 - c^2\beta)\hat{v}_{yy} + \hat{v}_{xx} - \beta(1 - c^2)\hat{v} + \hat{w}}{\alpha\beta\hat{v}^2} \Big|_{x=0,y=0}. \quad (17)$$

Системата (16) се параболизира, като изкуствено се добавят производни по времето както следва

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - (1 - c^2\beta)\hat{v}_{yy} - \hat{v}_{xx} + \beta(1 - c^2)\hat{v} - \alpha\beta\theta\hat{v}^2 &= \hat{w}, \\ \frac{\partial\hat{w}}{\partial t} - \Delta\hat{w} &= c^2\beta\hat{v}_{xx}, \end{aligned} \quad (18)$$

като времето е фиктивно и няма физичен смисъл. Дефинирана е явна диференчна схема за частните диференциални уравнения (18), чието числено решение сходя към това на системата (16).

Задачата (18) е решена числено в първи квадрант в мрежата $\omega_h \subset \Omega_h$, поради симетрията на решението спрямо абсцисата и ординатата. Използвани са два варианта за начални стойности,

с които започва първата итерация: „best-fit“ апроксимационните формули от [5] и числено решение на задачата (16) при $c = 0$, известно като „Основно състояние“ (Ground state) и описано в [12, 28]. С първия тип начални данни решението сходя между 5 – 10% по-бързо за случаите, които са разгледани в тази работа. Добавен е адаптивен метод за определяне на стъпката по фиктивното време, което ускорява процеса на схождение. Разписани са ясни критерии за спиране на итерационния алгоритъм. В следствие са дефинирани алгоритмичните стъпки, с които може да се възпроизведе целият итерационен процес и е изведена алгоритмичната сложност. В Таблица 2 е представен редът на сходимост за метода на простата итерация.

	h	$\ \bar{E}_i\ _{L_2}$	Ред на сход.	$\ \bar{E}_i\ _{L_\infty}$	Ред на сход.
$\beta = 3$ $c = 0.45$ $O(h^2)$	0.2				
	0.1	0.014232		0.016732	
	0.05	0.003238	2.14	0.003997	2.07
$\beta = 3$ $c = 0.45$ $O(h^4)$	0.2				
	0.1	0.001758		0.002499	
	0.05	0.000114	3.95	0.000168	3.90
$\beta = 3$ $c = 0.45$ $O(h^6)$	0.2				
	0.1	0.005038		0.012462	
	0.05	0.000094	5.74	0.000323	5.27
$\beta = 1$ $c = 0.9$ $O(h^2)$	0.4				
	0.2	0.043898		0.017906	
	0.1	0.009999	2.13	0.004348	2.04
$\beta = 1$ $c = 0.9$ $O(h^4)$	0.4				
	0.2	0.006309		0.002965	
	0.1	0.000432	3.87	0.000200	3.89
$\beta = 1$ $c = 0.9$ $O(h^6)$	0.4				
	0.2	0.000088		0.000115	
	0.1	0.000002	5.35	0.000003	5.04

Таблица 2: Ред на сходимост при метода на простата итерация с апроксимации $O(h^2)$, $O(h^4)$ и $O(h^6)$ на уравнението за Тест 1 и Тест 2. Грешките на численото решение E_i са пресметнати в L_2 и L_∞ норми.

Част 3.2 Числени резултати от метода на простата итерация за решаването на стационарното Парадигматично уравнение на Бусинеск

В този подраздел са направени два числени теста при пара-

метри $\beta = \beta_1/\beta_2 = 3, c = 0.45$ и $\beta = 1, c = 0.9$. За тези примери са показани следните резултати.

Първо, в Таблица 2 е обърнато внимание на скоростта на сходимост, върху три вложени мрежи, по правилото на Рунге (12), която отговаря на реда на избраната апроксимация на вторите производни. При $p = 6$ резултатите за сходимостта в L_2 и L_∞ норми са по-малки от очакваното, но са по-големи от 5, което не може да се постигне с крайни разлики от четвърти ред.

Второ резидуумът

$$R_{i,j}^{(k)} := c^2 \beta (\widehat{v}_{i,j}^{(k)})_{\overline{y\overline{y},p}} + \Delta_{h,p} (-\beta \widehat{v}_{i,j}^{(k)} - c^2 \beta (\widehat{v}_{i,j}^{(k)})_{\overline{y\overline{y},p}} + \Delta_{h,p} \widehat{v}_{i,j}^{(k)} + \alpha \beta \theta (\widehat{v}_{i,j}^{(k)})^2),$$

който е сума от всички членове в ПУБ, намалява от стойности близки до $1e - 1$ в първата итерация до стойности под $1e - 9$ на последната итерация.

Трето, показано е, че четвъртите производни на решението, които са пресметнати числено, са сходящи по правилото на Рунге (12).

Четвърто, получени са решения за различни стойности на параметрите β и c . Това параметрично изследване потвърждава получените в [5, 16] резултати като например зависимостта на формата на вълната от скоростта c и дисперсията β и асимптотичното поведение на решението при $(x^2 + y^2) \rightarrow \infty$.

Най-накрая, решението от последната итерация при $p = 6$ е сравнено с „best-fit“ апроксимационните формули от [5]. Резул-

β	c	$\ v^* - v\ _{L_2}$	$\ v^* - v\ _{L_\infty}$	$D_{L_2}^*$	$D_{L_\infty}^*$
1	0.1	1.4772e-01	8.1024e-03	2.7%	1.7%
1	0.3	1.4310e-01	8.7770e-03	2.7%	1.9%
1	0.5	1.6934e-01	1.3332e-02	3.5%	3.3%
1	0.7	5.8673e-01	5.1122e-02	14.8%	16.2%
1	0.9	2.1599e+0	1.6439e-01	93.1%	121.2%

Таблица 3: Разлики между числено решение v на елиптичната задача с висок ред на апроксимация $O(h^6)$ и „best-fit“ формулите v^* от [5] при $\beta = 1$ и $c = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

татите от него са показани на Таблица 3, където D_κ^* дефинира относителната грешка в проценти между двете решения: v на елиптичната задача с висок ред на апроксимация $O(h^6)$ и „best-

fit“ формулите v^* , в L_2 и L_∞ норми, върху цялата област Ω_h :

$$D_\kappa^* := 100 \times \frac{\|v^* - v\|_\kappa}{\|v\|_\kappa}, \quad \kappa = 2; \quad \kappa = \infty. \quad (19)$$

Това се оказва съществен елемент и повратна точка в изследването на хиперболичната задача (1)-(2).

Част 3.3 Ново гранично условие за двумерното елиптично уравнение (15)

Изведено е едно ново асимптотично гранично условие (виж [29]) за решаването на стационарното елиптично уравнение на Бусинеск (15). В серия от числени експерименти при $\beta = 1, 3, 5$, $c = 0.17$ и при $\beta = 1$, $c = 0.1, 0.5, 0.9$ е разгледана асимптотиката на всеки един от членовете за достатъчно голям радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg 0$ (виж Фигура 2). Показано е, че асимптотиката на членовете с четвърти производни и нелинейните такива:

$-v_{xxxx}$, $-(2 - \beta c^2)v_{xxyy}$, $-(1 - \beta c^2)v_{yyyy}$, $-\alpha\beta(v^2)_{xx}$, $-\alpha\beta(v^2)_{yy}$

е от ред $O(r^{-6})$, а на членовете с втори производни

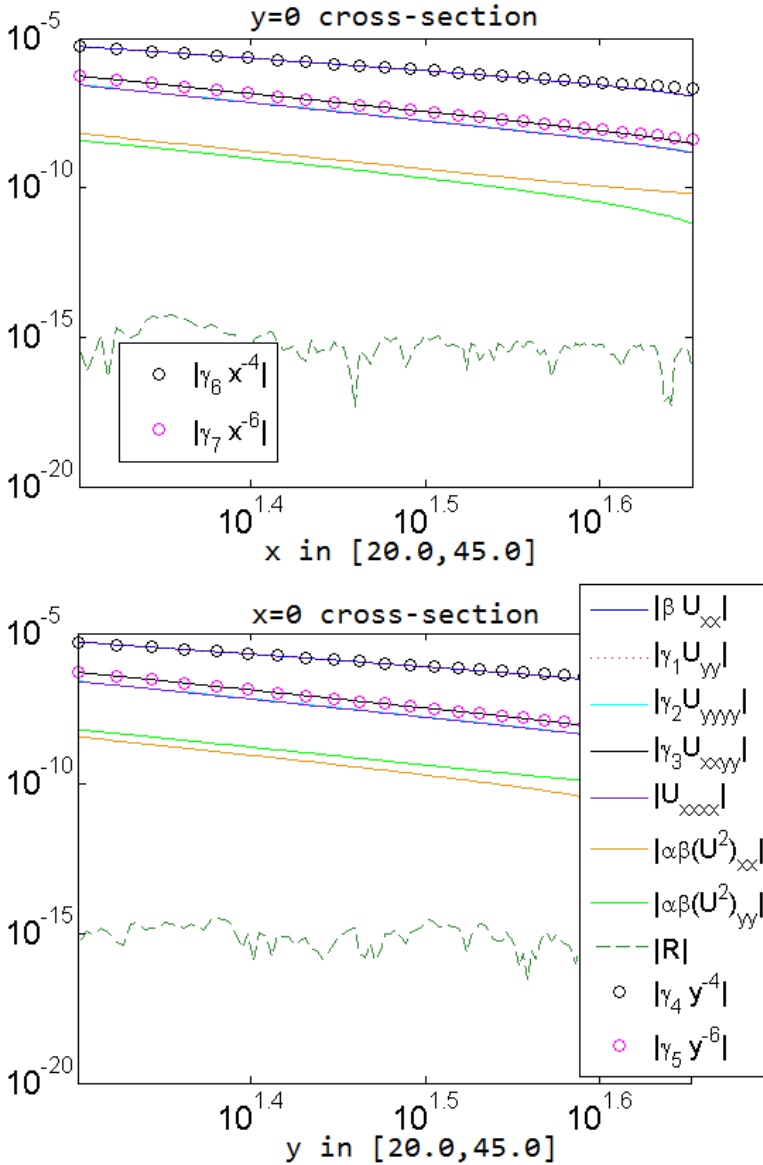
$$\beta v_{xx}, \quad \beta(1 - c^2)v_{yy}$$

е от ред $O(r^{-4})$. Използвайки тази зависимост, членовете с асимптотика $O(r^{-6})$ в елиптичното уравнение са пренебрегнати. Това води до извеждането на явната формула за гранично условие

$$\tilde{v}(x, y) = \mu_v \frac{(1 - c^2)x^2 - y^2}{((1 - c^2)x^2 + y^2)^2}, \quad x^2 + y^2 \gg 0. \quad (20)$$

Последната формула е валидирана с помощта на два числени теста.

При първия експеримент разглеждаме поведението на решението по границата, когато размерите на дискретната област Ω_h нарастват - $L_x = L_y = 20, 40, 80, 160$. Показано е, че функцията $\hat{v}(0, L_y)$ намалява с темп от вида $1/r^2$, а разликите между численото решение \hat{v} и граничната функция \tilde{v} намаляват при по-големи размери L_x, L_y . Направено е сравнение между числените решения v_{WithB} с гранично условие от (20) и v_{ZeroB} с нулево такова за елиптичната задача (16), при което се вижда, че L_2 нормата от разликата намалява два пъти, а L_∞ нормата четири пъти, при двойно увеличение на областта.



Фигура 2: Асимптотично поведение на членовете от елиптическото уравнение, представени в абсолютна стойност и логаритмични скали по x, y , получено с апроксимация от шести ред и нулево гранично условие. Скоростта и дисперсионният параметър са $c = 0.17$ и $\beta = 1$.

При втория тест разглеждаме поведението на функцията \widehat{v} и нейната асимптотика по x, y осите. Показано е, че численото решение следва наклона на функцията $1/r^2$ за достатъчно големи $r \gg 1$, което е в съответствие с новото асимптотично гранично условие от (20) и асимптотиката намерена в [16].

Глава 4 Формулировка и числено решаване на двумерното Парадигматично уравнение на Бусинеск

За удобство правим следната смяна на променливите (виж [19]):

$$x = \sqrt{\beta_1 \bar{x}}, \quad y = \sqrt{\beta_1 \bar{y}}, \quad t = \sqrt{\beta_1 \bar{t}}, \quad (21)$$

която променя основното уравнение (1) в

$$\beta(E_1 - \Delta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = (E_1 - \Delta) \Delta u + \Delta((\beta - 1)u - \alpha \beta u^2) \quad (22)$$

където $\beta = \beta_1/\beta_2$, а E_1 е тъждественият оператор. За улеснение навсякъде по-надолу в текста ще се използват отново старите означения x, y, t вместо $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$.

Непрекъснатата хиперболична задача (22) притежава три инварианти, които се запазват във времето, както е показано в [3]. В настоящата работа са разгледани само две от тях: масата и енергията, дефинирани съответно както следва:

$$M(u(x, y, t)) := \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dx dy, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} E(u(x, y, t)) := & \\ & \beta \int_{\mathbb{R}^2} u_t(x, y, t) ((-\Delta)^{-1} + E_1) u_t(x, y, t) dx dy + \beta \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x, y, t) dx dy \\ & - \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) (\Delta u(x, y, t)) dx dy - \frac{2\alpha\beta}{3} \int_{\mathbb{R}^2} u^3(x, y, t) dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Част 4.1 Дискретен закон за запазване на енергията на Консервативната схема

Консервативната схема има вида:

$$\begin{aligned} \beta(E_1 - \Delta_{h,2}) \frac{u_{i,j}^{(k+1)} - 2u_{i,j}^{(k)} + u_{i,j}^{(k-1)}}{\tau^2} = \\ = (\Delta_{h,2} - \Delta_{h,2}^2) u_{i,j}^{(k)} + \Delta_{h,2} (g(u_{i,j}^{(k)})), \end{aligned} \quad (25)$$

където:

$$\begin{aligned} g(u_{i,j}^{(k)}) = -\frac{\alpha\beta}{3} \left((u_{i,j}^{(k+1)})^2 + (u_{i,j}^{(k-1)})(u_{i,j}^{(k+1)}) + (u_{i,j}^{(k-1)})^2 \right) + \\ + \frac{(\beta - 1)}{2} \left(u_{i,j}^{(k+1)} + u_{i,j}^{(k-1)} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

При извеждането на (25) са следвани стъпките описани в [19, 30, 31], с уточнението че апроксимацията на нелинейния член е различна и схемата е направена за уравнението (22) след смяната на променливите.

За Консервативната схема е изведена дискретната енергия:

$$\begin{aligned} E_h(v^{(k)}) = \left\langle \left(\beta(E_1 + (-\Delta_h)^{-1}) - \frac{\tau^2}{4}(E_1 - \Delta_h) \right) v_t^{(k)}, v_t^{(k)} \right\rangle + \\ + \frac{1}{4} \langle (E_1 - \Delta_h)(v^{(k+1)} + v^{(k)}), v^{(k+1)} + v^{(k)} \rangle - \\ - \frac{\alpha\beta}{3} \langle ((v^{(k+1)})^3, 1) + ((v^{(k)})^3, 1) \rangle + \\ + \frac{\beta - 1}{2} \langle ((v^{(k+1)})^2 + (v^{(k)})^2), 1 \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

и в Теорема 1. е показано, че тя е константа във всеки един момент от време $t = \tau k$. В Теорема 2. е изведено условието за устойчивост

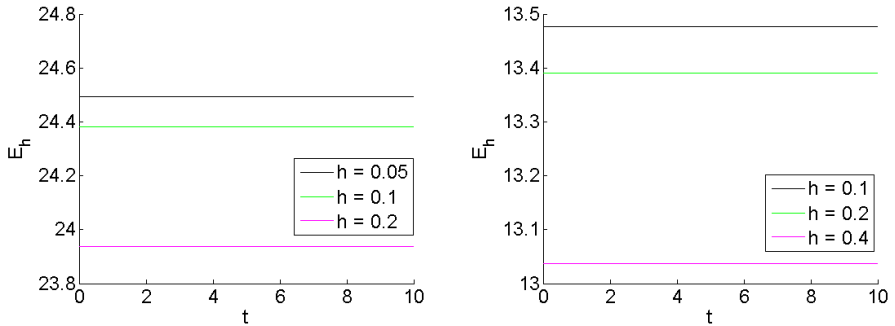
$$\tau^2 < \frac{4\beta h^2}{8 + h^2}, \quad \beta \geq 1, \quad (28)$$

което важи само за линейната част съответстваща на консервативното диференчно уравнение.

Част 4.2 Свойства на Консервативна схема

Показана е сходимостта на численото решение по правилото на Рунге (12) върху три вложени мрежи, която варира между

1.41 и 2.14 за различните параметри β и c и разгледаните норми L_2 и L_∞ . Развитие във времето за дискретната енергия (27) е показано на Фигура (3). Скоростта ѝ на сходимост по правилото на Рунге (12) варира между 2.00 и 2.52 за различните параметри β и c и разгледаните норми L_2 и L_∞ . За изчислението на члена



Фигура 3: Дискретната енергия на решението от Консервативната схема при Тест 1 (ляво) и Тест 2 (дясно) с апроксимационна грешка $O(|h|^2 + \tau^2)$ във времето $T_\tau = [0, 10]$.

$-\Delta_{h,2}^{-1}v_t^{(k)}$ от (27) се използват бързите директни методи за обръщане на дискретния оператор на Лаплас, дефинирани в Част 2.6.

Част 4.3 Метод на Тейлор и метод на правите за хиперболичната задача

За хиперболичното частно диференциално уравнение (22) се прави дискретизация по пространството, което води до следната система от $N_x \times N_y$ обикновени диференциални уравнения, както сме показали в [25]:

$$\begin{aligned} & \beta(E_1 - \Delta_{h,p}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{i,j}(t) = \\ & (E_1 - \Delta_{h,p}) \Delta_{h,p} u_{i,j}(t) + \Delta_{h,p} (-\beta f(u_{i,j}(t)) + (\beta - 1)u_{i,j}(t)), \\ & i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 1, \end{aligned} \quad (29)$$

където $u_{i,j}(t)$ е приближение на решението в точката $(x_i, y_j) \in \Omega_h$, а $\Delta_{h,p}$, $p = 2, 4, 6$ е дискретният оператор на Лаплас, апроксимиран с крайни разлики от втори, четвърти и шести ред. Броят на

уравненията в системата $N_x \times N_y$ е равен на броят точки в мрежата Ω_h и варира между 15625 и 716800 за разгледаните числени примери в дисертацията. Получената система (29) е решена числено, използвайки развитие в ред на Тейлор, спрямо времевата променлива t :

$$u_{i,j}(t + \tau) = u_{i,j}(t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) + \dots + \frac{\tau^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial t^p} u_{i,j}(t) + O(\tau^{p+1}) \quad (30)$$

при $p \geq 2$.

Всяка една от производните по времето в (30) изчисляваме посредством диференциране на (29) по времето, като допускаме, че решението е достатъчно гладко $u \in C^{p+1,p+1,p+1}(\Omega \times T)$. За да получим съответната производна в явен вид, трябва да обърнем оператора $(E_1 - \Delta_{h,p})$ в (29). За целта използваме така наречените „Fast Poisson Solvers“, които са описани в Част 2.6. Редът на апроксимация по времето зависи от броя на членовете $p + 1$, които участват в реда на Тейлор. По този начин редът на апроксимация при метода на Тейлор по времето и пространството е еднакъв $O(|h|^p + \tau^p)$, и зависи от избора на $p = 2, 4, 6$.

При $t = 0$ първите два члена в (30) са известни от началното условие (u_0, u_1) , а третият се получава чрез уравнение (29). Следващият член в реда на Тейлор (30) - третата производна по времето изглежда по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u_{i,j}(t) &= \frac{1}{\beta} \Delta_{h,p} \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) + \\ &+ \frac{1}{\beta} (E_1 - \Delta_{h,p})^{-1} \Delta_{h,p} \left(-2\alpha\beta u_{i,j}(t) \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) + (\beta - 1) \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) \right). \end{aligned}$$

Пресмятането на производните е итерационен процес, като производната от ред s , където $s \leq p$, зависи от вече изчислените производни от ред $0, \dots, s - 2$.

Част 4.4 Числени резултати от Консервативната схема и метода на Тейлор

В тази част са представени резултати от имплементираните методи за хиперболичната задача. Редът на сходимост на дискретните решение и енергия, получени от метода на Тейлор, по

$p = 2, 4, 6$	h, τ	$\ \bar{E}_i\ _{L_2}$	Ред на сход.	$\ \bar{E}_i\ _{L_\infty}$	Ред на сход.
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^2 + \tau^2)$	0.2, 0.1				
	0.1, 0.05	0.968044		1.034208	
	0.05, 0.025	0.340955	1.51	0.351518	1.56
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^4 + \tau^4)$	0.2, 0.1				
	0.1, 0.05	0.191389		0.194056	
	0.05, 0.025	0.013036	3.88	0.013664	3.83
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^6 + \tau^6)$	0.2, 0.01				
	0.1, 0.05	0.032671		0.033625	
	0.05, 0.025	0.000599	5.78	0.000635	5.73
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^2 + \tau^2)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.148014		0.058905	
	0.1, 0.05	0.030690	2.27	0.014185	2.05
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^4 + \tau^4)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.028869		0.013791	
	0.1, 0.05	0.001860	3.96	0.000996	3.80
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^6 + \tau^6)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.006732		0.003334	
	0.1, 0.05	0.000249	4.75	0.000068	5.61

Таблица 4: Скорост на сходимост на численото решение при метода на Тейлор с нулево гранично условие и грешки от апроксимацията $O(|h|^2 + \tau^2)$, $O(|h|^4 + \tau^4)$ и $O(|h|^6 + \tau^6)$. Грешките \bar{E}_i са измерени в L_2 и L_∞ норми.

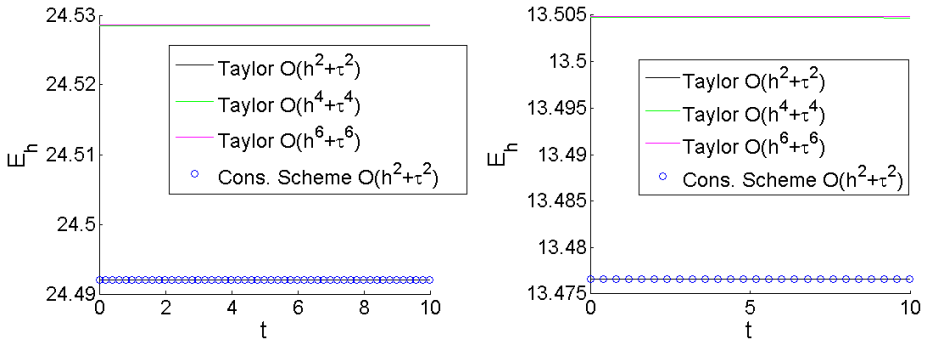
правилото на Рунге (12) са показани съответно на Таблицы 4 и 5. Редът на сходимост отговаря на приложения ред на апроксимация. Само при Тест 2 и $O(|h|^6 + \tau^6)$, сходимостта при енергията е по-ниска от очакваното. Този резултат е поради високия градиент на решението, близо до границата и по-ниската сходимост, получена още при началното условие от решаване на елиптичната задача (виж последният ред в Таблица 2).

Методът на Тейлор не запазва безусловно енергията, затова тя заедно с масата и формата на решението (при $O(|h|^2 + \tau^2)$) са сравнени с тези, получени при Консервативната схема. Графиките на дискретните енергия E_h (виж Фигура 4) и маса M_h (виж Фигура 5), получени от двата метода, както при Тест 1 така и при Тест 2 се припокриват (черната линия и сините кръгчета). От тук може да се направят два важни извода. Първо, методът на Тейлор и Консервативната схема произвеждат качествено и количествено близки резултати за Масата и Енергията. Второ,

енергията и при двата метода е константна величина спрямо времевата променлива.

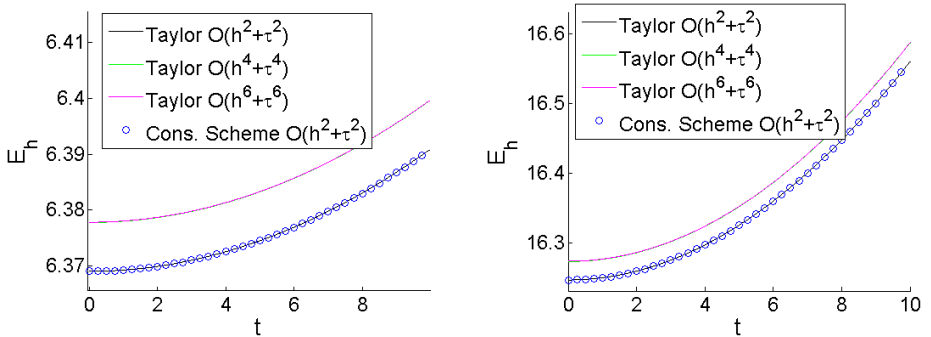
FDS	h, τ	$\ \bar{E}_i\ _{L_2}$	Ред на сход.	$\ \bar{E}_i\ _{L_\infty}$	Ред на сход.
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^2 + \tau^2)$	0.2, 0.1				
	0.1, 0.05	0.379690		0.446557	
	0.05, 0.025	0.075257	2.33	0.111797	2.00
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^4 + \tau^4)$	0.2, 0.01				
	0.1, 0.005	0.044788		0.082344	
	0.05, 0.025	0.002459	4.18	0.003562	4.53
$\beta = 3$ $c=0.45$ $O(h^6 + \tau^6)$	0.2, 0.01				
	0.1, 0.05	0.063681		0.133517	
	0.05, 0.025	0.001086	5.87	0.002041	6.03
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^2 + \tau^2)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.404499		0.348428	
	0.1, 0.05	0.081033	2.32	0.087663	2.00
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^4 + \tau^4)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.064165		0.056574	
	0.1, 0.05	0.005141	3.64	0.005173	3.45
$\beta = 1$ $c=0.9$ $O(h^6 + \tau^6)$	0.4, 0.2				
	0.2, 0.1	0.037448		0.054236	
	0.1, 0.05	0.003098	3.60	0.003293	4.04

Таблица 5: Скорост на сходимост на дискретната Енергия при метода на Тейлор с нулево гранично условие и грешки от апроксимацията $O(|h|^2 + \tau^2)$, $O(|h|^4 + \tau^4)$ и $O(|h|^6 + \tau^6)$. Грешките \bar{E}_i са измерени в L_2 и L_∞ норми.



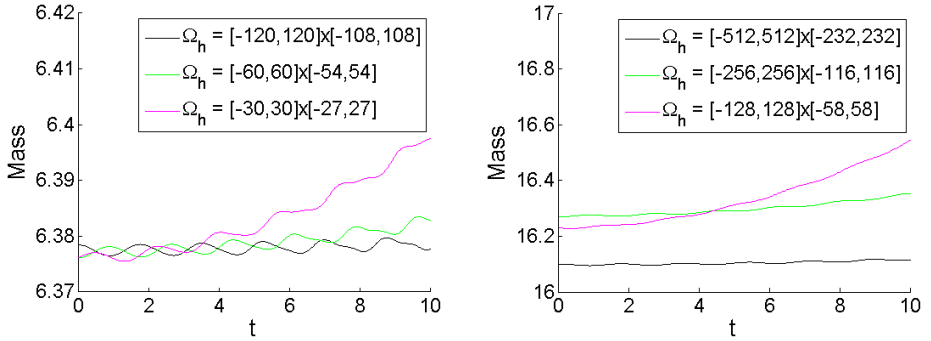
Фигура 4: Дискретна енергия на решението като функция на времето до $T = 10$ при Тест 1 (ляво) и Тест 2 (дясно).

Направени са допълнителни изчисления върху области с по-големи размери и по-голяма стъпка h ($h = 0.2$ при Тест 1 и $h = 0.4$ при Тест 2), за да се обясни нарастването при масата, като резултатите от изследванията са показани на Фигура (6). Видно е, че стойността ѝ се запазва по-добре, когато задачата се пресмята в по-големи области Ω_h .



Фигура 5: Дискретна маса на решението като функция на времето до $T = 10$ при Тест 1 (ляво) и Тест 2 (дясно).

Представен е анализ на зависимостта на формата и максимума на решението от реда на апроксимация и големината на дискретните стъпки по пространството и времето - h, τ . Резултатите показват, че с намаляване на h и τ и увеличаване реда на ап-



Фигура 6: Масата от решението от метода Тейлор с $O(|h|^6 + \tau^6)$ апроксимация като функция на времето до $T = 10$ върху три различни по големина области. Левият панел е при $\beta = 3$, $c = 0.45$, а десният панел е при $\beta = 1$, $c = 0.9$.

роксимация, разликата в профила на вълната между началния и крайния момент намалява.

Най-накрая е разгледан случай при по-голям времеви интервал $T = 30$, за който отново са описани поведението на формата и максимума, като е показано че тези две свойства на решението се запазват с пренебрежимо малки отклонения.

Част 4.5 Числен тест за хиперболичната задача при параметри $\beta = 3$ и $c = 0.3$

Настоящата част разглежда един добре познат в литературата случай за хиперболичната задача (виж [6, 7, 8, 9]), при който за начално условие в споменатите трудове са използвани „best-fit“ апроксимационните формули от [5]. В настоящата работа при $t = 0$ ще бъде използвано решението от стационарното уравнение на Бусинеск (еквивалентно на системата (16)) с апроксимации от висок ред и „Симетрично гранично условие по абцисата и ординатата при елиптическата задача“, както е дефинирано в Част 2.3. Големината на областта ω_h е $L_x = L_y = 50$, $\alpha = 1$, а използваните крайни разлики са с четвърти и шести ред на апроксимация (при $p = 4, 6$). Поради симетрията на решението по абцисата и ординатата е лесно да се построи началната функция в цялата област Ω_h .

$p = 4, 6$	h, τ	$\ u^{(0)} - u^{(N_t)}\ _{L_2}$	$\ u^{(0)} - u^{(N_t)}\ _{L_\infty}$
	0.4, 0.2	3.020072	2.571611
$O(h ^4 + \tau^4)$	0.2, 0.1	0.365473	0.371433
	0.1, 0.05	0.025631	0.026517
	0.4, 0.2	1.939208	1.673675
$O(h ^6 + \tau^6)$	0.2, 0.1	0.037638	0.038985
	0.1, 0.05	0.000655	0.000679

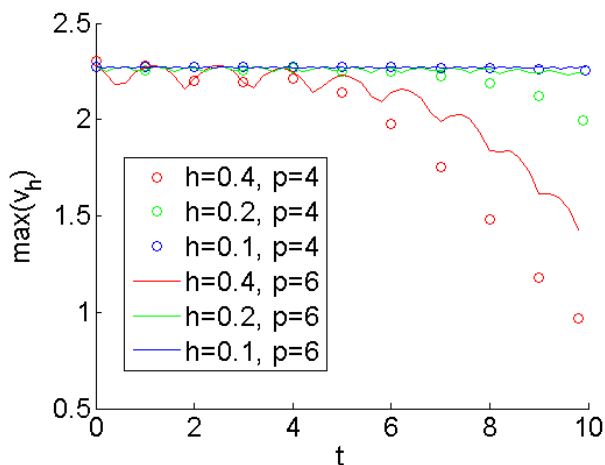
Таблица 6: Разлика $\|u^{(0)} - u^{(N_t)}\|_\kappa$ в L_2 и L_∞ норми между числените решения в началото при $t = 0$ и в края при $t = 10$. За резултатите в таблицата е използван методът на Тейлор с четвърти и шести ред на апроксимация.

При хиперболичната задача (разгледана в Ω_h) е използван метод на Тейлор, отново с апроксимационни формули от четвърти и шести ред. Представен е анализ на зависимостта на формата и максимума на решението от реда на апроксимация и големината на дискретните стъпки по пространството и времето - h, τ (виж Фигура 7 и Таблица 6).

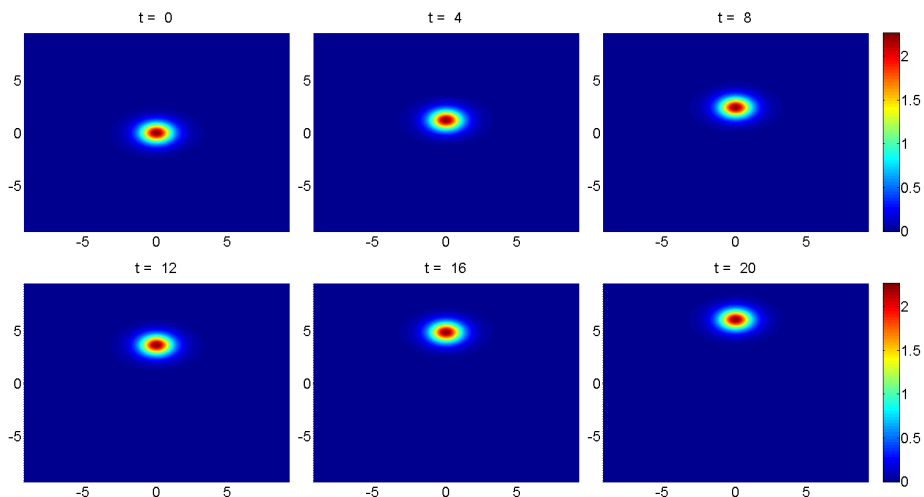
Основна характеристика на солитоните е запазването на формата им по времето. В Таблица 6 сме изследвали формата на решението в интервала $[0, 10]$ и показваме, че с намаляване на стъпките по пространството h и времето τ , разликата в профила на вълната между началния и крайния момент намалява. В допълнение се вижда, че формата на вълната се запазва по-добре, когато степента на апроксимация на диференциалните оператори е по-висока.

Последните разсъждения затвърждават очакването, че разликата във формата на численото решение между началния и крайния моменти $\|u^{(0)} - u^{(N_t)}\|_\kappa$, за произволно фиксирано време T , клони към нула, когато h и τ намаляват.

За параметрите $\beta = 3, c = 0.3$ от Тест 3 е разгледан случай при по-голям времеви интервал $T = 30$, за който са описани поведението на формата и максимума, като е показано че тези две свойства на решението се запазват с пренебрежимо малки отклонения до време $t = 20$ (виж Фигура 8). В оригиналните променливи това време е 34.64 (преди смяната (21)). В сравнение с резултатите получени в [7, 6, 9, 8, 10], където за начално условие са използвани „best-fit“ формулите, на Фигура 1 от [7] е разгледано детайлно



Фигура 7: Развитие на максимума на решението в интервала $[0, 10]$ при $\beta = 3$, $c = 0.3$. За резултатите от графиката е използван метода на Тейлор с четвърти и шести ред на апроксимация и дискретните стъпки $h = 0.4, 0.2, 0.1, \tau = h/2$.



Фигура 8: Развитие на формата на численото решение при $\beta = 3$, $c = 0.3$. Използван е метод на Тейлор с апроксимация от шести ред и следните дискретни стъпки: $h = 0.05, \tau = 0.025$. По вертикалната е y оста, а по хоризонталата x оста.

развитието на формата на решението и неговия максимум. Там ясно се вижда, че вълната претърпява макар и слаби (≈ 0.15), но все пак видими структурни промени още в началото за времевия интервал $[0, 4]$ (в оригиналните променливи). Тук измененията във формата са под $7.0e - 6$ за всяка една точка от мрежата в интервала $[0, \sqrt{\beta_1}5] \approx [0, 8.66]$ (отново в оригиналните променливи).

3 Заключение

За решаване на стационарното уравнение на Бусинеск са използвани диференчни схеми с втори, четвърти и шести ред на апроксимация на вторите производни заедно с метода на простата итерация. В Таблица 2 е показана скоростта на сходимост по правилото на Рунге върху три вложени мрежи, която в повечето случаи отговаря на използвания ред на апроксимация. Полученото числено решение има сходно поведение с това, описано в [15, 16] от гледна точка на формата и зависимостта ѝ от скоростта c и дисперсионния параметър β . Получените резултати се използват за начално условие в ПУБ.

Изведено е ново асимптотично гранично условие за елиптичната задача, след като са изследвани асимптотиките на всички членове поотделно в стационарното елиптично уравнение на Бусинеск. Получената явна формула е валидирана в серия от числени експерименти при различни размери на областта $L_x = L_y = 20, 40, 80, 160$. Показано е, че численото решение се апроксимира по-добре, когато L_x и L_y са по-големи. Направени са изчисления с нулево гранично условие и резултатите са сравнени с новото такова, където се вижда, че L_2 нормата от разликата намалява два пъти, а L_∞ нормата - четири пъти, при двойно увеличение на областта.

За хиперболичната задача са използвани два различни подхода - Консервативната схема и комбинацията от метод на Тейлор и метод на правите с втори, четвърти и шести ред на апроксимация, който се прилага за пръв път за ПУБ. Числените решения, заедно с неговите свойства като маса, енергия и форма, получени с метода на Тейлор с $O(|h|^2 + \tau^2)$ и Консервативната схема,

са сравнени и е показано, че са доста близки. Една от целите на работата е да покаже, че методът на Тейлор, приложен към уравнението (22), води до достатъчно добри резултати, а също така може да се приложи с по-висок ред на апроксимация, което води и до по-точно решение. Числената енергия е запазена и в двата случая. При масата е показано, че се запазва по-добре върху по големи области.

Формата и максимумът на вълната при Тест 3 се запазват за по-дълго време до $T = 34.64$ в оригиналните променливи, когато се използват апроксимации от по-висок шести ред и начално условие получено числено чрез решение на стационарното уравнение на Бусинеск. В допълнение, формата на решението се запазва по-добре спрямо получените резултати в [6, 7, 8, 9, 10]. Показано е, че нейните изменения, спрямо началния и крайния моменти от време, намаляват, когато дискретните съпки по пространството h и времето τ се смалвяват и редът на апроксимация на числения метод се увеличава (виж Таблица 6).

Числените алгоритми за решенията на стационарното и Парадигматичното уравнения на Бусинеск могат да бъдат намерени и клонирани от следното интернет хранилище (repository): <https://github.com/CloakMe/Boussinesq.git>

4 Научни приноси

Основните научни приноси на дисертацията са:

- Разработили сме числени методи с четвърти и шести ред на апроксимация за стационарното и Парадигматичното уравнения на Бусинеск;
- Изследвали сме подробно асимптотиката на всеки един от членовете в елиптичното уравнение и сме извели ново асимптотично гранично условие;
- Подробно са сравнени численото решение на елиптичната задача с „best-fit“ приближенията от [5]. Показали сме, че началното условие, получено чрез итерационен метод с висок ред на апроксимация за решаване на стационарното уравнение, превъзхожда „best-fit“ апроксимационните формули,

когато се изследва солитонният характер на вълната в ПУБ, защото нейните форма и максимум се запазват за по-дълъг период от време;

- Числените експерименти демонстрират, че максимумът и формата на решението се запазват по-добре (както при ниски $c = 0.3$ така и при високи скорости $c = 0.45, 0.9$), когато се използват по-малки дискретни стъпки и по-висок ред на апроксимация за фиксиран интервал от време T ;
- Методът на Тейлор запазва енергията и масата толкова добре колкото и Консервативната схема при разгледаните числени тестове.

5 Декларация

Декларирам, че представената дисертация на тема: „Числено изследване на двумерното уравнение на Бусинеск“ е мой труд. В нейното разработване не са ползвани разработки и чужди публикации в нарушение на авторските им права.

Всички цитирания на източници на информация, текст и други са обозначени според стандартите.

Резултатите от дисертационното изследване са оригинални и не са взимствани от източници, в които нямам участие.

Подпис:

6 Благодарности и посвещение

Искам сърдечно да благодаря на моя научен ръководител - проф. д-р Наталия Коляковска, за помощта и съветите, които ми даде. Продължителните дискусии, които водихме, оказаха съществено влияние върху работата по дисертацията.

Благодаря на моето семейството и роднини за търпението и подкрепата, която ми оказваха през годините.

Благодаря на колегите от секция „Математическо моделиране и числен анализ“ за полезните съвети и насоки.

Благодаря на Тодор Коларов, управител на Телеконт ЕООД и Димитър Димитров, управител на Диджитал Лайтс ЕООД, които ми позволиха да работя над този труд, чрез допълнителна платена отпусака.

Благодаря на доц. д-р Иван Бажлеков, за предоставения достъп до неговия работен компютър, на който съм пускал изчисления в продължение на месеци.

Въпреки че не познавам лично проф. Христо Христов, имах възможност да се запозная с изследванията му върху Парадигматичното уравнение на Бусинеск. Посвещавам този труд на него.

Апробация на дисертационната работа

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните международни конференции и семинари:

- Scientific Seminars of IMI-BAS, Oct 2013;
- Conference „Mathematics days in Sofia“, 10 June 2014;
- Conference „BIOMATH“, 27 June 2014;
- Conference „Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis and Symbolic Computation“, Johannes Kepler University, Linz, September, 2015;
- 13th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'22), Albena, Bulgaria, 24–29 June 2021.

Публикации

Резултатите от дисертацията са публикувани както следва:

- N. Kolkovska, K. Angelow, Numerical computation of the critical energy constant for two dimensional Boussinesq equations, AIP Conference Proceedings, Appl. of Mathematics in Technical and Natural Sciences, 1684 (2015) , SJR = 0.18;
- K. Angelow, N. Kolkovska, Numerical Study of Traveling Wave Solutions to 2D Boussinesq Equation, Serdica Journal of Computing, 13 (2019), 1-16;
- K. Angelow, New Boundary Condition for the Two Dimensional Stationary Boussinesq Paradigm Equation, International Journal of Applied Mathematics, 32 (2019), 141-154, SJR = 0.27 (Q3, Scopus);
- K. Angelow, Comparison Between Two Numerical Methods for Solution of 2D BPE, AIP Conference Proceedings, 2522 (2022), 1, SJR = 0.18.

Литература

- [1] Boussinesq, J., Theorie de l'intumescence liquide, appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, **72** (1871), 755-759.
- [2] Boussinesq, J., Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, **17** (1872), 55-108.
- [3] Christov, C.I., An energy-consistent dispersive shallow-water model, *Wave Motion*, **34** (2001), 161-174.
- [4] Todorov, M. D., Nonlinear Waves: Theory, computer simulation, experiment, Two-dimensional Boussinesq equation. Boussinesq paradigm and soliton solutions, Morgan and Claypool Publishers, California, 2018
- [5] Christov, C.I., Choudhury, J., Perturbation solution for the 2D Boussinesq equation, *Mech. Res. Commun.*, **38** (2011), 274-281.
- [6] Chertok, A., Christov, C.I., Kurganov, A., Central-Upwind Schemes for the Boussinesq Paradigm Equations, *Computational Science and High Performance Computing IV, Notes Numer. Fluid Mech.*, **113** (2011), 267-281.
- [7] Christov, C.I., Kolkovska, N., Vasileva, D., On the Numerical Simulation of Un-steady Solutions for the 2D Boussinesq Paragigm Equation, In: *I. Dimov, S. Dimova, N. Kolkovska (Eds.), Numerical Methods and Applications 2010, Conference Proceedings*, **6046** (2010), 386?394.
- [8] M.Dimova, D. Vasileva, Comparison of Two Numerical Approaches to Boussinesq Paradigm Equation, *Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2012. Lecture Notes in Computer Science*, **8236**, (2013), 255-262.
- [9] Kolkovska N., Angelow K., A Multicomponent Alternating Direction Method for Numerical Solving of Boussinesq Paradigm

Equation, In: *I. Dimov, I., Farago, I., Vulkov, L. (eds.) NAA 2012, Conference Proceedings*, **8236** (2013), 371-378.

- [10] Yuyu He, Hongtao Chen, Efficient algorithm and convergence analysis of conservative SAV compact difference scheme for Boussinesq Paradigm equation, *Computers and Mathematics with Applications*, **125** (2022), 34-50.
- [11] Erbay H., Erbay S., Erkip A., Instability and stability properties of traveling waves for the double dispersion equation, *Nonlinear Analysis*, **133** (2016), 1-14.
- [12] Kolkovska N. Angelov K., Numerical computation of the critical energy constant for two-dimensional Boussinesq equations, *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena (Bulgaria), AIP Conference Proceedings* **1684** (2015), 080007.
- [13] Christou M. , Christov C.I., Fourier Galerkin method for 2D solitons of Boussinesq equation, *Mathematics and Computers in Simulation* **74** (2007), 82-92.
- [14] Christou M. , Christov C.I., Galerkin spectral method for the 2D solitary waves of Boussinesq paradigm equation, In: *Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Sozopol (Bulgaria), AIP Conference Proceedings*, **1186**, Issue 1 (2009), 217-225.
- [15] J. Choudhury, C.I. Christov, 2D solitary waves of Boussinesq equation, in ISIS International Symposium on Interdisciplinary Science, Natchitoches, October 6-8, 2004, *APS Conference Proceedings 755*, Washington, DC, 2005, pp 85-90.
- [16] C.I. Christov, Numerical implementation of the asymptotic boundary conditions for steadily propagating 2D solitons of Boussinesq type equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, **82** (2012), 1079-1092.
- [17] Vasileva, D., Kolkovska, N., Investigation of two numerical schemes for the 2D Boussinesq paradigm equation in a moving frame coordinate system, In: *Mathematics in industry, Cambridge Scholars*, (2014), 289-305.

- [18] M. Dimova, N. Kolkovska, Comparison of some finite difference schemes for Boussinesq Paradigm Equation, *Int. Conf. Math. Model. Comput. Phys.*, Springer, (2011), 215-220.
- [19] Kolkovska N., Two families of finite difference schemes for multidimensional Boussinesq paradigm equation, In: *Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Sozopol (Bulgaria), AIP Conference Proceedings*, **1301** (2010), 395.
- [20] Kolkovska N., Four-Level Conservative Finite-Difference Schemes for Boussinesq Paradigm Equation, *American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings*, **1561** (2013), 68-74.
- [21] Kolkovska N., Error Estimates of Four Level Conservative Finite Difference Schemes for Multidimensional Boussinesq Equation, *Int. Conf. Finite Differ. Methods, Springer* (2014), 266-273.
- [22] Blinkov Y., Gerdt V., Pankratov I., Kotkova E., Construction of a New Implicit Difference Scheme for 2D Boussinesq Paradigm Equation, *Int. Workshop Comput. Algebra Sci. Comput.*, Springer, (2019), 152-163.
- [23] Vucheva V., Kolkovska N., High Order Symplectic Finite Difference Scheme for Double Dispersion Equations, *AIP Publishing LLC, AIP Conference Proceedings*, **2321**, (2021), 030037
- [24] Fornberg, B., Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids, *Math. Comput.*, 51(1988), 699 – 706.
- [25] Angelow K., Comparison between two numerical methods for solution of 2D Boussinesq paradigm equation, *AIP Conference Proceedings*, **2522**, (2022), 090001
- [26] T. Lyche, Fast Direct Solution of a Large Linear System, *Numerical Linear Algebra and Matrix Factorizations, Texts in Computational Science and Engineering*, **22**, (2020), p 237-250
- [27] Angelow K., Kolkovska, N., Numerical Study of Traveling Wave Solutions to 2D Boussinesq Equation, *Serdica J. Computing*, **13** (2019), 1-16.

- [28] Kolkovska N., Numerical Evaluation of 2D Ground States, *EPJ Web of Conferences*, **108** (2016), 02032.
- [29] Angelow K., New Boundary Condition for the Two Dimensional Stationary Boussinesq Paradigm Equation, *International Journal of Applied Mathematics*, **32,1**, (2019), 141-154.
- [30] Kolkovksa, N., Convergence of FDS for a Multidimensional Boussinesq Equation, *Lecture Notes in Computer Science*, **6046** (2011), 469-476.
- [31] Kolkovksa, N., Dimova, M., A new conservative finite difference scheme for Boussinesq paradigm equation, *Central European Journal of Mathematics*, **10** (2012), 1159-1171.