МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2022
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2022
Proceedings of the Fifty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, April 5–9, 2022

ИДЕИ ЗА СИСТЕМАТИЗИРАНЕ НА ЗАДАЧИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА*

Иванка М. Георгиева, Жоржета Й. Ангелова

В статията се разглеждат системи задачи за решаване на триъгълник. Системите са организирани в две групи – основни и допълнителни. Основните задачи са традиционните задачи за решаване на триъгълник, а допълнителните се конструират като се заменят един, два или три елемента в основната задача с допълнителни елементи на триъгълника. Избраните допълнителни елементи в статията са медианите. Така получената подсистема задачи се анализира относно някои дидактически компоненти като чертеж, съкратен запис, решение, логическа структура на решението, сложност на решението. Всички чертежи са направени с математическия софтуер GeoGebra и целта им е не само да онагледят дадената конструкция, но и да насочат учениците към разбиране структурата на задачата и откриване на решението ѝ.

Решаването на задачи е основна дейност в обучението по математика, свързана с усвояване на математически знания и с решаване на нематематически проблеми. Задачите от решаване на триъгълник са основна група задачи в училищния курс по математика и са в основата на решаване на останалите геометрични задачи от равнинни и пространствени фигури.

Идеите за усъвършенстване на обучението по математика ще илюстрираме като разгледаме основните задачи от решаване на триъгълник. При методическия анализ на всяка задача са разгледани основни дидактически компоненти, насочени към усвояване на структурата и решението на дадената задача. (Таблица 1).

При анализиране на задачите е важно да се направят следните методически бележки:

- Всяка от задачите се разглежда като представителна обобщена задача на група задачи.
- Примерното решение на задачата може да е модел и ориентир за решаване на различни сродни задачи с дадени числови стойности на дадените елементи.
- Задачите от триъгълник са задачи-компоненти на всички задачи от равнинни и пространствени геометрични фигури и затова е полезно тези задачи-компоненти да са зададени, решени и анализирани, за да се използват като готови и вече познати „порции задачи“.

***Ключови думи:** обучение по математика, триъгълник, решаване на триъгълник, задача, решаване на задачи, система задачи, GeoGebra.

Таблица 1

<table>
<tr><td colspan="6">МЕТОДИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ЗАДАЧАТА</td></tr>
<tr><td colspan="2">Структура на задачата
(Съкратен запис)</td><td colspan="4">Основни дидактически компоненти</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Дадени
елементи</td><td rowspan="3">Неизвестни
елементи</td><td rowspan="3">Примерно
решение</td><td colspan="2">Логическа структура
на решението</td><td>Сложност на
решението</td></tr>
<tr><td>Основни
задачи-
компоненти</td><td>Схематична
структура на
решението</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">ЧЕРТЕЖ/И</td></tr>
</table>

- Чрез различни дейности, включително и чрез използване на средствата на GeoGebra могат да се дават различни числови стойности за мерките на дадените елементи и да се проследява изменението на стойностите на неизвестните и вече намерени елементи [6].
- Всяка задача, зададена обобщено или чрез конкретни числови стойности, може да се използва за модификации и получаване на нови задачи от същия или сроден вид на дадената задача, включително и текстови задачи с геометрично съдържание.

При решаване на всички задачи основните дейности са:

- чертане на триъгълник (според вида му);
- чертане (построяване) и означаване на дадените и неизвестните елементи на триъгълника (чрез използване на математическия софтуер GeoGebra);
- определяне структурата на задачата и свързването ѝ с чертежа – отделяне на дадените и неизвестните елементи на триъгълника и откриване на зависимости между тях (между известните елементи, между неизвестните елементи и между известните и неизвестните елементи);
- приложение на изучени елементи, свойства, описания, определения, формули, задачи;
- записване на решението, като се спазва логическата му структура.

При разглеждане и анализиране на системите задачи, се използва динамичният софтуер GeoGebra за постигане на следните цели:

≫ онагледяване на фигурата и открояване на основните и допълнителните елементи на фигурата и взаимното им положение;

≫ динамична промяна на равнинното разположение на фигурата с цел активизиране на равнинното въображение на учениците и за улесняване на разбирането както на задачата, така и на нейното решение;

≫ разбиране на структурата на задачата и намиране на нейното решение;

≫ обособяване на основните дидактически компоненти на задачата – задачи-компоненти и тяхната последователност като част от логическата структура на решението на задачата.

Решаване на задачи от триъгълник

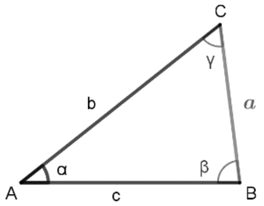
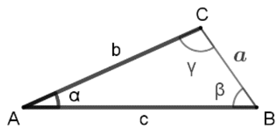
Въвеждат се някои основни дидактически понятия, които се използват за систематизирането на задачи от триъгълник.

- ОСНОВНА ЗАДАЧА за решаване на триъгълник – по дадени 3 основни елемента, поне един от които е страна, да се намерят останалите основни елементи на триъгълника.
- ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА за решаване на триъгълник – по дадени 3 основни елемента, поне един от които е страна, да се намерят други елементи на триъгълника (медиани, ъглополовящи, височини, радиус на вписаната окръжност, радиуси на външновписаните окръжности, радиус на описана окръжност, периметър и лице).
- ЗАДАЧИ ОТ ТРИЪГЪЛНИК, КОИТО СЕ СВЕЖДАТ ДО ОСНОВНИТЕ И ДОПЪЛНИТЕЛНИТЕ ЗАДАЧИ – ПОЛУЧЕНИ ОТ СЪОТВЕТНАТА ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА – по дадени 3 елемента на триъгълника, поне един от които е линеен, да се намерят останалите елементи.

В статията ще представим част от системите задачи. Избраните задачи са за решаване на триъгълник, които включват медианите на триъгълника. Аналогични системи задачи са разработени и за останалите основни елементи на триъгълника – ъглополовящи, височини, радиус на описана окръжност, радиус на вписана окръжност, радиуси на външно вписани окръжности, периметър и лице [1].

ОСНОВНА ЗАДАЧА 1. (ОЗ 1.) Решаване на произволен триъгълник по дадени две страни и ъгъл между тях (ОЗ 1.1. b, c, α; ОЗ 1.2. c, a, β; ОЗ 1.3. a, b, γ) (Таблица 2.)

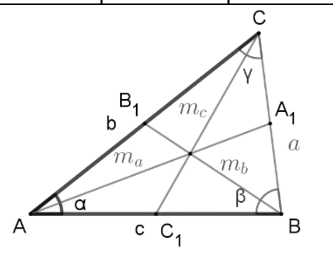
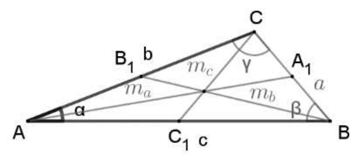
Таблица 2. ОСНОВНА ЗАДАЧА 1. (ОЗ 1.) за произволен триъгълник

<table>
<tr><td colspan="3">Дадени основни елементи на триъгълника</td><td colspan="3">Неизвестни основни елементи на триъгълника</td></tr>
<tr><td>страна b</td><td>страна c</td><td>ъгъл α</td><td>страна a</td><td>ъгъл β</td><td>ъгъл γ</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>страна c</td><td>страна a</td><td>ъгъл β</td><td>страна b</td><td>ъгъл α</td><td>ъгъл γ</td></tr>
<tr><td>страна a</td><td>страна b</td><td>ъгъл γ</td><td>страна c</td><td>ъгъл α</td><td>ъгъл β</td></tr>
</table>

Ще разгледаме първия ред на таблицата, тъй като задачите от следващите два реда са аналогични на тях като структура и решение.

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА 1.1. (ДЗ 1.1.) В произволен триъгълник са дадени две страни и ъгъл между тях и трябва да се намерят медианите на триъгълника m_a, m_b, m_c (Таблица 3).

Таблица 3. ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА, получена от основна задача 1.

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА 1.1. (ДЗ 1.1.) за произволен триъгълник					
ДАННИ ЗА ТРИЪГЪЛНИКА					
Дадени основни елементи			Неизвестни елементи		
страна b	страна c	ъгъл α	медиана m_a	медиана m_b	медиана m_c
					

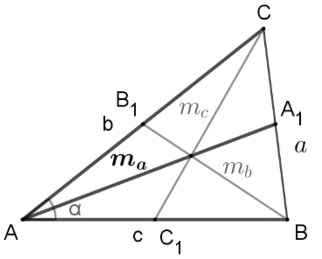
ЗАДАЧИ, В КОИТО СЕ ИЗПОЛЗВАТ ДАННИ ОТ ДОПЪЛНИТЕЛНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК (Таблица 4)

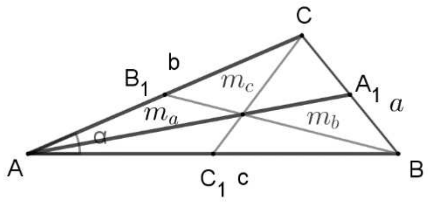
Таблица 4. ЗАДАЧИ ВЪРХУ ДОПЪЛНИТЕЛНА ЗАДАЧА 1.1. (ДЗ 1.1.) за произволен триъгълник

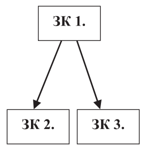
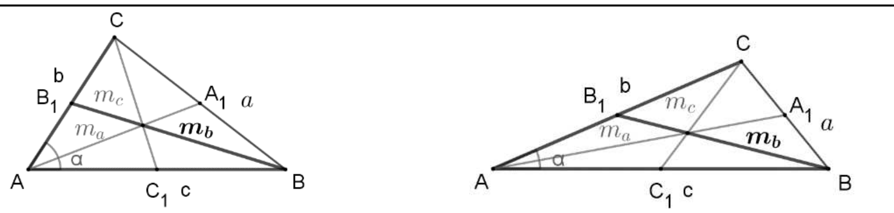
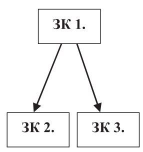
ЗАДАЧИ – по дадени 3 елемента на триъгълника, поне един от които е линеен, да се намерят останалите елементи								
Във всяка от задачите се избира комбинация от три елемента, нула, един или два от които са основни, а останалите съответно три, два или един са медиани								
Примерни задачи								
Дадени елементи на триъгълника			Неизвестни елементи на триъгълника					
страна b	страна c	медиана m_a	страна a	ъгъл α	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_b	медиана m_c
страна b	страна c	медиана m_b	страна a	ъгъл α	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_a	медиана m_c
страна b	страна c	медиана m_c	страна a	ъгъл α	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_a	медиана m_b
страна c	ъгъл α	медиана m_a	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_b	медиана m_c
страна c	ъгъл α	медиана m_b	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_a	медиана m_c
страна c	ъгъл α	медиана m_c	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	медиана m_a	медиана m_b
страна c	медиана m_a	медиана m_b	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	ъгъл α	медиана m_c
страна c	медиана m_b	медиана m_c	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	ъгъл α	медиана m_a
страна c	медиана m_a	медиана m_c	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	ъгъл α	медиана m_b
ъгъл α	медиана m_a	медиана m_b	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	страна c	медиана m_c
ъгъл α	медиана m_b	медиана m_c	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	страна c	медиана m_a
ъгъл α	медиана m_a	медиана m_c	страна a	страна b	ъгъл β	ъгъл γ	страна c	медиана m_b
медиана m_a	медиана m_b	медиана m_c	страна b	страна c	ъгъл α	страна a	ъгъл β	ъгъл γ

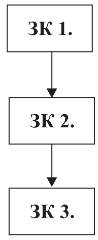
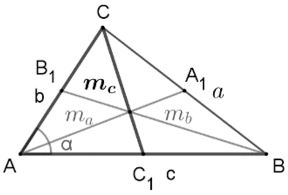
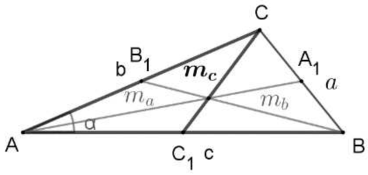
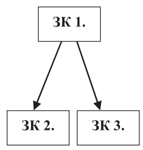
Методически анализ на задачите
Основни дидактически компоненти
Съкратен запис

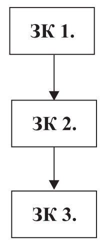
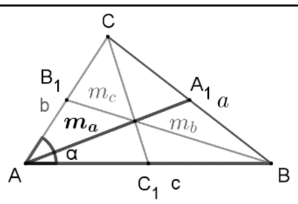
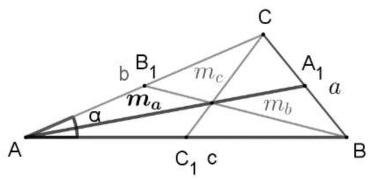
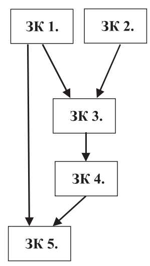
Задачи	**Дадени елементи**	**Неизвестни елементи**
Задача 1.	страните b и c и медианата m_a	ъгълът α и медианите m_b и m_c
Задача 2.	страните b и c и медианата m_b	ъгълът α и медианите m_a и m_c
Задача 3.	страните b и c и медианата m_c	ъгълът α и медианите m_a и m_b
Задача 4.	страната c, ъгълът α и медианата m_a	страната b и медианите m_b и m_c
Задача 5.	страната c, ъгълът α и медианата m_b	страната b и медианите m_a и m_c
Задача 6.	страната c, ъгълът α и медианата m_c	страната b и медианите m_a и m_b
Задача 7.	страната c и медианите m_a и m_b	страната b, ъгълът α и медианата m_c
Задача 8.	страната c и медианите m_b и m_c	страната b, ъгълът α и медианата m_a
Задача 9.	страната c и медианите m_a и m_c	страната b, ъгълът α и медианата m_b
Задача 10.	ъгълът α и медианите m_a и m_b	страните b и c и медианата m_c
Задача 11.	ъгълът α и медианите m_b и m_c	страните b и c и медианата m_a
Задача 12.	ъгълът α и медианите m_a и m_c	страните b и c и медианата m_b
Задача 13.	медианите m_a, m_b и m_c	страните b и c и ъгълът α

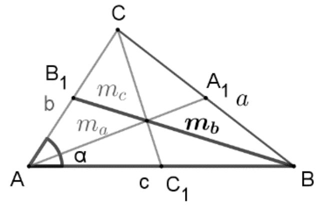
<table>
<tr><td colspan="3">Задача 1.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

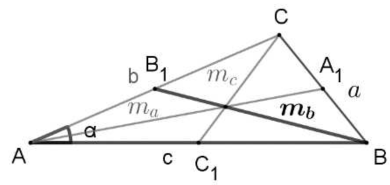
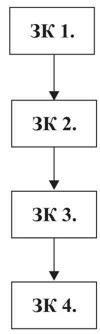
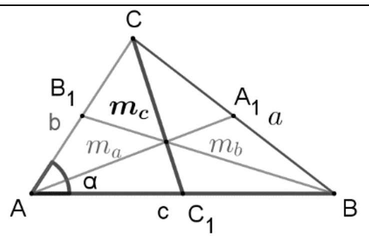

</td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td>Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

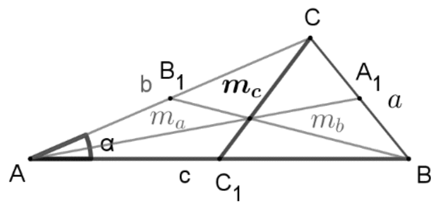
<table>
<tr>
<td>От метричните зависимости в произволен триъгълник получаваме:
$m_a^2 = \dfrac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$
$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2$
От косинусовата теорема за триъгълник ABC намираме $\cos\alpha$, а медианите m_b и m_c намираме чрез метричните зависимости в триъгълник ABC.
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$
$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на страната a от формулата за медианата m_a
ЗК 2. Намиране на $\cos\alpha$ от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 3. Намиране на медианите m_b и m_c от съответните метрични зависимости (формули)</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>3 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Задача 2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr>
<td align="center">Примерно решение</td>
<td colspan="2" align="center">Логическа структура на решението</td>
<td>Сложност на решението</td>
</tr>
<tr>
<td>Първи начин (аналогичен на решението на задача 1.)
$m_b^2 = \dfrac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$
$a^2 = \dfrac{1}{2}\left(b^2 - 2c^2 - 4m_b^2\right)$
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$
$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на страната a от формулата за медианата m_b
ЗК 2. Намиране на $\cos\alpha$ чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 3. Намиране на медианите m_a и m_c от съответните метрични зависимости (формули)</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>3 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
</table>

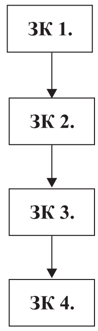
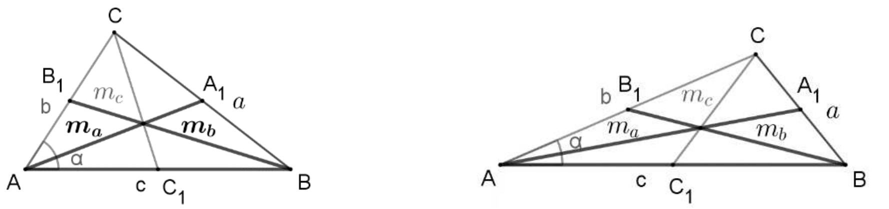
Втори начин на решение Прилагаме косинусовата теорема за триъгълниците ABA_1 и ABC, а медианите m_a и m_c намираме чрез съответните метрични зависимости в триъгълник ABC $\cos\alpha = \dfrac{\frac{b^2}{4} + c^2 - m_b^2}{bc}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на $\cos\alpha$ чрез косинусовата теорема за триъгълника ABA_1 **ЗК 2.** Изразяване на страната a косинусовата теорема за триъгълника ABC **ЗК 3.** Намиране на медианите m_a и m_c от съответните метрични зависимости (формули)	Схематична структура на решението 	2 (броят на задачите-компоненти, намален с 1, защото ЗК 1. и ЗК 2. са независими)
Задача 3.			
			
Примерно решение	Логическа структура на решението		Сложност на решението
Първи начин (аналогичен на решението на задача 1.) $m_c^2 = \dfrac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$ $a^2 = \dfrac{1}{2}\left(c^2 - 2b^2 + 4m_c^2\right)$ $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на страната a от формулата за медианата m_c **ЗК 2.** Намиране на $\cos\alpha$ чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC **ЗК 3.** Намиране на медианите m_a и m_b от съответните метрични зависимости (формули)	Схематична структура на решението 	3 (броят на задачите-компоненти)

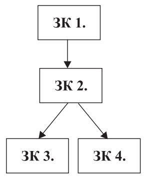
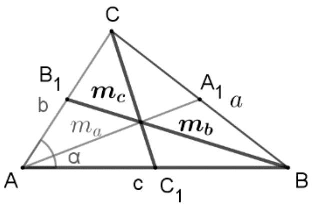
Втори начин на решение Прилагаме косинусовата теорема за триъгълниците ACC_1 и ABC, а медианите m_a и m_b намираме чрез съответните метрични зависимости в триъгълник ABC. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + \frac{c^2}{4} - m_c^2}{bc}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на $\cos\alpha$ чрез косинусовата теорема за триъгълника ACC_1 **ЗК 2.** Изразяване на страната a косинусовата теорема за триъгълника ABC **ЗК 3.** Намиране на медианите m_a и m_b от съответните метрични зависимости (формули)	Схематична структура на решението  	2 (броят на задачите-компоненти, намален с 1, защото ЗК 1. и ЗК 2. са независими)
Задача 4.			
 	 		
Примерно решение	Логическа структура на решението		Сложност на решението
От метричните зависимости в произволен триъгълник получаваме: $m_a^2 = \dfrac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m_a^2$ От косинусовата теорема за триъгълник ABC изразяваме $\cos\alpha$, заместваме a^2 и получаваме квадратно уравнение относно b $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-2b^2-2c^2+4m_a^2}{2bc}$ $\cos\alpha = \dfrac{4m_a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$ $b^2 + 2bc\cos\alpha + c^2 - 4m_a^2 = 0$ Медианите m_b и m_c намираме чрез метричните зависимости в триъгълник ABC. $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на страната a от формулата за медианата m_a **ЗК 2.** Изразяване на $\cos\alpha$ от косинусовата теорема за триъгълник ABC **ЗК 3.** Заместване на a^2 и получаване на квадратно уравнение относно b **ЗК 4.** Решаване на квадратното уравнение относно b **ЗК 5.** Намиране на медианите m_b и m_c от съответните метрични зависимости (формули)	Схематична структура на решението  	6 (броят на задачите-компоненти, увеличен с 1 заради зависимостта на ЗК 5 от ЗК 1. и ЗК 4.)

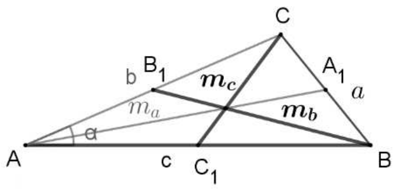
<table>
<tr><td colspan="4">Задача 5.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

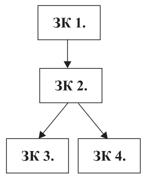
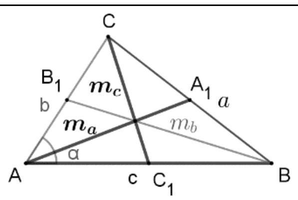
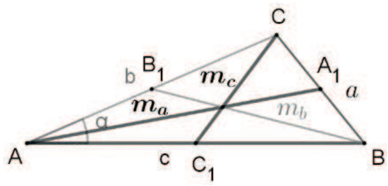

</td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
<tr><td>Прилагаме косинусовата теорема за триъгълник ABB_1 и получаваме квадратно уравнение за b
$m_b^2 = c^2 + \dfrac{b^2}{4} - bc\cos\alpha$
$\Updownarrow$
$b^2 - 4bc\cos\alpha + 4c^2 - 4m_b^2 = 0$
Чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC намираме страната a, а медианите m_a и m_c намираме чрез метричните зависимости в триъгълник ABC.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$
$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td><td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Прилагане на косинусовата теорема за триъгълник ABB_1 и получаване на квадратно уравнение за страната b
ЗК 2. Решаване на квадратното уравнение за страната b
ЗК 3. Намиране на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 4. Намиране на медианите m_a и m_c чрез съответните метрични зависимости (формули) в триъгълник ABC</td><td>Схематична структура на решението

</td><td>4 (броят на задачите-компоненти)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задача 6.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

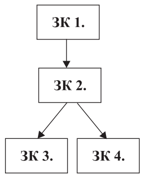
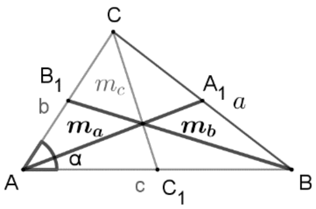
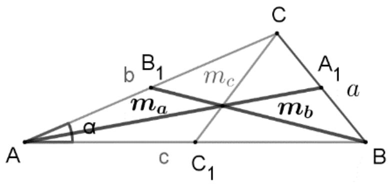

</td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

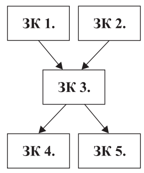
<table>
<tr>
<td>Прилагаме косинусовата теорема за триъгълник ACC_1 и получаваме квадратно уравнение за b
$m_c^2 = b^2 + \dfrac{c^2}{4} - bc\cos\alpha$
$\Updownarrow$
$4b^2 - 4bc\cos\alpha + c^2 - 4m_c^2 = 0$
Чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC намираме страната a, а медианите m_a и m_b намираме чрез метричните зависимости в триъгълник ABC.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$
$m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Прилагане на косинусовата теорема за триъгълник ACC_1 и получаване на квадратно уравнение за страната b
ЗК 2. Решаване на квадратното уравнение за страната b
ЗК 3. Намиране на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 4. Намиране на медианите m_a и m_b чрез съответните метрични зависимости (формули) в триъгълник ABC</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>4 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Задача 7.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">
</td>
</tr>
<tr>
<td>Примерно решение</td>
<td colspan="2">Логическа структура на решението</td>
<td>Сложност на решението</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>От формулите за медианите m_a и m_b в триъгълника ABC получаваме системата уравнения, от която се получават страните a и b.
$\left| \begin{array}{l} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \end{array} \right.$
$a^2 = \frac{1}{3}\left(4m_b^2 + 8m_a^2 - 6c^2\right)$
$b^2 = \frac{1}{3}\left(4m_a^2 + 8m_b^2 - 6c^2\right)$
От косинусовата теорема за триъгълника ABC намираме $\cos\alpha$, а медианата m_c намираме чрез съответната метрична зависимост в триъгълник ABC.
$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на медианите m_a и m_b чрез страните на триъгълника
ЗК 2. Изразяване на страните a и b чрез дадените/известни елементи m_a, m_b и c
ЗК 3. Намиране на $\cos\alpha$ от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 4. Намиране на медианата m_c от съответната метрична зависимост (формула)</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>4 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Задача 8.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

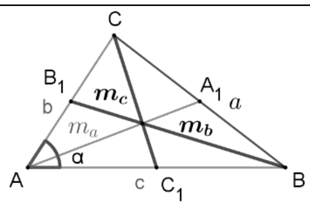

</td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

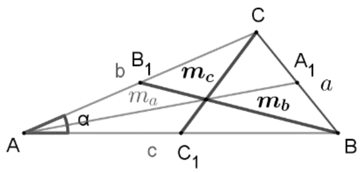
<table>
<tr>
<td>От формулите за медианите m_b и m_c в триъгълника ABC получаваме системата уравнения, от която се получават страните a и b.
$\left\vert \begin{array}{l} 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{array} \right.$
$a^2 = \dfrac{1}{6}\left(8m_b^2 + 4m_c^2 - 3c^2\right)$
$b^2 = \dfrac{1}{3}\left(4m_c^2 - 4m_b^2 + 3c^2\right)$
От косинусовата теорема за триъгълника ABC намираме $\cos\alpha$, а медианата m_a намираме чрез съответната метрична зависимост в триъгълник ABC.
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на медианите m_b и m_c чрез страните на триъгълника
ЗК 2. Изразяване на страните a и b чрез дадените/известни елементи m_b, m_c и c
ЗК 3. Намиране на $\cos\alpha$ от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 4. Намиране на медианата m_a от съответната метрична зависимост (формула)</td>
<td>Схематична структура на решението
</td>
<td>4 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Задача 9.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>От формулите за медианите m_a и m_c в триъгълника ABC получаваме системата уравнения, от която се получават страните a и b.
$\left| \begin{array}{l} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{array} \right.$
$a^2 = \dfrac{1}{3}\left(4m_c^2 - 4m_a^2 + 3c^2\right)$
$b^2 = \dfrac{1}{6}\left(8m_a^2 + 4m_c^2 - 3c^2\right)$
От косинусовата теорема за триъгълника ABC намираме $\cos\alpha$, а медианата m_b намираме чрез съответната метрична зависимост в триъгълник ABC.
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на медианите m_a и m_c чрез страните на триъгълника
ЗК 2. Изразяване на страните a и b чрез дадените/известни елементи m_a, m_c и c
ЗК 3. Намиране на $\cos\alpha$ от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 4. Намиране на медианата m_a от съответната метрична зависимост (формула)</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>4 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Задача 10.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

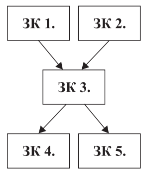
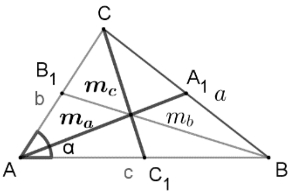
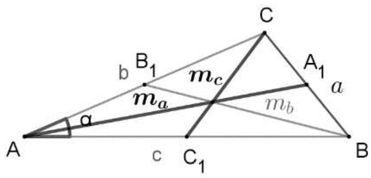
От формулите за медианите m_a и m_b и от косинусовата теорема за триъгълника ABC получаваме система уравнения, от която след еквивалентни преобразувания получаваме страните b и c $\left\| \begin{array}{l} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \end{array} \right.$ $\Updownarrow$ $\left\| \begin{array}{l} 4m_a^2 + 4m_b^2 = 2b^2 + 5c^2 \\ \qquad\qquad -2bc\cos\alpha \\ 8m_a^2 + 4m_b^2 = 3b^2 + 6c^2 \end{array} \right.$ След намиране на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълника ABC, медианата m_c намираме чрез съответната формула за изразяване на медианата чрез страните на триъгълника. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на медианите m_a и m_b чрез страните на триъгълника **ЗК 2.** Изразяване на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC **ЗК 3.** Решаване на системата уравнения и намиране на b и c **ЗК 4.** Намиране на страната a от косинусовата теорема за триъгълник ABC **ЗК 5.** Намиране на медианата m_c от съответната метрична зависимост (формула)	Схематична структура на решението  	5 (броят на задачите-компоненти)

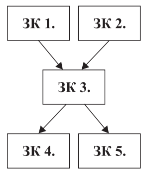
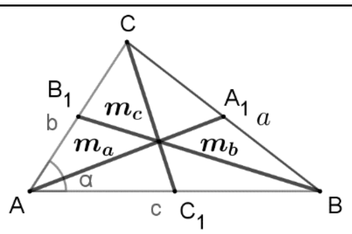
Задача 11.

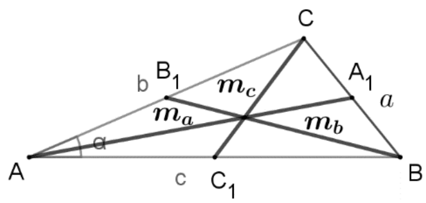


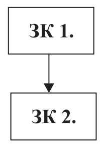


Примерно решение	Логическа структура на решението	Сложност на решението

<table>
<tr>
<td>От формулите за медианите m_b и m_c в триъгълника ABC и от косинусовата теорема за триъгълника ABC получаваме система уравнения, от която след еквивалентни преобразувания получаваме страните b и c
$\left| \begin{array}{l} 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{array} \right.$
$\Updownarrow$
$\left| \begin{array}{l} 4m_b^2 + 4m_c^2 = 5b^2 + 5c^2 \\ \qquad -8bc\cos\alpha \\ 4m_b^2 - 4m_c^2 = 3c^2 - 3b^2 \end{array} \right.$
След намиране на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълника ABC, медианата m_c намираме чрез съответната формула за изразяване на медианата чрез страните на триъгълника.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на медианите m_b и m_c чрез страните на триъгълника
ЗК 2. Изразяване на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 3. Решаване на системата уравнения и намиране на b и c
ЗК 4. Намиране на страната a от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 5. Намиране на медианата m_c от съответната метрична зависимост (формула)</td>
<td>Схематична структура на решението
</td>
<td>5 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Задача 12.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>От формулите за медианите m_a и m_c в триъгълника ABC и от косинусовата теорема за триъгълника ABC получаваме система уравнения, от която след еквивалентни преобразувания получаваме страните b и c
$\left| \begin{array}{l} 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{array} \right.$
$\Updownarrow$
$\left| \begin{array}{l} 4m_a^2 + 4m_c^2 = 5b^2 + 5c^2 \\ \qquad -2bc\cos\alpha \\ 8m_a^2 + 4m_c^2 = 6b^2 + 3c^2 \end{array} \right.$
След намиране на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълника ABC, медианата m_c намираме чрез съответната формула за изразяване на медианата чрез страните на триъгълника.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$</td>
<td>Основни задачи-компоненти
ЗК 1. Изразяване на медианите m_a и m_c чрез страните на триъгълника
ЗК 2. Изразяване на страната a чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 3. Решаване на системата уравнения и намиране на b и c
ЗК 4. Намиране на страната a от косинусовата теорема за триъгълник ABC
ЗК 5. Намиране на медианата m_c от съответната метрична зависимост (формула)</td>
<td>Схематична структура на решението

</td>
<td>5 (броят на задачите-компоненти)</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Задача 13.</td></tr>
<tr><td colspan="4">


</td></tr>
<tr><td>Примерно решение</td><td colspan="2">Логическа структура на решението</td><td>Сложност на решението</td></tr>
</table>

От формулите за страните на триъгълника, изразени чрез медианите му, получаваме $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$ $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$ $c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$ Чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC намираме ъгъла α $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	Основни задачи-компоненти **ЗК 1.** Изразяване на страните a, b и c на триъгълника, чрез медианите му m_a, m_b и m_c **ЗК 2.** Намиране на ъгъла α чрез косинусовата теорема за триъгълник ABC	Схематична структура на решението 	2 (броят на задачите-компоненти)

Изводи и методически бележки

1. Основните задачи за решаване на триъгълник дават възможност за комбинации от допълнителни задачи, в които дадени основни елементи на триъгълника се комбинират с други елементи – медиани, ъглополовящи, височини, радиус на вписана окръжност, радиуси на външновписани окръжности, радиус на описана окръжност, периметър, лице и др.
2. В статията е избрана една основна задача (Таблица 2) и е конструирана система от допълнителни задачи, в които дадени основни елементи, се заменят с медиани в триъгълника (Таблица 3).
3. Допълнителните задачи са получени от един ред на таблица 2 за една основна задача и могат да се разглеждат като подсистема на системата на съответната основна задача. По другите редове на таблица 2 подсистемите от допълнителните задачи, получени по други редове на една и съща таблица, са аналогични като структура и решение.
4. Допълнителните задачи могат да се конструират по всички останали основни задачи като систематизирането им се основава на следните фактори:
   - задаване на триъгълника с точност до еднаквост в съответната основна задача;
   - избор на група допълнителни елементи на триъгълника – медиани, ъглополовящи, височини, радиус на вписана окръжност, радиуси на външновписани окръжности, радиус на описана окръжност, периметър, лице и др.;
   - разглеждане на частните случаи за равнобедрен, равностранен или правоъгълен триъгълник.
5. Системите допълнителни задачи задачи могат да се получат и при комбиниране на дадени и неизвестни елементи от различни таблици както за основна, така и за допълнителна задача, т.е. дадени са страните a, b и ъглополовящата l_c, а неизвестни са страната c, височината h_b и медианата m_a.

6. Сложността на решението на дадена подсистема задачи обикновено е една и съща или с пренебрежимо малка разлика в решенията на отделни задачи, но с преминаване към следваща подсистема сложността на решението се променя и то най-често се повишава.
7. Според теорията на решаване на задачи трудността на решението е субективна характеристика на това решение и зависи от отношението решаващ – задача, докато сложността на решение е обективна характеристика и може да се измери чрез броя на задачите-компоненти и връзките между тях [3]. Реалната учебна практика по математика дава основание да твърдим, че с увеличаване сложността на решение се увеличава и трудността му, но това твърдение е с вероятностен характер и трябва да се проверява и евентуално потвърждава или отхвърля при всяко решаване на конкретна задача или група задачи. В разглежданите в статията задачи се проследява сложността на решение на всяка подсистема задачи, като за всяка задача се очаква сложността на решение да се намали например чрез даване на подходящи числови стойности на дадените елементи на триъгълника. По този начин ако се установи трудност при решаване на дадена задача, тя може да се намали или преодолее.
8. Сложността на решение и трудността му се повишават при задачите, в които се комбинират елементи от различни таблици на различни основни и допълнителни задачи.
9. Сложността на решение се променя при различен избор на задачите-компоненти (ако това е възможно) и на връзките между тях, т.е. сложността на решение зависи от логическата му структура.

Заключение. Решаването на задачи е основна дейност в обучението по математика и е свързано с въвеждане, затвърдяване, усвояване, проверка и оценка на знанията. [4] От друга страна геометричните задачи традиционно затрудняват учениците и всеки опит това да се избегне е полезен и оказва влияние на тяхната успеваемост. Избраните в статията задачи са представителни от групата задачи за решаване на триъгълник. Използването на математическия софтуер GeoGebra съществено повлиява на разбирането на задачата и на откриването на нейното решение [5]. Затова считаме, че разглеждането на процеса на решаване на задачи в горепредложените аспекти значително би повишило качеството на учебния процес по математика и би усъвършенствало знанията и уменията на учениците при усвояване на основни математически и нематематически понятия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Ангелова. Използване на математически софтуер GeoGebra за усъвършенстване на обучението по математика в 7.–12. клас. Дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“. Велико Търново, 2021.

[2] Ж. Ангелова, И. Минчева. Идеи за усъвършенстване на обучението по математика чрез използване на математически софтуер GeoGebra. *Математика, компютърни науки и образование*, **3**, № 1 (2020), 105–119. ISSN: 2603-4735 (Online), 2603-4670 (Print). Велико Търново, Университетско издателство на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

[3] И. Ганчев. За математическите задачи: Ръководство за учителите от основно и средно училище. София, Народна просвета, 1976.
[4] И. Минчева. Решаване на триъгълник в обучението по математика в началното училище. *Педагогически алманах на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“*, **29**, № 2 (2021), 235–259. Print ISSN 1310-358X. Велико Търново, Университетско издателство на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“, [Инд./Реф. в: ERIH PLUS].
[5] И. Минчева, Ж. Ангелова. Използване на математически софтуер GeoGebra за решаване на стереометрични задачи в обучението по математика. Сб. от 57-ма годишна научна конференция на РУ и СУ'18 „Нови индустрии, дигитална икономика, общество – проекции на бъдещето“, Русе, 26–27 октомври 2018 г. Ред. М. Върбанова и др. `http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=proc18-6.4.` Proceedings of University of Ruse volume **57**, book 6.4, (2018), 28–33. ISSN 1311-3321 (print), ISSN 2535-1028 (CD-ROM), ISSN 2603-4123 (on-line).
[6] I. Mincheva, J. Angelova. Constructing geometric figures in GeoGebra. Ruse, 56th International Scientific Conference of the University of Ruse and The Union of Scientists in Bulgaria "Industry 4.0. Business Environments. Quality of Life." Ruse, 2017, `http://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp17/6.4/6.4-7.pdf`. Proceedings of University of Ruse volume **56**, book 6.4 (2017), 32–37. ISSN 1311-3321 (print), ISSN 2535-1028 (CD-ROM), ISSN 2603-4123 (on-line).

Иванка Минчева Георгиева
`e-mail`: `i.mincheva@ts.uni-vt.bg`
Жоржета Йорданова Ангелова
`e-mail`: `zh.angelova@ts.uni-vt.bg`
Катедра „Алгебра и геометрия"
Факултет „Математика и информатика“
ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“
5000 Велико Търново, България

IDEAS ON SYSTEMIZING PROBLEMS FOR SOLVING A TRIANGLE IN TEACHING MATHEMATICS

Ivanka M. Georgieva, Zhorzheta Y. Angelova

The paper studies the idea of systemizing problems for solving a triangle. The systems are organized in two groups – basic and additional. The basic problems are the traditional ones for solving a triangle and the additional problems are constructed by replacing one, two or three elements from the basic problem with additional elements of the triangle. The additional elements chosen in the paper are the medians. The subsystem of problems thus obtained is analized according to some didactic components such as construction, short description, solution, logical structure of the solution, complexity of the solution. All the drawings are made by using the GeoGebra dynamic geometry software in order to illustrate the construction as well as to help students in understanding the structure of a given problem and in finding out its solution.

Key words: mathematics teaching, triangle, solving a triangle, problem, problem solving, system of problems, GeoGebra