МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2022
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2022
Proceedings of the Fifty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, April 5–9, 2022

РАЗШИРЯВАНЕ НА КРЪГОЗОРА В ЧАС ПО МАТЕМАТИКА

Митко Кунчев

Обучението по математика подпомага развитието на личността на ученика както със знанията, които той усвоява, така и чрез влиянието му върху неговия начин на мислене. В доклада е разгледана конкретна възможност за поощряване разширяването на кръгозора при мисленето на учениците, чрез една задача по идея от аполониевата окръжност. Учениците се насочват да изследват даден проблем при различни рамки. Показана е една възможност да се разшири практическата полза в обучението по математика.

Обичайно се приема, че обучението по математика развива мисленето на учениците. В различни публикации се посочва влиянието на математиката за стимулиране на аналитичното мислене, на критичното мислене, на системното мислене и др. Теоретична обосновка може да бъде намерена например в [1], [2] и [5]. Интересни практически разработки на теми и уроци по математика за развиване на мисленето има в [6] и [7]. Полезни училищни дейности за разширяване на кръгозора, макар и не свързани с математиката, са описани в [4]. Обичайно в литературата под „разширяване на кръгозора“ се разбира разширяване на кръга от знания, умения или компетенции. Тук под „разширяване на кръгозора“ имам пред вид начин на мислене. За да развиват мисленето на децата, учителите по математика трябва да имат много добри познания както по математика, така и за начините, по които мисли човек. Задълбочен анализ на мисленето прави нобеловият лауреат Даниъл Канеман в [3]. Според него един от начините да развием умения за по-добро ориентиране при вземане на решение е да добием навик за мислене в *широк кръгозор* или в *широка рамка.* Това означава да не свеждаме вземането на решение като избор между две възможности, а да направим така, че да имаме по-широк избор, да разгледаме последиците от вземането на решение в много по-широк контекст, в по-продължителен период от време и т.н. Решаването на задачи, при които се изследват различни възможности за изменение на числа, точки, фигури и др., е чудесен начин за ефективно стимулиране на промяна в рамката на мислене у учениците.

Тук ще разгледам конкретен пример за провеждане на един или повече часове по математика за изследване на множество от точки, при което рамката (кръгозорът) на мисленето се разширява в различни посоки. Учителят може да подбере подходяща организация за провеждане на часа в зависимост от класа. В пълен обем темата може да бъде разработена с ученици в дванадесети клас.

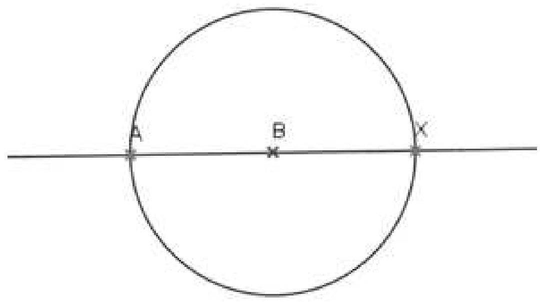
В седми клас учениците се запознават с понятието *симетрала* и нейните свойства. От една страна, тя е права линия, която разполовява дадена отсечка AB от дадена равнина и е перпендикулярна на нея, а от друга, е множество от всички точки X в равнината, такива че $AX = BX$. Една добра възможност учениците да бъдат въвлечени в математическо изследване като упражнение за разширяване кръгозора в мисленето, е да бъде поставен въпросът за множество от точки X, за които $AX = kBX$ при дадена отсечка AB и k – положително реално число, различно от едно, и/или да се променя множеството от точки, в което се търси X. Задачата е позната като *аполониева окръжност*. Този проблем може да бъде разглеждан в различна дълбочина в седми и в следващите класове, а в пълен обем е подходящ при преговор в дванадесети клас.

Нека да променим изискването за точките X от симетралата, като вместо $AX = BX$, да поискаме $AX = 2BX$. Така разширихме кръгозора и получихме нова задача. Да разгледаме първо най-лесния случай за множеството, в което търсим X.

Задача 1. Дадена е отсечка AB.

а) Има ли върху правата AB точка X, такава че $AX = 2BX$?

б) Ако отговорът Ви на а) е ДА, колко точки X има върху правата AB, такива че $AX = 2BX$?

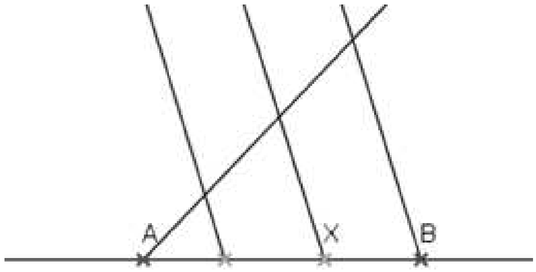


Фиг. 1

Решение. а) Точка X с исканото свойство може да бъде лесно намерена като с пергел построим окръжност K с център точка B и радиус отсечката AB (фиг. 1). Тогава втората пресечна точка на окръжността K с правата AB (първата е A) ще има исканото свойство $AX = 2BX$.

б) Преди да мислим колко са всички точки, да потърсим още една, защото е възможно намерената вече точка да е единствена. Ако разделим отсечката AB на три равни части (например чрез построяване на лъч през точка A и използване на теоремата на Талес (фиг. 2)), то една от точките на деление има също исканото свойство $AX = 2BX$.

Всъщност намерените дотук две точки делят отсечката AB вътрешно и външно в отношение $AX : BX = 2 : 1$. Да се върнем към намирането на всички точки с исканото свойство. От начините, по които построихме двете точки, следва, че между точките A и B и върху лъча с начало A и съдържащ точката B, други точки с исканото свойство няма. Остава да разгледаме лъча с начало A и несъдържащ точка B. Да допуснем, че върху него има точка X, такава че $AX = 2BX$. Тогава



Фиг. 2

получаваме, че $BX > AX$. Но от $AX = 2BX$, следва $BX > 2BX$, което е невярно. Като вземем пред вид, че X не може да съвпада с A или B, получаваме, че има точно две точки, които удовлетворяват условието на задачата. По-нататък точката между A и B ще означаваме с M, а другата с N.

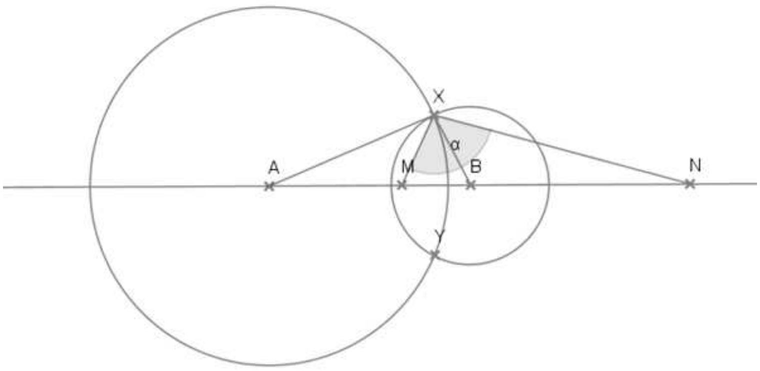
Нека да разширим множеството, в което търсим X, като разгледаме нова задача.

Задача 2. В равнината π е дадена отсечка AB.

а) В равнината π да се построи точка X, нележаща върху правата AB, такава че $AX = 2BX$. (Изискването търсената точка да не лежи върху правата AB е включено, защото този случай вече е разгледан в задача 1.)

б) Какво е множеството от всички точки X в равнината π, такива че $AX = 2BX$?

Решение. а) Точка X може да бъде построена като пресечница на следните две окръжности: K_1 с център точка A и радиус $r_1 = 2r$ и K_2 с център точка B и радиус $r_2 = r$, където r е някаква отсечка (фиг. 3). Тогава $AX = 2r = 2BX$. Дали окръжностите се пресичат при произволна отсечка r? Нека върху правата AB построим две точки – M и N, такива че $AM = 2BM$ и $AN = 2BN$, като M е между A и B, а N е извън отсечката AB (вж. зад. 1). Ако $r < BM$, то $2r < 2BM$ и тогава $2r < AM$. Следователно двете окръжности нямат пресечна точка. Ако $r > BN$, то $r > AB$ и тогава $2r > AB + r$. Следователно окръжностите не се пресичат. Ще



Фиг. 3

докажем, че ако $BM < r < BN$, то двете окръжности се пресичат. За целта е достатъчно да докажем, че $r_1 + r_2 > AB$ и $r_1 - r_2 < AB$. Нека $AB = a$. Тогава от $BM < r < BN$ имаме, че $\frac{1}{3}a < r < a$ и следователно $r_1 + r_2 = 2r + r = 3r > 3 \cdot \frac{1}{3}a = a$ и $r_1 - r_2 = 2r - r = r < a$. Така получаваме две точки X и Y, които отговарят на условието. Те са симетрични спрямо правата AB.

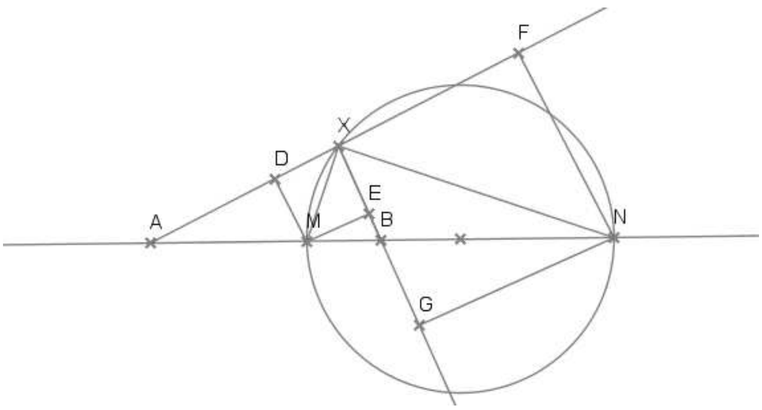
б) Да разгледаме $\triangle ABX$ от подточка а). От $AX = 2BX$, $AM = 2BM$ и $AN = 2BN$ следва, че $AX : BX = AM : BM = AN : BN$, а това означава, че XM и XN са ъглополовящи на вътрешния и външния ъгли при върха X на триъгълника. От това следва, че XM и XN са перпендикулярни. Този факт ни навежда на хипотезата, че търсеното множество е окръжност с диаметър MN. Ще потвърдим хипотезата, като докажем следните две твърдения.

Твърдение 1. *Ако X е произволна точка, която отговаря на условието $AX = 2BX$, то тя лежи на окръжност с диаметър MN.*

Доказателството се съдържа в горните редове.

Твърдение 2. *Ако X е произволна точка от окръжността с диаметър MN, то $AX = 2BX$.*

Доказателство. Дадено е, че $AM = 2BM$ и $AN = 2BN$. Очевидно ъгъл MXN е прав, защото MN е диаметър на окръжност, а X е точка от окръжността. Ще докажем, че XM е ъглополовяща на ъгъл AXB, откъдето ще следва, че $AX : BX = AM : BM = 2 : 1$, т.е. $AX = 2BX$.



Фиг. 4

Нека точки D и E са пети на перпендикулярите от точка M към правите AX и BX, а точки F и G са пети на перпендикулярите от точка N към правите AX и BX. Да означим ъглите AXM, NXF, MXB и BXN съответно с α_1, β_1, α_2, и β_2. Тъй като ъгъл MXN е прав, то $\alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$ и също $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$. От $AM = 2BM$ и $AN = 2BN$ следва, че $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$ и тогава

$$\frac{S_{\triangle AMX}}{S_{\triangle BMX}} = \frac{S_{\triangle ANX}}{S_{\triangle BNX}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}AX.MD}{\frac{1}{2}BX.ME} = \frac{\frac{1}{2}AX.NF}{\frac{1}{2}BX.NG} \quad \Rightarrow \quad \frac{MD}{ME} = \frac{NF}{NG} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

Следователно XM е ъглополовяща на ъгъл AXB и от свойството на ъглополовящата следва, че $AX : BX = AM : BM = 2 : 1$, т. е. $AX = 2BX$. С това доказателството е завършено.

Установихме, че ако AB е отсечка в равнина π, то множеството от всички точки X в π, такива че $AX = 2BX$, е окръжност с диаметър MN, където M и N са точките от задача 1. Тук е добре да се проведе обсъждане на поне два проблема – да се сравнят условията на двете задачи и как се променят отговорите.

Сега можем да разгледаме още едно обобщение.

Задача 3. Да се намери множеството от точки X в пространството, такива че $AX = 2BX$ при дадена отсечка AB.

Лесно може да се съобрази, че търсеното множество е сфера с диаметър MN, където M и N са точките от задача 1.

За самостоятелна работа вкъщи може да бъдат зададени интересни въпроси, разширяващи кръгозора, отговорите на които да бъдат обсъдени в следващия час. Например:

1. Сравнете множествата от точки X в дадена равнина, такива че $AX = 1{,}5BX$, $AX = 2BX$ или $AX = 3BX$, където AB е дадена отсечка.
2. Сравнете множествата от точки X в дадена равнина, такива че $AX = 0{,}5BX$, $AX = BX$ или $AX = 2BX$, където AB е дадена отсечка.

Използвайки идеята на тази разработка, всеки учител по математика може да подготви урок или част от урок, за да демонстрира на учениците как да мислят в широка рамка или как да разширяват кръга от възможности, когато трябва да вземат някакво решение. Такъв подход би подобрил като цяло начина на мислене на учениците.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Бойкина, Е. Тодорова. Рефлексивният подход при обучението по математика. Юбилейна международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, 16–18 октомври 2020 г., Пампорово, България.

[2] Т. Витанов, Л. Дилкина, И. Джонджорова, П. Тодорова, Р. Караджова, П. Митева. Книга за учителя по математика 5. клас, София, Издателство „Анубис“ ООД, 2016.

[3] Д. Канеман. Мисленето. Издателство „Изток-Запад“, 2012.

[4] Р. Петков. Кариерно ориентиране от най-ранна възраст. Вестник „Аз-буки“, брой 36, София, 2021.

[5] Ключови компетентности и умения за успех. Мониторингов доклад 2019, сдружение „Образование България 2030“, София, 2019.

[6] SINUS Bavaria – Exploring New Paths in Teaching Mathematics and Science, Bavarian State Ministry of Education and Cultural Affairs, 2010.

[7] Inquiry-based learning in maths and science classes. PRIMAS Project (Eds Katja Maaß, Karen Reitz-Koncebovski) University of Education Freibrug, Germany, 2013.

Митко Кунчев
ул. „Згориград“, № 66, вх. 4, ет. 5, ап. 12
7000 Русе, България
e-mail: mitko@kunchev.info

BROADENING THE STUDENTS' HORIZONS IN THE MATHEMATICS CLASS

Mitko Kunchev

The teaching of mathematics supports the development of students' personalities – both with the specific knowledge they acquire and through the influence that mathematics has on their way of thinking. This report presents a specific problem that encourages students to seek solutions in different frameworks. An opportunity is presented to expand the practical benefits of teaching mathematics.