ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫМИ МОДЕЛЯМИ

Игорь Горбань

Аннотация: *Проведен анализ публикаций, посвященных теории гиперслучайных событий, величин, процессов и полей. Показано, что рассматриваемая теория относится к классу теорий, описывающих математические модели, построенные конструктивным образом. От нее нельзя ожидать получение новых решений, не эквивалентных решениям, следующим из теории вероятностей и математической статистики. Однако, подобно теории матриц, она расширяет возможности решения практических задач. Гиперслучайные модели, учитывающие возможности изменения законов распределения событий, величин, процессов и полей, более адекватно описывают реальные ситуации, чем случайные модели с фиксированными законами распределения. Установлено, что следствием выдвинутой ранее гипотезы о том, что все реальные явления (за исключением возможно лишь мировых физических констант) носят гиперслучайный характер, является то, что абсолютно все оценки реальных величин, функций и полей не состоятельны и потенциальная точность любых измерений ограничена. Кроме того, абсолютно достоверное обнаружение и абсолютно достоверная классификация реальных объектов принципиально невозможны.*

Ключевые слова: *гиперслучайная модель, гиперслучайная величина, точность измерения, состоятельность.*

ACM Classification Keywords: *G.3 Probability and Statistics*

Conference: *The paper is selected from XIVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008*

Введение

Каждый человек воспринимает окружающий мир по-своему в соответствии с своим жизненным опытом, полом, профессией, возрастом и пр. Рассказывая или анализируя что-либо, мы обращаем внимание на то, что представляется нам наиболее существенным. Это – первый шаг формализации реальных явлений, завершающийся формированием физических моделей с использованием разнообразных физических событий, величин, процессов и полей. Следующим шагом формализации является математическое описание этих физических моделей.

Одной из основных проблем познания является адекватное описание реального мира. Физические и математические модели, используемые для описания различных явлений, постоянно совершенствуются. С получением новых данных и развитием представлений о мире старые модели отходят на второй план, заменяются новыми, более совершенными.

Если до конца средневековья мир виделся неизменным и описывался преимущественно детерминированными моделями, то в настоящее время он рассматривается как динамично меняющаяся структура. Главным средством математического описания мира стали модели, использующие в качестве абстрактных математических объектов случайные явления – случайные события, величины, процессы и поля.

В данном случае термин «случайный» используется в математическом смысле [1, 2]. Наиболее полно случайное явлений можно охарактеризовать с помощью функции распределения, определяемой для строго фиксированных статистических условий наблюдения. Наличие определенной вероятности является характерной чертой любого случайной величины и, вообще, любого случайного явления.

Если на интервале наблюдения явления (который может быть временным, пространственным, пространственно-временным или иным) статистические условия практически не меняются, то возможно построение корректной стохастической модели с использованием случайных величин и функций с некоторыми, хотя, возможно, и не всегда известными законами распределения.

На практике такая возможность существует не очень часто. Реальные физические явления находятся в неразрывной связи со всем окружающим миром. Изменения в мире приводят к изменениям статистических условий наблюдения, причем к изменениям, носящих непредсказуемый характер. Обеспечить на практике полную стабильность условий нельзя, а, следовательно, нельзя задать или оценить абсолютно точно функцию распределения. Это накладывает ограничения на применение классических случайных моделей с фиксированным законом распределения. Корректное их использование оказывается возможным лишь при пренебрежимо малых изменениях условий наблюдения.

Вариабельность условий наблюдения – серьезная проблема, мешающая построению корректных математических моделей. Не очень обоснованный, но очень распространенный прием решения проблемы – игнорирование факта изменения условий. При этом статистически неопределенную или статистически нестабильную величину или процесс представляют стохастической моделью, которая описывается определенным законом распределения.

Такой паллиатив иногда оказывается приемлемым, однако, не всегда. Для комплексного решения проблемы необходимы подходы, позволяющие описывать явления не только в определенных и статистически стабильных условиях. Многочисленные непараметрические методы обработки (ранговые, знаковые, робастные и др.) [3 – 10] ориентированы именно на такой подход. С их помощью удается выделить те особенности физических явлений, которые не связаны или слабо связаны с изменением статистических условий наблюдения. Известным недостатком непараметрических методов является эмпирический их характер [6].

Стремление найти простые средства учета неопределенности условий наблюдения играла, по всей видимости, не последнюю роль при формировании ряда относительно новых научных направлений, таких как теория нечетких множеств [11], теория нейронных сетей [12], теория хаотических динамических систем [13, 14], теория интервальных данных [15, 16] и др.

Постоянно продолжающийся поиск универсальных и эффективных путей адекватного математического описания явлений недавно привел к новому классу моделей, в которых в качестве абстрактных математических объектов выступают, так называемые, гиперслучайные явления [17].

Под гиперслучайными явлениями подразумеваются семейство случайных событий, величин, функций или полей, зависящие от параметра $g \in G$, который рассматривается как независимая переменная и ассоциируется с условиями наблюдения (или условиями формирования) рассматриваемых объектов.

Математически случайные события описываются с помощью вероятностного пространства [1], задаваемого триадой $(\Omega, \Im, P)$, где Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ – борелевское поле (σ – алгебра подмножеств событий) и P – вероятностная мера подмножеств событий.

При менее строгом, но более наглядном статистическом определении (по Р. фон Мизесу [18, 19]), вероятность $P(A)$ случайного события A представляется как предел частоты $p_N(A)$ его появления при проведении опытов в одинаковых условиях и устремлении количества опытов N к бесконечности: $P(A) = \lim_{N \to \infty} p_N(A)$. При небольших значениях N частота $p_N(A)$ может колебаться, однако по мере увеличения N постепенно стабилизируется и при $N \to \infty$ стремится к определенному пределу $P(A)$.

Гиперслучайные явления можно описать с помощью тетрады ($\Omega, \Im, G, P_g$) [17], где Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, $\Im$ – борелевское поле, G – множество условий $g \in G$, P_g – вероятностная мера подмножеств событий, зависящая от условия g. Таким образом, вероятностная мера задается для всех подмножеств событий и всех возможных условий $g \in G$. Мера же для условий $g \in G$ остается не определенной.

Используя менее строгий статистический поход, гиперслучайное событие A можно трактовать как событие, частота появления которого $p_N(A)$ при увеличении числа опытов N не стабилизируется и при $N \to \infty$ не имеет предела.

Разработке основ теории гиперслучайных явлений посвящен цикл статей автора, в частности [17, 20 – 24], и монография [25]. Главное внимание в этих работах уделялось математическим аспектам новой теории; вопросы же представления реальных физических явлений гиперслучайными моделями оставались несколько в тени.

Целью настоящей работы является краткий обзор опубликованных материалов и исследование трех ключевых, на наш взгляд, вопросов, а именно: 1) какие новые возможности предоставляет теория гиперслучайных явлений и чем они обусловлены, 2) какие модели – случайные или гиперслучайные – более адекватно описывают реальные явления и 3) какие практические результаты следуют из новой теории?

Обзор результатов по теории гиперслучайных явлений

В первой статье, касающейся теории гиперслучайных явлений [17], введены математические понятия гиперслучайного события и гиперслучайной величины. Для характеристики гиперслучайного события предложено использовать верхнюю и нижнюю границы вероятности, а для описания гиперслучайной величины – верхнюю и нижнюю границы функции распределения. Определены понятия плотности распределения границ гиперслучайной величины, характеристических функций границ, а также нецентральных и центральных моментов границ. Исследованы свойства этих характеристик. Результаты, первоначально полученные для скалярных действительных гиперслучайных величин, обобщены на случай комплексных и векторных величин. Работа [20] посвящена гиперслучайным функциям. Для их описания разработан математический аппарат, базирующийся на принципах и подходах описания гиперслучайных величин. В качестве основных характеристик гиперслучайных функций выбраны верхняя и нижняя границы функции распределения, а также плотности распределения границ и характеристические функции границ. Вспомогательными характеристиками являются математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные функции границ и др. Математический аппарат разработан для различных гиперслучайных функций: скалярных и векторных, вещественных и комплексных. Изучена специфика описания скалярных, векторных и комплексных гиперслучайных функций.

В статье [21] рассмотрен альтернативный подход к описанию гиперслучайных величин и функций, позволяющий характеризовать их, не прибегая к сложному расчету границ функции распределения. Его основой служит вычисление границ центральных и нецентральных моментов: математического ожидания, дисперсии, корреляционного момента, ковариационного момента и др. Границы моментов гиперслучайного явления и моменты границ функции распределения – разные понятия. В общем случае границы моментов не совпадают с соответствующими моментами границ, хотя в отдельных случаях совпадение и имеет место. Работа [22] посвящена формализации ряда понятий, касающихся гиперслучайных явлений: стационарности и эргодичности гиперслучайной функции, гиперслучайного белого шума и др. Введены различные характеристики, описывающие стационарные и эргодические гиперслучайные функции. Исследованы свойства этих характеристик. Разработаны спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций.

В статье [23] формализовано понятие гиперслучайной выборки и определены ее свойства. Предложена методология формирования оценок характеристик гиперслучайной величины для случая, когда условия меняются достаточно медленно и существует некий интервал, в течение которого условия можно считать практически неизменными. Тогда данные, полученные на этом интервале, можно ассоциировать с определенными, хотя и неизвестными, условиями. Исследована сходимость гиперслучайных оценок к соответствующим точным характеристикам. Для гиперслучайных оценок найдены условия сходимости оценок по вероятности к точным значениям. Доказана предельная теорема, определяющая закон распределения оценок границ функции распределения среднего при стремлении объема выборки к бесконечности.

Работа [24] посвящена методам точечного и интервального оценивания параметров гиперслучайных величин. Для точечных гиперслучайных оценок введены понятия несмещенной оценки, состоятельной, эффективной и достаточной, а для интервальных гиперслучайных оценок – понятия доверительного интервала и границ доверительной вероятности. Доказаны теоремы, определяющие границы нижней границы точности точечной оценки и границы доверительного интервала интервальной оценки.

В монографии [25] обобщены полученные научные результаты.

Конструктивный характер теории гиперслучайных явлений

Реальные объекты и их связи описываются с помощью физических моделей, которые могут быть представлены различными математическими моделями, содержащими разные математические объекты и отношения между ними.

Любая математическая модель со своими математическими объектами и отношениями (в частном случае операциями) определяется набором непротиворечивых и независимых аксиом. Новая математическая модель может быть построена либо путем введения новых объектов, отношений и аксиом либо конструктивно с использованием уже известных математических понятий.

Примерами теорий, соответствующих конструктивным моделям, могут служить векторная алгебра или теория матриц, основанные на правилах сложения и умножения чисел.

Теория гиперслучайных явлений представляет собой теорию, описывающую математическую модель, построенную на базе математической модели случайных явлений. Все новые объекты и отношения между ними строятся с помощью известных объектов и отношений. Никакие новые аксиомы не вводятся. Поэтому теорию гиперслучайных явлений следует рассматривать как теорию, соответствующую конструктивно построенной математической модели.

Следует отметить интересный факт, что решение любой задачи, описываемой средствами конструктивной математической модели, эквивалентно решению этой же задачи, описываемой средствами порождающей модели. Решение, получаемое, например, с помощью теории матриц, полностью эквивалентно решению, использующему лишь арифметические правила работы с числами.

В этой связи от теории гиперслучайных явлений нельзя ожидать получение новых решений, не эквивалентных решениям, получаемых с использованием методов теории вероятностей и математической статистики.

Вместе с тем, не следует умалять значимость новой теории. Несмотря на указанные ограничения, накладываемые конструктивным характером модели, теория гиперслучайных явлений, подобно теории матриц, расширяет возможности решения практических задач. Использование в новой теории обобщенных понятий позволяет взглянуть на существующие проблемы с более высоких позиций и уловить те закономерности и особенности исследуемых явлений, которые на уровне понятий порождающей модели были скрыты громоздкостью рассуждений и выкладок. Кроме того, процедура решения некоторых задач оказывается более простой и наглядной, а само решение представимо в более компактном виде.

Случайные и гиперслучайные модели реальных явлений

Как правило, реальные явления более адекватно представляются гиперслучайными моделями, чем случайными. В подтверждение этому разберем классический пример, с которого обычно начинается изучение теории вероятностей, – пример с подбрасыванием монеты. Обычно полагают, что исходы опытов – случайны и имеют конкретные вероятности: вероятность того, что выпадет орел, – P_o, а вероятность того, что выпадет решка, – P_p. При этом считают, что $P_o = P_p = 0,5$.

Насколько корректна такая модель? На первый взгляд, кажется, что нет оснований сомневаться в ее адекватности. Но это только на первый взгляд. Разве вероятности P_o, P_p не могут быть другими? Нетрудно убедиться, что после некоторой тренировки, контролируя начальное положение монеты, можно научиться так ее бросать, что частота выпадения одной из ее сторон будет колебаться в районе определенного фиксированного значения, большего 0,5, а частота выпадения второй стороны – в районе значения, меньшего 0,5. При изменении условий бросания показатели могут меняться, как в одну, так и другую сторону. Исходы опытов в этом случае можно рассматривать как гиперслучайное событие. Таким образом, гиперслучайная модель, учитывающая возможности изменения вероятностей выпадения орла и решки, более адекватно описывает реальную ситуацию, чем случайная модель, предполагающая фиксированные значения этих вероятностей.

Рассмотрим другой пример, имеющий отношение к метрологии, – прецизионное измерение диаметра цилиндрической детали круглого сечения. Совершенно тривиальная задача при углубленном анализе оказывается очень непростой. Изготовить деталь абсолютно круглого сечения невозможно. Ее сечение всегда отличается от идеального круга: во-первых, из-за эллипсоидального или иного отклонения от идеальной круговой формы, а, во-вторых, из-за шершавости поверхности. Следует также иметь в виду, что разные сечения по оси цилиндра отличаются. Поэтому истинный размер детали, даже без учета влияния температуры и целого ряда других факторов, которые в дальнейшем в интересах упрощения рассуждений будем игнорировать, может быть разным в разных замерах.

Из-за сложной формы сечения детали понятие диаметра в данном случае оказывается не приемлемым. Принимая во внимание это обстоятельство, задачу следует формулировать как задачу измерения размера сечения.

Физическая модель измеряемой величины должна учитывать и отклонение от идеальной круговой формы, и шершавость, и различие сечений по оси. Для математического описания физической модели можно использовать как общепринятую случайную, так и гиперслучайную математическую модель.

Случайная модель базируется на предположении, что вероятностные характеристики результатов измерения постоянны. В действительности же это не так. В пределах небольших локальных областей они могут быть приблизительно постоянными, однако в целом могут существенно зависеть от направления, вдоль которого проводится измерение, и рассматриваемого сечения. Поэтому гиперслучайная модель, учитывающая вариабельность функций распределения, лучше описывает измеряемую величину, чем случайная модель.

Любые измерения проводятся в условиях воздействия различных мешающих факторов (помех). В рассматриваемой задаче в качестве таковых выступает загрязнение поверхности детали. Пыль и грязь на поверхности собирается неравномерно. В пределах небольших локальных областей загрязнение носит случайный характер, однако, в целом, из-за отличия законов распределения для разных областей – гиперслучайный характер.

Идеальных, абсолютно точных, средств измерения в мире не существует. Ни штангенциркуль, ни микрометр, ни какой-то другой измерительный инструмент не может с бесконечно высокой точностью измерить размер сечения. Причины разные – шероховатость поверхности детали, наличие разнообразных инструментальных ошибок и пр., но объединяющим свойством оказывается гиперслучайный характер этих причин. Поэтому, строя математическую модель средства измерения, и здесь имеет смысл отдавать предпочтение гиперслучайной модели.

Отсюда следует, что обобщенная физическая модель, учитывающая в комплексе реальные особенности измеряемой величины, помехи и средства измерения, описывается более адекватно гиперслучайной математической моделью, чем случайной.

Применение теории гиперслучайных явлений

Описанные выше ситуации типичны для очень широкого круга реальных явлений, что позволяет предположить [25], что все реальные явления (за исключением, возможно лишь, небольшое число величин, рассматриваемых современной наукой как мировые физические константы) носят гиперслучайный характер. Иными словами, одним из основных физических свойств практически всех реальных событий, величин, процессов и полей является неполная их статистическая определенность.

Выдвинутая гипотеза касается различных реальных явлений, в том числе величин, функций и полей, подлежащих измерению, действующих помех, а также инструментальных ошибок измерения. Любая оценка формируется в результате оценивания средствами измерения смеси истинного значения измеряемой величины, функции или поля и помех, мешающих проведению наблюдений. Поскольку помеха и инструментальные ошибки измерения носят гиперслучайный характер, даже в том случае, когда измеряемая величина постоянна (является мировой константой), результат измерения оказывается величиной гиперслучайного типа. Отсюда следует [25], что абсолютно все оценки реальных величин, процессов и полей не состоятельны и потенциальная точность любых измерений ограничена. Предел точности определяется не только числом результатов измерения и случайным их разбросом, а и изменчивым характером вероятностных характеристик измеряемой величины, действующих помех и инструментальных ошибок.

Задачи обнаружения и классификации могут рассматриваться как задача измерение некоторых параметров. Поэтому абсолютно достоверное обнаружение и абсолютно достоверная классификация реальных объектов принципиально невозможны.

Выводы

1. Теория гиперслучайных явлений достаточно быстро прошла первоначальный этап становления и в настоящее время претендует на роль математической теории, ориентированной на адекватное описание реальных физических явлений.

2. Теория гиперслучайных явлений относится к классу теорий, описывающих модели конструктивного типа. Поэтому от нее нельзя ожидать получение новых решений, не эквивалентных решениям, следующим из теории, соответствующей порождающей ее модели, в данном случае теории вероятностей и математической статистики.

3. Теория гиперслучайных явлений, подобно теории матриц, расширяет горизонты для решения практических задач. Использование в новой теории обобщенных понятий позволяет взглянуть на существующие проблемы с более высоких позиций и уловить закономерности и особенности исследуемых явлений, которые на уровне понятий порождающей модели были скрыты громоздкостью рассуждений и выкладок. Кроме того, процедура решения некоторых задач оказывается более простой и наглядной, а само решение представимо в более компактном виде.

4. Гиперслучайные модели, учитывающие возможности изменения законов распределения событий, величин, процессов и полей, более адекватно описывает реальную ситуацию, чем случайные модели, предполагающие фиксированные значения этих законов.

5. Проведенные исследования показывают, что практически все реальные явления (за исключением возможно лишь мировых физических констант) носят гиперслучайный характер, абсолютно все оценки реальных величин, процессов и полей не состоятельны и потенциальная точность любых измерений ограничена. Кроме того, абсолютно достоверное обнаружение и абсолютно достоверная классификация реальных объектов принципиально невозможны.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936.
2. International standard ISO 3534-2: 2006 (E/F). Statistics – Vocabulary and symbols – Part 2: Applied statistics. P. 125.
3. Леман Е. Проверка статистических гипотез. Пер. с англ./Пер. Ю.В. Прохорова. М.: Наука, 1971. 375 с.
4. Королюк В.С. и др. Справочник по теории вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1985. – 637 с.
5. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 3. М., Сов. радио, 1976, 285 с.
6. Под ред. Бакута П. А. Теория обнаружения сигналов. М., «Радио и связь», 1984. С.440.
7. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. – М.: Сов. радио, 1972. Т.1. 743 с.; 1975. Т.2. 343с.; 1977. Т.3. 662с.
8. Хьюбер П. Робастность в статистике. М., Мир, 1984. 303с.
9. Кнопов П.С., Голодников А.Н., Пепеляев В.А. Оценивание параметров надежности при наличии неполной первичной информации – Компьютерная математика, №1, 2003. С. 36 –47.
10. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость. Успехи физических наук, т. 158, вып. 1, 1989. С. 93–122.
11. L.A. Zadeh and J. Kacprzyk (Eds.), “Fuzzy logic for the management of uncertainty,” John Wiley & Sons, New York, 1992. 256с.
12. M.T. Hagan, H.B. Demuth, and M.H. Beale, “Neural network design,” Boston, MA: PWS Publishing, 1996. 252 с.
13. R.M. Crownover, “Introduction to fractals and chaos,” Jones and Bartlett Pub., Inc., Boston – London, 1995. 195 с.
14. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А.. Введение в нелинейную динамику. К.: Наукова думка, 2005. 263с.
15. Орлов А.И. Эконометрика. Учебник. М.: «Экзамен».– 2002. – 576с.
16. Левин В.И. Интервальная математика и изучение неопределенных систем// Информационные технологии. – 1998. №6. (Федеральный портал «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. 5 мая 2005. www.techno.edu.ru).
17. Горбань И.И. Гиперслучайные явления и их описание //Акустичний вісник. 2005. т.8, № 1–2. С.16–27.
18. R. von Mises, “Mathematical theory of probability and statistics,” Edited and complemented by H. Geiringer. N.Y. and London, Acad. Press, 1964. 232с.
19. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: И-во физмат. литературы. 1961. 406 с.
20. Горбань И.И. Гиперслучайные функции и их описание //Радиоэлектроника. 2006. № 1. С.3–15.
21. Горбань И.И. Методы описания гиперслучайных величин и функций. // Акустичний вісник. 2005. т. 8, № 3. С.24-33.
22. Горбань И.И. Стационарные и эргодические гиперслучайные функции. //Радиоэлектроника. 2006. № 6. С.54-70.
23. Горбань И.И. Оценки характеристик гиперслучайных величин //Математические машины и системы. 2006. № 1. С.40-48.
24. Горбань И.И. Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин. //Математические машины и системы. 2006. № 2. С.3 –14.
25. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений. К.: ИПММС НАН Украины. 2007. 184 с.

Сведения об авторе

***Горбань Игорь Ильич** – заместитель генерального директора по научной работе ГП „УкрНИУЦ”, доктор технических наук, профессор, Украина, Киев, ул. Святошинская, 2;.*
e-mail: gorban@ukrndnc.org.ua.